

UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS
FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES
CARRERA DE MATEMÁTICA



ANÁLISIS MATEMÁTICO CUALITATIVO DEL MODELO SIR
EPIDEMIOLÓGICO

Proyecto de Grado para obtener el Título de Licenciatura

POR : XIMENA ROSARIO COPA HUANCA

TUTOR : DR. GUILLERMO FERNANDO VERA HURTADO

LA PAZ-BOLIVIA

Agosto, 2023

Dedicatoria

Dedicado a Dios Padre Todopoderoso por ser mi guía, por darme fuerzas para continuar y no desistir ante los problemas que se presentaban; y a mi madre querida, por todo su esfuerzo y sacrificio.

Agradecimientos

A mis padres por su amor, trabajo, sacrificio y apoyo incondicional.

A mi novio quien me apoyo y ayudo a vencer mis miedos.

Al Dr. Guillermo Fernando Vera Hurtado, por su paciencia, sus conocimientos, sobre todo sus consejos y profesionalismo como tutor.

A mis tribunales, Dr. Porfirio Suñagua Salgado y Msc. Ernesto Eusebio Cupe Clemente, por el valioso tiempo que invirtieron en revisar y corregir este trabajo.

A todos los docentes de la Carrera de Matemática que me brindaron sus valiosos conocimientos.

Índice general

Dedicatoria	II
Agradecimientos	III
Resumen	VI
Introducción	1
1. Sistemas Diferenciales Lineales y Teoría Fundamental.	4
1.1. Sistemas Lineales	5
1.1.1. Exponenciales de operadores	5
1.1.2. Sistemas diferenciales lineales homogéneos	16
1.1.3. Una ecuación no homogénea	28
1.1.4. Ecuaciones de orden superior	32
1.2. Pozos y Fuentes en \mathbb{R}^n	41
1.3. Flujos Hiperbólicos	59
1.4. Sistemas Dinámicos y Campos Vectoriales	61
1.5. Teoría de Existencia y Unicidad para Ecuaciones Diferenciales Autónomas	64
1.5.1. Teorema Fundamental	64
1.5.2. Existencia y Unicidad	65
1.5.3. Continuidad de Soluciones en Condiciones Iniciales	74
1.5.4. Extensión de Soluciones	77
1.5.5. Soluciones Globales	80
1.6. El Flujo de una Ecuación Diferencial	81
2. Estabilidad del Punto de Equilibrio	86
2.1. Pozos (Sinks) No Lineales	86
2.2. Estabilidad	100
2.3. Funciones de Liapunov	108
2.4. Sistemas Gradiente	117
2.5. Gradiente y Producto Interno	121

3. Modelo SIR Epidemiológico	128
3.1. Introducción y Consideraciones Preliminares	129
3.2. Modelo S.I. (Susceptibles-Infectados) Epidémico	134
3.3. Modelo S.I.S (Susceptibles-Infectados-Susceptibles) Epidémico	137
3.4. Modelo S.I.R (Susceptibles-Infectados-Removidos) Epidémico	145
3.5. Modelo S.I.R Simple Epidémico de Kermack–McKendrick	156
3.6. Modelo S.I.R. con Vacunación	164
Conclusiones	168
A. Ecuaciones Diferenciales con Coeficientes Constantes y Operadores	169
A.1. Ecuaciones Diferenciales con Autovalores Reales y Distintos	169
A.2. Autovalores Complejos	173
A.3. Aplicación de Álgebra Lineal Compleja a Ecuaciones Diferenciales	176
A.3.1. Operadores Reales con Autovalores Complejos	179
B. Topología en \mathbb{R}^n	185
B.1. Norma en \mathbb{R}^n y Producto interior	185
B.2. Bolas	187
B.3. Conjuntos Abiertos y Acotados	187
B.4. Sucesiones en \mathbb{R}^n	187
B.5. Conjunto Cerrado	190
B.6. Aplicaciones Continuas y Conjuntos Compactos	191
C. Normas	194
C.1. Norma en General	194
Bibliografía	201

Resumen

El interés principal del desarrollo de modelos matemáticos de enfermedades son las posibilidades de pronóstico, control e incluso erradicación de enfermedades, es por esta razón que se realiza el presente trabajo, ya que la aplicación de experimentos con controles en la epidemiología son difíciles o imposibles de diseñar, además de que surgen serias cuestiones éticas. De este modo, el presente trabajo tiene el objetivo de analizar el comportamiento cualitativo del modelo SIR epidemiológico y el modelo SIR epidemiológico con vacunación, con el fin de conocer el comportamiento de una enfermedad, y saber qué factores influyen para que la enfermedad desaparezca.

Para iniciar, se elabora un marco teórico, el cual es la base para el análisis cualitativo de los modelos. En él se revisan, los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarios, se estudia la existencia y unicidad de sus soluciones. Posteriormente, se estudia la estabilidad del punto de equilibrio de los sistemas de ecuaciones diferenciales a través de sus autovalores o por una Función de Liapunov.

Después, se da paso al planteamiento del modelo S.I.R. epidémico y del modelo S.I.R. epidémico con vacunación, las cuales son descritas mediante sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales homogéneos, donde a través del estudio de sus puntos de equilibrio, se establece la estabilidad bajo ciertas condiciones, en el caso del primer modelo se establece su estabilidad por medio de una Función de Liapunov y para el segundo modelo por medio de sus autovalores. Además, durante el avance del trabajo, se observa que el modelo S.I.R. epidémico y el modelo S.I.R. epidémico con vacunación son extensiones de los modelos S.I. y S.I.S.. Por otro lado, se observa también que el comportamiento de la enfermedad a través del modelo depende de un parámetro, que es el número básico de reproducción \mathcal{R}_0 . Este parámetro es de mucha utilidad, ya que nos da información de si la enfermedad permanece, convirtiéndose en una endemia o desaparece.

En consecuencia, se logra observar el comportamiento de la enfermedad y se estima cuando la enfermedad desaparece o se propaga, además de saber bajo qué circunstancias se da el número máximo de infecciosos.

Introducción

En el presente trabajo se plantea analizar y describir el comportamiento cualitativo del modelo SIR epidemiológico mediante un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias, en el cual también se tomará en cuenta el factor vacunación. Asimismo, los modelos SIR epidémico y SIR epidémico con vacunación son extensiones de los modelos SI y SIS, con la novedad esencial de que los individuos que salen de la clase I (Infectados) no pueden ser infectados nuevamente, al contrario, terminan en la clase de los R (Removidos), es decir, estos individuos se consideran recuperados, inmunes, muertos o aislados. Cabe mencionar que el modelo SIR modela enfermedades que son causadas por agentes virales como la influenza, el sarampión, la rubeola, etc., en las cuales el individuo que se infecta, una vez recuperado, adquiere inmunidad contra reinfección.

Para el análisis y descripción del modelo SIR es necesario comprender los sistemas de ecuaciones diferenciales autónomos, los distintos flujos lineales y sus principales resultados (teoremas y propiedades). Además de establecer la relación entre una ecuación diferencial, un sistema dinámico y un campo vectorial, para luego estudiar la teoría fundamental sobre las soluciones de las ecuaciones diferenciales autónomas y la estabilidad de un punto o estado de equilibrio.

Así, el presente trabajo está estructurado en tres capítulos, en los cuales se pretende abordar y desglosar la teoría necesaria para el desarrollo sistemático de la investigación, comenzando desde una introducción a los sistemas y flujos lineales, hasta llegar a los resultados buscados en el modelo SIR epidemiológico, además de los apéndices que proporcionan información adicional.

En el primer capítulo se inicia con el estudio, análisis y resolución de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales homogéneos con coeficientes constantes $x' = Ax$; donde A es un operador en \mathbb{R}^n , esto se logrará con exponenciales de los operadores. También veremos que en \mathbb{R}^2 , el sistema mencionado se resuelve sin encontrar soluciones explícitas, obteniendo importante información cualitativa como el retrato de fase y comportamiento de estos sistemas analizando los autovalores de A . Asimismo, se estudian y analizan dos tipos de ecuaciones diferenciales, una es un sistema simple no homogéneo y el otro una ecuación de orden superior de una variable. Luego se estudian algunos tipos importantes de flujos lineales e^{tA} , particularmente contracciones y sus extremos opuestos expansiones, así como también flujos hiperbólicos. Por otra parte, se definen punto de equilibrio, pozo y fuente para una ecuación diferencial o sistema dinámico $x' = f(x)$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Luego se

estudian las propiedades genéricas de los operadores en \mathbb{R}^n , como ser la semisimplicidad, asimismo algunos resultados relevantes en la teoría. Posteriormente, se estudian los sistemas dinámicos y campos vectoriales, así como la relación que existe entre ellos, además de las nociones de ecuaciones diferenciales autónomas y no autónomas. Luego se enuncia y demuestra el Teorema local fundamental de las ecuaciones diferenciales ordinarias (o también Teorema de existencia y unicidad). Más adelante se añade al Teorema local fundamental de las ecuaciones diferenciales ordinarias la propiedad de que la solución $x(t)$ depende continuamente de la condición inicial $x(0)$, esto se lo realiza mediante un teorema, el cual demostramos utilizando el Lema de la Desigualdad de Gronwall. También se ve la extensión de las soluciones del sistema dinámico mencionado anteriormente, luego se enuncia y demuestra un teorema más sólido sobre la continuidad de las soluciones en términos de condiciones iniciales. Finalmente, se presentan teoremas que describen las propiedades del flujo de una ecuación diferencial.

En el Capítulo 2, se introduce la idea importante de la estabilidad de un punto de equilibrio de un sistema dinámico, para lo cual primero se estudian los pozos no lineales, donde se enuncia un teorema que expresa que un pozo no lineal se comporta localmente como un pozo lineal, además de un ejemplo que describe un pozo no lineal. Luego, se introduce algunas definiciones importantes sobre estabilidad y estabilidad asintótica, además de algunos resultados sobre los equilibrios hiperbólicos y su respectiva definición. Posteriormente, se introducen y estudian los teoremas de Liapunov con sus respectivas demostraciones, además de algunos ejemplos. Finalmente, se estudian los sistemas de gradiente y su estabilidad, además de algunas propiedades y resultados del gradiente de una función real V en un espacio vectorial E dotado con un producto interno, además de otros resultados.

El Capítulo 3 tiene como objetivo principal el análisis y estudio del modelo epidemiológico SIR, el cual se basa en la teoría expuesta en los anteriores capítulos. Primero se introducen algunas definiciones sobre los tipos de enfermedades, donde se verá bajo qué condiciones se puede considerar que la enfermedad que se está estudiando, se puede considerar una epidemia o una endemia. Asimismo, se definen los compartimentos de la población afectada, pues el modelo se formula como un modelo compartimental, así se tiene un modelo que genera un sistema de ecuaciones que están contenidos en \mathbb{R}^3 , el cual se puede reducir a un sistema contenido en \mathbb{R}^2 facilitando en gran medida el estudio del sistema. Antes, se hace un breve estudio del modelo SI, posteriormente se estudia y analiza el modelo SIS, donde se define la tasa de reproducción básica \mathcal{R}_0 , mediante el cual se hace un análisis de este modelo en el cual se obtiene algunos resultados que se demuestran en el transcurso. Posteriormente, se analiza y estudia el modelo SIR (la cual es una extensión de los modelos SI y SIS), el estudio se lo realiza mediante variables adimensionales y un simplex bidimensional. Para el análisis cualitativo se halla los puntos de equilibrio del sistema y se estudia la estabilidad de las mismas, además se halla la relación de tamaño y el número máximo de individuos infecciosos en cualquier instante de tiempo. Finalmente, se analiza y estudia un modelo SIR con vacunación, el cual genera un sistema de ecuaciones diferenciales contenido en \mathbb{R}^3 , que también se puede reducir a un sistema de ecuaciones

contenido en \mathbb{R}^2 . También se hallan sus puntos de equilibrio y se estudia la estabilidad de estos, observando el comportamiento cualitativo del modelo SIR. Más aún, se encuentra una región en \mathbb{R}^2_+ , en la cual se observa el comportamiento de la enfermedad si se tiene la vacuna.

Finalmente, en los Apéndices se proporciona información adicional y relevante que ayuda a la comprensión del presente trabajo, en especial del capítulo 1. En primer lugar, está el apéndice 1, donde se estudian las ecuaciones diferenciales con autovalores reales, complejos y distintos. Por otro lado, se estudian los operadores reales con autovalores complejos para luego aplicarlo a ecuaciones diferenciales. En el apéndice 2 se estudia la Topología en \mathbb{R}^n , el cual es relevante en el estudio del primer capítulo. En el apéndice 3 se estudian las normas en general, de donde se hallan resultados, específicamente un teorema que es de mucha utilidad para la sección que estudia pozos y fuentes.

Capítulo 1

Sistemas Diferenciales Lineales y Teoría Fundamental.

La teoría de este capítulo se encuentra principalmente en Doering [3], Hirsch [4], Perko [6], Lima [7] y M.W.Hirsh[9].

El objetivo de este capítulo es establecer las bases del Capítulo 2 y 3, para lo cual se busca resolver el sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneo con coeficientes constantes

$$x' = Ax,$$

donde A es un operador lineal en \mathbb{R}^n (o una matriz $n \times n$), el cual es resuelta a través de exponenciales de operadores. Este método de solución es de gran importancia, no obstante en este capítulo se calculan soluciones solo para casos especiales.

Además, se define los exponenciales de operadores en la subsección 1.1.1 mediante una serie infinita en el espacio operador lineal $L(\mathbb{R}^n)$, la serie es formalmente la misma que la serie usual para e^a . En la subsección 1.1.2 se define los sistemas lineales homogéneos, donde se estudia los casos especiales de sistemas bidimensionales, en las subsecciones 1.1.3 y 1.1.4 se estudia dos tipos de ecuaciones diferenciales, una es un sistema simple no homogéneo y el otro una ecuación de orden superior de una variable.

En la sección 1.2 se estudiará algunos tipos importantes de flujos lineales e^{tA} , particularmente contracciones y también sus extremos opuestos, expansiones. La sección 1.3 es dedicada a flujos hiperbólicos e^{tA} , caracterizado por la condición que los autovalores de A tienen partes reales distintas de cero. En la sección 1.4 introduciremos la noción de una propiedad genérica de operadores en \mathbb{R}^n .

En la sección 1.5 se define sistema dinámico y campo vectorial. En la sección 1.6 se define la teoría fundamental para la ecuación diferencial (campo vectorial)

$$x' = f(x),$$

donde se da un especial énfasis en las soluciones de esta ecuación diferencial, como ser la existencia y unicidad de sus soluciones, la continuidad de sus soluciones en condicio-

nes iniciales y la extensión de sus soluciones. Por último en la sección 1.7 se estudia las propiedades del flujo de la ecuación diferencial $x' = f(x)$.

1.1. Sistemas Lineales

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes

$$x' = Ax, \tag{1.1.1}$$

donde A es un operador lineal en \mathbb{R}^n (o una matriz $n \times n$). Para cada operador A , se tiene otro operador e^A , llamado exponencial de A , el cual se define más adelante.

La función $A \rightarrow e^A$ tiene propiedades formales similares a las de los exponenciales ordinarios de los números reales. También la función $t \rightarrow e^{tA}$, donde $t \in \mathbb{R}$ tiene la apariencia de e^{ta} , donde $a \in \mathbb{R}$, en particular esto muestra que las soluciones de (1.1.1) son exactamente las funciones

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

dadas por $x(t) = e^{tA}k$ con $k \in \mathbb{R}^n$.

1.1.1. Exponenciales de operadores

Sea $L(\mathbb{R}^n)$ el conjunto de operadores lineales en \mathbb{R}^n representado por el conjunto M_n de matrices $n \times n$ (con respecto a una base estándar para \mathbb{R}^n), que es a su vez lo mismo que \mathbb{R}^{n^2} , ya que una matriz no es más que una lista de n^2 números. Por lo tanto, $L(\mathbb{R}^n)$ es un espacio vectorial bajo las operaciones de adición y multiplicación por escalar de operadores (matrices). Así, podemos hablar de normas en $L(\mathbb{R}^n)$, convergencia de series de operadores y así sucesivamente.

Una norma de uso frecuente en $L(\mathbb{R}^n)$ es la norma uniforme y la definimos de la siguiente manera.

Definición 1. Si $T : E \rightarrow E$ un operador lineal, donde E es un espacio vectorial de dimensión finita, la norma uniforme (Hirsch [4] pág. 82.) de T es definida

$$\|T\| = \max\{|Tx| : |x| \leq 1\}.$$

Es decir, $\|T\|$ es el máximo valor de los $|Tx|$ en la bola unitaria

$$D = \{x \in E : |x| \leq 1\}.$$

Esta norma es definida en términos de una norma dada en E (\mathbb{R}^n), la cual denotamos como $|x|$. La existencia de este valor máximo se sigue de la compacidad de D (Apéndice C) y la continuidad de T . (Esta continuidad se sigue inmediatamente de la representación matricial de T .)

La norma uniforme en $L(\mathbb{R}^n)$ depende de la norma elegida para \mathbb{R}^n . Si no se especifica ninguna norma en \mathbb{R}^n , se da por hecho que se trata de la norma Euclidiana estándar.

Lema 1. Sea \mathbb{R}^n con la norma $|x|$. La norma uniforme correspondiente en $L(\mathbb{R}^n)$ tiene las siguientes propiedades (Hirsch [4] pág. 83)

- a) Si $\|T\| = k$ entonces $|Tx| \leq k|x|, \forall x$ en \mathbb{R}^n .
- b) $\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$
- c) $\|T^m\| \leq \|T\|^m$ para todo $m = 0, 1, 2, \dots$

Demostración. Primero demostramos a):

- Si $x = 0$ entonces $|Tx| = 0 = k|x|$.
 - Si $x \neq 0$ entonces $|x| \neq 0$.
- Sea $y = |x|^{-1}x$ entonces $|y| = \frac{1}{|x|}|x| = 1$.
- Por lo tanto,

$$\frac{1}{|x|}|Tx| = \frac{|Tx|}{|x|} = |T|x|^{-1}x| = |Ty| \leq \|T\| = k,$$

pues $\|T\|$ es el máximo valor de los $|Tx|$ en la bola unitaria de la Definición 1. Así $|Tx| \leq k|x|, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Ahora demostramos b):

Sea $|x| \leq 1$ entonces de a) tenemos

$$|S(Tx)| \leq \|S\| |Tx| \leq \|S\| \|T\| |x| \leq \|S\| \|T\|.$$

Y como $\|ST\|$ es el máximo valor de $|STx|$ entonces

$$\|ST\| \leq \|S\| \|T\|.$$

Finalmente demostramos c):

Por b) y para $m \geq 2$, tenemos

$$\|T^m\| = \|T \cdot T^{m-1}\| \leq \|T\| \|T^{m-1}\| \leq \|T\| \|T\| \|T^{m-2}\| \leq \dots \leq \underbrace{\|T\| \cdot \dots \cdot \|T\|}_{m\text{-veces}} = \|T\|^m.$$

□

Definición 2. Una serie $\sum x_k$ en un espacio vectorial normado (E, N) es absolutamente convergente si la serie de números reales $\sum_{k=0}^{\infty} N(x_k)$ es convergente.

Un criterio útil para la convergencia absoluta es la prueba de comparación:

Una serie $\sum x_k$ en un espacio vectorial normado (E, N) converge absolutamente siempre que exista una serie $\sum a_k$ convergente de números reales a_k no negativos tal que

$$N(x_k) \leq a_k; \quad k = 1, 2, \dots$$

Teorema 1. La serie exponencial $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}$ es absolutamente convergente para cada operador lineal T .

Demostración. Sea $\|T\| = \alpha \geq 0$ la norma uniforme (para alguna norma en \mathbb{R}^n). Entonces como $\|T^m\| \leq \|T\|^m$ por el Lema 1.

Así,

$$\left\| \frac{T^k}{k!} \right\| = \frac{\|T^k\|}{k!} \leq \frac{\|T\|^k}{k!} = \frac{\alpha^k}{k!}.$$

Ahora sabemos que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \rightarrow e^\alpha$ (donde e es la base del logaritmo natural). Por lo tanto, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}$ converge absolutamente por la prueba de comparación mencionada. \square

Así, también hemos demostrado que

$$\|e^A\| \leq e^{\|A\|}.$$

Pues

$$\|e^A\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A^k\|}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|}.$$

Ahora, definimos una serie muy importante generalizando la serie exponencial usual.

Definición 3. La exponencial del operador lineal $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es definida por la serie absolutamente convergente

$$\exp(T) = e^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}$$

Esta es una serie en el espacio vectorial $L(\mathbb{R}^n)$. (Perko [6]pág. 12.)

Los siguientes resultados, serán de utilidad.

Lema 2. Sean $A = \sum_{j=0}^{\infty} A_j$ y $B = \sum_{k=0}^{\infty} B_k$ series absolutamente convergentes de operadores en \mathbb{R}^n . Entonces (Hirsch [4] pág. 84.)

$$AB = C = \sum_{l=0}^{\infty} C_l,$$

donde

$$C_l = \sum_{j+k=l} A_j B_k.$$

Demostración. Sea la n -ésima suma parcial de las series $\sum_{j=0}^n A_j$, $\sum_{k=0}^n B_k$ y $\sum_{l=0}^n C_l$ denotados respectivamente por α_n , β_n y γ_n . Entonces

$$AB = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \beta_n$$

mientras que

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{2n}.$$

Luego, tenemos

$$\begin{aligned} \gamma_{2n} &= C_0 + C_1 + C_2 + \dots + C_{2n} \\ &= \left(\sum_{j+k=0} A_j B_k \right) + \left(\sum_{j+k=1} A_j B_k \right) + \dots + \left(\sum_{j+k=2n} A_j B_k \right). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \gamma_{2n} &= (A_0 B_0) + (A_0 B_1 + A_1 B_0) + (A_0 B_2 + A_1 B_1 + A_2 B_0) + \\ &\dots + (A_0 B_n + A_1 B_{n-1} + A_2 B_{n-2} + \dots + A_n B_0) + (A_0 B_{n+1} + A_1 B_n + A_2 B_{n-1} + \\ &\dots + A_n B_1 + A_{n+1} B_0) + \dots + (A_0 B_{2n} + A_1 B_{2n-1} + A_2 B_{2n-2} + \dots + A_{2n} B_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_n \beta_n &= \sum_{j=0}^n A_j \sum_{k=0}^n B_k \\ &= (A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_n) (B_0 + B_1 + B_2 + \dots + B_n) \\ &= (A_0 B_0 + A_0 B_1 + \dots + A_0 B_n) + (A_1 B_0 + A_1 B_1 + \dots + A_1 B_n) + (A_2 B_0 + A_2 B_1 + \\ &\dots + A_2 B_n) + \dots + (A_n B_0 + A_n B_1 + \dots + A_n B_n). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \gamma_{2n} - \alpha_n \beta_n &= [(A_0 B_0) + (A_0 B_1 + A_1 B_0) + (A_0 B_2 + A_1 B_1 + A_2 B_0) + \\ &\dots + (A_0 B_n + A_1 B_{n-1} + A_2 B_{n-2} + \dots + A_n B_0) + (A_0 B_{n+1} + A_1 B_n + A_2 B_{n-1} + \\ &\dots + A_n B_1 + A_{n+1} B_0) + \dots + (A_0 B_{2n} + A_1 B_{2n-1} + A_2 B_{2n-2} + \dots + A_{2n} B_0)] \\ &\quad - [(A_0 B_0 + A_0 B_1 + \dots + A_0 B_n) + (A_1 B_0 + A_1 B_1 + \dots + A_1 B_n) + (A_2 B_0 + A_2 B_1 + \\ &\dots + A_2 B_n) + \dots + (A_n B_0 + A_n B_1 + \dots + A_n B_n)]. \end{aligned}$$

Así, se tiene

$$\begin{aligned} \gamma_{2n} - \alpha_n \beta_n &= \sum_{\substack{j+k=2n \\ 0 \leq j \leq n \\ n+1 \leq k \leq 2n}} A_j B_k + \sum_{\substack{j+k=2n \\ n+1 \leq j \leq 2n \\ 0 \leq k \leq n}} A_j B_k. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\|\gamma_{2n} - \alpha_n \beta_n\| &= \left\| \sum_{\substack{j+k=2n \\ 0 \leq j \leq n \\ n+1 \leq k \leq 2n}} A_j B_k + \sum_{\substack{j+k=2n \\ n+1 \leq j \leq 2n \\ 0 \leq k \leq n}} A_j B_k \right\| \\
&\leq \left\| \sum_{\substack{j+k=2n \\ 0 \leq j \leq n \\ n+1 \leq k \leq 2n}} A_j B_k \right\| + \left\| \sum_{\substack{j+k=2n \\ n+1 \leq j \leq 2n \\ 0 \leq k \leq n}} A_j B_k \right\| \\
&\leq \sum_{\substack{j+k=2n \\ 0 \leq j \leq n \\ n+1 \leq k \leq 2n}} \|A_j B_k\| + \sum_{\substack{j+k=2n \\ n+1 \leq j \leq 2n \\ 0 \leq k \leq n}} \|A_j B_k\| \\
&\leq \sum_{\substack{j+k=2n \\ 0 \leq j \leq n \\ n+1 \leq k \leq 2n}} \|A_j\| \|B_k\| + \sum_{\substack{j+k=2n \\ n+1 \leq j \leq 2n \\ 0 \leq k \leq n}} \|A_j\| \|B_k\|,
\end{aligned}$$

esto por la desigualdad triangular (Apéndice B) y el Lema 1.

Ahora

$$\sum_{\substack{j+k=2n \\ 0 \leq j \leq n \\ n+1 \leq k \leq 2n}} \|A_j\| \|B_k\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|A_j\| \sum_{k=n+1}^{2n} \|B_k\|, \quad (1.1.2)$$

$$\sum_{\substack{j+k=2n \\ n+1 \leq j \leq 2n \\ 0 \leq k \leq n}} \|A_j\| \|B_k\| \leq \sum_{j=n+1}^{2n} \|A_j\| \sum_{k=0}^{\infty} \|B_k\|. \quad (1.1.3)$$

En (1.1.2), como la serie $A = \sum_{j=0}^{\infty} A_j$ es absolutamente convergente entonces

$$A = \sum_{j=0}^{\infty} A_j < \infty$$

es convergente y como también $\sum_{k=0}^{\infty} B_k$ es absolutamente convergente entonces

$$B = \sum_{k=0}^{\infty} B_k < \infty$$

es convergente entonces es de Cauchy, es decir,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \forall m, n \geq k_0,$$

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \|B_k\| < \varepsilon \implies \sum_{\substack{j+k=2n \\ 0 \leq j \leq n \\ n+1 \leq k \leq 2n}} \|A_j\| \|B_k\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|A_j\| \sum_{k=n+1}^{2n} \|B_k\| < \infty.$$

Por lo tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{j+k=2n \\ 0 \leq j \leq n \\ n+1 \leq k \leq 2n}} \|A_j\| \|B_k\| = 0.$

En (1.1.3), como $\sum_{k=0}^{\infty} \|B_k\| < \infty$, además $\sum_{j=0}^{\infty} \|A_j\| < \infty$ entonces es de Cauchy, es decir,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \forall m, n \geq k_0,$$

$$\sum_{j=n+1}^{2n} \|A_j\| < \varepsilon \implies \sum_{\substack{j+k=2n \\ n+1 \leq j \leq 2n \\ 0 \leq k \leq n}} \|A_j\| \|B_k\| \leq \sum_{j=n+1}^{2n} \|A_j\| \sum_{k=0}^{\infty} \|B_k\| < \infty.$$

Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{j+k=2n \\ n+1 \leq j \leq 2n \\ 0 \leq k \leq n}} \|A_j\| \|B_k\| = 0.$

Por lo tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma_n - \alpha_n \beta_n) = 0$, en consecuencia

$$AB = C = \sum_{L=0}^{\infty} C_L.$$

□

Proposición 1. Sean P, S, T operadores lineales en \mathbb{R}^n . Entonces (Hirsch [4] pág. 85)

a) Si $Q = PTP^{-1}$ entonces $e^Q = Pe^T P^{-1}$

b) Si $ST = TS$ entonces $e^{S+T} = e^S e^T$

c) $e^{-S} = (e^S)^{-1}$

d) Si $n = 2$ y $T = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ entonces $e^T = e^a \begin{bmatrix} \cos b & -\operatorname{sen} b \\ \operatorname{sen} b & \cos b \end{bmatrix}$

Demostración. Primero demostramos a).

Para la prueba utilizaremos las siguientes propiedades de los operadores

$$P(A+B)P^{-1} = (PA+PB)P^{-1} = PAP^{-1} + PBP^{-1}, \quad (1.1.4)$$

$$(PTP^{-1})^k = PT^k P^{-1}. \quad (1.1.5)$$

En efecto

Por inducción

Si $k = 1$ $(PTP^{-1})^1 = PTP^{-1}$.

Si $k = 2$ $(PTP^{-1})^2 = (PTP^{-1})(PTP^{-1}) = PTP^{-1}PTP^{-1} = PT^2 P^{-1}$.

Supongamos para $k = n$ se cumple $(PTP^{-1})^n = PT^n P^{-1}$.

Por demostrar para $k = n + 1$ se cumple $(PTP^{-1})^{n+1} = PT^{n+1} P^{-1}$.

Veamos

$$(PTP^{-1})^{n+1} = (PTP^{-1})^n (PTP^{-1}) = PT^n P^{-1} PTP^{-1} = PT^{n+1} P^{-1}.$$

Por lo tanto, $(PTP^{-1})^k = PT^k P^{-1}$.

Ahora continuamos con la demostración de a), así por la Definición 2 y (1.1.5) tenemos

$$e^Q = e^{PTP^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(PTP^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{PT^k P^{-1}}{k!}.$$

Además, tenemos por (1.1.4) y (1.1.5) que

$$\sum_{k=0}^n \frac{(PTP^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{PT^kP^{-1}}{k!} = P \left(\sum_{k=0}^n \frac{T^k}{k!} \right) P^{-1}.$$

Tomando limites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\sum_{k=0}^n \frac{T^k}{k!} \right) P^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(PTP^{-1})^k}{k!}.$$

Por otro lado,

$$Pe^T P^{-1} = P \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{T^k}{k!} \right) P^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(PTP^{-1})^k}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(Q)^k}{k!} = e^Q,$$

esto por el Teorema de limites para matrices (Friedberg [11], pág.269). Por lo tanto, $e^Q = Pe^T P^{-1}$.

Ahora demostramos *b*).

Por la Definición 3, tenemos

$$e^{S+T} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(S+T)^n}{n!}. \quad (1.1.6)$$

Por otro lado, como $ST = TS$ entonces por el Teorema Binomial

$$(S+T)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} S^{n-k} T^k.$$

Ahora hacemos un cambio de variable $j = n - k$.

Así,

$$(S+T)^n = \sum_{j+k=n} \frac{n!}{k!j!} S^j T^k = \sum_{j+k=n} n! \frac{S^j}{j!} \frac{T^k}{k!}. \quad (1.1.7)$$

Entonces por (1.1.6) y (1.1.7) se tiene

$$\begin{aligned} e^{S+T} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{j+k=n} n! \frac{S^j}{j!} \frac{T^k}{k!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j+k=n} \frac{S^j}{j!} \frac{T^k}{k!} \right) \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{S^j}{j!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!} \right) \\ &= e^S e^T, \end{aligned}$$

esto por el Lema 2 y por la definición de la exponencial.

Ahora, demostramos *c*).

Como $S(-S) = (-S)S$ entonces por *b*) se tiene

$$e^{S+(-S)} = e^S e^{-S},$$

$$e^{(-S)+S} = e^{-S} e^S.$$

Como $S + (-S) = S + (-S) = 0$, $0 \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$e^{(-S)+S} = e^{S+(-S)} = e^0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = I,$$

donde $I \in \mathbb{R}^n$, donde I operador identidad en \mathbb{R}^n .

Luego se tiene

$$e^{-S} = (e^S)^{-1}.$$

Finalmente, demostramos *d*).

Tomamos la correspondencia $T = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \longleftrightarrow a + ib$ donde se preserva suma, producto, multiplicación por un real y también preservan límites, por lo tanto,

$$e^T \longleftrightarrow e^{a+ib} = e^a e^{ib}, \quad (1.1.8)$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$. Por otro lado, sabemos que

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \\ \text{sen } x &= \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \end{aligned}$$

y como

$$\begin{aligned} e^{ib} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ib)^k}{k!} = \frac{(ib)^0}{0!} + \frac{(ib)^1}{1!} + \frac{(ib)^2}{2!} + \frac{(ib)^3}{3!} + \frac{(ib)^4}{4!} + \dots \\ &= \frac{b^0}{0!} + \frac{ib^1}{1!} - \frac{b^2}{2!} - \frac{ib^3}{3!} + \frac{b^4}{4!} + \frac{ib^5}{5!} - \frac{b^6}{6!} - \frac{ib^7}{7!} + \frac{b^8}{8!} + \dots \\ &= \left(\frac{b^0}{0!} - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} - \frac{b^6}{6!} + \frac{b^8}{8!} - \dots \right) + i \left(\frac{b^1}{1!} - \frac{b^3}{3!} + \frac{b^5}{5!} - \frac{b^7}{7!} + \dots \right) \\ &= \begin{pmatrix} \cos b & -\text{sen } b \\ \text{sen } b & \cos b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces $e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\operatorname{sen} b \\ \operatorname{sen} b & \cos b \end{pmatrix}$ luego, por (1.1.8) se tiene

$$e^T = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\operatorname{sen} b \\ \operatorname{sen} b & \cos b \end{pmatrix}.$$

□

Ejemplo 1. Calculemos e^T donde $T = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}$.

Solución. Escribimos $T = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = aI + B$, así $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}$.

Notemos que aI conmuta con B .

Veamos

$$aI \cdot B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ ab & 0 \end{bmatrix},$$

$$B \cdot aI = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ ab & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces $aI \cdot B = B \cdot aI$. Así, $e^T = e^{aI+B} = e^{aI} e^B = e^a e^B$, por Definición 2 se tiene

$$e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k.$$

Veamos

$$B^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix},$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, $B^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\forall k > 1$, entonces

$$e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k = I + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 e^{aI} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (aI)^k \\
 &= \frac{(aI)^0}{0!} + \frac{(aI)^1}{1!} + \frac{(aI)^2}{2!} + \dots \\
 &= I \left(\frac{(a)^0}{0!} + \frac{(a)^1}{1!} + \frac{(a)^2}{2!} + \dots \right) \\
 &= Ie^a.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$e^T = e^a I e^B = e^a e^B = e^a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^a & 0 \\ e^a b & e^a \end{bmatrix}.$$

Proposición 2. Sea T un operador lineal en \mathbb{R}^n . Si $x \in \mathbb{R}^n$ es un autovector de T correspondiente al autovalor real α de T , entonces x es también un autovector de e^T correspondiente a e^α .

Demostración. Ya que $x \in \mathbb{R}^n$ es un autovector de T perteneciente al autovalor real α de T , se tiene

$$Tx = \alpha x. \tag{1.1.9}$$

Así, obtenemos por la Definición 3

$$e^T x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{T^k}{k!} x \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} x \right) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} \right) x = e^\alpha x,$$

esto por (1.1.9).

Así, x es un autovector de e^T perteneciente a e^α . □

Concluimos de esta subsección con la siguiente observación.

Observación 1. Todo lo mencionado para exponenciales de operadores en \mathbb{R}^n , también es válido para operadores en el espacio vectorial complejo \mathbb{C}^n . Esto se debe a que \mathbb{C}^n puede ser considerado como el espacio vectorial real \mathbb{R}^{2n} , simplemente ignorando los escalares no reales, cada operador complejo es con mayor motivo un operador real.

Adicionalmente, la proposición anterior es válida para autovalores complejos de un operador en \mathbb{C}^n , siendo la demostración la misma.

Proposición 3. Sea T operador en \mathbb{C}^n . Si $x \in \mathbb{C}^n$ es un autovector de T correspondiente al autovalor complejo α de T , entonces x es también un autovector de e^T correspondiente a e^α .

Demostración. La demostración es la misma que la Proposición 2. □

1.1.2. Sistemas diferenciales lineales homogéneos

Sea A un operador lineal en \mathbb{R}^n , un sistema diferencial lineal homogéneo se define como

$$x' = Ax. \quad (1.1.10)$$

Expresaremos sus soluciones en términos de exponenciales de operadores. Consideremos el camino

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbf{L}(\mathbb{R}^n) \\ t &\mapsto e^{tA}. \end{aligned}$$

Definición 4. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ un camino, es decir, una aplicación continua cuyo dominio es un intervalo de la recta, f es diferenciable en el punto $t \in I$ cuando existe el límite

$$\frac{df}{dt}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h},$$

llamado la derivada de f en el punto t . (Lima [7] pág. 41.)

Proposición 4. Sea A un operador en \mathbb{R}^n , tal que

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A.$$

Demostración. Por Definición 4 se tiene

$$\frac{df}{dt}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h},$$

para $f(t) = e^{tA}$, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{tA} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{tA}e^{hA} - e^{tA}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{tA}(e^{hA} - I)}{h} = e^{tA} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{hA} - I}{h}. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} e^{hA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(hA)^k}{k!} \\ &= \frac{(hA)^0}{0!} + \frac{(hA)^1}{1!} + \frac{(hA)^2}{2!} + \dots = I + \frac{hA}{1!} + \frac{(hA)^2}{2!} + \dots \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}e^{tA} &= e^{tA} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{hA} - I}{h} = e^{tA} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(I + \frac{hA}{1!} + \frac{(hA)^2}{2!} + \dots\right) - I}{h} \\
 &= e^{tA} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{hA}{1!} + \frac{(hA)^2}{2!} + \frac{(hA)^3}{3!} + \frac{(hA)^4}{4!} + \dots}{h} \\
 &= e^{tA} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hA}{h} + \frac{(hA)^2}{2!} + \frac{(hA)^3}{3!} + \frac{(hA)^4}{4!} + \dots}{h} \\
 &= e^{tA} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hA}{h} + 0 = e^{tA}A.
 \end{aligned}$$

Notemos que A conmuta con cada término de la serie para e^{tA} , por lo tanto, con e^{tA} entonces

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A.$$

□

Ahora podemos resolver la ecuación (1.1.1).

Teorema 2. Sea A un operador en \mathbb{R}^n . Entonces la solución del problema de valor inicial

$$x' = Ax \quad , x(0) = K \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1.11)$$

es

$$e^{tA}K \quad (1.1.12)$$

y no hay otras soluciones.

Demostración. Por la Proposición anterior tenemos que

$$\frac{d}{dt} \left(e^{tA}K \right) = \frac{d}{dt} \left(e^{tA} \right) K = Ae^{tA}K.$$

Ya que $e^{0A}K = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(0A)^k}{k!} \right) K = K$, se sigue que $e^{tA}K$ es una solución de (1.1.11), donde $K \in \mathbb{R}^n$.

Ahora veamos que no hay otras soluciones.

Sea $x(t)$ alguna solución de $x' = Ax$. Como demostramos que la solución es la exponencial de una matriz multiplicada por una constante y como la exponencial tiene su inversa, sea $y(t) = e^{-tA}x(t)$. Luego

$$\begin{aligned}
y'(t) &= \frac{d}{dt} \left(e^{-tA} \right) x(t) + e^{-tA} x'(t) \\
&= -Ae^{-tA} x(t) + e^{-tA} Ax(t) \\
&= e^{-tA} (-A + A)x(t) \equiv 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $y(t)$ es una constante.

Ahora fijando $t = 0$, $y(0) = e^{-0A}x(0) = x(0) = K \in \mathbb{R}^n$, entonces $y(t) = K$. Esto completa la demostración del Teorema. \square

Ejemplo 2. Sea el sistema bidimensional

$$\begin{aligned}
x_1' &= ax_1, \\
x_2' &= bx_1 + ax_2,
\end{aligned}$$

donde a, b son constantes. Hallaremos la solución general del sistema bidimensional.

Solución. En notación matricial $x' = Ax$, $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}$, donde $x = (x_1, x_2)$.

La solución con valor inicial $K = (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2$ es $e^{tA}K$.

$$tA = \begin{bmatrix} ta & 0 \\ tb & ta \end{bmatrix} = ta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ tb & 0 \end{bmatrix} = taI + B,$$

$$e^{tA} = e^{tal+B} = e^{tal}e^B = e^{ta}e^B = e^{ta}(I+B) = e^{ta} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ tb & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{ta} & 0 \\ tbe^{ta} & e^{ta} \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$x(t) = e^{tA}K = \begin{bmatrix} e^{ta} & 0 \\ tbe^{ta} & e^{ta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = (e^{ta}K_1, e^{ta}(tbK_1 + K_2)).$$

Por lo tanto, la solución para el sistema satisface $x_1(0) = K_1$, $x_2(0) = K_2$ es

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= e^{ta}K_1, \\
x_2(t) &= e^{ta}(tbK_1 + K_2).
\end{aligned}$$

Por la subsección (1.1.1) sabemos como calcular la exponencial de cualquier matriz 2×2 , así que podemos resolver explícitamente cualquier sistema bidimensional de la forma $x' = Ax$, $A \in L(\mathbb{R}^2)$. También podemos obtener información cualitativa importante sobre las soluciones de los autovalores de A , sin encontrar soluciones explícitas.

Consideramos los casos especiales más importantes.(Hirsch [4] pág. 92)
 Sea $A \in L(\mathbb{R}^2)$ (matriz 2×2)

$$x' = Ax.$$

Caso I: Si A tiene autovalores reales de signos opuestos. En este caso el origen (o a veces la ec. dif.) es llamado *silla*.

- Hallamos los autovalores de A encontrando las raíces del polinomio característico de A : $\det(A - \lambda I) = 0$.
- Para cada autovalor λ_i hallamos su respectivo autovector f_i resolviendo el sistema :
 $(A - \lambda_i I) f_i = 0$, así obtenemos $P = [p_{ij}] = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$.
- Así, $Q = P^t$ entonces $x = Qy$.
- Así, en las nuevas coordenadas la ecuación diferencial original se convierte en

$$y' = By \text{ donde } B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, y'_i = \lambda_i y_i.$$

- La solución general es $y_i(t) = a_i e^{t\lambda_i}$, $i = 1, 2$ donde a_1, a_2 arbitrarios con
 $a_i = y_i(0)$ donde $B = QAQ^{-1}$.

Como en este caso A tiene autovalores reales de signos opuestos entonces se tiene que

$$B = QAQ^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \lambda < 0 < \mu.$$

En el plano (y_1, y_2) , el retrato fase se parece a:

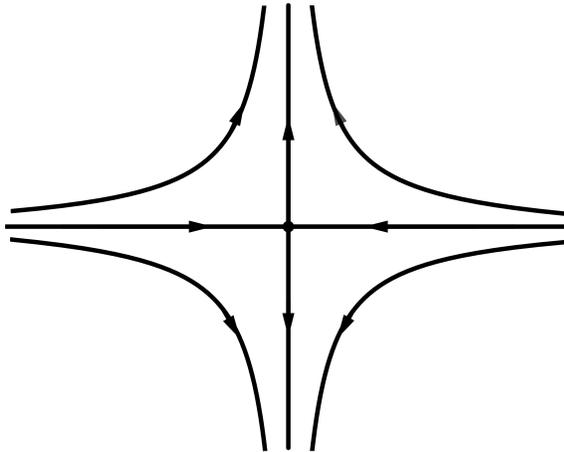


Figura 1.1.1: Silla: $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \lambda < 0 < \mu$

Caso II: Todos los autovalores de A tienen parte real negativa. En este caso es llamado *pozo*, pues tiene la propiedad característica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

para cada solución $x(t)$.

- Si A es diagonal $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, pues las soluciones en las nuevas coordenadas

$$y(t) = (a_1 e^{\lambda t}, a_2 e^{\mu t}); \lambda < 0, \mu < 0.$$

- Si A es diagonalizable, las soluciones $x(t) = Qy(t)$ son de la forma con $y(t)$ como arriba y

$Q \in L(\mathbb{R}^n)$; claramente $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Subcaso I : Si los autovalores son iguales (**un foco**), es decir, $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, $\lambda < 0$, el retrato fase se parece a:

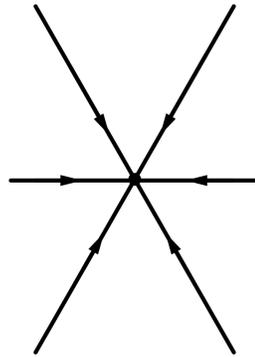


Figura 1.1.2: Foco: $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, $\lambda < 0$.

Subcaso II: Si los autovalores son distintos (**un nodo**), es decir, $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$, $\lambda < \mu < 0$ el retrato fase se parece a:

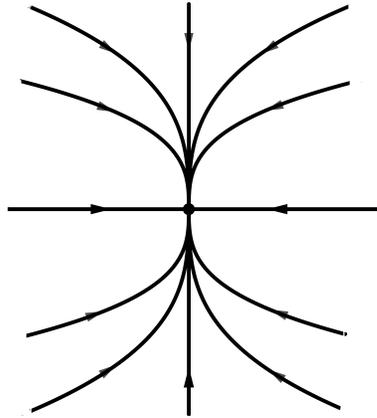


Figura 1.1.3: Nodo: $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$, $\lambda < \mu < 0$.

- Si A no es diagonalizable y los autovalores son negativos, hay un cambio de coordenadas $x = Qy$ dando la ecuación equivalente $y' = By$ donde

$$B = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}, \lambda < 0.$$

Ya hemos resuelto tal ecuación; las soluciones son

$$\begin{aligned} y_1(t) &= K_1 e^{t\lambda}, \\ y_2(t) &= K_2 e^{t\lambda} + K_1 t e^{t\lambda}, \end{aligned}$$

que tienden a 0 cuando t tiende a ∞ . El retrato fase se parece a **(un nodo impropio)**:

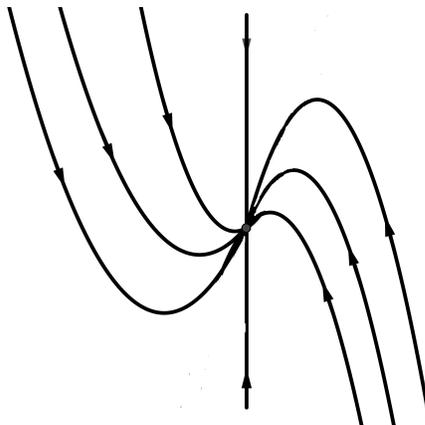


Figura 1.1.4: Nodo impropio : $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$, $\lambda < 0$

Si los autovalores son $a \pm ib$ con $a < 0$, se realiza un cambio de coordenadas obteniendo el sistema equivalente

$$y' = By, \quad B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

De la sección 1.1.1 encontramos

$$e^{tB} = e^{ta} \begin{bmatrix} \cos tb & -\sin tb \\ \sin tb & \cos tb \end{bmatrix}.$$

Luego, la solución general expresada en y -coordenadas es

$$y(t) = e^{ta} (K_1 \cos tb - K_2 \sin tb, K_2 \cos tb + K_1 \sin tb).$$

Como $|\cos tb| \leq 1$, $|\sin tb| \leq 1$ y $a < 0$ entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$.

Si $b > 0$ el retrato fase consiste en espirales en sentido antihorario que tienden a 0.

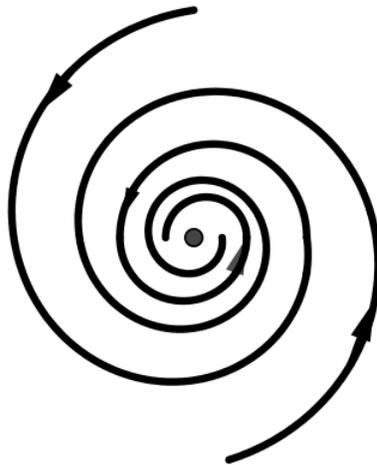


Figura 1.1.5: Pozo en espiral : $B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, b > 0$ y $a < 0$

Si $b < 0$ el retrato fase consiste en espirales en sentido horario que tienden a 0.

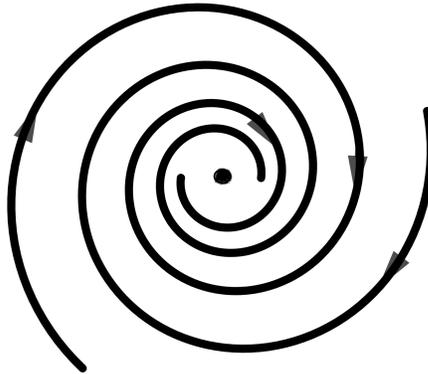


Figura 1.1.6: Pozo en espiral : $B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, $b < 0$ y $a < 0$

Caso III: Todos los autovalores de A tienen parte real positiva. Este caso es llamado *fuelle* y tiene la propiedad característica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = \infty \text{ y } \lim_{t \rightarrow -\infty} |x(t)| = 0$$

para cada solución $x(t)$.

• Si A es diagonal $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = \infty$ y $\lim_{t \rightarrow -\infty} |x(t)| = 0$ pues las soluciones en las nuevas coordenadas

$$y(t) = (a_1 e^{\lambda t}, a_2 e^{\mu t}); \lambda > 0, \mu > 0. \quad (1.1.13)$$

• Si A es diagonalizable, las soluciones $x(t) = Qy(t)$ son de la forma con $y(t)$ como en (1.1.13) y $Q \in L(\mathbb{R}^2)$; claramente, $|x(t)| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$ y $|x(t)| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow -\infty$.

Subcaso I : Si los autovalores son iguales (**un foco**), es decir $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, $\lambda > 0$, el retrato fase se parece a:

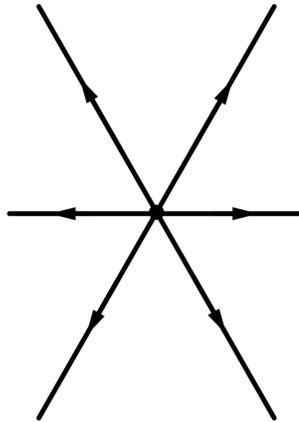


Figura 1.1.7: Foco: $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, $\lambda > 0$

Subcaso II: Si los autovalores son distintos (**un nodo**), es decir $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ con $\lambda > \mu > 0$, el retrato fase se parece a:

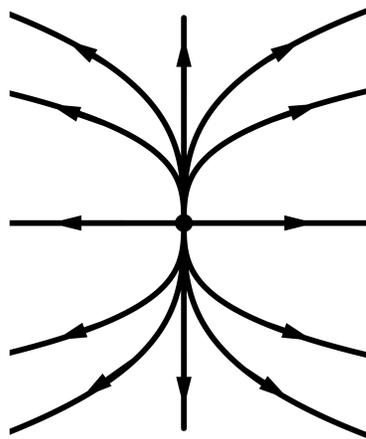


Figura 1.1.8: Nodo: $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$, $\lambda > \mu > 0$

• Si A no es diagonalizable y los autovalores son positivos, hay un cambio de coordenadas $x = Qy$ dando la ecuación equivalente $y' = By$ donde

$$B = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}, \lambda > 0.$$

Resuelta la ecuación; las soluciones son

$$y_1(t) = K_1 e^{t\lambda},$$

$$y_2(t) = K_2 e^{t\lambda} + K_1 t e^{t\lambda},$$

donde claramente $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = \infty$ y $\lim_{t \rightarrow -\infty} |x(t)| = 0$. El retrato fase se parece a **un nodo impropio**.

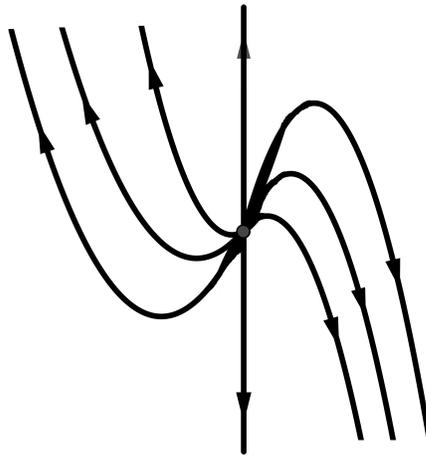


Figura 1.1.9: Nodo impropio: $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$, $\lambda > 0$

Si los autovalores son $a \pm ib$ con $a > 0$, se realiza un cambio de coordenadas obteniendo el sistema equivalente

$$y' = By, \quad B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

De la sección 1.1.1 encontramos $e^{tB} = e^{ta} \begin{bmatrix} \cos tb & -\sin tb \\ \sin tb & \cos tb \end{bmatrix}$, así, la solución general expresada en y -coordenadas

$$y(t) = e^{ta} (K_1 \cos tb - K_2 \sin tb, K_2 \cos tb + K_1 \sin tb).$$

Como $|\cos tb| \leq 1$, $|\sin tb| \leq 1$ y $a > 0$ entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)| = \infty$ y $\lim_{t \rightarrow -\infty} |y(t)| = 0$, por lo tanto, $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = \infty$ y $\lim_{t \rightarrow -\infty} |x(t)| = 0$.

Si $b > 0$, el retrato fase consiste en espirales en sentido antihorario que tienden a ∞ .

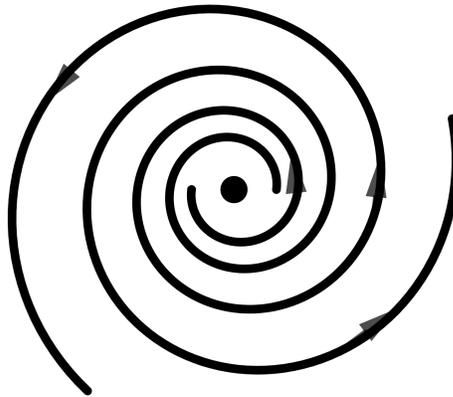


Figura 1.1.10: Fuente en espiral: $B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, a > 0$ y $b > 0$.

Si $b < 0$, el retrato fase consiste en espirales en sentido horario que tienden a ∞ .

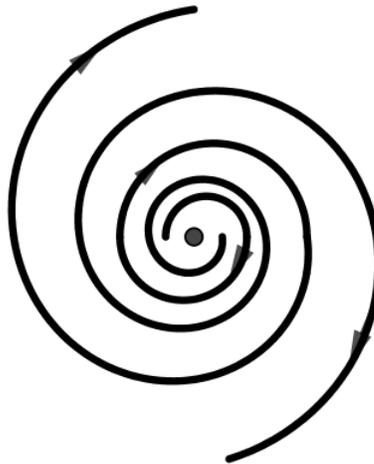


Figura 1.1.11: Fuente en espiral: $B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, b < 0$ y $a > 0$.

Caso IV: Todos los autovalores de A son imaginarios puros. Este caso es llamado *centro*, caracterizado por tener la propiedad de que todas sus soluciones son periódicas con el mismo período.

Por un cambio de coordenadas se obtiene la ecuación equivalente $y' = By$ donde

$B = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$, luego sabemos que

$$e^{tB} = \begin{bmatrix} \cos tb & -\sin tb \\ \sin tb & \cos tb \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, si $y(t)$ es alguna solución $y(t + \frac{2\pi}{b}) \equiv y(t)$.

El retrato fase en las y -*coordenadas* consiste en **círculos concéntricos**, en las x -*coordenadas* originales las órbitas pueden ser elipses como en la siguientes figuras.

Si $b > 0$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$.

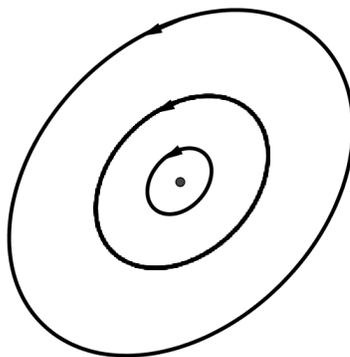


Figura 1.1.12: Centro : $b > 0$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$

Si $b < 0$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$.

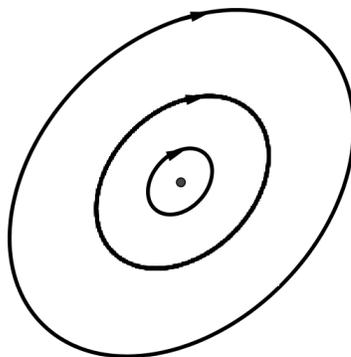


Figura 1.1.13: Centro : $b < 0$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$

En resumen, la información geométrica sobre el retrato fase de $x' = Ax$, $A \in L(\mathbb{R}^2)$ (matriz 2×2) puede ser deducido a partir del polinomio característico de A que escribimos como

$$\lambda^2 - (TrA)\lambda + \det A,$$

definiendo el discriminante $\Delta = (TrA)^2 - 4\det A$, así los autovalores son $\frac{1}{2}(TrA \pm \sqrt{\Delta})$.

- Si $\Delta \geq 0$ los autovalores son reales.
- Si $TrA < 0$ los autovalores tiene parte real negativa.

La interpretación geométrica de $x' = Ax$ es como sigue,

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\rightarrow Ax \end{aligned}$$

es un campo vectorial en \mathbb{R}^n . Dado un punto $K \in \mathbb{R}^n$, existe una curva única $t \rightarrow e^{tA}K$ el cual empieza en K en $t = 0$ y es una solución de (1.1.11) (t es interpretado como el tiempo). Así, el vector tangente a esta curva en un tiempo t_0 es el vector $Ax(t_0)$ del campo vectorial en el punto de la curva. Podemos pensar en puntos de \mathbb{R}^n que fluyen simultáneamente a lo largo de estas curvas soluciones.

Definición 5. La posición de un punto $x \in \mathbb{R}^n$ en un tiempo t es denotado por (Hirsch [4] pág. 97.)

$$\phi_t(x) = e^{tA}x,$$

para cada $t \in \mathbb{R}$ tenemos la función $\phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\phi_t(x) = e^{tA}x$. La colección de funciones $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ es llamado el *flujo* correspondiente a la ecuación diferencial $x'(t) = Ax(t)$. El flujo tiene la propiedad básica $\phi_{s+t} = \phi_s \cdot \phi_t$ que no es otra cosa que $e^{(s+t)A} = e^{sA} \cdot e^{tA}$ (consecuencia de la Proposición 1).

El flujo es llamado lineal, pues cada función $\phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función lineal. Ahora podemos imaginar puntos en el plano, moviéndose todos a la vez a lo largo de la curva en la dirección de las flechas donde el origen no se mueve.

1.1.3. Una ecuación no homogénea

Consideremos una ecuación diferencial lineal no homogénea y no autónoma

$$x' = Ax + B(t) \tag{1.1.14}$$

donde A es un operador en \mathbb{R}^n y $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua. Esta ecuación es llamada *no homogénea*, pues $B(t)$ evita que (1.1.14) sea estrictamente lineal y es *no autónoma*, pues el lado derecho de (1.1.14) depende explícitamente de t .

Buscamos una solución que tenga la forma

$$x(t) = e^{tA}f(t) \tag{1.1.15}$$

donde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es alguna curva diferenciable. (Este método de solución es llamado variación de parámetros, pues si $B(t) \equiv 0$, $f(t)$ es una constante). De hecho todas las soluciones se pueden escribir de esta manera, ya que e^{tA} es invertible

Por lo cual la diferenciación de (1.1.15) por la regla de Leibniz (regla del producto para derivación) produce

$$x'(t) = Ae^{tA}f(t) + e^{tA}f'(t). \quad (1.1.16)$$

Dado que se supone que x es una solución de (1.1.14), por (1.1.14) y (1.1.16) se tiene

$$Ax(t) + B(t) = Ae^{tA}f(t) + e^{tA}f'(t)$$

$$Ax(t) + B(t) = Ax(t) + e^{tA}f'(t).$$

Luego, se tiene

$$B(t) = e^{tA}f'(t),$$

$$f'(t) = e^{-tA}B(t). \quad (1.1.17)$$

Integrando (1.1.17) se obtiene

$$f(t) = \int_0^t e^{-As}B(s) ds + K.$$

Así, un candidato para una solución de (1.1.14) es

$$x(t) = e^{tA} \left[\int_0^t e^{-As}B(s) ds + K \right]; K \in \mathbb{R}^n. \quad (1.1.18)$$

Analicemos (1.1.18) para ver que está bien definido.

El integrando en (1.1.18) y la ecuación anterior es la función vectorial

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ s &\rightarrow e^{-As}B(s). \end{aligned}$$

De hecho, para cualquier función continua $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, la integral puede ser definida como un elemento de \mathbb{R}^n . Dada una base de \mathbb{R}^n , esta integral es un vector cuyas coordenadas son las integrales de las funciones de coordenadas de g . La integral como una función de su límite superior t es una función de \mathbb{R} a \mathbb{R}^n . Para cada t , el operador actúa sobre la integral para dar un elemento de \mathbb{R}^n . Así, $t \rightarrow x(t)$ es una función bien definida de \mathbb{R} hacia \mathbb{R}^n .

Verificamos que (1.1.18) es una solución de (1.1.14), diferenciando $x(t)$ en (1.1.18)

$$x'(t) = Ae^{tA} \left[\int_0^t e^{-As} B(s) ds + K \right] + B(t)$$

$$x'(t) = Ax(t) + B(t).$$

Por lo tanto, (1.1.18) es de hecho una solución de (1.1.14).

Que cada solución de (1.1.14) deba ser de la forma (1.1.18) puede ser percibida de la siguiente forma:

Sea $y : \mathbb{R}^n \rightarrow E$ una segunda solución de (1.1.14) entonces

$$x' - y' = A(x - y).$$

Así, de las anteriores secciones se tiene: $x - y = e^{tA} K_0$, $K_0 \in \mathbb{R}^n$.

Esto implica que y es de la forma (1.1.18) (tal vez con una constante diferente $K \in \mathbb{R}^n$).

Observemos que si $B(t)$ en (1.1.14) es solo definida en algún intervalo, en lugar de todo \mathbb{R} , por los métodos anteriores obtenemos una solución $x(t)$ definida para t en ese mismo intervalo.

Obtenemos más información sobre (1.1.14) reescribiendo la solución general (1.1.18) en la forma

$$x(t) = \mu(t) + e^{At} K,$$

donde $\mu(t) = e^{At} \int_0^t e^{-As} B(s) ds$, observemos que $\mu(t)$ es también una solución a (1.1.14) mientras $e^{At} K$ es una solución a la ecuación homogénea

$$y' = Ay, \tag{1.1.19}$$

el cual se obtiene de (1.1.14) reemplazando $B(t)$ con 0. De hecho, si $v(t)$ es alguna solución para (1.1.14) y $y(t)$ cualquier solución para (1.1.19) entonces claramente $x = v + y$ es otra solución para (1.1.14).

Por lo tanto, la solución general a (1.1.14) se obtiene de una solución particular añadiéndole la solución general de la ecuación homogénea correspondiente.

En resumen se tiene

Teorema 3. *Sea $u(t)$ una solución particular de la ecuación $x' = Ax + B(t) \dots (1.1.14)$.*

Entonces, cada solución de (1.1.14) tiene la forma $u(t) + v(t)$ donde $v(t)$ es una solución de la ecuación homogénea

$$x' = Ax. \tag{1.1.20}$$

Recíprocamente, la suma de una solución de (1.1.14) y una solución de (1.1.20) es una solución de (1.1.14). (Hirsch [4] pág. 101)

Ejemplo 3. Encontrar la solución general a

$$\begin{aligned}x_1' &= -x_2 \\x_2' &= x_1 + t.\end{aligned}$$

Veamos

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = Ax + B(t).$$

Así, una solución es

$$x(t) = e^{tA} \left[\int_0^t e^{-As} B(s) ds + K \right]; K \in \mathbb{R}^n.$$

Calculemos e^{-As}

$$e^{-As} = \begin{bmatrix} \cos s & \operatorname{sen} s \\ -\operatorname{sen} s & \cos s \end{bmatrix}.$$

Y la integral es

$$\int_0^t \begin{bmatrix} \cos s & \operatorname{sen} s \\ -\operatorname{sen} s & \cos s \end{bmatrix} B(s) ds = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} t - t \operatorname{cost} \\ \operatorname{cost} + t \operatorname{sen} t - 1 \end{bmatrix}.$$

Ahora calculemos e^{At}

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \operatorname{cost} & -\operatorname{sent} \\ \operatorname{sent} & \operatorname{cost} \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, la solución general es

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{cost} & -\operatorname{sent} \\ \operatorname{sent} & \operatorname{cost} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{sen} t - t \operatorname{cost} + K_1 \\ \operatorname{cost} + t \operatorname{sen} t - 1 + K_2 \end{bmatrix}.$$

Realizando la multiplicación de matrices se produce

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t + \operatorname{sent} + K_1 \operatorname{cost} - K_2 \operatorname{sent} \\ 1 - \operatorname{cost} + K_1 \operatorname{sen} t + K_2 \operatorname{cost} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}x_1(t) &= -t + K_1 \operatorname{cost} + (1 - K_2) \operatorname{sent} \\x_2(t) &= 1 - (1 - K_2) \operatorname{cost} + K_1 \operatorname{sen} t\end{aligned}$$

es la solución cuyo valor en $t = 0$ es $x_1(0) = K_1$, $x_2(0) = K_2$.

Demostración. Inducción sobre n .

Para $n = 2$

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_2, \\x'_2 &= -a_2x_1 - a_1x_2,\end{aligned}$$

entonces

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \implies p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2.$$

Asumamos que la proposición es verdadera para $(n - 1)$, es decir,

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_2 \\x'_2 &= x_3 \\&\vdots \\x'_{n-1} &= -a_{n-1}x_1 - a_{n-2}x_2 - \dots - a_1x_{n-1}.\end{aligned}$$

Así, se tiene

$$A_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

entonces

$$\det(\lambda I - A_{n-1}) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & \dots & a_2 & \lambda + a_1 \end{bmatrix},$$

es decir,

$$p(\lambda) = \lambda^{n-1} + a_1\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}.$$

Sea A_{n-1} la submatriz $(n-1) \times (n-1)$ de A que consta de las últimas $(n-1)$ filas y las últimas $(n-1)$ columnas.

Por demostrar para una matriz $(n \times n)$.

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix},$$

así, se tiene

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ a_n & a_{n-1} & \dots & \dots & a_2 & \lambda + a_1 \end{bmatrix}.$$

Luego expandiendo a lo largo de la primera columna, se tiene

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \lambda \det(\lambda I - A_{n-1}) + a_n \\ &= \lambda (\lambda^{n-1} + a_1\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}) + a_n \\ &= \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n, \end{aligned}$$

esto por la hipótesis para $(n-1)$.

Por lo tanto, $p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$, así se cumple para n . \square

Así, a través de esta proposición se obtiene directamente el polinomio característico de la ecuación para la ecuación diferencial de orden superior (1.1.23).

Retomemos la primera ecuación de la subsección

$$s'' + as' + bs = 0 \dots (1.1.21)$$

Así, se tiene que

$$\left. \begin{array}{l} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -bx_1 - ax_2 \end{array} \right\} \rightarrow \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -b & \lambda + a \end{bmatrix} = \lambda^2 + a\lambda + b.$$

Denotemos las raíces de la ecuación polinómica $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$ por λ_1 y λ_2 .

Caso 1.- Supongamos primero que estas raíces son reales y distintas: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces (1.1.21) se reduce al sistema de primer orden

$$\left. \begin{aligned} x_1' &= x_2 = s' \\ x_2' &= s'' = -bx_1 - ax_2, \end{aligned} \right\} \quad (1.1.26)$$

encontrando un sistema de coordenadas diagonalizadoras (y_1, y_2) ($y' = By, x = Qy$).

Cada solución de (1.1.26) de estas coordenadas es entonces

$$\begin{aligned} y_1(t) &= K_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) &= K_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

con constantes arbitrarias K_1, K_2 .

Por lo tanto, $x_1(t)$ o $s(t)$ es una cierta combinación lineal

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 e^{\lambda_1 t} \\ K_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Q_{11}K_1 e^{\lambda_1 t} + Q_{12}K_2 e^{\lambda_2 t} \\ Q_{21}K_1 e^{\lambda_1 t} + Q_{22}K_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Así, se tiene

$$s(t) = Q_{11}K_1 e^{\lambda_1 t} + Q_{12}K_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Concluimos que si λ_1, λ_2 son reales y distintos entonces cada solución de (1.1.21) es de la forma

$$s(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

para algunas constantes (*reales*) C_1, C_2 . Estas constantes pueden ser encontradas si los valores iniciales $s(t_0), s'(t_0)$ son dados.

Caso 2.- Supongamos que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ son reales y la matriz A no es diagonalizable. En este caso la matriz 2×2 en (1.1.26) es similar a la matriz de la forma

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ \beta & \lambda \end{bmatrix}, \text{ donde } \beta \neq 0.$$

En las nuevas coordenadas, el sistema equivalente de primer orden es

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= \lambda y_1 \\ y_2'(t) &= \beta y_1 + \lambda y_2. \end{aligned}$$

Por la subsección (1.1.2), encontramos que la solución general a dicho sistema es

$$\begin{aligned}y_1(t) &= K_1 \exp(\lambda t) \\ y_2(t) &= K_1 \beta t \exp(\lambda t) + K_2 \exp(\lambda t)\end{aligned}$$

con K_1 y K_2 constantes arbitrarias. En las coordenadas originales, las soluciones para el sistema equivalente de primer orden son combinaciones lineales de estos

$$x(t) = Qy(t)$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} s(t) \\ s'(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 e^{\lambda t} \\ K_1 \beta t e^{\lambda t} + K_2 e^{\lambda t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Q_{11} K_1 e^{\lambda t} + Q_{12} (K_1 \beta t e^{\lambda t} + K_2 e^{\lambda t}) \\ Q_{21} K_1 e^{\lambda t} + Q_{22} (K_1 \beta t e^{\lambda t} + K_2 e^{\lambda t}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t} \\ C_3 e^{\lambda t} + C_4 t e^{\lambda t} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que si el polinomio característico de (1.1.21) tiene solo una raíz $\lambda \in \mathbb{R}$, la solución tiene la forma

$$s(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$$

donde los valores C_1 y C_2 pueden ser determinadas de las condiciones iniciales.

Ejemplo 4. Resolver el problema de valor inicial

$$\begin{aligned}s'' + 2s' + s &= 0 \\ s(0) &= 1, s'(0) = 2.\end{aligned}\tag{1.1.27}$$

Introducimos nuevas variables para reducir (1.1.27) a un sistema de primer orden de dos ecuaciones

$$\begin{aligned}x_1 &= s & \implies & x_1' = x_2 \\ x_2 &= x_1' = s' & \implies & x_2' = -x_1 - 2x_2\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \text{ donde } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Luego

$$s(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$$

donde los valores de C_1 y C_2 pueden ser determinados de las condiciones iniciales.

Así, se tiene

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda + 2 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1.$$

Luego $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$, por lo cual se tiene una única raíz $\lambda = -1$.

Por lo tanto, la solución general es

$$\begin{aligned} s(t) &= c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} \\ s'(t) &= -c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t} - c_2 t e^{-t} = (c_2 - c_1) e^{-t} - c_2 t e^{-t}. \end{aligned}$$

De las condiciones iniciales en (1.1.27) obtenemos

$$\begin{aligned} 1 &= s(0) = c_1 \\ 2 &= s'(0) = -c_1 + c_2 \implies c_1 = 1, c_2 = 3. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución a (1.1.27) es

$$s(t) = e^{-t} + 3t e^{-t}.$$

Caso 3.- El caso final a considerar es cuando λ_1 y λ_2 son números complejos conjugados no reales.

Suponga $\lambda_1 = u + iv$ y $\lambda_2 = u - iv$ entonces obtenemos una solución

$$y_1(t) = e^{ut} [K_1 \cos vt - K_2 \operatorname{sen} vt]$$

$$y_2(t) = e^{ut} [K_1 \operatorname{sen} vt + K_2 \cos vt].$$

Así, obtenemos $s(t) = e^{ut} [C_1 \cos vt - C_2 \operatorname{sen} vt]$ para algunas constantes C_1, C_2 .

Un caso especial de la última ecuación es el *Oscilador Armónico*

$$s'' + b^2 s = 0,$$

el cual reducimos a un sistema de primer orden de dos ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 = s &\implies x'_1 = x_2 \\ x_2 = x'_1 = s' &\implies x'_2 = -b^2 x_1. \end{aligned}$$

Así, se tiene

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ donde } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \det \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -b^2 & \lambda \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 + b^2 \\ \implies p(\lambda) &= \lambda^2 + b^2. \end{aligned}$$

Por lo cual los autovalores son $\lambda_1 = ib$ y $\lambda_2 = -ib$.

Así, tenemos que la solución es

$$s(t) = c_1 \cos bt + c_2 \operatorname{sen} bt.$$

Resumamos estos tres casos en el siguiente teorema.

Teorema 4. Sea λ_1, λ_2 las raíces del polinomio $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$ entonces cada solución de la ecuación diferencial

$$s'' + as' + bs = 0$$

es del siguiente tipo:

Caso (a).- λ_1, λ_2 son reales distintos : $s(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$.

Caso (b).- $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ es real donde la matriz A no es diagonalizable :

$$s(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}.$$

Caso (c).- $\lambda_1 = u + iv$ y $\lambda_2 = u - iv$ donde $v \neq 0$:

$$s(t) = e^{ut} [C_1 \cos vt - C_2 \operatorname{sen} vt].$$

En cada caso C_1, C_2 son constantes (reales) determinadas por condiciones iniciales de la forma

$$s(t_0) = \alpha, s'(t_0) = \beta.$$

La ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden

$$s^{(n)} + a_1 s^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} s^{(1)} + a_n s = 0 \quad (1.1.28)$$

puede también ser resuelta cambiándola a un sistema equivalente de primer orden. Los sistemas de primer orden que provienen de ecuaciones de n-ésimo orden tienen propiedades especiales que permiten resolverlos con bastante facilidad.

Observación 2. Si $s(t)$ y $q(t)$ son soluciones para (1.1.28), también lo es la función $s(t) + q(t)$; si K es cualquier número real, entonces $Ks(t)$ es una solución.

En otras palabras, el conjunto de todas las soluciones es un espacio vectorial. Y dado que n condiciones iniciales determinan una solución única (considerar el correspondiente sistema de primer orden), la dimensión del espacio vectorial de soluciones es igual al orden de la ecuación diferencial.

Por otro lado, una ecuación diferencial lineal no homogénea de orden superior

$$s^{(n)} + a_1 s^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} s^{(1)} + a_n s = b(t) \quad (1.1.29)$$

puede ser resuelta (en principio) reduciéndolo a un sistema diferencial lineal no homogéneo de primer orden

$$x' = Ax + B(t).$$

Aplicando variación de parámetros (Subsección 1.1.3). Observemos que

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}.$$

Como en el caso de los sistemas diferenciales de primer orden, la solución general a (1.1.29) puede ser expresada como la solución general a la ecuación diferencial homogénea correspondiente

$$s^{(n)} + a_1 s^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} s^{(1)} + a_n s = 0,$$

más una solución particular de (1.1.29).

Ejemplo 5. Considere

$$s'' + s = t - 1. \quad (1.1.30)$$

Veamos la solución general de la ecuación homogénea

$$s'' + s = 0 \implies \begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -x_1 \end{cases} \implies \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

donde los autovalores de $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ son $\lambda = \pm i$.

Así, la solución general de la ecuación homogénea es $s(t) = A \cos t + B \sin t$, con $A, B \in \mathbb{R}$, luego la solución particular a (1.1.30) es $s(t) = t - 1$.

Veamos

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -x_1 + t - 1 \end{cases} \implies A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ t - 1 \end{bmatrix}$$

donde la solución es $x(t) = e^{At} \left[\int_0^t e^{-As} B(s) ds + K \right]$.

Así, se tiene

$$e^{-As} = \begin{bmatrix} \cos s & -\operatorname{sens} s \\ \operatorname{sens} s & \cos s \end{bmatrix}, e^{At} = \begin{bmatrix} \operatorname{cost} & \operatorname{sents} \\ -\operatorname{sents} & \operatorname{cost} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-As} B(s) ds &= \int_0^t \begin{bmatrix} \cos s & -\operatorname{sens} s \\ \operatorname{sens} s & \cos s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ s - 1 \end{bmatrix} ds \\ &= \int_0^t \begin{bmatrix} -(s-1) \operatorname{sens} s \\ (s-1) \cos s \end{bmatrix} ds \\ &= \begin{bmatrix} t \operatorname{cost} - \operatorname{sents} - \operatorname{cost} + 1 \\ t \operatorname{sents} + \operatorname{cost} - 1 - \operatorname{sents} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} \operatorname{cost} & \operatorname{sents} \\ -\operatorname{sents} & \operatorname{cost} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} t \operatorname{cost} - \operatorname{sents} - \operatorname{cost} + 1 \\ t \operatorname{sents} + \operatorname{cost} - 1 - \operatorname{sents} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} t - 1 + (1 + K_1) \operatorname{cost} + (K_2 - 1) \operatorname{sents} \\ 1 - (1 + K_1) \operatorname{sents} + (K_2 - 1) \operatorname{cost} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} t - 1 + (1 + K_1) \operatorname{cost} + (K_2 - 1) \operatorname{sents} \\ 1 - (1 + K_1) \operatorname{sents} + (K_2 - 1) \operatorname{cost} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde $\begin{bmatrix} s(t) \\ s'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t - 1 + (1 + K_1) \operatorname{cost} + (K_2 - 1) \operatorname{sents} \\ 1 - (1 + K_1) \operatorname{sents} + (K_2 - 1) \operatorname{cost} \end{bmatrix}$ si las condiciones iniciales en (1.1.30) son $s(0) = -1$ y $s'(0) = 1$, por lo tanto, la solución general a (1.1.30) es

$$(A \operatorname{cost} + B \operatorname{sents}) + (t - 1).$$

Finalmente, concluimos que los sistemas de orden superior pueden reducirse a sistemas de primer orden.

Por ejemplo, considere el sistema

$$\begin{aligned}x'' + x' + 2y' - 3x &= 0 \\y'' + 5x' - 4y &= 0.\end{aligned}$$

Aquí x y y son funciones desconocidas de valor real de variable real .

Introduciendo nuevas funciones $u = x'$, $v = y'$. El sistema es equivalente al sistema de primer orden de 4 dimensiones

$$\begin{aligned}x' &= u \\u' &= 3x - u - 2v \\y' &= v \\v' &= -5u + 4y.\end{aligned}$$

1.2. Pozos y Fuentes en \mathbb{R}^n

Supongamos que un estado de algún sistema *físico* (o mecánico, biológico, económico, etc.) está determinado por los valores de n parámetros; el espacio de todos los estados se considera un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$. Suponemos que el comportamiento dinámico del sistema se modela matemáticamente por las curvas solución de una ecuación diferencial autónoma

$$x' = f(x); f : U \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (1.2.1)$$

Nos interesa el comportamiento a largo plazo de las trayectorias (es decir, curvas de solución) de (1.2.1), en especial los estados de equilibrio. Tal estado $\bar{x} \in U$ es uno que no cambia con el tiempo. Matemáticamente, esto significa que la función constante $t \rightarrow \bar{x}$ es una solución a (1.2.1), que equivale a $f(\bar{x}) = 0$.

Las siguientes definiciones serán de mucha utilidad.

Definición 6. Definimos un *punto de equilibrio* de (1.2.1) como el punto $\bar{x} \in U$ tal que $f(\bar{x}) = 0$.

Desde un punto de vista físico, solo los equilibrios que son *estables* son de interés, por ejemplo, un péndulo equilibrado en posición vertical está en equilibrio, pero es muy poco probable que ocurra; además, la más mínima alteración alterara por completo el comportamiento del péndulo. Tal equilibrio es *inestable*. Por otro lado, la posición de reposo hacia abajo es *estable*; si se le perturba levemente, el péndulo se balanceará a sus alrededores y se acercará gradualmente a él nuevamente.

Cabe mencionar que la estabilidad es estudiada con detalle en el siguiente capítulo, en esta sección restringiremos la atención a los sistemas lineales y nos concentramos en el tipo más simple y más importante de equilibrio estable.

Definición 7. Consideremos la ecuación lineal (Hirsch [4] pág. 145.)

$$x' = Ax, A \in L(\mathbb{R}^n). \quad (1.2.2)$$

Se dice que el origen $0 \in \mathbb{R}^n$ es un *pozo* (sink) si todos los autovalores de A tienen partes reales negativas. También decimos que el flujo lineal e^{tA} es una *contracción* ya que todas las soluciones convergen al origen uniformemente y exponencialmente.

Teorema 5. Sea $A \in L(\mathbb{R}^n)$ y sea $x(t)$ una solución de $x' = Ax$. Entonces cada coordenada $x_j(t)$ es una combinación lineal de las funciones

$$t^k e^{ta} \cos bt, t^l e^{ta} \sin bt$$

donde $a + bi$ representa a los autovalores de A con $b \geq 0$ y $k, l = 0, \dots, n-1$. (Hirsch [4] pág. 135 y Doering [3] pág. 88)

Demostración. Sea $A \in L(\mathbb{R}^n)$ y $x(t)$ una solución de $x' = Ax \dots (1,2,2)$. Supongamos que A es un λ -bloque de Jordan, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{Así, } A = \lambda I + N \text{ donde } N = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ como se presentó en la Subsección}$$

1.1.1 y 1.1.2, sabemos que la solución para (1.2.2) con el valor inicial $x(0) = C \in \mathbb{R}^n$ es

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{tA} C \\ &= e^{t\lambda} e^{tN} C \\ &= e^{t\lambda} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k N^k}{k!} \right) C \\ &= e^{t\lambda} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ t & 1 & & & \\ \frac{t^2}{2!} & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} & \cdots & \frac{t^2}{2!} & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

En coordenadas,

$$x_j(t) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{t^k}{k!} C_{j-k}. \quad (1.2.3)$$

Notemos que los factoriales pueden ser absorbidos dentro de las constantes. Supongamos ahora que $\lambda = a + bi$, $b \neq 0$ y que A es un λ -bloque real

$$\begin{bmatrix} D & & & \\ I & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & I & D \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sea m el número de bloques D , de modo, que $n = 2m$. La solución para (1.2.2) puede ser calculada usando exponenciales, pero es más fácil considerar la siguiente ecuación

$$z' = Bz \quad (1.2.4)$$

donde $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^m$ es una función desconocida y B es la matriz compleja $m \times m$

$$\begin{bmatrix} \mu & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \mu \end{bmatrix}, \mu = a + ib.$$

Identificamos \mathbb{C}^m con \mathbb{R}^{2m} por la correspondencia

$$(x_1 + iy_1, \dots, x_m + iy_m) = (x_1, y_1, \dots, x_m, y_m).$$

La solución a (1.2.4) es formalmente la misma que (1.2.3) con un cambio de notación

$$z_j(t) = e^{\mu t} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{t^k}{k!} C_{j-k}, j = 1, \dots, m. \quad (1.2.5)$$

Sea $C_k = L_k + iM_k$; $k = 1, \dots, m$ y tome partes reales e imaginarias de (1.2.5) usando la identidad

$$e^{t(a+ib)} = e^{at} (\cos bt + i \operatorname{sen} bt).$$

Así, obtenemos

$$x_j(t) = e^{at} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{t^k}{k!} [L_{j-k} \cos bt - M_{j-k} \operatorname{sen} bt],$$

$$y_j(t) = e^{at} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{t^k}{k!} [M_{j-k} \cos bt + L_{j-k} \operatorname{sen} bt],$$

con $j = 1, \dots, m$. Por lo tanto, la solución a (1) con las condiciones iniciales

$$x_j(0) = L_j, y_j(0) = M_j.$$

Luego, observemos que

(1). Si λ es real cada coordenada $x_j(t)$ de cualquier solución para (1.2.2) es una combinación lineal (con coeficientes constantes) de las funciones

$$e^{\lambda t} t^k, k = 0, \dots, n.$$

(2). Si $\lambda = a + bi$, $b \neq 0$ y $n = 2m$ entonces cada coordenada $x_j(t)$ de cualquier solución para (1.2.2) es una combinación lineal de las funciones

$$e^{at} t^k \cos bt, e^{at} t^k \sin bt; 0 \leq k \leq m.$$

Ahora consideremos la ecuación (1.2.2) donde A es cualquier matriz real $n \times n$. Por un cambio adecuado de coordenadas $x = Py$ transformamos A en la forma canónica $B = PAP^{-1}$.

La ecuación

$$y' = By \tag{1.2.6}$$

es equivalente a (1.2.2), cada solución $x(t)$ a (1.2.2) tiene la forma

$$x(t) = Py(t)$$

donde $y(t)$ solución de (1.2.6).

La ecuación (1.2.6) se divide en un conjunto de ecuaciones desacopladas, cada uno de la forma

$$\mu' = B_T \mu$$

donde B_T es uno de los bloques en la forma canónica real B de A . Por lo tanto, las coordenadas de las soluciones a (1.2.6) son coordenadas lineales de la función descrita en (1) y (2), donde λ o $a + ib$ es un autovalor de B , por lo tanto, de A . Entonces, lo mismo se aplica a la ecuación original (1.2.2). \square

Los siguientes teoremas nos dan información sobre los autovalores de $A \in L(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 6. *Suponga que cada autovalor de $A \in L(\mathbb{R}^n)$ tiene parte real negativa. Entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

para cada solución a $x' = Ax$.

Demostración. Sea $x(t)$ una solución de $x' = Ax$ entonces por el Teorema 5 cada coordenada $x_j(t)$ de la solución $x(t)$ es una combinación lineal de las funciones

$$t^k e^{ta} \cos bt \text{ y } t^l e^{ta} \operatorname{sen} bt,$$

es decir,

$$x_j(t) = C_j t^k e^{ta} \cos bt + D_j t^l e^{ta} \operatorname{sen} bt.$$

Como $|\cos bt| \leq 1$, $|\operatorname{sen} bt| \leq 1$ y el autovalor $\lambda = a \pm ib$ de A tiene parte real positiva, es decir, $a < 0$.

Así, $\lim_{t \rightarrow \infty} t^k e^{ta} = 0$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} t^l e^{ta} = 0$, pues el crecimiento exponencial es mucho mayor que la polinomial.

Por lo tanto, tenemos, que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. □

Teorema 7. Si cada solución de $x' = Ax$ tiende a 0 cuando $t \rightarrow \infty$, es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

entonces cada autovalor de A tiene parte real negativa.

Demostración. (Contrareciproco) Sea $w \in \mathbb{C}^n$ un autovector complejo de A con autovalor complejo asociado a $\lambda = a + ib$ con $b \neq 0$. Sea $w = u + iv$ una descomposición de w con $u, v \in \mathbb{R}^n$, $\{u, v\}$ L.I., tenemos $Aw = \lambda w$ escribiendo $z(t) = e^{\lambda t} w$ obtenemos

$$z'(t) = \lambda e^{\lambda t} w = e^{\lambda t} \lambda w = e^{\lambda t} Aw = Ae^{\lambda t} w = Az(t).$$

Así, $z(t)$ es una solución compleja de $x' = Ax$.

Luego como $\lambda = a + ib$

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{(a+ib)t} w = e^{at} (\cos bt + i \operatorname{sen} bt) (u + iv) \\ &= e^{at} [u \cos bt - v \operatorname{sen} bt] + i e^{at} [u \operatorname{sen} bt + v \cos bt], \end{aligned}$$

de modo que,

$$z(t) = x(t) + iy(t)$$

Así,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{at} [u \cos bt - v \operatorname{sen} bt] \\ y(t) &= e^{at} [u \operatorname{sen} bt + v \cos bt] \end{aligned}$$

son soluciones de $x' = Ax$.

Por lo tanto, supongamos que $a \geq 0$ en $\lambda = a + ib$ entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) \neq 0$. □

Definición 8. Decimos que el flujo e^{tA} de A (*matriz* $n \times n$) es una contracción (Doering [3] pág. 99), sí existen constantes $c > 0$ y $\tau > 0$ tal que

$$\left| e^{tA}x \right| \leq ce^{-\tau t} |x|, \forall t \geq 0 \quad y \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Definición 9. Sea T un operador en \mathbb{R}^n y $T_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ su complejización. Si $T_{\mathbb{C}}$ es diagonalizable, decimos que T es semisimple.

Ejemplo. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

donde sus autovalores son $\lambda = \pm i$. Un autovector perteneciente a $\lambda = i$ es

$$w = (-1, i) = (-1, 0) + i(0, 1) = u + iv.$$

Elegimos la nueva base $\{v, u\}$ para $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$ con $v = (0, 1)$ y $u = (-1, 0)$. Así,

$$\begin{aligned} T_{\mathbb{C}}w &= \lambda w \\ T_{\mathbb{C}}(u + iv) &= i(u + iv) \\ T_{\mathbb{C}}u + iT_{\mathbb{C}}v &= iu - v. \end{aligned}$$

Luego, como

$$T_{\mathbb{C}}u + iT_{\mathbb{C}}v = T_{\mathbb{C}}(u + iv) = Tu + iTv.$$

El siguiente lema, será de mucha utilidad en la demostración de dos teoremas importantes que se enuncian más adelante.

Lema 3. Sea A un operador en un espacio vectorial real E y supongamos

$$\alpha \leq \operatorname{Re}(\lambda) \leq \gamma \tag{1.2.7}$$

para cada autovalor λ de A . Entonces E tiene una base tal que en el correspondiente producto interno y norma

$$\alpha |x|^2 \leq \langle Ax, x \rangle \leq \gamma |x|^2, \forall x \in E. \tag{1.2.8}$$

Demostración. Sea $c \in \mathbb{R}$ tal que $R_{\lambda} < c < \gamma$ para cada autovalor λ de A . Supongamos que A es semisimple, es decir, su complejización $A_{\mathbb{C}}$ es diagonalizable entonces \mathbb{R}^n tiene una descomposición de suma directa

$$\mathbb{R}^n = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r \oplus F_1 \oplus \cdots \oplus F_s$$

donde cada E_j es un subespacio uno-dimensional generado por un autovector e_j de A correspondiente al autovalor λ_j y cada F_k es un subespacio bidimensional invariante bajo A ,

teniendo una base $\{f_j, g_j\}$ dando a A/F_k la matriz $\begin{bmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{bmatrix}$ donde $a_k + ib_k$ autovalor de A .

Por suposición $\lambda_j < c$ y $a_k < c$.

Dado en \mathbb{R}^n , el producto interno definido por

$$\langle e_j, e_j \rangle = \langle f_k, f_k \rangle = \langle g_k, g_k \rangle = 1$$

y todos los otros productos internos entre e_j, f_k y g_k son 0.

$$\langle e_j, f_k \rangle = 0 = \langle f_k, g_k \rangle = \langle e_j, g_k \rangle \quad \forall k, \forall j.$$

Así, $\langle Ae_j, e_j \rangle = \langle \lambda e_j, e_j \rangle = \lambda_j \langle e_j, e_j \rangle = \lambda_j < c$.

Como $Aw = \lambda_k w$, $\lambda_k = a_k + ib_k$ y $w = f_k + ig_k$, se tiene

$$\begin{aligned} A(f_k + ig_k) &= (a_k + ib_k)(f_k + ig_k) = (a_k f_k - b_k g_k) + i(a_k g_k + b_k f_k) \\ Af_k + iAg_k &= (a_k f_k - b_k g_k) + i(a_k g_k + b_k f_k). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \langle Af_k, f_k \rangle &= \langle a_k f_k - b_k g_k, f_k \rangle = \langle a_k f_k, f_k \rangle - \langle b_k g_k, f_k \rangle = a_k \langle f_k, f_k \rangle - b_k \langle g_k, f_k \rangle = a_k < c, \\ \langle Ag_k, g_k \rangle &= \langle a_k g_k + b_k f_k, g_k \rangle = \langle a_k g_k, g_k \rangle + \langle b_k f_k, g_k \rangle = a_k \langle g_k, g_k \rangle + b_k \langle f_k, g_k \rangle = a_k < c. \end{aligned}$$

Luego,

$$x = \sum C_l \lambda_l + \sum D_n f_n + \sum G_m g_m$$

Así, se tiene

$$\begin{aligned} \langle Ax, x \rangle &= \langle A(\sum C_l e_l + \sum D_n f_n + \sum G_m g_m), \sum C_l e_l + \sum D_n f_n + \sum G_m g_m \rangle \\ &= \langle A \sum C_l e_l + A \sum D_n f_n + A \sum G_m g_m, \sum C_l e_l + \sum D_n f_n + \sum G_m g_m \rangle \\ &= \langle A \sum C_l e_l, \sum C_l e_l + \sum D_n f_n + \sum G_m g_m \rangle \\ &\quad + \langle A \sum D_n f_n, \sum C_l e_l + \sum D_n f_n + \sum G_m g_m \rangle \\ &\quad + \langle A \sum G_m g_m, \sum C_l e_l + \sum D_n f_n + \sum G_m g_m \rangle \\ &= \langle A \sum C_l e_l, \sum C_l e_l \rangle + \langle A \sum C_l e_l, \sum D_n f_n \rangle + \langle A \sum C_l e_l, \sum G_m g_m \rangle \\ &\quad + \langle A \sum D_n f_n, \sum C_l e_l \rangle + \langle A \sum D_n f_n, \sum D_n f_n \rangle + \langle A \sum D_n f_n, \sum G_m g_m \rangle \\ &\quad + \langle A \sum G_m g_m, \sum C_l e_l \rangle + \langle A \sum G_m g_m, \sum D_n f_n \rangle + \langle A \sum G_m g_m, \sum G_m g_m \rangle. \\ &= \langle A \sum C_l e_l, \sum C_l e_l \rangle + \langle A \sum D_n f_n, \sum D_n f_n \rangle + \langle A \sum G_m g_m, \sum G_m g_m \rangle \leq c|x|^2. \end{aligned}$$

Entonces $\langle Ax, x \rangle \leq c|x|^2$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Sean A cualquier operador y B una base para \mathbb{R}^n , tal que A tenga una matriz en forma canónica real

$$A = \text{diag} \{A_1, \dots, A_p\},$$

donde cada A_j tiene la forma

$$\begin{bmatrix} \alpha_j & & & & \\ & 1 & \cdots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \alpha_j \end{bmatrix} \quad (1.2.9)$$

o

$$\begin{bmatrix} D_j & & & & \\ & I & \cdots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & I & D_j \end{bmatrix}, \quad (1.2.10)$$

donde $D_j = \begin{bmatrix} \alpha_k & -\beta_k \\ \beta_k & \alpha_k \end{bmatrix}$ y $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Si dotamos a un subespacio E_j de E correspondiente a un bloque A_j la base B_j tal que satisfaga el lema para A_j entonces todas estas bases juntas satisfacen el lema para A . Por lo tanto, podemos asumir que A es un bloque único.

Para la primera clase de bloque (1.2.9), podemos escribir $A = S + N$ donde S tiene la matriz $\alpha_j I$ y

$$N = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & \cdots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, los vectores base $\{e_1, \dots, e_n\}$ son autovectores de S , mientras que

$$\begin{aligned} Ne_1 &= e_2 \\ Ne_2 &= e_3 \\ &\vdots \\ Ne_{n-1} &= e_n \\ Ne_n &= 0. \end{aligned}$$

Ahora, sea $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño y consideremos una nueva base

$$B_\varepsilon = \left\{ e_1, \frac{1}{\varepsilon} e_2, \dots, \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} e_n \right\} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}.$$

De hecho B_ε esta compuesta por autovectores de S , luego

$$\begin{aligned} N\bar{e}_1 &= \varepsilon\bar{e}_2 \\ N\bar{e}_2 &= \varepsilon\bar{e}_3 \\ &\vdots \\ N\bar{e}_{n-1} &= \varepsilon\bar{e}_n \\ N\bar{e}_n &= 0. \end{aligned}$$

Así, la matriz B_ε de A es

$$\begin{bmatrix} \alpha_j & & & & \\ \varepsilon & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & \varepsilon & \alpha_j \end{bmatrix}. \quad (1.2.11)$$

Sea $\langle x, y \rangle_\varepsilon$ que denota el producto interno correspondiente a B_ε considerando la matriz (1.2.11)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\langle Ax, x \rangle_\varepsilon}{\langle x, x \rangle_\varepsilon} = \frac{\langle Sx, x \rangle}{|x|^2}.$$

Por lo tanto, si ε suficientemente pequeño, la base B_ε satisface el Lema para el bloque (1.2.9).

Para la segunda clase de bloque (1.2.10), podemos escribir $A = S + N$ donde S tiene la matriz

$$D_j I \quad y \quad N = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ I & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & I & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces, los vectores base $\{e_1, \dots, e_n\}$ son autovectores de S , mientras que

$$\begin{aligned} Ne_1 &= e_2 \\ Ne_2 &= e_3 \\ &\vdots \\ Ne_{n-1} &= e_n \\ Ne_n &= 0. \end{aligned}$$

Ahora, sea $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño y consideremos una nueva base

$$B_\varepsilon = \left\{ e_1, \frac{1}{\varepsilon} e_2, \dots, \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} e_n \right\} = \{ \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n \}.$$

De hecho, B_ε contiene los autovectores de S , luego

$$\begin{aligned} N\bar{e}_1 &= \varepsilon\bar{e}_2 \\ N\bar{e}_2 &= \varepsilon\bar{e}_3 \\ &\vdots \\ N\bar{e}_{n-1} &= \varepsilon\bar{e}_n \\ N\bar{e}_n &= 0. \end{aligned}$$

Así, la matriz B_ε de A es

$$\begin{bmatrix} D_j & & & & \\ \varepsilon I & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & \varepsilon I & D_j \end{bmatrix}. \quad (1.2.12)$$

Sea $\langle x, y \rangle_\varepsilon$ que denota el producto interno correspondiente a B_ε , considerando la matriz (1.2.12)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\langle Ax, x \rangle_\varepsilon}{\langle x, x \rangle_\varepsilon} = \frac{\langle Sx, x \rangle}{|x|^2}.$$

Por lo tanto, si ε suficientemente pequeño, la base B_ε satisface el Lema para el bloque (1.2.10). \square

Teorema 8. *Sea A un operador en un espacio vectorial \mathbb{R}^n . Las siguientes afirmaciones son equivalentes (Hirsch [4] pág. 145)*

- a) *El origen es un pozo para la ecuación diferencial lineal $x' = Ax$.*
- b) *Para cualquier norma en \mathbb{R}^n hay constantes $k > 0$, $b > 0$ tal que*

$$\left| e^{tA} x \right| \leq k e^{-tb} |x|, \forall t \geq 0 \text{ y } x \in \mathbb{R}^n.$$

- c) *Existe $b > 0$ y una base β de \mathbb{R}^n cuya norma correspondiente satisface :*

$$\left| e^{tA} x \right|_\beta \leq e^{-tb} |x|_\beta, \forall t \geq 0 \text{ y } x \in \mathbb{R}^n.$$

Demostración. (c) \Rightarrow (b) Supongamos que existe $b > 0$ y una base β de \mathbb{R}^n cuya norma correspondiente satisface

$$\left| e^{tA}x \right|_{\beta} \leq e^{-tb} |x|_{\beta}, \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.2.13)$$

Por el Teorema de la norma (la demostración se encuentra en el Apéndice 3).
Sea $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ cualquier norma, existen constantes $\alpha > 0, \mu > 0$ tal que

$$\alpha |x| \leq N(x) \leq \mu |x|, \forall x, \text{ donde } |x| \text{ norma euclidiana.}$$

Así, por el teorema enunciado se tiene

$$\alpha \left| e^{tA}x \right| \leq \left| e^{tA}x \right|_{\beta} \leq \mu \left| e^{tA}x \right|, \quad (1.2.14)$$

luego por (1.2.13) en (1.2.14)

$$\alpha \left| e^{tA}x \right| \leq \left| e^{tA}x \right|_{\beta} \leq e^{-tb} |x|_{\beta}. \quad (1.2.15)$$

Por otro lado, tenemos por el teorema enunciado que

$$\alpha |x| \leq |x|_{\beta} \leq \mu |x|, \quad (1.2.16)$$

luego por (1.2.16) en (1.2.15)

$$\begin{aligned} \alpha \left| e^{tA}x \right| &\leq e^{-tb} |x|_{\beta} \leq e^{-tb} \mu |x| \\ \left| e^{tA}x \right| &\leq e^{-tb} \frac{\mu}{\alpha} |x|. \end{aligned}$$

Como $\mu > 0, \alpha > 0 \Rightarrow \frac{\mu}{\alpha} > 0$, así

$$\left| e^{tA}x \right| \leq k e^{-tb} |x|, \quad \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n.$$

Por equivalencia de normas, el resultado obtenido es valida para cualquier norma en \mathbb{R}^n , donde $k > 0, b > 0$.

(b) \Rightarrow (a) Supongamos que para cualquier norma en \mathbb{R}^n existen constantes $k > 0, b > 0$ tal que

$$\left| e^{tA}x \right| \leq k e^{-tb} |x| \quad \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n,$$

esto muestra que el flujo es una contracción o contractivo esto por definición.

Veamos si todos los autovalores de A tienen parte real negativa.

Así,

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} |e^{tA}x| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} ke^{-tb}|x| = k \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-tb}|x| = 0.$$

Por el Teorema 7 el origen es un pozo.

(a) \Rightarrow (b) Supongamos que el origen es un pozo del sistema dinámico $x' = Ax$ entonces sus autovalores tienen partes reales negativas $\lambda = a \pm bi$, $a < 0$.

Así, el flujo e^{tA} es una contracción por lo cual existen constantes $c > 0$ y $\tau > 0$ tal que

$$|e^{tA}x| \leq ce^{-\tau t}|x|, \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$$

por equivalencia de normas esto es válido para cualquier norma.

(a) \Rightarrow (c) Recordemos que R_λ es la parte real del autovalor λ .

Supongamos el origen es un pozo para el sistema dinámico $x' = Ax$, por lo tanto todos sus autovalores tienen parte real negativa

$$\lambda = a \pm ib, \text{ con } a < 0.$$

Así,

$$c_1 < R_\lambda < c_2 < 0. \quad (1.2.17)$$

Sea (x_1, x_2, \dots, x_n) coordenadas en \mathbb{R}^n correspondientes a una base β y sea una solución $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ a $x' = Ax$.

Sea $|\cdot|_\beta$ la norma en términos de esta base, es decir, si $x = \sum_{j=1}^n x_j v_j$ entonces

$$|x|_\beta = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Entonces, para la norma y producto interno definido por β tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d|x|_\beta}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{2 \sum_{j=1}^n x_j x_j'}{2 \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^n x_j(t) x_j'(t)}{\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2(t)}} = \frac{\sum_{j=1}^n x_j(t) x_j'(t)}{|x(t)|_\beta} \\ &= \frac{\langle x(t), x'(t) \rangle_\beta}{|x(t)|_\beta} = \frac{\langle x(t), Ax(t) \rangle_\beta}{|x(t)|_\beta}. \end{aligned}$$

Además, por el Lema 3 tenemos que (1.2.17) es para todo autovalor de A entonces

$$c_1 |x(t)|_\beta^2 \leq \langle x(t), Ax(t) \rangle_\beta \leq c_2 |x(t)|_\beta^2.$$

Por lo tanto,

$$c_1 \leq \frac{\frac{\langle x(t), Ax(t) \rangle_\beta}{|x(t)|_\beta}}{|x(t)|_\beta} \leq c_2$$

$$c_1 \leq \frac{\frac{d|x(t)|_\beta}{dt}}{|x(t)|_\beta} \leq c_2$$

$$c_1 \leq \frac{d}{dt} \left(\log |x(t)|_\beta \right) \leq c_2.$$

Entonces,

$$c_1 t \leq \log |x(t)|_\beta - \log |x(0)|_\beta \leq c_2 t$$

$$e^{c_1 t} \leq \frac{|x(t)|_\beta}{|x(0)|_\beta} \leq e^{c_2 t}.$$

Así,

$$e^{c_1 t} |x(0)|_\beta \leq |x(t)|_\beta \leq e^{c_2 t} |x(0)|_\beta.$$

Como es para todos los autovalores que tienen parte real negativa $c_2 = -b < 0$ donde los autovalores de A tienen parte real menores que $-b$.

Así,

$$\begin{aligned} |x(t)|_\beta &\leq e^{-bt} |x(0)|_\beta \\ \left| e^{At} x \right|_\beta &\leq e^{-bt} |x|_\beta. \end{aligned}$$

□

Definición 10. Consideremos la ecuación lineal

$$x' = Ax, \quad A \in L(\mathbb{R}^n). \quad (1.2.18)$$

El origen $0 \in \mathbb{R}^n$ es llamado una *fuentes* (source) si cada autovalor de A tienen parte real positiva. También decimos que el flujo lineal e^{tA} es una *expansión*. (Doering [3])

Definición 11. Decimos que el flujo e^{tA} de A (*matriz* $n \times n$) es una *expansión* (Doering [3]) si existen constantes $c > 0$ y $a > 0$ tal que

$$\left| e^{tA} x \right| \geq ce^{at} |x|, \quad \forall t \geq 0 \text{ y } x \in \mathbb{R}^n.$$

Teorema 9. *Suponga que cada autovalor de $A \in L(\mathbb{R}^n)$ tiene parte real positiva. Entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = \infty$$

para cada solución de $x' = Ax$.

Demostración. Sea $x(t)$ una solución de $x' = Ax$ entonces por el Teorema 5, cada coordenada $x_j(t)$ de la solución $x(t)$ es una combinación lineal de las funciones

$$t^k e^{ta} \cos bt \text{ y } t^l e^{ta} \operatorname{sen} bt$$

donde $\lambda = a \pm bi$ representa a todos los autovalores de A con $b \geq 0$ y $k, l = 0, \dots, n-1$.

Así

$$x_j(t) = C_j t^k e^{ta} \cos bt + D_j t^l e^{ta} \operatorname{sen} bt$$

entonces

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\sum (C_j t^k e^{ta} \cos bt + D_j t^l e^{ta} \operatorname{sen} bt)^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\sum (C_j^2 t^{2k} e^{2ta} \cos^2 bt + 2C_j D_j t^{k+l} e^{2ta} \cos bt \operatorname{sen} bt + D_j^2 t^{2l} e^{2ta} \operatorname{sen}^2 bt)} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\sum (C_j^2 t^{2k} e^{2ta} \cos^2 bt + 2C_j D_j t^{k+l} e^{2ta} \cos bt \operatorname{sen} bt + D_j^2 t^{2l} e^{2ta} \operatorname{sen}^2 bt)}. \end{aligned}$$

Como cada autovalor de A tiene parte real positiva, es decir, en $\lambda = a \pm bi$ se tiene que $a > 0$, además se tiene que $|\cos bt| \leq 1$ y $|\operatorname{sen} bt| \leq 1$.

Por otro lado, el $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{2k} e^{2ta} = \infty$, $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{k+l} e^{2ta} = \infty$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{2l} e^{2ta} = \infty$, pues el crecimiento exponencial es mucho mayor que la polinomial y como $\lim_{t_0} f(g(t)) = f(\lim_{t_0} g(t))$ cuando el limite de g existe y f es continua, que es nuestro caso. Por lo tanto, $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = \infty$. \square

Teorema 10. *Si cada coordenada de la solución de $x' = Ax$ tiende a ∞ cuando $t \rightarrow \infty$, es decir*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = \infty$$

entonces cada autovalor de A tiene parte real positiva.

Demostración. (Por Contrareciproco) Veamos por casos.

- Supongamos que $\lambda = 0$ entonces $Av = \lambda v$, donde v es el autovector asociado al autovalor λ así se tiene que $x(t) = e^{\lambda t} v = v$.

Por lo tanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = |v|.$$

• Supongamos ahora que $\lambda = a \pm ib$ autovalor de A con $a = 0$, así $\lambda = \pm ib$ con $b \neq 0$. Sea $w = u + iv$ autovector complejo de A correspondiente a λ , con $u, v \in \mathbb{R}^n$, $\{u, v\}$ son L.I., tenemos $Aw = \lambda w$. Escribiendo $z(t) = e^{\lambda t} w$ obtenemos

$$z'(t) = \lambda e^{\lambda t} w = e^{\lambda t} \lambda w = e^{\lambda t} Aw = Ae^{\lambda t} w = Az(t).$$

Así, $z(t)$ es una solución compleja de $x' = Ax$.

Luego como $\lambda = \pm ib$

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{ibt} w = (\cos bt + i \operatorname{sen} bt)(u + iv) \\ &= [u \cos bt - v \operatorname{sen} bt] + i [u \operatorname{sen} bt + v \cos bt], \end{aligned}$$

de modo que,

$$z(t) = x(t) + iy(t).$$

Así,

$$\begin{aligned} x(t) &= u \cos bt - v \operatorname{sen} bt \\ y(t) &= u \operatorname{sen} bt + v \cos bt \end{aligned}$$

entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |z(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\sum (u_j \cos bt - v_j \operatorname{sen} bt)^2 + \sum (u_j \operatorname{sen} bt + v_j \cos bt)^2}$$

Como $|\cos tb| \leq 1$ y $|\operatorname{sen} tb| \leq 1$. Por otro lado, $\lim_{t \rightarrow \infty} f(g(t)) = f(\lim_{t \rightarrow \infty} g(t))$ cuando el limite de g existe y f es continua. Por lo tanto, $\lim_{t \rightarrow \infty} |z(t)| = K \neq \infty, K \in \mathbb{R}$.

• Supongamos ahora que $\lambda = a \pm ib$ autovalor de A con $a < 0$ entonces por el Teorema 5, cada coordenada $x_j(t)$ de la solución $x(t)$ es una combinación lineal de las funciones

$$t^k e^{ta} \cos bt \text{ y } t^l e^{ta} \operatorname{sen} bt$$

donde $\lambda = a \pm bi$ representa a todos los autovalores de A con $b \geq 0$ y $k, l = 0, \dots, n-1$.

Es decir,

$$x_j(t) = C_j t^k e^{ta} \cos bt + D_j t^l e^{ta} \operatorname{sen} bt,$$

entonces

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\sum (C_j t^k e^{ta} \cos bt + D_j t^l e^{ta} \operatorname{sen} bt)^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\sum (C_j^2 t^{2k} e^{2ta} \cos^2 bt + 2C_j D_j t^{k+l} e^{2ta} \cos bt \operatorname{sen} bt + D_j^2 t^{2l} e^{2ta} \operatorname{sen}^2 bt)}. \end{aligned}$$

Aplicando la propiedad de limite, que menciona que si g existe y f es continua entonces $\lim_{t_0} f(g(t)) = f(\lim_{t_0} g(t))$, lo cual se cumple en este caso y como $|\cos tb| \leq 1$ y $|\sin tb| \leq 1$, además $a < 0$, luego

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{2k} e^{2ta} = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} t^{k+l} e^{2ta} = 0 \text{ y } \lim_{t \rightarrow \infty} t^{2l} e^{2ta} = 0,$$

pues el crecimiento exponencial es mucho mayor que la polinomial. Por lo tanto, $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0$.

Así, tenemos que $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = \infty$ cuando cada autovalor de A tiene parte real positiva. \square

Teorema 11. Sea A un operador en un espacio vectorial \mathbb{R}^n . Las siguientes afirmaciones son equivalentes (Hirsch [4] pág. 149)

- a) El origen es un fuente para el sistema dinámico $x' = Ax$.
- b) Para cualquier norma en \mathbb{R}^n hay constantes $L > 0$, $a > 0$ tal que

$$\left| e^{tA} x \right| \geq L e^{ta} |x|, \forall t \geq 0 \text{ y } x \in \mathbb{R}^n.$$

- c) Existe $a > 0$ y una base β de \mathbb{R}^n cuya norma correspondiente satisface

$$\left| e^{tA} x \right|_{\beta} \geq e^{ta} |x|_{\beta}, \forall t \geq 0 \text{ y } x \in \mathbb{R}^n.$$

Demostración. (c) \Rightarrow (b) Supongamos que $\exists a > 0$ y una base β de \mathbb{R}^n cuya norma correspondiente satisface

$$\left| e^{tA} x \right|_{\beta} \geq e^{ta} |x|_{\beta}, \forall t \geq 0 \text{ y } x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.2.19)$$

Por el Teorema de la norma (la demostración se encuentra en el Apéndice C). Sea $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ cualquier norma, existen constantes $\alpha > 0$, $\mu > 0$ tal que

$$\alpha |x| \leq N(x) \leq \mu |x|, \forall x, \text{ donde } |x| \text{ norma euclidiana.}$$

Por este Teorema tenemos

$$\alpha \left| e^{tA} x \right| \leq \left| e^{tA} x \right|_{\beta} \leq \mu \left| e^{tA} x \right|,$$

también tenemos que

$$\alpha |x| \leq |x|_{\beta} \leq \mu |x|.$$

Así, de (1.2.19)

$$\mu \left| e^{tA} x \right| \geq \left| e^{tA} x \right|_{\beta} \geq e^{ta} |x|_{\beta}$$

entonces

$$\begin{aligned} \mu \left| e^{tA} x \right| &\geq e^{ta} |x|_{\beta} \geq e^{ta} \alpha |x| \\ \left| e^{tA} x \right| &\geq e^{ta} \frac{\alpha}{\mu} |x| = e^{ta} L |x|, \quad \text{donde } L = \frac{\alpha}{\mu} > 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\left| e^{tA} x \right| \geq L e^{ta} |x|$, esto para cualquier norma, por equivalencia de normas.

(b) \Rightarrow (a) Supongamos que para cualquier norma en \mathbb{R}^n , hay constantes $L > 0$, $a > 0$, tal que

$$\left| e^{tA} x \right| \geq L e^{ta} |x|, \forall t \geq 0 \text{ y } x \in E,$$

lo que muestra, que el flujo es una expansión.

Así, se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| e^{tA} x \right| \geq \lim_{t \rightarrow \infty} L e^{ta} |x| = L \lim_{t \rightarrow \infty} e^{ta} |x| = \infty.$$

Por el Teorema 10 se tiene que el origen es una fuente.

(a) \Rightarrow (b) Supongamos que el origen es una fuente del sistema dinámico $x' = Ax$ entonces cada autovalor tiene parte real positiva: $\lambda = a \pm bi$, con $a > 0$.

Así, el flujo e^{tA} es una expansión por lo cual existen constantes $c > 0$ y $a > 0$, tal que

$$\left| e^{tA} x \right| \geq c e^{at} |x|, \forall t \geq 0 \text{ y } x \in \mathbb{R}^n,$$

por equivalencia de normas esto es válido para cualquier norma.

(a) \Rightarrow (c) Recordemos que R_{λ} es la parte real del autovalor λ .

Supongamos el origen es una fuente para el sistema dinámico $x' = Ax$, por lo tanto, cada autovalor tiene parte real positiva

$$\lambda = a \pm ib, \text{ con } a > 0.$$

Así,

$$c_1 > R_{\lambda} > c_2 > 0. \quad (1.2.20)$$

Sea (x_1, x_2, \dots, x_n) coordenadas en \mathbb{R}^n correspondientes a una base β y sea una solución $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ a $x' = Ax$.

Sea $|\cdot|_{\beta}$ la norma en términos de esta base, es decir, si $x = \sum_{j=1}^n x_j v_j$, entonces

$$|x|_{\beta} = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Entonces para la norma y producto interno definido por β tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d|x|_\beta}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{2 \sum_{j=1}^n x_j x'_j}{2 \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^n x_j(t) x'_j(t)}{\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2(t)}} = \frac{\sum_{j=1}^n x_j(t) x'_j(t)}{|x(t)|_\beta} \\ &= \frac{\langle x(t), x'(t) \rangle_\beta}{|x(t)|_\beta} = \frac{\langle x(t), Ax(t) \rangle_\beta}{|x(t)|_\beta}. \end{aligned}$$

Además, por el Lema 3 tenemos que (1.2.20) es para todo autovalor de A , entonces

$$c_1 |x(t)|_\beta^2 \leq \langle x(t), Ax(t) \rangle_\beta \leq c_2 |x(t)|_\beta^2.$$

Por lo tanto,

$$c_1 \leq \frac{\frac{\langle x(t), Ax(t) \rangle_\beta}{|x(t)|_\beta}}{|x(t)|_\beta} \leq c_2$$

$$c_1 \leq \frac{\frac{d|x(t)|_\beta}{dt}}{|x(t)|_\beta} \leq c_2$$

$$c_1 \leq \frac{d}{dt} \left(\log |x(t)|_\beta \right) \leq c_2.$$

Integrando,

$$c_1 t \leq \log |x(t)|_\beta - \log |x(0)|_\beta \leq c_2 t,$$

$$e^{c_1 t} \leq \frac{|x(t)|_\beta}{|x(0)|_\beta} \leq e^{c_2 t}.$$

Así,

$$e^{c_1 t} |x(0)|_\beta \leq |x(t)|_\beta \leq e^{c_2 t} |x(0)|_\beta.$$

Como es para todos los autovalores que tienen parte real positiva $c_1 = c > 0$ donde los autovalores de A tienen parte real positiva mayor que c .

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} e^{ct} |x(0)|_\beta &\leq |x(t)|_\beta \\ \left| e^{At} x \right|_\beta &\geq e^{ct} |x|_\beta \quad \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

□

1.3. Flujos Hiperbólicos

Un tipo de flujo lineal e^{tA} que es más común que contracciones y expansiones, es el flujo hiperbólico, donde todos los autovalores de A tienen parte real distinta de cero. La importancia del flujo hiperbólico radica en el hecho de que casi todos los flujos lineales son hiperbólicos.

La siguiente definición nos explica cuando un flujo es hiperbólico.

Definición 12. Sea A un operador en un espacio vectorial \mathbb{R}^n . Se dice que el flujo lineal e^{tA} es hiperbólico cuando todos los autovalores tienen parte real distinta de 0.

Teorema 12. Sea \mathbb{R}^n un espacio vectorial y e^{tA} un flujo hiperbólico lineal donde $A \in L(\mathbb{R}^n)$ entonces se tiene una descomposición de suma directa

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u,$$

invariante bajo A tal que el flujo inducido en E^s es una contracción y el flujo inducido en E^u es una expansión. Esta descomposición es única.

Demostración. Dotamos a \mathbb{R}^n de una base para que A tenga forma canónica real. (Hirsh [4] pág. 109.) Ordenamos esta base para que la matriz de forma canónica real primero tenga bloques correspondientes a los autovalores con parte real negativa, seguidos por bloques correspondientes a autovalores con partes real positiva.

El primer conjunto de bloques representa la restricción de A a un subespacio $E^s \subset \mathbb{R}^n$, mientras que los restantes bloques representan la restricción de A a $E^u \subset \mathbb{R}^n$. Ya que E^s es invariante bajo A , este es invariante bajo e^{tA} .

Expresemos $A_s = A|_{E^s}$ entonces $e^{tA}|_{E^s} = e^{tA_s}$ por el Teorema 8 de la anterior sección $e^{tA}|_{E^s}$ es una contracción. Y E^u es invariante bajo A , este es invariante bajo e^{tA} , así expresemos $A_u = A|_{E^u}$ entonces $e^{tA}|_{E^u} = e^{tA_u}$ por el Teorema 11 de la anterior sección $e^{tA}|_{E^u}$ es una expansión.

Por lo tanto, $A_s \oplus A_u = A$ es la descomposición deseada.

Ahora verifiquemos la unicidad de la descomposición. Supongamos $F^s \oplus F^u$ es otra descomposición de \mathbb{R}^n invariante bajo el flujo e^{tA} tal que $e^{tA}|_{F^s}$ es una contracción y $e^{tA}|_{F^u}$ es una expansión.

Por demostrar, $E^s = F^s$ y $E^u = F^u$.

Sea $x \in F^s$, podemos escribir $x = y + z$, $y \in E^s$, $z \in E^u$.

Como $e^{tA}x \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ tenemos $e^{tA}y \rightarrow 0$ y $e^{tA}z \rightarrow 0$.

Pero $|e^{ta}z| \geq e^{ta}|z|$, $a > 0, \forall t \geq 0$. Por lo tanto, $|z| = 0$. Lo que muestra que $F^s \subset E^s$.

Ahora demostremos que, $E^s \subset F^s$. Así, sea $x \in E^s$, podemos escribir

$$x = y + z, y \in F^s, z \in F^u.$$

Como $e^{tA}x \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ tenemos $e^{tA}y \rightarrow 0$ y $e^{tA}z \rightarrow 0$.

Pero, $|e^{ta}z| \geq e^{ta}|z|$, $a > 0, \forall t \geq 0$. Por lo tanto, $|z| = 0$. Lo que muestra que $E^s \subset F^s$.

Por lo tanto, $E^s = F^s$.

Sea $x \in F^u$, podemos escribir $x = y + z$, $y \in E^s$, $z \in E^u$

Como $e^{-tA}x \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, tenemos, $e^{-tA}y \rightarrow 0$ y $e^{-tA}z \rightarrow 0$.

Pero, $|e^{tA}y| \leq e^{-ta}|y|$, $a > 0, \forall t \geq 0$. Por lo tanto $|y| = 0$. Lo que muestra que $F^u \subset E^u$.

Ahora demostremos que $E^u \subset F^u$. Así sea $x \in E^u$, podemos escribir

$$x = y + z, y \in F^s, z \in F^u.$$

Como, $e^{-tA}x \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, tenemos, $e^{-tA}y \rightarrow 0$ y $e^{-tA}z \rightarrow 0$.

Pero, $|e^{tA}y| \leq e^{-ta}|y|$ $a > 0, \forall t \geq 0$. Por lo tanto $|y| = 0$. Lo que muestra que $E^u \subset F^u$.

Por lo tanto, $E^u = F^u$.

Así, demostramos la unicidad. □

Observación 3. Un flujo hiperbólico puede ser una contracción ($E^u = 0$) o una expansión ($E^s = 0$). Si ni E^u ni E^s es 0. El retrato de fase puede verse como la Figura 1.3.1 en el caso bidimensional o parecerse a la Figura 1.3.2 en un caso tridimensional. Si, además, los autovalores de $A|_{E^s}$ tiene parte imaginaria distinta de cero, todas las trayectorias irán en espiral hacia E^u como en la Fig. 1.3.3.

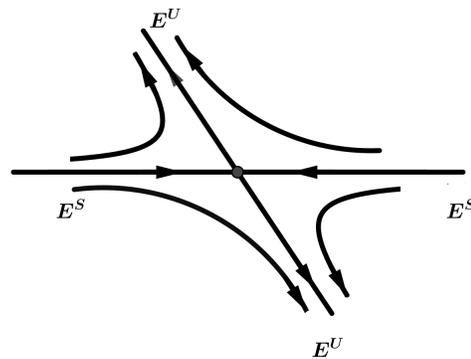


Figura 1.3.1:

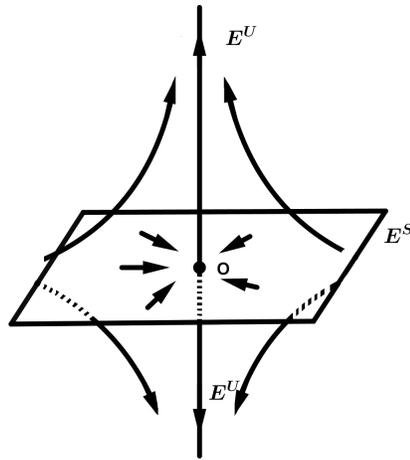


Figura 1.3.2:

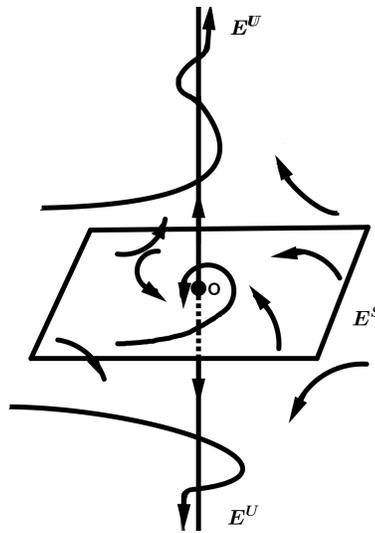


Figura 1.3.3:

Las letras s y u significan *estable* e *inestable*.

1.4. Sistemas Dinámicos y Campos Vectoriales

Definición. Un sistema dinámico es una forma de describir el paso en el tiempo de todos los puntos de un espacio dado S . Matemáticamente, S podría ser un espacio euclidiano o podría ser un subconjunto abierto del espacio euclidiano.

Así, un sistema dinámico en S , nos dice, para x en S , donde x está 1 unidad de tiempo más tarde, 2 unidades de tiempo más tarde, etc. Denotamos estas nuevas posiciones de x por x_1, x_2 , respectivamente. En el tiempo cero x está en x_0 . Una unidad antes del tiempo

cero, x estaba en x_{-1} . Si se extrapola para completar los números reales, se obtiene la trayectoria x_t para todo tiempo t .

La función $\mathbb{R} \rightarrow S$ el cual envía t hacia x_t , es una curva en S que representa la historia de la vida de x a medida que el tiempo transcurre desde $-\infty$ a ∞ .

Ejemplo. Tomando el problema de Kepler

$$S = (\mathbb{R}^2 - 0) \times \mathbb{R}^2 = \{(x, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$$

donde S es el conjunto de posiciones y velocidades para el problema de la fuerza central gravitacional plana.

Definición 13. Un sistema dinámico es una función de clase C^1 (Hirsch [4] pág. 159 y M.W.Hirsh [9] pág. 141.)

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} \times S &\rightarrow S \\ (t, x) &\mapsto \phi(t, x) = \phi_t(x) \end{aligned}$$

donde S es un conjunto abierto de un espacio euclidiano. La función $\phi_t : S \rightarrow S$ satisface:

- a) $\phi_0 : S \rightarrow S$ es la identidad.
- b) La composición $\phi_t \cdot \phi_s = \phi_{t+s}$ para cada $t, s \in \mathbb{R}$.

Notemos que esta definición implica que ϕ_t es C^1 para cada t y tiene ϕ_{-t} inversa C^1 .

Ejemplo. Sea A un operador en un espacio vectorial \mathbb{R}^n , sea $\mathbb{R}^n = S$ y $\phi : \mathbb{R} \times S \rightarrow S$ definido por

$$\phi(t, x) = e^{tA}x.$$

Por lo tanto, $\phi_t : S \rightarrow S$ puede ser representado por $\phi_t = e^{tA}$.

Claramente $\phi_0 = e^0$ operador identidad, y ya que $e^{(t+s)A} = e^{tA} \cdot e^{sA}$; así, tenemos definido un sistema dinámico en \mathbb{R}^n . (Hirsch [4] pág. 160)

Este es un ejemplo de un sistema dinámico que esta relacionado con la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = Ax$ en \mathbb{R}^n .

Definición. (Campo Vectorial) Un sistema dinámico ϕ_t en S en general da lugar a una ecuación diferencial en S , que es , un campo vectorial en S

$$f : S \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Se supone que S es un conjunto abierto en el espacio vectorial \mathbb{R}^n . Dado ϕ_t , definimos

$$f(x) = \left. \frac{d}{dt} \phi_t(x) \right|_{t=0}.$$

Por lo tanto, para x en S , $f(x)$ es un vector en \mathbb{R}^n que consideramos como el vector tangente a la curva

$$t \rightarrow \phi_t(x) \text{ en } t = 0.$$

Por lo tanto, cada sistema dinámico da lugar a una ecuación diferencial.

Definición. Si $\phi_t : S \rightarrow S$ es un sistema dinámico en E y $x \in S$. Sea $x(t) = \phi_t(x)$ y $f : S \rightarrow E$ donde S es un conjunto abierto en el espacio vectorial E . Dado ϕ_t , definimos

$$f(x) = \frac{d}{dt} \phi_t(x) |_{t=0}. \quad (1.4.1)$$

Entonces podemos reescribir (1.4.1) como

$$x' = f(x). \quad (1.4.2)$$

Por lo tanto, $x(t)$ y $\phi_t(x)$ es la curva solución de (1.4.2), satisfaciendo la condición inicial $x(0) = x$.

El proceso inverso nos dice que dada una ecuación diferencial se le asocia un sistema dinámico.

Observación 4. La ecuación (1.4.2) es llamada autónoma, pues no depende explícitamente del tiempo.

Nuestro énfasis en el presente trabajo esta completamente en el caso autónomo.

Las siguientes definiciones serán de gran utilidad para la demostración del teorema de existencia y unicidad.

Definición 14. Una función $f : X \rightarrow Y$ es continua (Lima [7] pág. 20) en $a \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$

$$x \in X, |x - a| < \delta \text{ entonces } |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

En términos de bolas abiertas $f : X \rightarrow Y$ es continua en $a \in X$

$$\forall B(f(a); \varepsilon), \exists B(a; \delta) \text{ tal que } f(B(a; \delta) \cap X) \subset B(f(a); \varepsilon)$$

Definición 15. (*) Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ un camino, es decir, una aplicación continua cuyo dominio es un intervalo de la recta. Se dice que el camino $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable en el punto $t_0 \in I$ cuando existe el límite (Lima [7] pág. 41)

$$\frac{df}{dt}(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}.$$

(**) Una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida en el abierto $U \subset \mathbb{R}^m$, se dice diferenciable en el punto $a \in U$ cuando cada una de sus funciones coordenadas $f_1, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en ese punto. Si f es diferenciable en todos los puntos de U , se dice que f es diferenciable en U .

(***) Se dice que f es continuamente diferenciable si $f' : U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ es continua. Así, la función es de clase C^1 (continuamente diferenciable).

1.5. Teoría de Existencia y Unicidad para Ecuaciones Diferenciales Autónomas

1.5.1. Teorema Fundamental

Definición 16. Durante el resto del capítulo E denotará un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n , dotado con una norma, $W \subset E$ un conjunto abierto en E y $f : W \rightarrow E$ una función continua. Por una solución de la ecuación diferencial

$$x' = f(x), \tag{1.5.1}$$

nos referimos a una función diferenciable

$$u : J \rightarrow W,$$

definido en algún intervalo $J \subset \mathbb{R}$ tal que $\forall t \in J, u'(t) = f(u(t))$.

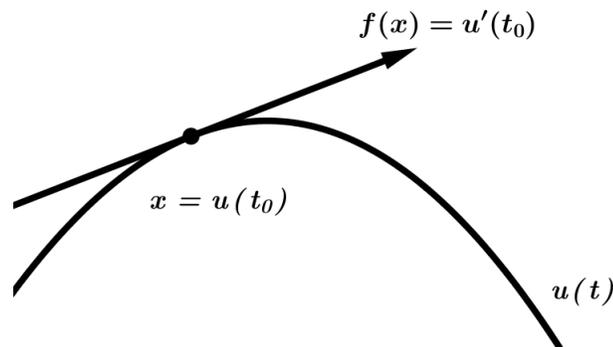
Aquí J podría ser un intervalo de números reales que es abierto, cerrado o semiabierto

$$(a, b) = \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\},$$

$$[a, b] = \{t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b\},$$

$$(a, b] = \{t \in \mathbb{R} : a < t \leq b\},$$

también, a o b podría ser ∞ , pero no se permiten intervalos como $(a, \infty]$.



Geoméricamente u es una curva en E cuyo vector tangente $u'(t) = f(u(t))$, donde la función $f : W \rightarrow E$ es un campo vectorial en W . Una solución u puede considerarse como el camino de una partícula que se mueve en E de modo que en el tiempo t , su vector tangente o velocidad viene dada por el valor del campo vectorial en la posición de la partícula. Por ejemplo, imagine una partícula de polvo en un viento constante, o un electrón moviéndose a través de un campo magnético constante. Como en la siguiente imagen Una condición inicial para una solución $u : J \rightarrow W$ es una condición que tiene la forma $u(t_0) = x_0$ donde $t_0 \in J, x_0 \in W$. Por simplicidad, usualmente tomamos $t_0 = 0$. Una ecuación diferencial podría tener varias soluciones con una condición inicial dada.

Ejemplo 6. Consideremos la ecuación en \mathbb{R}

$$x' = 3x^{\frac{2}{3}}$$

con $W = \mathbb{R} = E$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es dado por $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}}$.

La función idénticamente cero $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $u_0(t) = 0 \forall t$ es una solución con la condición inicial $u(0) = 0$, pero también lo es la función definida por $x(t) = t^3$.

Por lo tanto, para garantizar soluciones únicas, se deben imponer condiciones adicionales a la función f , que f sea continuamente diferenciable, resulta ser suficiente, como veremos más adelante.

El siguiente teorema es el Teorema Fundamental Local de las ecuaciones ordinarias. Es llamado un teorema local porque se ocupa de la naturaleza del campo vectorial $f : W \rightarrow E$ cerca de algún punto x_0 de W .

Teorema 13. (Teorema de unicidad y existencia) Sea $W \subset E$ un subconjunto abierto de un espacio vectorial normado, $f : W \rightarrow \mathbb{E}$ una función C^1 y $x_0 \in W$. Entonces existe algún $a > 0$ y única solución

$$x : (-a, a) \rightarrow W$$

de la ecuación diferencial $x' = f(x)$, satisfaciendo la condición inicial $x(0) = x_0$.

La demostración de este teorema se presenta más adelante.

1.5.2. Existencia y Unicidad

Definición 17. (Función Lipschitz) Una función $f : W \rightarrow E$, W un conjunto abierto del espacio vectorial normado E , se dice ser Lipschitz en W si existe una constante k tal que

$$|f(y) - f(x)| \leq k|y - x|, \forall x, y \in W.$$

Llamamos a k constante de Lipschitz para f . (Perko [6] pág. 71)

Hemos asumido una norma para E . En una norma diferente f será Lipschitz por la equivalencia de normas, sin embargo, la constante k podría cambiar.

Definición 18. (Función Localmente Lipschitz) Una función $f : W \rightarrow E$, W un conjunto abierto del espacio vectorial normado E , se dice ser localmente Lipschitz en W si cada punto de W tiene una vecindad W_0 tal que la restricción $f|_{W_0}$ es Lipschitz. La constante de Lipschitz puede variar con W_0 . (Hirsch [4] pág. 163)

* La derivada $Df(x)$ para $x \in W$, es un operador lineal en E donde se asigna a un vector $u \in E$, el vector

$$Df(x)u = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (f(x + su) - f(x)), s \in \mathbb{R},$$

que existirá si se define $Df(x)$.

** En coordenadas (x_1, x_2, \dots, x_n) en E , sea $f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ entonces $Df(x)$ es representado por la matriz $n \times n$ de derivadas parciales

$$\frac{\partial (f_i(x_1, \dots, x_n))}{\partial x_j}.$$

Definición 19. Para cada $x \in W$, se define la norma $\|Df(x)\| = \text{máx}\{|Df(x)| : |x| \leq 1\}$ del operador lineal $Df(x) \in L(E)$. Si $u \in E$, entonces

$$|Df(x)u| \leq \|Df(x)\| \cdot |u|. \quad (1.5.2)$$

Lema 4. Sea la función $f : W \rightarrow E$ una función C^1 entonces f es localmente Lipschitz. (Hirsch [4] pág. 164)

Demostración. Supongamos que f es C^1 y $x_0 \in W$. Sea $b > 0$ tan pequeño que la bola $B_b(x_0)$ esta contenida en W

$$W_0 = B_b(x_0) = \{x \in W : |x - x_0| \leq b\} \text{ cerrado y acotado.}$$

Como Df es continua, pues f es C^1 , y W_0 es compacta, pues W_0 es cerrado y acotado, entonces existe un limite superior K para $\|Df(x)\|$ en W_0 .

El conjunto W_0 es convexo, esto es, si $y, z \in W_0$ entonces el segmento de linea va de y a z en W_0 .

Sea $y, z \in W_0$ y $u = z - y$ entonces $y + su \in W_0$ para $0 \leq s \leq 1$. Sea $\phi(s) = f(y + su)$. Por lo tanto, $\phi : [0, 1] \rightarrow E$ es la composición de

$$\begin{aligned} [0, 1] &\rightarrow W_0 \xrightarrow{f} E \\ s &\longmapsto y + su. \end{aligned}$$

Por la regla de la cadena,

$$\phi'(s) = Df(y + su)u. \quad (1.5.3)$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} f(z) - f(y) &= \phi(1) - \phi(0) \\ &= \int_0^1 \phi'(s) ds. \end{aligned}$$

Por (1.5.3) y (1.5.2) de la anterior Definición

$$\begin{aligned}
 f(z) - f(y) &= \int_0^1 Df(y + su) u ds \\
 |f(z) - f(y)| &\leq \int_0^1 |Df(y + su) u| ds \\
 &\leq \int_0^1 \|Df(y + su)\| |u| ds \\
 &= \int_0^1 K |u| ds \\
 &= K |u| = K |x - y|.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es localmente Lipschitz. □

La siguiente observación esta implícita en la demostración del lema.

Observación 5. Si W_0 es convexo y $\|Df(x)\| \leq K \quad \forall x \in W_0$ entonces K es una constante Lipschitz para $f|_{W_0}$.

Definición 20. Un espacio de Banach es un espacio vectorial V sobre el cuerpo de los números reales o el de los complejos con una norma $\|\cdot\|$ tal que toda sucesión de Cauchy en V tiene un limite en V .

Lema 5. (*Lema de Análisis*) Suponga $u_k : J \rightarrow E$, $k = 0, 1, 2, \dots$ es una sucesión de funciones continuas desde un intervalo cerrado J a el subespacio vectorial normado E que satisface

Dado $\varepsilon > 0$ existe cierto $N > 0$ tal que para cada $p, q > N$

$$\max_{t \in J} |u_p(t) - u_q(t)| < \varepsilon$$

entonces existe una función continua $u : J \rightarrow E$, tal que

$$\max_{t \in J} |u_k(t) - u(t)| \rightarrow 0 \text{ cuando } k \rightarrow \infty,$$

esto es llamado convergencia uniforme de las funciones u_k (Hirsch [4] pág. 165).

Demostración. Supongamos $u_k : J \rightarrow E$ con $k = 0, 1, 2, \dots$ es una sucesión de funciones continuas que satisface

Dado $\varepsilon > 0$ existe cierto $N > 0$ tal que para cada $p, q > N$

$$\max_{t \in J} |u_p(t) - u_q(t)| < \varepsilon. \tag{1.5.4}$$

Por la definición tenemos que E es un espacio de Banach, así toda sucesión de Cauchy en E tiene un limite en E . Entonces fijando $t \in J$ y por (1.5.4) tenemos que:

Dado $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que $p, q > N$ entonces

$$|u_p(t) - u_q(t)| \leq \max_{t \in J} |u_p(t) - u_q(t)| < \varepsilon,$$

por lo cual la sucesión de Cauchy es convergente a un limite que llamaremos $u : J \rightarrow E$.

Por lo tanto, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que para todo $k \geq N$

$$|u_k(t) - u(t)| < \varepsilon.$$

Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que para todo $k \geq N$

$$\max_{t \in J} |u_k(t) - u(t)| < \varepsilon.$$

Entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\max_{t \in J} |u_k(t) - u(t)| \right) = 0.$$

Ahora, probemos la continuidad de $u : J \rightarrow E$, por demostrar

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Dado $t \in J$.

Por la convergencia uniforme de la sucesión $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tenemos que

$$(1). \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \text{ tal que } |u_k(t) - u(t)| < \frac{\varepsilon}{3} \ \forall k \geq N \ \forall t \in J.$$

Por la continuidad de las funciones u_k podemos asegurar que

$$(2). \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \ 0 < |x - t| < \delta \Rightarrow |u_k(x) - u_k(t)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ para algún } k \geq N.$$

Así, dado ε obtenemos $N_0(\varepsilon)$ y elegimos un k cualquiera $k \geq N_0$. Luego, tomamos ahora la función u_k y el $\varepsilon > 0$ anterior y fijamos t fijo obtenemos δ .

Entonces dado ε , existen k, δ tal que cumplen las dos condiciones,

$$0 < |x - t| < \delta$$

$$\begin{aligned} |u(x) - u(t)| &= |u(x) - u_k(x) + u_k(x) - u_k(t) + u_k(t) - u(t)| \\ &\leq |u(x) - u_k(x)| + |u_k(x) - u_k(t)| + |u_k(t) - u(t)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

esto por (1) y (2). Por lo tanto, u es continua. □

Teorema. 13. (Teorema de unicidad y existencia) Sea $W \subset E$ un subconjunto abierto de un espacio vectorial normado, $f : W \rightarrow E$ una función C^1 (continuamente diferenciable) y $x_0 \in W$. Entonces existe algún $a > 0$ y única solución

$$x : (-a, a) \rightarrow W$$

de la ecuación diferencial $x' = f(x)$, satisfaciendo la condición inicial $x(0) = x_0$ (Hirsch [4] pág. 162).

Demostración. Probemos primero la existencia

Sea $x_0 \in W$ y

$$W_0 = B_b(x_0) = \{x \in W : |x - x_0| \leq b\}.$$

Supongamos J un intervalo abierto que contiene a 0 y $x : J \rightarrow W$ que satisface

$$x'(t) = f(x(t)) \quad y \quad x(0) = x_0, \quad (1.5.5)$$

por integración tenemos

$$x(t) - x(0) = \int_0^t f(x(s)) ds.$$

Así,

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(x(s)) ds. \quad (1.5.6)$$

Recíprocamente, si $x : J \rightarrow W$ satisface (1.5.6) entonces $x(0) = x_0$ y x satisface (1.5.5) por diferenciación. Por lo tanto (1.5.6) es equivalente a (1.5.5).

Por nuestra elección de W_0 , tenemos una constante de Lipschitz K para f en W_0 . Además $|f(x)|$ esta acotado en W_0 supongamos que por la constante M ,

$$|f(x)| \leq M. \quad (1.5.7)$$

Sea $a > 0$ satisface $0 < a < \min\{\frac{b}{M}, \frac{1}{K}\}$ y definamos $J = [-a, a]$. Definimos una sucesión de funciones $u_0, u_1, u_2, \dots : J \rightarrow W$.

P.D. $\{u_k\}$ converge uniformemente a una función que satisface (1.5.6).

Utilizaremos el Lema anterior para obtener la convergencia de los $u_k : J \rightarrow W_0$. La sucesión de funciones u_k es definida como sigue:

Sean

$$u_0(t) \equiv x_0$$

y

$$u_1(t) = x_0 + \int_0^t f(u_0(s)) ds.$$

Asumiendo que $u_k(t)$ ha sido definido y que $|u_k(t) - x_0| \leq b \forall t \in J$.

Sea $u_{k+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(u_k(s)) ds$, lo cual tiene sentido, ya que $u_k(s) \in W_0$, por lo que se define el integrando..

Luego tenemos

$$\begin{aligned}
 |u_{k+1}(t) - x_0| &= \left| x_0 + \int_0^t f(u_k(s)) ds - x_0 \right| \\
 &= \left| \int_0^t f(u_k(s)) ds \right| \\
 &\leq \int_0^t |f(u_k(s))| ds \\
 &\leq \int_0^t M ds \\
 &\leq Ma < b,
 \end{aligned}$$

esto por (1.5.7).

Así, mostramos que

$$|u_{k+1}(t) - x_0| \leq b \quad \text{o} \quad u_{k+1}(t) \in W_0, \quad \forall t \in J,$$

esto implica que la sucesión sea continua para u_{k+2} , u_{k+3} y así sucesivamente.

Por inducción matemática, probaremos que existe una constante $L \geq 0$ tal que $\forall k \geq 0$,

$$|u_{k+1}(t) - u_k(t)| \leq (Ka)^k L, \quad |t - 0| \leq a.$$

En efecto, sea $L = \max\{|u_1(t) - u_0(t)| : |t| \leq a\}$ tenemos

$$\begin{aligned}
 |u_2(t) - u_1(t)| &= \left| x_0 + \int_0^t f(u_1(s)) ds - x_0 - \int_0^t f(u_0(s)) ds \right| \\
 &= \left| \int_0^t [f(u_1(s)) - f(u_0(s))] ds \right| \\
 &\leq \int_0^t K |u_1(s) - u_0(s)| ds \\
 &\leq aKL,
 \end{aligned}$$

esto pues f es C' entonces por Lema 4 es localmente Lipschitz.

Asumiendo por inducción que para algún $k \geq 2$

$$|u_k(t) - u_{k-1}(t)| \leq (aK)^{k-1} L, \quad |t| < a. \quad (1.5.8)$$

Por demostrar para $k + 1$

$$\begin{aligned}
|u_{k+1}(t) - u_k(t)| &= \left| x_0 + \int_0^t f(u_k(s)) ds - x_0 - \int_0^t f(u_{k-1}(s)) ds \right| \\
&= \left| \int_0^t [f(u_k(s)) - f(u_{k-1}(s))] ds \right| \\
&\leq \int_0^t K |u_k(s) - u_{k-1}(s)| ds \\
&\leq (aK) (aK)^{k-1} L \\
&= (aK)^k L,
\end{aligned}$$

por (1.5.8). Por lo tanto, vemos que colocando $aK = \alpha < 1$.

Así, para cualquier $r > s > N$

$$|u_r(t) - u_s(t)| \leq \sum_{k=N}^{\infty} |u_{k+1}(t) - u_k(t)| \leq \sum_{k=N}^{\infty} \alpha^k L \leq \varepsilon,$$

para cualquier $\varepsilon > 0$ determinado, siempre que N sea lo suficientemente grande.

Por el Lema del Análisis, esto muestra que la sucesión de funciones u_0, u_1, \dots converge uniformemente a una función continua $x : J \rightarrow E$.

De $u_{k+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(u_k(s)) ds$, tomando límites de ambos lados

$$\begin{aligned}
x(t) &= \lim_{k \rightarrow \infty} u_{k+1}(t) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[x_0 + \int_0^t f(u_k(s)) ds \right] \\
&= x_0 + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t f(u_k(s)) ds \\
&= x_0 + \int_0^t \left[\lim_{k \rightarrow \infty} f(u_k(s)) \right] ds \\
x(t) &= x_0 + \int_0^t f(x(s)) ds,
\end{aligned}$$

esto por convergencia uniforme y por continuidad de f .

Por lo tanto, $x : J \rightarrow W_0$ satisface (1.5.6) y por consiguiente es una solución de (1.5.5).

En particular $x : J \rightarrow W_0$ es C^1 .

Así, hemos demostrado la parte de existencia del teorema.

Ahora probemos la parte de unicidad del teorema.

Sea $x, y : J \rightarrow W$ dos soluciones de $x'(t) = f(x(t))$ que satisfacen $x(0) = y(0) = x_0$ donde podemos suponer que J es el intervalo cerrado $[-a, a]$.

Por demostrar que $x(t) = y(t) \forall t \in J$.

Sea $Q = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|$, el cual se alcanza en algún punto $t_1 \in J$, entonces

$$\begin{aligned}
 Q &= |x(t_1) - y(t_1)| \\
 &= \left| \int_0^{t_1} (x'(s) - y'(s)) ds \right| \\
 &\leq \int_0^{t_1} |f(x(s)) - f(y(s))| ds \\
 &\leq \int_0^{t_1} K |x(s) - y(s)| ds \\
 &\leq aKQ.
 \end{aligned}$$

Ya que $aK < 1$, esto es imposible a menos que $Q = 0$. Por lo tanto $x(t) \equiv y(t)$. Así, demostramos la unicidad. \square

Observación 6. Note que en el transcurso de la demostración del Teorema 13, lo siguiente fue demostrado:

✓ Dada cualquiera bola $W_0 \subset W$ de radio $b > 0$ sobre x_0 con $\max_{x \in W_0} |f(x)| \leq M$, donde f en W_0 tiene constante Lipschitz K y $0 < a < \min \left\{ \frac{b}{M}, \frac{1}{K} \right\}$ entonces existe una única solución $x : (-a, a) \rightarrow W$ de $x' = f(x)$ tal que $x(0) = x_0$.

✓✓ Considere la situación del Teorema 13 con una función de clase C^1 , $f : W \rightarrow E$, W abierto en E . Dos curvas solución de $x' = f(x)$ no pueden cruzarse. Esta una inmediata consecuencia de la unicidad.

Enfaticemos este hecho geoméricamente

Supongamos $\varphi : J \rightarrow W$, $\psi : J_1 \rightarrow W$ dos soluciones de $x' = f(x)$ tal que

$$\varphi(t_1) = \psi(t_2). \tag{1.5.9}$$

Entonces $\varphi(t_1)$ no es un cruce pues si $\psi_1(t) = \psi(t_2 - t_1 + t)$ entonces ψ_1 es también una solución. Ya que $\psi_1(t_1) = \psi(t_2) = \varphi(t_1)$ por (1,5,9). Por lo tanto, ψ_1 y φ coinciden cerca de t_1 por la unicidad del Teorema 13.

Por lo tanto, se evita la situación de la Figura 1.5.1. Similarmente, una curva de solución no puede cruzarse como en la Figura 1.5.2.

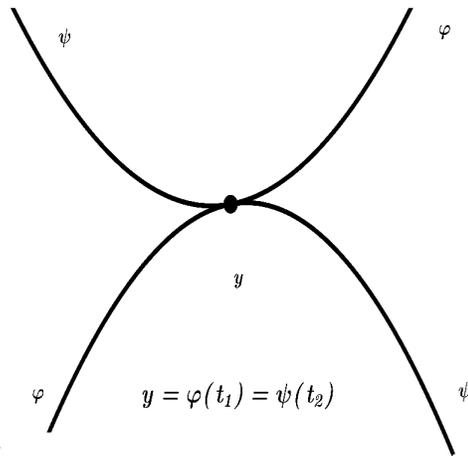


Figura 1.5.1:

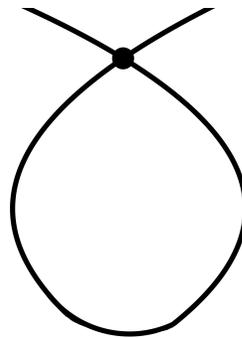


Figura 1.5.2:

De hecho, si una curva solución $\varphi : J \rightarrow W$ de $x' = f(x)$ satisface $\varphi(t_1) = \varphi(t_1 + w)$ para algún t_1 y $w > 0$ entonces esta curva solución debe cerrarse como en la Figura 1.5.3.

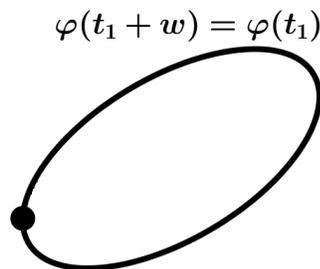


Figura 1.5.3:

Ejemplo 7. Considere $W = \mathbb{R}$ y $x' = f(x) = x$.

Busquemos una solución de $x'(t) = x$ en \mathbb{R} .

Veamos como el esquema de iteración utilizado en la demostración del Teorema 13 se aplica a una ecuación diferencial muy simple.

Sabemos que la solución $x(t)$ que satisface $x(0) = x_0$ esta dada por $x(t) = x_0 e^t$.
Veamos

$$\begin{aligned} u_0(t) &= x_0 \\ u_1(t) &= x_0 + \int_0^t x_0 ds = x_0 + tx_0 = x_0(1+t) \\ u_2(t) &= x_0 + \int_0^t u_1(s) ds = x_0 + \int_0^t x_0(1+s) ds = x_0 + tx_0 + \frac{t^2}{2}x_0 = x_0 \left(1+t + \frac{t^2}{2}\right) \\ &\vdots \\ u_{k+1}(t) &= x_0 + \int_0^t u_k(s) ds. \end{aligned}$$

Como $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$. Y así $u_{k+1}(t) = x_0 \sum_{i=0}^k \frac{t^i}{i!}$.

Luego

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_{k+1}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_0 \sum_{i=0}^k \frac{t^i}{i!} = x_0 e^t = u(t),$$

que es por supuesto la solución de nuestra ecuación original. Hallemos a , tomando $x_0 = 1$, claramente $x_0 \in \mathbb{R}$ y $W_0 = B_1(x_0) = [0, 2]$. Por nuestra elección de W_0 tenemos una constante Lipschitz K para f en W_0 , así $\forall x, y \in [0, 2]$, tal que

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|,$$

con $K = 1$. Además, $|f(x)|$ es acotado en W_0 , supongamos que por la constante $M = 2$

$$|f(x)| \leq 2.$$

Sea $a > 0$ que satisface $0 < a < \min\{\frac{1}{2}, 1\}$.

1.5.3. Continuidad de Soluciones en Condiciones Iniciales

Al Teorema 13 de existencia y unicidad se le añadirá la propiedad de que la solución $x(t)$ depende continuamente de la condición inicial $x(0)$. El siguiente teorema refleja esta propiedad, pero antes enunciaremos el lema de la Desigualdad de Gronwall que será de mucha utilidad para la prueba del teorema mencionado.

Lema 6. (Desigualdad de Gronwall) Sea $u : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y no negativa. Suponga $C \geq 0, K \geq 0$ son tales que

$$u(t) \leq C + \int_0^t Ku(s) ds \quad \forall t \in [0, \alpha]. \quad (1.5.10)$$

Entonces

$$u(t) \leq Ce^{Kt} \quad \forall t \in [0, \alpha].$$

Demostración. Primero consideremos $C > 0$. Denotemos el lado derecho de (1.5.10) por

$$U(t) = C + \int_0^t Ku(s) ds > 0,$$

esto por $C > 0, \forall t \in [0, \alpha]$, luego por (1.5.10)

$$u(t) \leq U(t). \tag{1.5.11}$$

Entonces

$$\frac{u(t)}{U(t)} \leq 1. \tag{1.5.12}$$

Por la definición de $U(t)$ tenemos

$$U'(t) = Ku(t).$$

Por consiguiente,

$$\frac{d(\log U(t))}{dt} = \frac{U'(t)}{U(t)} = \frac{Ku(t)}{U(t)} \leq K,$$

esto por (1.5.12). Por lo tanto,

$$\frac{d(\log U(t))}{dt} \leq K.$$

Integrando

$$\begin{aligned} \log U(t) - \log U(0) &\leq \int_0^t K ds = Kt \\ \log U(t) &\leq \log U(0) + Kt. \end{aligned}$$

Y como $U(0) = C$, tenemos

$$U(t) \leq e^{\log C + Kt} = e^{\log C} e^{Kt} = Ce^{Kt} \quad \forall t \in [0, \alpha].$$

Así, por (1.5.11)

$$u(t) \leq Ce^{Kt}.$$

Ahora suponiendo, $C = 0$, tenemos

$$U(t) = \int_0^t Ku(s) ds, \forall t \in [0, \alpha],$$

luego

$$u(t) \leq \int_0^t Ku(s) ds = U(t).$$

Por definición de $U(t)$ encontramos que $U'(t) = Ku(t)$. Así,

$$\frac{d(\log U(t))}{dt} = \frac{U'(t)}{U(t)} = \frac{Ku(t)}{U(t)} \leq K.$$

Integrando

$$\begin{aligned} \log U(t) - \log U(0) &\leq Kt \\ \log U(t) &\leq \log U(0) + Kt \\ U(t) &\leq e^{\log U(0) + Kt} = c_j e^{Kt}. \end{aligned}$$

Tomamos $c_j > 0$ el cual tiene $\lim_{j \rightarrow \infty} c_j = 0$. Esto prueba el lema. □

Teorema 14. Sea $W \subset E$ un subconjunto abierto de un espacio vectorial normado y suponga $f : W \rightarrow E$ tiene una constante de Lipschitz K . Sea $y(t), z(t)$ soluciones

$$x'(t) = f(x(t)),$$

en el intervalo cerrado $[t_0, t_1]$. Entonces (Hirsch [4] pág. 169).

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad |y(t) - z(t)| \leq |y(t_0) - z(t_0)| e^{K(t-t_0)}.$$

Demostración. Definamos

$$v(t) = |y(t) - z(t)|. \tag{1.5.13}$$

Por otro lado, como $y(t)$ y $z(t)$ soluciones entonces son de la forma

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t_0) + \int_{t_0}^t f(y(s)) ds \\ z(t) &= z(t_0) + \int_{t_0}^t f(z(s)) ds. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} y(t) - z(t) &= y(t_0) + \int_{t_0}^t f(y(s)) ds - z(t_0) - \int_{t_0}^t f(z(s)) ds \\ &= y(t_0) - z(t_0) + \int_{t_0}^t [f(y(s)) - f(z(s))] ds. \end{aligned}$$

Luego tenemos

$$\begin{aligned} |y(t) - z(t)| &= \left| y(t_0) - z(t_0) + \int_{t_0}^t [f(y(s)) - f(z(s))] ds \right| \\ &\leq |y(t_0) - z(t_0)| + \int_{t_0}^t |f(y(s)) - f(z(s))| ds. \end{aligned}$$

Como f tiene una constante de Lipschitz y por (1.5.13)

$$\begin{aligned} |y(t) - z(t)| &\leq |y(t_0) - z(t_0)| + \int_{t_0}^t K |y(s) - z(s)| ds \\ v(t) &\leq v(t_0) + \int_{t_0}^t K v(s) ds. \end{aligned}$$

Aplicando el Lema de Gronwall a la función $u(t) = v(t_0 + t)$, $u(t - t_0) = v(t)$

$$v(t) \leq v(t_0) e^{K(t-t_0)}.$$

Es decir,

$$|y(t) - z(t)| \leq |y(t_0) - z(t_0)| e^{K(t-t_0)},$$

lo cual demuestra el teorema. □

Notemos que este resultado, nos dice que si las soluciones $y(t)$ y $z(t)$ inician juntas, entonces permanecen juntas para t cerca de t_0 . Si bien estas soluciones pueden separarse unas de otras, lo hacen no más rápido que exponencialmente.

1.5.4. Extensión de Soluciones

Lema 7. *Sea una función $f : W \rightarrow E$ de clase C^1 dada. Suponga dos soluciones $u(t), v(t)$ de $x' = f(x)$ definidas en el mismo intervalo abierto J conteniendo a t_0 y satisfice $u(t_0) = v(t_0)$. Entonces $u(t) = v(t) \forall t \in J$. (Hirsch [4] pág. 171).*

Demostración. Por el Teorema 13 sabemos que $u(t) = v(t)$ en algún intervalo abierto alrededor de t_0 . La unión de esos intervalos abiertos es el intervalo abierto más grande J^* en J alrededor de t_0 en el que $u = v$. Pero J^* debe ser igual a J . De lo contrario, supongamos J^* tiene un punto final $t_1 \in J$, supongamos t_1 es el punto final derecho o el punto final izquierdo. Por continuidad $u(t_1) = v(t_1)$, por Teorema 13, $u = v$ en algún intervalo J' alrededor de t_1 . Entonces $u = v$ en algún $J^* \cup J'$ que es más grande que J^* , esto es una contradicción al hecho de que J^* es el intervalo más grande, lo cual demuestra el lema. □

Observación 7. No existe garantía de que una solución $x(t)$ para una ecuación diferencial pueda ser definida $\forall t \in \mathbb{R}$. Por ejemplo, la ecuación en \mathbb{R}

$$x' = 1 + x^2,$$

hallemos sus soluciones

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 1 + x^2 \\ \int \frac{dx}{1+x^2} &= \int dt \\ \arctan(x) &= t - c \\ x &= \tan(t - c), \end{aligned}$$

donde c es una constante. Así, se tiene como soluciones las funciones

$$x = \tan(t - c).$$

Dicha función no puede extenderse en un intervalo mayor que

$$c - \frac{\pi}{2} < t < c + \frac{\pi}{2}.$$

Ya que $\lim_{t \rightarrow c \pm \frac{\pi}{2}} x(t) = \infty$.

Ahora, consideremos la ecuación general $x' = f(x)$, donde la función f de clase C^1 es definida en un conjunto abierto $W \subset E$, para cada $x_0 \in W$ existe un intervalo máximo abierto (α, β) que contiene a 0, en el que existe una solución $x(t)$ con $x(0) = x_0$ (existe un intervalo de este tipo por el Teorema de existencia y unicidad), así sea (α, β) la unión de todos los intervalos abiertos que contienen 0 en los que existe una solución con $x(0) = x_0$ (posiblemente, $\alpha = -\infty$ o $\beta = \infty$, o ambos). Por el Lema 7, en la unión de dos intervalos cualesquiera coinciden en las intersecciones de los dos intervalos. Así, existe una solución en todos los (α, β) .

A continuación, veamos que sucede con las soluciones cuando se acercan a los límites de su dominio. Indicamos el resultado solo para el límite derecho, el otro caso es similar.

Teorema 15. Sea $W \subset E$ abierto, sea $f : W \rightarrow E$ una función de clase C^1 . Sea $y(t)$ una solución en un intervalo abierto máximo $J = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ con $\beta < \infty$. Entonces dado cualquier conjunto compacto $A \subset W$, existe $t \in (\alpha, \beta)$ con $y(t) \notin A$.

Demostración. (Por contrarecíproco) Supongamos $y(t) \in A \forall t \in (\alpha, \beta)$. Como f es continua, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ si $x \in A$, pues A compacto.

Sea $\gamma \in (\alpha, \beta)$. Demostremos que y se extiende a una función continua $[\gamma, \beta] \rightarrow E$. Por el Lema del análisis es suficiente demostrar que $y : J \rightarrow E$ es uniformemente continua.

Veamos, para $t_0 < t_1$ en J tenemos

$$|y(t_1) - y(t_0)| = \left| \int_{t_0}^{t_1} y'(s) ds \right| \leq \int_{t_0}^{t_1} |f(y(s))| ds \leq (t_1 - t_0)M.$$

Así, y es uniformemente continua. Por lo tanto, podemos definir

$$y(\beta) = \lim_{t \rightarrow \beta} y(t).$$

Ahora probemos que la curva extendida $y : [\alpha, \beta] \rightarrow E$ es diferenciable en β y es una solución de la ecuación diferencial, luego tenemos

$$\begin{aligned} y(\beta) &= y(\gamma) + \lim_{t \rightarrow \beta} \int_{\gamma}^t y'(s) ds \\ &= y(\gamma) + \lim_{t \rightarrow \beta} \int_{\gamma}^t f(y(s)) ds \\ &= y(\gamma) + \int_{\gamma}^{\beta} f(y(s)) ds, \end{aligned}$$

por la continuidad uniforme de $f(y(s))$.

Por lo tanto,

$$y(t) = y(\gamma) + \int_{\gamma}^t f(y(s)) ds, \quad \forall t \in [\gamma, \beta].$$

Entonces y es diferenciable en β y de hecho $y'(\beta) = f(y(\beta))$. En conclusión, y es una solución en $[\gamma, \beta]$.

Ya que existe una solución en un intervalo $[\beta, \delta)$, $\delta > \beta$, podemos extender y al intervalo (α, δ) . Por lo tanto, (α, β) no podría ser un dominio máximo de una solución. Esto completa la demostración del teorema. \square

La siguiente proposición se deduce inmediatamente del teorema.

Proposición 6. *Sea A un subconjunto compacto del conjunto abierto $W \subset E$.*

Sea $f : W \rightarrow E$ función de clase C^1 . Sea $y_0 \in A$ y supongamos que se sabe que cada curva de solución de la forma

$$y : [0, \beta] \rightarrow W, \quad y(0) = y_0,$$

se encuentra completamente en A . Entonces existe una solución

$$y : [0, \infty) \rightarrow W, \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in A, \quad \forall t \geq 0.$$

Demostración. Sea $[0, \beta)$ intervalo medio abierto máximo en el que hay una solución que se encuentra completamente en A . Entonces $y([0, \beta)) \subset A$ y así, β no puede ser finito por el Teorema 15. Por lo tanto, existe una solución

$$y : [0, \infty) \rightarrow W, \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in A \quad \forall t \geq 0.$$

\square

1.5.5. Soluciones Globales

En el teorema de la Subsección 1.5.3 asumimos que ambas soluciones estaban definidas en el mismo intervalo, en el siguiente teorema no es necesario asumir esto.

El teorema muestra que las soluciones que comienzan en puntos cercanos se definirán en el mismo intervalo cerrado y permanecerán cerca una de la otra en este intervalo.

Lema 8. Si $f : W \rightarrow E$ es localmente Lipschitz y $A \subset W$ es un conjunto compacto (cerrado y acotado) entonces $f|_A$ es Lipschitz. (Hirsch [4] pág. 173)

Demostración. (Por contradicción) Supongamos $f|_A$ no es Lipschitz. Entonces para todo $K > 0$, no importa cuan grande, podemos encontrar x y y en A con

$$|f(x) - f(y)| > K|x - y|.$$

En particular, podemos encontrar x_n, y_n tal que

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq n|x_n - y_n|, \quad (1.5.14)$$

para $n = 1, 2, \dots$. Como A es compacto, podemos elegir subsucesiones convergentes de x_n y y_n .

Existen x^* y y^* en A . Asumamos $x_n \rightarrow x^*$ y $y_n \rightarrow y^*$.

Observemos que $x^* = y^*$, pues es para todo n

$$|x^* - y^*| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| \leq n^{-1} |f(x_n) - f(y_n)| \leq n^{-1} 2M$$

donde M es el valor máximo de f en A .

Existe una vecindad W_0 de x^* , para el cual $f|_{W_0}$ tiene una constante Lipschitz K en x .

Así, existe un n_0 , tal que $x_n \in W_0$ si $n \geq n_0$. Por lo tanto, para $n \geq n_0$

$$|f(x_n) - f(y_n)| \leq K|x_n - y_n|,$$

lo cual contradice (1.5.14) para $n > K$, esto prueba el lema. \square

Teorema 16. Sean $f(x)$ función C^1 y $y(t)$ una solución de $x' = f(x)$ definida en el intervalo cerrado $[t_0, t_1]$ con $y(t_0) = y_0$. Existe una vecindad $U \subset E$ de y_0 y una constante K tal que si $z_0 \in U$ entonces existe una única solución $z(t)$ también definida en $[t_0, t_1]$ con $z(t_0) = z_0$, y z satisfice

$$|y(t) - z(t)| \leq |y_0 - z_0| e^{K(t-t_0)}, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Demostración. Por compacidad de $[t_0, t_1]$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $x \in W$ si

$$|x - y(t)| \leq \varepsilon, \quad (1.5.15)$$

para algún $t \in [t_0, t_1]$. El conjunto de todos estos puntos es un subconjunto compacto A de W .

Como f es C^1 es localmente Lipschitz esto por el Lema 4 de la subsección 1.5.2 . Por el lema mencionado se sigue que $f|_A$ es Lipschitz y tiene una constante Lipschitz K .

Sea $\delta > 0$ tan pequeño que $\delta \leq \varepsilon$ y $\delta e^{K(t_1-t_0)} \leq \varepsilon$. Afirmamos que si $|z_0 - y_0| < \delta$ entonces hay una solución única a través de z_0 definida en todo $[t_0, t_1]$.

En primer lugar, $z_0 \in W$ ya que $|z_0 - y(t_0)| = |z_0 - y_0| < \varepsilon$, así existe una solución $z(t)$ a través de z_0 en un intervalo máximo $[t_0, \beta)$.

Demostremos que $\beta > t_1$

Supongamos $\beta \leq t_1$, entonces por la Desigualdad de Gronwall, para todo $t \in [t_0, \beta)$ se tiene

$$\begin{aligned} |z(t) - y(t)| &\leq |z_0 - y_0| e^{K(t-t_0)} \\ &\leq \delta e^{K(t-t_0)} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $z(t)$ se encuentra en el conjunto compacto A , esto por (1,5,15), por Teorema 15 de la subsección anterior $[t_0, \beta)$ no puede ser un dominio de solución máxima.

Por consiguiente, $z(t)$ esta definido en $[t_0, t_1]$. Luego, por el Teorema 14 de la subsección 1.5.3 se tiene

$$|y(t) - z(t)| \leq |y(t_0) - z(t_0)| e^{K(t-t_0)}, \forall t \in [t_0, t_1].$$

Por el Lema 7 de la Subsección 1.5.4 se tiene la unicidad. □

Interpretemos el teorema de otra manera. Dado f como en el teorema y una solución $y(t)$ definida en $[t_0, t_1]$, vemos que para todo z_0 suficientemente cerca a $y_0 = y(t_0)$, existe una única solución en $[t_0, t_1]$ que inicia en z_0 en el tiempo cero.

Denotemos esta solución por $u(t, z_0)$; por lo tanto $u(0, z_0) = z_0$ y $u(t, y_0) = y(t)$.

Entonces el teorema implica

$$\lim_{z_0 \rightarrow y_0} u(t, z_0) = u(t, y_0)$$

uniformemente en $[t_0, t_1]$. En otras palabras, la solución a través de z_0 depende continuamente de z_0 .

1.6. El Flujo de una Ecuación Diferencial

Definición 21. Consideremos la ecuación

$$x' = f(x), \tag{1.6.1}$$

definida por una función C^1 , $f : W \rightarrow E$, $W \subset E$ abierto. Para $x_0 \in W$ existe una única solución $\phi(t)$ con $\phi(0) = x_0$ definido en un intervalo máximo abierto $J(x_0) \subset \mathbb{R}$.

Para indicar la dependencia de $\phi(t)$ en x_0 , escribimos

$$\phi(t) = \phi(t, x_0).$$

Por lo tanto, $\phi(0, x_0) = x_0$.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R} \times W$ el siguiente conjunto

$$\Omega = \{(t, x_0) \in \mathbb{R} \times W \mid t \in J(x_0)\}.$$

La función

$$\begin{aligned} \phi : \Omega &\rightarrow W \\ (t, x_0) &\mapsto \phi(t, x_0). \end{aligned}$$

Llamamos a ϕ el flujo de la ecuación (1.6.1).

Frecuentemente utilizaremos la siguiente notación

$$\phi(t, x) = \phi_t(x).$$

Ejemplo 8. Sea $f(x) = Ax$, $A \in L(E)$. Entonces $\phi_t(x) = e^{tA}x$.

Teorema 17. La función ϕ tiene la siguiente propiedad (Hirsch [4] pág. 175.)

$$\phi_{s+t}(x) = \phi_s(\phi_t(x)) \tag{1.6.2}$$

Demostración. Notemos que si un lado de (1.6.2) está definido, también lo está el otro y así son iguales.

(*) Primero supongamos $s > 0$ y $\phi_s(\phi_t(x))$ está definida.

Así $t \in J(x)$ y $s \in J(\phi_t(x))$. Sea $J(x) = (\alpha, \beta)$ el intervalo máximo, así $\alpha < t < \beta$.

Por demostrar $s + t < \beta$.

Definamos la función

$$y : (\alpha, s + t] \rightarrow W,$$

por

$$y(r) = \begin{cases} \phi(r, x) & \text{si } \alpha < r \leq t \\ \phi(r - t, \phi_t(x)) & \text{si } t \leq r \leq s + t \end{cases}.$$

Como $\frac{d}{dr}\phi(r, x) = f(\phi(r, x))$ así $\phi(r, x)$ es solución

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}\phi(r - t, \phi_t(x)) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial \mu}(r - t, \phi_t(x)) \\ &= f(\phi(r - t, \phi_t(x))) \\ &= f(y(r)), \end{aligned}$$

entonces $y(r)$ es una solución y $y(0) = x$ en $(\alpha, s+t]$. Por lo tanto $s+t \in J(x)$ y por unicidad de soluciones

$$\phi_{s+t}(x) = y(s+t) = \phi(s, \phi_t(x)) = \phi_s(\phi_t(x)).$$

(**) Si $s = 0$ de hecho se da el teorema.

(***) Si $s < 0$ y $\phi_s(\phi_t(x))$ esta definido. Así $t \in J(x)$ y $s \in J(\phi_t(x))$.

Sea $J(x) = (\alpha, \beta)$ el intervalo máximo, así $\alpha < t < \beta$.

Por demostrar $s+t > \alpha$. Definamos la función

$$y : [s+t, \beta) \rightarrow W,$$

por

$$y(r) = \begin{cases} \phi(r, x) & \text{si } t \leq r < \beta \\ \phi(r-t, \phi_t(x)) & \text{si } s+t \leq r \leq t \end{cases}.$$

entonces $y(r)$ es solución y $y(0) = x$ en $[s+t, \beta)$. Por lo tanto $s+t \in J(x)$ y por unicidad de soluciones

$$\phi_{s+t}(x) = y(s+t) = \phi(s, \phi_t(x)) = \phi_s(\phi_t(x)).$$

Esto demuestra el teorema. □

Teorema 18. Ω es un conjunto abierto en $\mathbb{R} \times W$ y $\phi : \Omega \rightarrow W$ es una función continua.

Demostración. Primero demostremos que Ω es un conjunto abierto.

Como $\Omega = \{(t, x_0) \in \mathbb{R} \times W : t \in J(x_0)\}$. Sea $(t_0, x_0) \in \Omega$ un punto arbitrario. Supongamos $t_0 > 0$ entonces de acuerdo con la definición del conjunto Ω , la solución $\phi(t, x_0)$ del problema de valor inicial

$$\begin{aligned} x' &= f(x) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

está definida en $[0, t_0]$. Por lo tanto, por teorema, la solución $\phi(t, x_0)$ puede extenderse a un intervalo $[0, t_0 + \varepsilon]$ para algún $\varepsilon > 0$, es decir, $x(t) = \phi(t, x_0)$ es definido en un intervalo cerrado $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. Por el Teorema 16, existe una vecindad $U \subset W$ de x_0 tal que $\phi(t, x_0)$ es definida en $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times U$, es decir, $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times U \subset \Omega$. Por lo tanto, Ω es abierto en $\mathbb{R} \times W$.

Supongamos $t_0 \leq 0$ entonces de acuerdo con la definición del conjunto Ω , la solución $\phi(t, x_0)$ del problema de valor inicial

$$\begin{aligned} x' &= f(x) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

está definida en $[t_0, 0]$. Por lo tanto, por teorema, la solución $\phi(t, x_0)$ puede extenderse a un intervalo $[t_0 - \varepsilon, 0]$ para algún $\varepsilon > 0$, es decir, $\phi(t, x_0)$ es definido en un intervalo cerrado $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. Por el Teorema 16, existe una vecindad $U \subset W$ de x_0 tal que $\phi(t, x_0)$ es definida en $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times U$, es decir, $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times U \subset \Omega$. Por lo tanto, Ω es abierto en $\mathbb{R} \times W$.

Así, hemos demostrado que Ω es abierto en $\mathbb{R} \times W$.

Ahora, probemos que ϕ es una función continua.

Probemos que ϕ es continua en (t_0, x_0) .

Sea U una vecindad de x_0 , $U \subset W$ y el intervalo cerrado $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ para algún $\varepsilon > 0$.

Supongamos que la cerradura de U es compacta, $\bar{U} \subset W$.

Como f es C^1 entonces f es localmente Lipschitz. Como f es localmente Lipschitz y el conjunto $A = \phi([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \bar{U})$ compacto entonces $f|_A$ es Lipschitz, por lo cual existe una constante K de Lipschitz esto por el Lema 8.

Como f es continua y A es compacta, entonces existe

$$M = \text{máx}\{|f(x)| : x \in A\}.$$

Sea $\delta > 0$ que satisface $\delta < \varepsilon$ y si $|x_1 - x_0| < \delta$ entonces $x_1 \in U$.

Supongamos $|t_1 - t_0| < \delta$, $|x_1 - x_0| < \delta$ entonces

$$\begin{aligned} |\phi(t_1, x_1) - \phi(t_0, x_0)| &= |\phi(t_1, x_1) - \phi(t_1, x_0) + \phi(t_1, x_0) - \phi(t_0, x_0)| \\ &\leq |\phi(t_1, x_1) - \phi(t_1, x_0)| + |\phi(t_1, x_0) - \phi(t_0, x_0)|. \end{aligned}$$

Como $|\phi(t_1, x_0) - \phi(t_0, x_0)| \rightarrow 0$, pues la solución en x_0 es continua. Así, por Teorema 16 tenemos que

$$\begin{aligned} |\phi(t_1, x_1) - \phi(t_0, x_0)| &\leq |\phi(t_1, x_1) - \phi(t_1, x_0)| \\ &\leq |x_1 - x_0| e^{K(t_1 - t_0)} \\ &\leq \delta e^{K\delta} = 0, \end{aligned}$$

Por lo tanto, ϕ es continua. □

Ahora, supongamos $(t, x_0) \in \Omega$ entonces x_0 tiene una vecindad $U \subset W$ con $t \times U \subset \Omega$, ya que demostramos que Ω es abierto en $\mathbb{R} \times W$. La función $x \rightarrow \phi_t(x)$ define

$$\phi_t : U \rightarrow W.$$

Teorema 19. *Sea Ω un conjunto abierto en $\mathbb{R} \times W$ y $\phi : \Omega \rightarrow W$ una función continua. Si $(t, x_0) \in \Omega$ entonces existe una vecindad U de x_0 tal que $\{t\} \times U \subset \Omega$ entonces se sigue que el conjunto $V = \phi_t(U)$ es abierto en W y que*

$$\phi_{-t}(\phi_t(x)) = x \quad \forall x \in U$$

y

$$\phi_t(\phi_{-t}(y)) = y \quad \forall y \in V$$

Demostración. Si $(t, x_0) \in \Omega$ entonces existe una vecindad de U de x_0 , tal que

$$(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \times U \subset \Omega,$$

por lo tanto, $\{t\} \times U \subset \Omega$. Para $x \in U$, sea $\phi_t(x) = y \quad \forall t \in J(x)$ entonces $-t \in J(y)$, pues $h(s) = \phi(s+t, y)$ es una solución de $x' = f(x)$ en $[-t, 0]$ que satisface $h(-t) = \phi(-t+t, y) = y$, es decir, ϕ_{-t} esta definida en el conjunto $V = \phi_t(U)$. Luego por el primer teorema mencionado en esta subsección, se sigue que

$$\phi_{-t}(\phi_t(x)) = \phi_0(x) = x, \quad \forall x \in U$$

y

$$\phi_t(\phi_{-t}(y)) = \phi_0(y) = y, \quad \forall y \in V.$$

Ahora demostremos que V es abierto.

Sea $V \subset V^*$, V^* subconjunto maximal de W en el cual ϕ_{-t} esta definida. V^* es abierto pues Ω es abierto y

$$\phi_{-t}: V^* \rightarrow W$$

es continua pues ϕ es continua. Por lo tanto,

$$\phi_t: U \rightarrow V.$$

Así, la imagen inversa del conjunto abierto U bajo ϕ_{-t} es abierto, es decir,

$$\phi_{-t}: V \rightarrow U.$$

Por lo tanto, V es abierto. □

Capítulo 2

Estabilidad del Punto de Equilibrio

La teoría de este capítulo se encuentra principalmente en Doering [3], Hirsch [4], Perko [6], Lima [7] y Goh [12]

En este capítulo introduciremos la idea importante de estabilidad de un punto de equilibrio de un sistema dinámico.

Así, un equilibrio \bar{x} es *estable* si todas las soluciones cercanas permanecen cerca y este es *asintóticamente estable* si todas las soluciones cercanas no solo permanecen cerca, sino que también tienden a \bar{x} . Por supuesto se requieren definiciones precisas, estas son dadas en la sección 2.2.

Ya que en el anterior capítulo fue considerado el caso especial de pozos (*sinks*) lineales, veremos el caso de pozos no lineales, pues los pozos son útiles, ya que ellos pueden ser detectados por los autovalores de la parte lineal del sistema (que es la derivada del campo vectorial en \bar{x}).

También se estudiará los famosos teoremas de Liapunov, además de los flujos de gradiente.

2.1. Pozos (Sinks) No Lineales

El Teorema de Hartman-Grobman es otro resultado muy importante en la teoría local cualitativa de ecuaciones diferenciales ordinarias. El teorema muestra que cerca a un punto de equilibrio hiperbólico \bar{x} , el sistema no lineal

$$x' = f(x) \tag{2.1.1}$$

tiene la misma estructura que un sistema lineal

$$x' = Ax \tag{2.1.2}$$

con $A = Df(\bar{x})$. Asumiremos que el punto de equilibrio \bar{x} se ha trasladado al origen.

Definición 22. Los sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales (2.1.1) y (2.1.2) se dice que son *topológicamente equivalentes* en una vecindad del origen o que tienen la misma estructura cualitativa cerca del origen si hay un homeomorfismo H mapeando un conjunto abierto U que contiene el origen en un conjunto abierto V que mapea las trayectorias de (2.1.1) en U en trayectorias de (2.1.2) en V y conserva su orientación por el tiempo en el sentido de que si una trayectoria se dirige de x_1 a x_2 en U entonces su imagen es dirigida de $H(x_1)$ a $H(x_2)$ en V . Si el homeomorfismo H conserva la parametrización por tiempo entonces se dice que los sistemas (2.1.1) y (2.1.2) se dicen ser *topológicamente conjugados* en una vecindad del origen. (Perko [6] pág. 119.)

Teorema 20. (Teorema de Hartman – Grobman) Sea W un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n que contiene el origen, sea $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función C^1 y sea ϕ_t el flujo del sistema no lineal (2.1.1). Suponga que $f(0) = 0$ y que la matriz $A = Df(0)$ no tiene autovalores con parte real cero. Entonces existe un homeomorfismo H de un conjunto abierto U que contiene el origen sobre un conjunto abierto V que contiene el origen de tal manera que para cada $\bar{x} \in U$ existe un intervalo abierto $I_0 \subset \mathbb{R}$ que contiene a cero tal que para todo $\bar{x} \in U$ y $t \in I_0$.

$$H \circ \phi_t(\bar{x}) = e^{At} H(\bar{x})$$

, es decir, H mapea trayectorias de (2.1.1) cerca del origen en trayectorias (2.1.2) y conserva la parametrización por tiempo. (Perko [6] pág. 120.)

Demostración. (Esquema de la prueba) Considere el sistema no lineal (2.1.1) con $f \in C^1$, donde $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(0) = 0$ y $A = Df(0)$.

1. Suponga que la matriz A es escrita en la forma

$$A = \begin{bmatrix} P & O \\ O & Q \end{bmatrix}$$

donde los autovalores de P tienen parte real negativa y los autovalores de Q tienen parte real positiva.

2. Sea ϕ_t el flujo del sistema no lineal (2.1.1) y la solución

$$x(t, x_0) = \phi_t(x_0) = \begin{bmatrix} y(t, y_0, z_0) \\ z(t, y_0, z_0) \end{bmatrix}$$

donde $x_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in E^S$, el subespacio estable de A y $z_0 \in E^U$ el subespacio inestable de A .

3. Define las funciones

$$\begin{aligned} \bar{Y}(y_0, z_0) &= y(1, y_0, z_0) - e^P y_0 \\ \bar{Z}(y_0, z_0) &= z(1, y_0, z_0) - e^Q z_0 \end{aligned}$$

entonces $\bar{Y}(0) = \bar{Z}(0) = D\bar{Y}(0) = D\bar{Z}(0) = 0$. Y ya que $f \in C^1$, $\bar{Y}(y_0, z_0)$ y $\bar{Z}(y_0, z_0)$ son continuamente diferenciables.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\|D\bar{Y}(y_0, z_0)\| &\leq a \\ \|D\bar{Z}(y_0, z_0)\| &\leq a',\end{aligned}$$

en el conjunto compacto $|y_0|^2 + |z_0|^2 \leq s_0^2$. La constante a puede tomarse tan pequeño como queramos eligiendo s_0 lo suficientemente pequeño.

Sean $Y(y_0, z_0)$ y $Z(y_0, z_0)$ funciones suaves que son iguales a $\bar{Y}(y_0, z_0)$ y $\bar{Z}(y_0, z_0)$ para $|y_0|^2 + |z_0|^2 \leq (\frac{s_0}{2})^2$ y cero para $|y_0|^2 + |z_0|^2 \geq s_0^2$. Entonces por el Teorema del valor medio

$$\begin{aligned}Y(y_0, z_0) &\leq a\sqrt{|y_0|^2 + |z_0|^2} \leq a(|y_0| + |z_0|) \\ Z(y_0, z_0) &\leq a'\sqrt{|y_0|^2 + |z_0|^2} \leq a'(|y_0| + |z_0|),\end{aligned}$$

para todo $(y_0, z_0) \in \mathbb{R}^n$. A continuación, sea $B = e^P$ y $C = e^Q$. Entonces asumiremos que hemos realizado la normalización (Basada en la subsección 1.1.1)

$$b = \|B\| < 1 \quad y \quad c = \|C^{-1}\| < 1.$$

4. Para $x = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$, define las transformaciones

$$L(y, z) = \begin{bmatrix} By \\ Cz \end{bmatrix}$$

y

$$T(y, z) = \begin{bmatrix} By + Y(y, z) \\ Cz + Z(y, z) \end{bmatrix},$$

es decir, $L(x) = e^A x$ y localmente $T(x) = \phi_1(x)$.

Lema Existe un homeomorfismo H de un conjunto abierto U que contiene el origen en un conjunto abierto V que contiene el origen tal que

$$H \circ T = L \circ H$$

Establecemos este lema mediante el método de aproximación sucesiva.

Para $x \in \mathbb{R}^n$,

$$H(x) = \begin{bmatrix} \Phi(y, z) \\ \Psi(y, z) \end{bmatrix}.$$

Entonces $H \circ T = L \circ H$ es equivalente al par de ecuaciones

$$\begin{aligned}B\Phi(y, z) &= \Phi(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)), \\ C\Psi(y, z) &= \Psi(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)).\end{aligned}\tag{2.1.3}$$

En primer lugar, definimos las aproximaciones sucesivas para la segunda ecuación por

$$\begin{aligned}\Psi_0(y, z) &= z \\ \Psi_{k+1}(y, z) &= C^{-1}\Psi_k(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)).\end{aligned}\tag{2.1.4}$$

Luego, se sigue mediante un sencillo argumento de inducción, que para $k = 0, 1, 2, \dots$ las $\Psi_k(y, z)$ son continuas y satisfacen $\Psi_k(y, z) = z$ para $|y| + |z| \geq 2s_0$.

A continuación, probaremos por inducción que para $j = 1, 2, \dots$

$$|\Psi_j(y, z) - \Psi_{j-1}(y, z)| \leq Mr^j (|y| + |z|)^\delta$$

donde $r = c[2 \max(a, b, c)]^\delta$ con $\delta \in (0, 1)$ suficientemente pequeño para que $r < 1$ (lo cual es posible ya que $c < 1$) y $M = \frac{ac(2s_0)^{1-\delta}}{r}$.

Primero que nada para $j = 1$

$$\begin{aligned} |\Psi_1(y, z) - \Psi_0(y, z)| &= |C^{-1}\Psi_0(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)) - z| \\ &= |C^{-1}(Cz + Z(y, z)) - z| \\ &= |C^{-1}Z(y, z)| \leq \|C^{-1}\| |Z(y, z)| \\ &\leq ca(|y| + |z|) \leq Mr(|y| + |z|)^\delta, \end{aligned}$$

ya que, $Z(y, z) = 0$ para $|y| + |z| \geq 2s_0$. Luego, asumiendo que la hipótesis de inducción es válido para $j = 1, \dots, k$ tenemos

$$\begin{aligned} |\Psi_{k+1}(y, z) - \Psi_k(y, z)| &= |C^{-1}\Psi_k(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)) \\ &\quad - C^{-1}\Psi_{k-1}(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z))| \\ &\leq \|C^{-1}\| (|\Psi_k(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)) \\ &\quad - \Psi_{k-1}(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z))|) \\ &\leq cMr^k [|By + Y(y, z)| + |Cz + Z(y, z)|]^\delta \\ &\leq cMr^k [b|y| + 2a(|y| + |z|) + c|z|]^\delta \\ &\leq cMr^k [2 \max(a, b, c)]^\delta (|y| + |z|)^\delta \\ &= Mr^{k+1} (|y| + |z|)^\delta. \end{aligned}$$

Así, $\Psi_k(y, z)$ es una sucesión de Cauchy de funciones continuas que convergen uniformemente cuando $k \rightarrow \infty$ a una función continua $\Psi(y, z)$. También $\Psi(y, z) = z$ para $|y| + |z| \geq 2s_0$. Tomando límites en (2.1.4) muestra que $\Psi(y, z)$ es una solución de la segunda ecuación en (2.1.3).

La primera ecuación en (2.1.3) puede ser escrito como

$$B^{-1}\Phi(y, z) = \Phi(B^{-1}y + Y_1(y, z), C^{-1}z + Z_1(y, z)), \quad (2.1.5)$$

donde las funciones Y_1 y Z_1 son definidas por la inversa de T , (el cual existe si la constante a es suficientemente pequeña, es decir, si s_0 es suficientemente pequeño) se sigue que

$$T^{-1}(y, z) = \begin{bmatrix} B^{-1}y + Y_1(y, z) \\ C^{-1}z + Z_1(y, z) \end{bmatrix}.$$

Entonces la ecuación (2.1.5) puede ser resuelto para $\Phi(y, z)$ mediante el método de aproximaciones sucesivas exactamente como se hizo anteriormente con

$$\Phi_0(y, z) \quad \text{ya que} \quad b = \|B\| < 1.$$

Por tanto, obtenemos la función continua

$$H(y, z) = \begin{bmatrix} \Phi(y, z) \\ \Psi(y, z) \end{bmatrix},$$

se sigue que H es un homeomorfismo de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n .

5. Ahora sea H_0 homeomorfismo definido anteriormente, sea L^t y T^t las familias de transformaciones de un parámetro definidas por

$$L^t(x_0) = e^{At}x_0 \quad \text{y} \quad T^t(x_0) = \phi_t(x_0).$$

Definir

$$H = \int_0^1 L^{-s}H_0T^s ds.$$

Entonces usando el lema anterior se sigue que existe una vecindad del origen por el cual

$$\begin{aligned} L^t H &= \int_0^1 L^{t-s}H_0T^{s-t} ds T^t \\ &= \int_{-t}^{1-t} L^{-s}H_0T^s ds T^t \\ &= \left[\int_{-t}^0 L^{-s}H_0T^s ds + \int_0^{1-t} L^{-s}H_0T^s ds \right] T^t \\ &= \int_0^1 L^{-s}H_0T^s ds T^t \\ &= HT^t, \end{aligned}$$

ya que, por el anterior $H_0 = L^{-1}H_0T$ que implica

$$\begin{aligned} \int_{-t}^0 L^{-s}H_0T^s ds &= \int_{-t}^0 L^{-s-1}H_0T^{s+1} ds \\ &= \int_{1-t}^1 L^{-s}H_0T^s ds. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $H \circ T^t = L^t H$ o equivalentemente

$$H \circ \phi_t(x_0) = e^{At}H(x_0).$$

y se puede mostrar que H es un homeomorfismo en \mathbb{R}^n (Hartman [8] pág. 250-251). Esto completa el esbozo de la prueba del Teorema de Hartman- Grobman. \square

Ejemplo 9. Considere el sistema

$$\begin{aligned}y' &= -y, \\z' &= z + y^2,\end{aligned}$$

la solución con $y(0) = y_0$ y $z(0) = z_0$ esta dada por

$$\begin{aligned}y(t) &= y_0 e^{-t} \\z(t) &= z_0 e^t + \frac{y_0^2}{3} (e^t - e^{-2t}).\end{aligned}$$

Así, en el contexto de la prueba anterior $B = e^{-1}$, $C = e$, $Y(y_0, z_0) = 0$ y

$$Z(y_0, z_0) = ky_0^2 \quad \text{con} \quad k = \frac{e^3 - 1}{3e^2}.$$

Por lo tanto, resolviendo

$$C\Psi(y, z) = \Psi(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)),$$

es equivalente a resolver

$$e\Psi(y, z) = \Psi(e^{-1}y, ez + ky^2). \quad (2.1.6)$$

Las aproximaciones sucesivas definidas por (2,1,4) están dadas por

$$\begin{aligned}\Psi_0(y, z) &= z \\ \Psi_1(y, z) &= z + ke^{-1}y^2 \\ \Psi_2(y, z) &= z + ke^{-1}(1 + e^{-3})y^2 \\ \Psi_3(y, z) &= z + ke^{-1}(1 + e^{-3} + e^{-6})y^2 \\ &\vdots \\ \Psi_m(y, z) &= z + ke^{-1} \left[1 + e^{-3} + \dots + (e^{-3})^{m-1} \right] y^2.\end{aligned}$$

Así, como $m \rightarrow \infty$

$$\Psi_m(y, z) \rightarrow \Psi(y, z) = z + \frac{y^2}{3}$$

uniformemente para $(y, z) \in \mathbb{R}^n$. La función $\Psi(y, z)$ satisface la ecuación (2,1,6). Similarmente, la función $\Phi(y, z)$ se encuentra resolviendo

$$B^{-1}\Phi(y, z) = \Phi(B^{-1}y + Y_1(y, z), C^{-1}z + Z_1(y, z))$$

donde, $Y_1(y, z) = 0$ y $Z_1(y, z) = -eky^2$. Esto lleva a

$$\Phi(y, z) = y,$$

para todo los $(y, z) \in \mathbb{R}^2$.

Por lo tanto, el homeomorfismo H_0 esta dado por

$$H_0(y, z) = \begin{bmatrix} y \\ z + \frac{1}{3}y^2 \end{bmatrix}$$

y

$$H_0^{-1}(y, z) = \begin{bmatrix} y \\ z - \frac{1}{3}y^2 \end{bmatrix}$$

Para $L(y, z) = e^A(y, z)^T = (e^{-1}y, ez)^T$ y $T(y, z) = \phi_1(y, z) = (e^{-1}y, ez + ky^2)^T$, se sigue que $H_0 \circ T = L \circ H_0$ como en el lema mencionado anteriormente. El homeomorfismo H entonces está dado por

$$H = \int_0^1 L^{-s} H_0 T^s ds,$$

donde

$$L^t(y, z) = \begin{bmatrix} e^{-t}y \\ e^t z \end{bmatrix}$$

y

$$T^t(y, z) = \begin{bmatrix} e^{-t}y \\ e^t z + \frac{y^2}{3} (e^t - e^{-2t}) \end{bmatrix}.$$

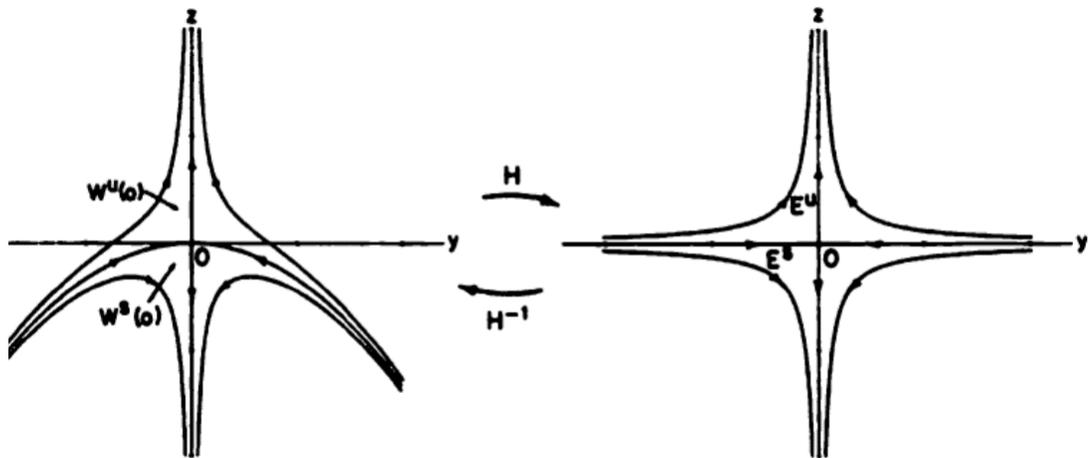
Por lo tanto,

$$H(y, z) = \begin{bmatrix} y \\ z + \frac{y^2}{3} \end{bmatrix}$$

y

$$L^t H(y, z) = \begin{bmatrix} e^{-t}y \\ e^t z + e^t \frac{y^2}{3} \end{bmatrix} = H \circ T^t(y, z).$$

El retrato fase para el sistema no lineal (2.1.1) y el sistema lineal (2.1.2) de este ejemplo se muestra en la siguiente figura.



Consideremos la ecuación diferencial

$$x' = f(x) \tag{2.1.7}$$

donde $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $W \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Supongamos f es C^1 .

Definición 23. Un punto $\bar{x} \in W$ es llamado un punto de equilibrio de $x' = f(x)$ si $f(\bar{x}) = 0$.

Claramente la función constante $x(t) = \bar{x}$ es una solución de (2.1.7).

Por unicidad de soluciones ninguna otra curva de solución puede pasar a través de \bar{x} . Si W es el espacio de estado de algún sistema físico (biológico, económico o similar) descrito por $x' = f(x)$ entonces \bar{x} es un *estado de equilibrio*.

Definición 24. Sea $\Omega \subset \mathbb{R} \times W$ un conjunto abierto y para cada $x \in W$ se tiene la función

$$\begin{aligned} \phi : \Omega &\rightarrow W \\ (t, x) &\mapsto \phi(t, x) = \phi_t(x), \end{aligned}$$

flujo asociado con (2.1.7), donde $\phi_t(x)$ es la solución que pasa a través de x cuando $t = 0$; definido para t en algún intervalo abierto. Si \bar{x} es un equilibrio, entonces $\phi_t(\bar{x}) = \bar{x} \forall t \in \mathbb{R}$. Por esta razón \bar{x} es llamado *punto estacionario* o *punto fijo* del flujo. Otro nombre para \bar{x} es *cero* o *punto singular* del campo vectorial f .

Definición 25. Supongamos que f es lineal. $W = \mathbb{R}^n$ y $f(x) = Ax$ donde A es un operador lineal en \mathbb{R}^n entonces el origen $0 \in \mathbb{R}^n$ es un equilibrio de (2.1.7).

En el anterior capítulo vimos que cuando $b < 0$ es mayor que las partes reales de los autovalores de A , las soluciones $\phi_t(x)$ se aproximan exponencialmente a 0

$$|\phi_t(x)| \leq ce^{bt}, \text{ para algún } c > 0.$$

Supongamos ahora f es C^1 campo vectorial (no necesariamente lineal) con un punto de equilibrio $0 \in \mathbb{R}^n$. Pensemos de la derivada $Df(0) = A$ como un campo vectorial lineal que se aproxima a f cerca de 0, el cual llamaremos parte lineal de f en 0. Si todos los autovalores de $Df(0)$ tienen partes reales negativas, llamamos a 0 un *pozo* (*sink*). En general, un equilibrio \bar{x} de (2.1.7) es un pozo si todos los autovalores de $Df(\bar{x})$ tienen parte real negativa.

El siguiente teorema nos dice que un pozo no lineal \bar{x} se comporta localmente como un pozo lineal, es decir, las soluciones cercanas se acercan a \bar{x} exponencialmente.

Teorema 21. *Sea $\bar{x} \in W$ un pozo de la ecuación (2.1.7). Suponga cada autovalor de $Df(\bar{x})$ tiene parte real menor que $-c$, $c > 0$. Entonces existe una vecindad $U \subset W$ de \bar{x} tal que (Hirsch [4] pág. 181):*

- (a) $\phi_t(x)$ es definida y esta en U , para todo $x \in U$; $t > 0$.
- (b) Existe una norma euclidiana en \mathbb{R}^n tal que

$$|\phi_t(x) - \bar{x}| \leq e^{-tc} |x - \bar{x}|, \forall x \in U; t \geq 0.$$

- (c) Para cualquier norma en \mathbb{R}^n , existe una constante $B > 0$ tal que

$$|\phi_t(x) - \bar{x}| \leq B e^{-tc} |x - \bar{x}|, \forall x \in U; t \geq 0.$$

En particular $\phi_t(x) \rightarrow \bar{x}$ cuando $t \rightarrow \infty \forall x \in U$.

Demostración. Primero hacemos un cambio de coordenadas $x = y + \bar{x}$ así $y = x - \bar{x}$ para mover el punto fijo \bar{x} al origen

$$y' = x' = f(y + \bar{x}) = Ay + g(y)$$

donde $g(y)$ contiene todos los términos que son cuadráticos y superiores. Por lo tanto, $g(0) = 0$ y $Dg(0) = 0$.

Sea $\psi_t(y)$ el flujo en las y -coordenadas y $\phi_t(x)$ en las x -coordenadas. Como $\psi_t(y_0)$ es la solución de $y' = Ay + g(y)$ con $\psi_0(y_0) = y_0$. Consideremos a $g(\psi_t(y_0))$ como una función conocida de t , que también es una solución de la ecuación no homogénea

$$y' = Ay + g(\psi_t(y_0)),$$

con $y = y_0$ en $t = 0$. Por lo tanto, podemos aplicar la fórmula de variación de parámetros a la solución para obtener

$$\psi_t(y_0) = e^{At}y_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}g(\psi_s(y_0))ds. \quad (2.1.8)$$

Ahora queremos utilizar las estimaciones para el flujo lineal para obtener estimaciones para el flujo no lineal. Introduciremos un pequeño error debido a los términos no lineales, así tomamos $\varepsilon > 0$ y $b = c + \varepsilon$ tal que todos los autovalores λ para A satisfacen

$$Re(\lambda) < -c.$$

Ahora sea $|\cdot|$ alguna norma para la ecuación lineal, la cual fue demostrada en el Teorema 8 del capítulo anterior, es decir, la norma satisface

$$\left| e^{At}y_0 \right| \leq e^{-bt}|y_0| \quad \text{para } t \geq 0. \quad (2.1.9)$$

El término no lineal g comienza con términos cuadráticos, así existe $\delta > 0$ tal que para $|y| \leq \delta$ tenemos

$$|g(y)| \leq \varepsilon|y|. \quad (2.1.10)$$

Sea U' la vecindad de $y = 0$ dada por $U' = \{y : |y| \leq \delta\}$. Aplicando el estimado a (2,1,8), si $|\psi_s(y_0)| \leq \delta$ para $0 \leq s \leq t$ entonces

$$\begin{aligned} |\psi_t(y_0)| &\leq \left| e^{At}y_0 \right| + \int_0^t \left| e^{A(t-s)}g(\psi_s(y_0)) \right| ds \\ \text{por (2,1,9)} &\leq e^{-bt}|y_0| + \int_0^t e^{-b(t-s)}|g(\psi_s(y_0))| ds \\ \text{por (2,1,10)} &\leq e^{-bt}|y_0| + \int_0^t e^{-bt}e^{bs}\varepsilon|\psi_s(y_0)| ds \\ |\psi_t(y_0)| &\leq e^{-bt} \left(|y_0| + \int_0^t \varepsilon e^{bs}|\psi_s(y_0)| ds \right) \\ e^{bt}|\psi_t(y_0)| &\leq |y_0| + \int_0^t \varepsilon e^{bs}|\psi_s(y_0)| ds. \end{aligned}$$

Aplicando la Desigualdad de Gronwall a la función $e^{bt}|\psi_t(y_0)|$, obtenemos

$$\begin{aligned} e^{bt}|\psi_t(y_0)| &\leq |y_0|e^{\varepsilon t} \\ |\psi_t(y_0)| &\leq |y_0|e^{\varepsilon t - bt} = |y_0|e^{t(-b+\varepsilon)} = |y_0|e^{-ct}. \end{aligned}$$

Así, si $y_0 \in U'$ con $|y_0| \leq \delta$ entonces la solución permanecerá en U' , para todo $t \geq 0$

$$|\psi_t(y_0)| \leq |y_0|e^{(-b+\varepsilon)t} \leq \delta.$$

Por lo tanto, la solución esta definida para todo $t \geq 0$ y $|\psi_t(y_0)|$ va hacia 0 exponencialmente.

En las x - coordenadas, sea $U = \{x : |x - \bar{x}| \leq \delta\}$. Para $x_0 \in U$, sea $y_0 = x_0 - \bar{x}$ y $\phi_t(x_0) = \psi_t(y_0) + \bar{x}$.

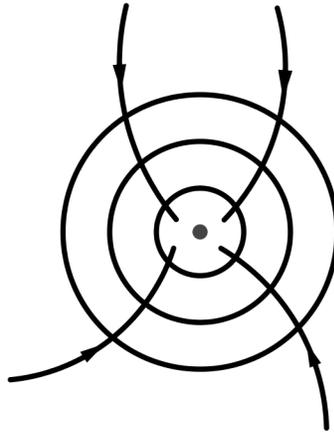
Por lo tanto, la solución $\phi_t(x_0)$ esta definido para todo $t \geq 0$ y

$$|\phi_t(x_0) - \bar{x}| \leq e^{-ct} |x_0 - \bar{x}|,$$

es decir, la solución se aproxima al punto fijo \bar{x} exponencialmente.

Ahora para cualquier norma $|\cdot|'$, el resultado de la parte (c) se sigue igual que el caso lineal por la equivalencia de normas enunciada en el Teorema de la norma del Apéndice 3. □

El retrato fase en un *pozo no lineal* \bar{x} se parece al de la parte lineal del campo vectorial; en una norma adecuada, las trayectorias apuntan dentro de todas las esferas suficientemente pequeñas alrededor de \bar{x} .

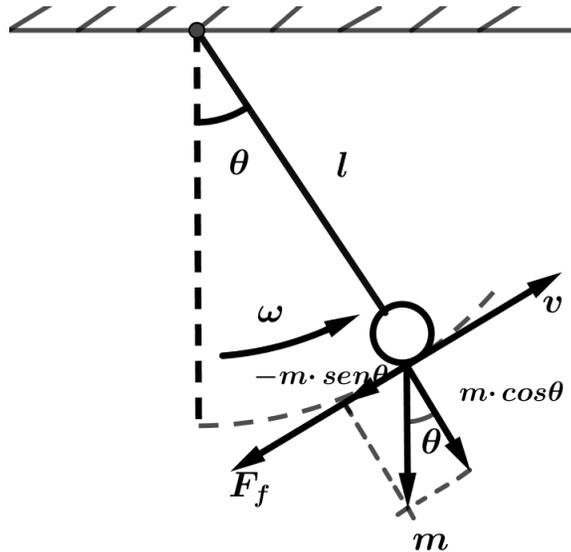


Pozo no lineal

Cabe mencionar que las esferas no son necesariamente esferas *redondas*, son esferas en una norma especial. En coordenadas estándar pueden ser elipsoides.

Ejemplo 10. Un ejemplo simple físico de un pozo no lineal es dada por un péndulo en movimiento en un plano vertical.

Veamos



Asumimos que una fuerza gravitacional constante hacia abajo, es decir, el peso, es igual a la masa de la bolilla.

Dejamos de lado la masa y peso de la barra que sostiene la bolilla. Además, suponemos que hay una fuerza de fricción que resiste el movimiento (*o viscosidad*), proporcional a la velocidad de la bolilla ($v(t)$).

Definamos las siguientes variables:

l = longitud de la barra = radio del círculo = constante .

$\theta(t)$ = ángulo en sentido antihorario desde la vertical a la barra en el tiempo t .

$\omega(t)$ = velocidad angular.

$v(t)$ = velocidad tangencial o velocidad de la bolilla, $v(t) = l \cdot \omega(t)$.

m = peso de la bolilla.

m_x = la fuerza sobre la bolilla que produce movimiento.

F_f = fuerza de fricción.

α = aceleración angular.

Así, se tiene que

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}; \quad v = l \frac{d\theta}{dt}; \quad F_f = -kl \frac{d\theta}{dt}, \quad k \geq 0; \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Luego, la fuerza total tangente al círculo en el tiempo t es

$$\begin{aligned} F &= F_f + m_x \\ &= -kl \frac{d\theta}{dt} + (-m \sin \theta) \\ F &= - \left(kl \frac{d\theta}{dt} + m \sin \theta \right). \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos la aceleración tangente al círculo a que es igual al producto de la aceleración angular α y el radio del círculo l

$$a = l \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = l \cdot \theta'' \quad (2.1.11)$$

Así, por la Ley de Newton $a = \frac{F}{m}$ y por (2,1,14) se tiene

$$\begin{aligned} l \cdot \theta'' &= \frac{-kl \frac{d\theta}{dt} - m \sin \theta}{m} \\ l \cdot \theta'' &= -\frac{kl}{m} \theta' - \sin \theta \\ \theta'' &= -\frac{k}{m} \theta' - \frac{1}{l} \sin \theta. \end{aligned}$$

Como $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \theta'$ entonces $\omega = \theta'$. Así, obtenemos el sistema de primer orden equivalente

$$\begin{aligned} \theta' &= \omega \\ \omega' &= -\frac{1}{l} \sin \theta - \frac{k}{m} \omega. \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Esta ecuación autónoma no lineal en \mathbb{R}^2 tiene equilibrios en los puntos

$$\begin{aligned} (\theta, \omega) &= (n\pi, 0) \\ n &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Por (2.1.15)

$$\begin{pmatrix} \theta' \\ \omega' \end{pmatrix} = f(\theta, \omega) = \begin{pmatrix} \omega \\ -\frac{1}{l} \sin \theta - \frac{k}{m} \omega \end{pmatrix},$$

el cual es el *campo vectorial*. La derivada de f en (θ, ω)

$$Df(\theta, \omega) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \theta} & \frac{\partial f_1}{\partial \omega} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \theta} & \frac{\partial f_2}{\partial \omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{l} \cos \theta & -\frac{k}{m} \end{bmatrix}.$$

Nos concentramos en el equilibrio $(0, 0)$, así

$$Df(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{l} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix}.$$

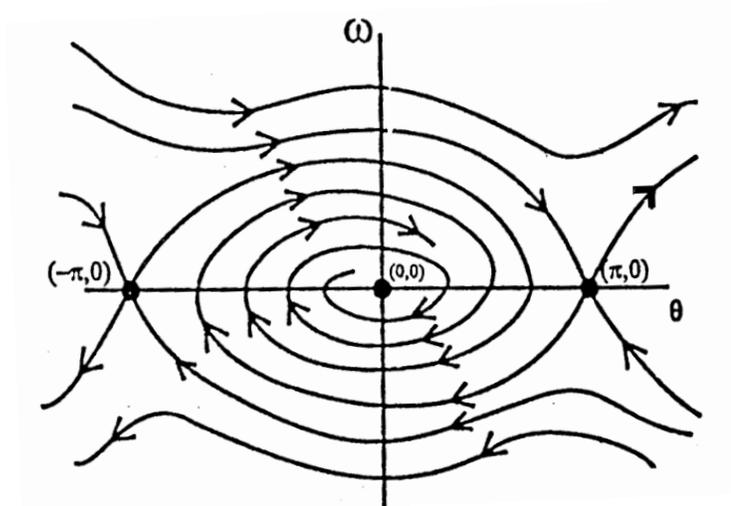
Hallemos sus autovalores

$$\det(Df(0, 0) - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{1}{l} & -\frac{k}{m} - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \frac{k}{m} \lambda + \frac{1}{l}.$$

Luego

$$\lambda = \frac{-\frac{k}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2 - \frac{4}{l}}}{2} = \frac{1}{2} \left[-\frac{k}{m} \pm \left[\left(\frac{k}{m}\right)^2 - \frac{4}{l} \right]^{\frac{1}{2}} \right].$$

Así, tenemos los autovalores $\lambda = \frac{1}{2} \left[-\frac{k}{m} \pm \left[\left(\frac{k}{m}\right)^2 - \frac{4}{l} \right]^{\frac{1}{2}} \right]$, donde la parte real es $-\frac{k}{2m}$, que es negativa siempre y cuando k y m sean positivos. Luego, el equilibrio $(\theta, \omega) = (0, 0)$ entonces $\theta = \omega = 0$ es un pozo. El retrato fase es el siguiente



Así, para todos los ángulos y velocidades iniciales suficientemente pequeños, el péndulo tiende hacia la posición del equilibrio $(0, 0)$, es decir, desde cualquier posición inicial y velocidad, el péndulo tendera hacia el estado de equilibrio vertical o hacia abajo, a excepción de algunos estados iniciales que tienden hacia la posición verticalmente equilibrada. Sin embargo, verificar matemáticamente esta conclusión física requiere de más trabajo, volveremos a esta cuestión en la sección 2.3. Antes de abandonar el péndulo, señalamos una paradoja: el péndulo no puede descansar, esto es, una vez que está en movimiento- no en equilibrio- no puede alcanzar un estado de equilibrio, sino solo acercarse de manera arbitraria.

Esto se sigue de la unicidad de las soluciones de las ecuaciones diferenciales; por supuesto, uno sabe que los péndulos realmente se detienen. Uno puede argumentar que el péndulo no está realmente en reposo, pero su movimiento es demasiado pequeño para observar. Una mejor explicación es que el modelo matemático (2.1.12) sobre el movimiento del péndulo es solo una aproximación a la realidad.

2.2. Estabilidad

El estudio del equilibrio juega un papel central en las ecuaciones diferenciales ordinarias y sus aplicaciones. Un punto de equilibrio debe satisfacer ciertos criterios de estabilidad para ser físicamente muy significativo (usamos la palabra físico en un sentido amplio; por lo tanto, en algunos contextos lo físico podría ser reemplazado por biológico, químico, o incluso ecológico).

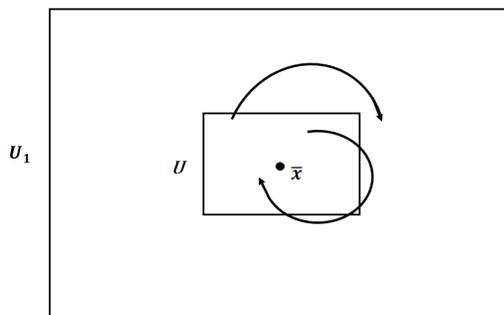
Un equilibrio es estable si las soluciones cercanas permanecen para todo el tiempo futuro. Dado que en las aplicaciones de sistemas dinámicos no se puede determinar exactamente un estado, sino solo aproximadamente, un equilibrio debe ser estable para ser físicamente significativo.

La definición matemática es:

Definición 26. (*Estabilidad*) Suponga $\bar{x} \in W$ es un equilibrio de la ecuación diferencial

$$x' = f(x),$$

donde $f : W \rightarrow E$ una función C^1 de un conjunto abierto W del espacio vectorial E hacia E . Entonces \bar{x} es un *equilibrio estable*, sí para cada vecindad U de \bar{x} en W existe una vecindad U_1 de \bar{x} en U , tal que cada solución $x(t)$ con $x(0)$ en U_1 es definida y está en U para todo $t > 0$. (Hirsch [4] pág. 186)



Estabilidad

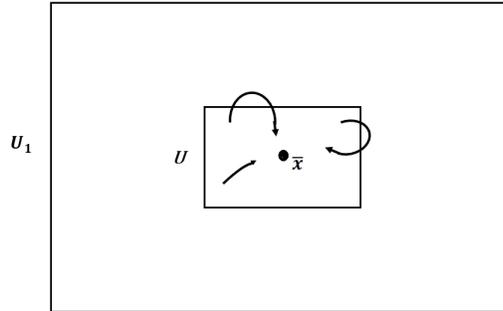
Definición 27. (*Asintóticamente estable*) Suponga $\bar{x} \in W$ es un equilibrio de la ecuación diferencial

$$x' = f(x)$$

donde $f : W \rightarrow E$ una función C^1 de un conjunto abierto W del espacio vectorial E hacia E . Si para cada vecindad U de \bar{x} en W existe una vecindad U_1 de \bar{x} en U tal que, cada solución $x(t)$ con $x(0)$ en U_1 es definida y esta en U para todo $t > 0$ y el

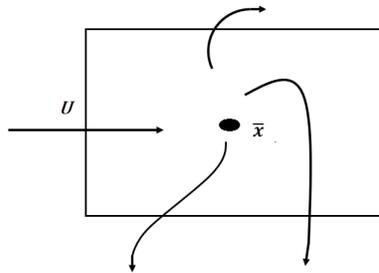
$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$$

entonces \bar{x} es *asintóticamente estable*. (Hirsch [4] pág. 186)



Estabilidad Asintótica

Definición 28. (*Inestabilidad*) Un equilibrio que no es *estable* es llamado inestable. Esto significa que existe una vecindad U de \bar{x} tal que para cada vecindad U_1 de \bar{x} en U , existe al menos una solución $x(t)$ que comienza en $x(0) \in U_1$, el cual no esta completamente en U . (Hirsch [4] pág. 186)



Inestabilidad

Ejemplo 11. Un ejemplo de un equilibrio que es estable pero no asintóticamente estable es el origen en \mathbb{R}^2 para una ecuación lineal $x' = Ax$ donde A tiene autovalores puros imaginarios. Las órbitas son todas elipses.



Estable, pero no asintóticamente estable

La importancia de este ejemplo en la aplicación es limitada pues la más mínima perturbación no lineal destruirá su carácter. Incluso una pequeña perturbación lineal la convierte en un pozo o una fuente.

Observación. (*) Un pozo (*sink*) es estable asintóticamente y por lo tanto estable.

(**) Una fuente es un ejemplo de un equilibrio inestable.

Enunciamos el siguiente lema, el cual será de mucha utilidad para la demostración de un teorema posterior:

Lema 9. *Existe $\delta > 0$ tal que si U es la bola cerrada $B_\delta(0) \subset W$ entonces (Hirsch [4] pág. 188)*

para todo $z = (x, y) \in C \cap U$ donde $C = \{(x, y) \in E_1 \oplus E_2 : |x| \geq |y|\}$.

(a) $\langle x, f_1(x, y) \rangle - \langle y, f_2(x, y) \rangle > 0$ si $x \neq 0$.

(b) Existe $\alpha > 0$ con $\langle f(z), z \rangle \geq \alpha |z|^2$.

Demostración. Según el Teorema 12 (Sección 1.3.) $E = E_1 \oplus E_2$ invariante bajo $Df(0)$ tal que los autovalores de $A = Df(0)|_{E_1}$ todos tienen parte real positiva y $B = Df(0)|_{E_2}$ tienen parte real negativa o parte real cero. Sea $a > 0$, tal que, cada autovalor de A tiene parte real mayor que a entonces E_1 tiene una base tal que en el correspondiente producto interno y norma (norma Euclidiana)

$$\langle Ax, x \rangle \geq a|x|^2, \forall x \in E_1. \quad (2.2.1)$$

Similarmente, para algún $b > 0$, E_2 tiene una base tal que en el correspondiente producto interno y norma (norma Euclidiana)

$$\langle By, y \rangle \geq -b|y|^2, \forall y \in E_2. \quad (2.2.2)$$

Elegimos b tal que $0 < b < a$

Tomamos el producto interno en $E = E_1 \oplus E_2$ para ser la suma directa de sus productos internos en E_1 y E_2 ; también usamos las normas asociadas a estos productos internos en E , E_1 y E_2 .

Si $z = (x, y) \in E_1 \oplus E_2$ entonces $|z| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2} = (|x|^2 + |y|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Por la definición de derivada y recordando que $f(0) = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x, y) \\ &= Df(0)z + Q(z) \\ &= (Ax, By) + (R(x, y), S(x, y)) \\ (f_1(x, y), f_2(x, y)) &= f(x, y) = (Ax + R(x, y), By + S(x, y)), \end{aligned}$$

con $(x, y) = z$ y $Q(z) = (R(x, y), S(x, y))$ y

$$\lim_{|z| \rightarrow 0} \frac{|Q(z)|}{|z|} = 0.$$

Por lo tanto, dado algún $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $U = B_\delta(0)$

$$|Q(z)| \leq \varepsilon |z| \text{ para } z \in U. \quad (2.2.3)$$

Demostremos la parte (b).

Si $z = (x, y) \in C \cap U$

$$\begin{aligned} \langle f(z), z \rangle &= \langle (Ax + R(x, y), By + S(x, y)), (x, y) \rangle \\ &= \langle (Ax, By) + (R(x, y), S(x, y)), (x, y) \rangle \end{aligned}$$

$$\langle f(z), z \rangle = \langle Ax, x \rangle + \langle By, y \rangle + \langle Q(z), z \rangle. \quad (2.2.4)$$

Entonces por (2.2.1), (2.2.2) y (2.2.3) en (2.2.4)

$$\langle f(z), z \rangle \geq a|x|^2 - b|y|^2 - \varepsilon|z|^2.$$

En C

$$\begin{aligned} |x| &\geq |y| \\ |x|^2 &\geq |y|^2 \\ 2|x|^2 &\geq |x|^2 + |y|^2 \\ |x|^2 &\geq \frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2) \geq \frac{1}{2}|z|^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\langle f(z), z \rangle \geq \frac{a}{2}|z|^2 - \frac{b}{2}|z|^2 - \varepsilon|z|^2 = \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \varepsilon\right)|z|^2. \quad (2.2.5)$$

Elegimos $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$, tal que $\alpha = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \varepsilon > 0$.

Por lo tanto, $\langle f(z), z \rangle \geq \alpha|z|^2$. Así, se demostró (b).

Ahora, demostremos (a).

$$\begin{aligned} \langle x, f_1(x, y) \rangle - \langle y, f_2(x, y) \rangle &= \langle x, Ax + R(x, y) \rangle - \langle y, By + S(x, y) \rangle \\ &= \langle Ax, x \rangle + \langle x, R(x, y) \rangle - \langle By, y \rangle - \langle y, S(x, y) \rangle. \end{aligned}$$

Pero

$$|\langle x, R(x, y) \rangle - \langle y, S(x, y) \rangle| \leq 2|\langle z, Q(z) \rangle|.$$

Luego

$$\begin{aligned} \langle x, f_1(x, y) \rangle - \langle y, f_2(x, y) \rangle &= \langle Ax, x \rangle + \langle x, R(x, y) \rangle - \langle By, y \rangle - \langle y, S(x, y) \rangle \\ &\geq a|x|^2 - b|y|^2 - 2|\langle z, Q(z) \rangle|, \end{aligned}$$

esto por (2.2.1), (2.2.2) y (2.2.3) , además, por (2.2.5) tenemos

$$\begin{aligned}\langle x, f_1(x,y) \rangle - \langle y, f_2(x,y) \rangle &\geq \frac{a}{2}|z|^2 - \frac{b}{2}|z|^2 - 2|z||Q(z)| \\ \langle x, f_1(x,y) \rangle - \langle y, f_2(x,y) \rangle &\geq \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right)|z|^2 - 2|z|\varepsilon|z| \\ \langle x, f_1(x,y) \rangle - \langle y, f_2(x,y) \rangle &\geq \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2} - 2\varepsilon\right)|z|^2.\end{aligned}$$

Elegimos $\varepsilon, \delta > 0$ tal que $\frac{a}{2} - \frac{b}{2} - 2\varepsilon > 0$. Así,

$$\langle x, f_1(x,y) \rangle - \langle y, f_2(x,y) \rangle \geq \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2} - 2\varepsilon\right)|z|^2 > 0.$$

Por lo tanto, hemos demostrado (a). □

Así, se tiene el siguiente teorema de inestabilidad.

Teorema 22. *Sea $W \subset E$ abierto y $f : W \rightarrow E$ continuamente diferenciable. Suponga $f(\bar{x}) = 0$ y \bar{x} es un punto de equilibrio estable de la ecuación*

$$x' = f(x).$$

Entonces ningún autovalor de $Df(\bar{x})$ tiene una parte real positiva. (Hirsch [4] pág. 187)

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\bar{x} = 0$, $\bar{x} \in W$ donde \bar{x} es un punto de equilibrio de f . Supongamos que un autovalor de $Df(\bar{x})$ tiene una parte real positiva. Mostraremos que f no tiene a 0 como punto de equilibrio estable.

Según el Teorema 12 (Sección 1.3.), $E = E_1 \oplus E_2$ invariante bajo $Df(0)$ tal que los autovalores de $A = Df(0)|_{E_1}$ todos tienen parte real positiva y $B = Df(0)|_{E_2}$ tiene parte real negativa o parte real cero. Sea $a > 0$ tal que cada autovalor de A tiene parte real mayor que a entonces E_1 tiene una base tal que en el correspondiente producto interno y norma (norma Euclidiana)

$$\langle Ax, x \rangle \geq a|x|^2, \forall x \in E_1.$$

Similarmente, para algún $b > 0$, E_2 tiene una base tal que en el correspondiente producto interno y norma (norma Euclidiana)

$$\langle By, y \rangle \geq -b|y|^2, \forall y \in E_2.$$

Elegimos b tal que $0 < b < a$.

Tomamos el producto interno en $E = E_1 \oplus E_2$ para ser la suma directa de sus productos internos en E_1 y E_2 ; también usamos las normas asociadas a estos productos internos en E, E_1 y E_2 .

$$\text{Si } z = (x, y) \in E_1 \oplus E_2 \text{ entonces } |z| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2} = \left(|x|^2 + |y|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por la definición de derivada y recordando que $f(0) = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x, y) \\ &= Df(0)z + Q(z) \\ &= (Ax, By) + (R(x, y), S(x, y)) \\ (f_1(x, y), f_2(x, y)) &= f(x, y) = (Ax + R(x, y), By + S(x, y)), \end{aligned}$$

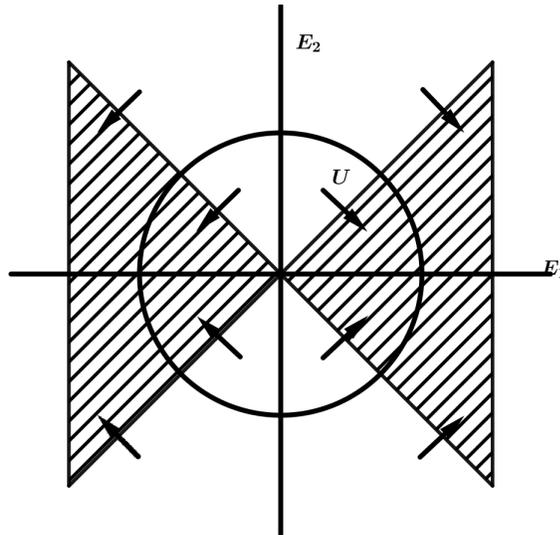
con $(x, y) = z$ y $Q(z) = (R(x, y), S(x, y))$ y

$$\lim_{|z| \rightarrow 0} \frac{|Q(z)|}{|z|} = 0.$$

Así, dado algún $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, si $U = B_\delta(0)$

$$|Q(z)| \leq \varepsilon |z| \text{ para } z \in U.$$

Definamos el cono $C = \{(x, y) \in E_1 \oplus E_2 : |x| \geq |y|\}$.



El Cono es la parte sombreado

Según el inciso (a) del Lema 9 mencionado.

Sea $g : E_1 \times E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $g(x, y) = \frac{1}{2} (|x|^2 - |y|^2)$ entonces g es C^1 , $g^{-1}[0, \infty) = C$ y $g^{-1}(0)$ es el limite de C . Además, si $(x, y) = z \in U$ entonces

$$\begin{aligned} Dg(z) f(z) &= Dg(x, y) (f_1(x, y), f_2(x, y)) \\ &= (x, -y) (f_1(x, y), f_2(x, y)) \\ &= \langle x, f_1(x, y) \rangle - \langle -y, f_2(x, y) \rangle, \end{aligned}$$

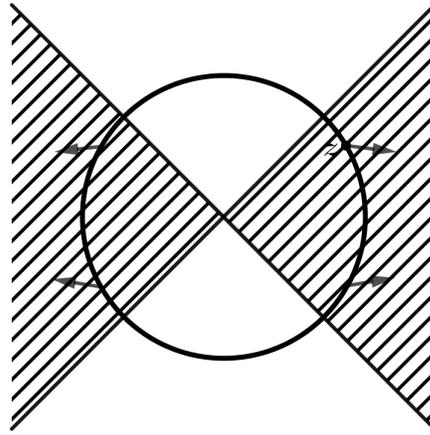
el cual va ser positivo si $z \in g^{-1}(0)$ por (a).

Esto implica que en una solución $z(t)$ en U que pasa a través del límite C , g esta incrementando ya que por la regla de la cadena

$$\frac{d}{dt}(g(z(t))) = Dg(z(t))f(z(t)).$$

Por lo tanto, ninguna solución que comienza en C puede abandonar C antes de que abandone U .

Geoméricamente el inciso (b) del Lema 9 implica que cada vector $f(z)$ en $z \in C$ apunta hacia afuera desde la esfera alrededor de 0 pasando por z .



Luego (b) implica que si $z = z(t)$ es una curva de solución en $C \cap U$ entonces

$$\langle f(z), z \rangle = \langle z', z \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|z|^2).$$

Así, (b) implica

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |z|^2 &\geq \alpha |z|^2 \\ \frac{d \log |z|^2}{dt} &\geq 2\alpha. \end{aligned}$$

Integrando

$$\begin{aligned} \log |z(t)|^2 - \log |z(0)|^2 &\geq 2\alpha t \\ \log \frac{|z(t)|^2}{|z(0)|^2} &\geq 2\alpha t \\ |z(t)|^2 &\geq e^{2\alpha t} |z(0)|^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|z(t)| \geq e^{\alpha t} |z(0)|.$$

Así, cada solución no trivial $z(t)$ que comienza en $C \cap U$ se aleja de 0 a un paso exponencial siempre que este definido y este en $C \cap U$.

Si $z(t)$ no está definido para todo $t \geq 0$ entonces por el Teorema 15 de la subsección 1.5.4 del anterior capítulo, $z(t)$ debe dejar el conjunto compacto $C \cap U$, como hemos visto anteriormente, por lo tanto, debe dejar U . Por otro lado, si $z(t)$ se define para todo t , también debe dejar o salir de U , ya que U es la bola de radio δ y $e^{\alpha t} |z(0)| > \delta$ para t grande.

Por lo tanto, hay soluciones que comienzan arbitrariamente cerca de 0 y salen de U . Así, el campo vectorial f no tiene a 0 como punto de equilibrio estable. \square

Definición 29. Un punto de equilibrio \bar{x} de la ecuación diferencial $x' = f(x)$ es *hiperbólico* si la derivada $Df(\bar{x})$ no tiene autovalores con parte real cero.

Corolario 1. *Un punto de equilibrio hiperbólico es inestable o asintóticamente estable.*

Demostración. Como un equilibrio \bar{x} es hiperbólico, si $Df(\bar{x})$ no tiene autovalores con parte real cero, esto por la Definición 29, por lo que sus autovalores tienen parte real positiva o negativa o tiene ambos. Si algún autovalor de $Df(\bar{x})$ es positivo, entonces \bar{x} es un punto de equilibrio inestable, esto por el Teorema 22. Si todos los autovalores tienen parte real negativa, entonces el punto de equilibrio sería un pozo, por lo cual el punto de equilibrio \bar{x} es asintóticamente estable, esto por definición de pozo. En el caso de que tenga ambos, el retrato fase es una silla, por lo cual, el equilibrio es inestable. \square

Observación. • En el anterior capítulo presentamos flujos lineales hiperbólicos. El análogo no lineal es un punto de equilibrio hiperbólico \bar{x} de un sistema dinámico $x' = f(x)$; esto significa que los autovalores de $Df(\bar{x})$ tienen partes reales distintas de cero. Si estas partes reales son todas negativas, \bar{x} es por supuesto un pozo; si todos son positivos, \bar{x} se llama fuente. Si se presentan ambos signos, \bar{x} es un punto silla. Del teorema anterior vemos que un punto silla es inestable.

• Si \bar{x} es un equilibrio asintótico de un sistema dinámico, por definición existe una vecindad N de \bar{x} tal que cualquier curva de solución que pasa por N tiende hacia \bar{x} .

Definición 30. La unión de todas las curvas solución que tienden hacia \bar{x} (cuando $t \rightarrow \infty$) se llama *cuenca* (basin de atracción) de \bar{x} , denotado por $B(\bar{x})$.

Es claro que cualquier curva solución que cumple con N está en $B(\bar{x})$ y recíprocamente, cualquier curva de solución en $B(\bar{x})$ debe cumplir con N . Se sigue que $B(\bar{x})$ es un conjunto abierto, pues por la continuidad del flujo, si la trayectoria de x se encuentra con N , la trayectoria de cualquier punto cercano también se encuentra con N .

Observación. Observe que $B(\bar{x})$ y $B(\bar{y})$ son disjuntos si \bar{x} y \bar{y} son equilibrios asintóticamente estables diferentes. Pues si una trayectoria tiende hacia \bar{x} , esta no puede tender también hacia \bar{y} .

Si un sistema dinámico representa un sistema físico, uno puede identificar prácticamente los estados en $B(\bar{x})$ con \bar{x} . Para cada estado en $B(\bar{x})$ después de un periodo de tiempo, se mantendrá tan cerca de \bar{x} como para ser indistinguible de él.

2.3. Funciones de Liapunov

En la anterior sección definimos lo que es *estabilidad* y *estabilidad asintótica* de un equilibrio \bar{x} de un sistema dinámico

$$x' = f(x) \quad (2.3.1)$$

donde $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función C^1 en un conjunto abierto $W \subset \mathbb{R}^n$.

Si \bar{x} es un pozo, la estabilidad puede ser detectada examinando los autovalores de la parte lineal $Df(\bar{x})$, en el caso de que no sea un pozo o una fuente, es decir, no hiperbólico, la detección de la estabilidad a través de los autovalores no es posible.



El matemático e ingeniero ruso Aleksandr Mijáilovich Liapunov quien en su tesis doctoral de 1892 “Problème générale de la stabilité du mouvement” encontró un criterio muy útil para la estabilidad, la cual es una generalización de la idea de que para un pozo se tiene una norma en \mathbb{R}^n tal que $|x(t) - \bar{x}|$ disminuye para las soluciones $x(t)$ cerca de \bar{x} . Liapunov mostró que ciertas otras funciones podrían usarse en lugar de la norma para garantizar la estabilidad.

Definición 31. Sea $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en una vecindad $U \subset W$ de \bar{x} . Denotemos por $\dot{V} : U \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$\dot{V}(x) = DV(x)f(x),$$

entonces si $\phi_t(x)$ es la solución a (2.3.1) pasando a través de x cuando $t = 0$

$$\dot{V}(x(t)) = \frac{dV(\phi_t(x))}{dt} \Big|_{t=0}$$

$$\dot{V}(x(t)) = \frac{dV(\phi_t(x))}{dt} = \left\langle \nabla V(\phi_t(x)), \frac{d(\phi_t(x))}{dt} \right\rangle = \langle \nabla V(\phi_t(x)), f(\phi_t(x)) \rangle.$$

Si $\dot{V}(x(t))$ es negativo entonces V disminuye a lo largo de la solución de (2.3.1) a través de $x(t)$.

Ahora podemos establecer el teorema de estabilidad de Liapunov.

Teorema 23. *Sea $\bar{x} \in W$ un equilibrio para (2.3.1). (Hirsch [4] pág. 193)*

Sea $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida en una vecindad $U \subset W$ de \bar{x} , diferenciable en $U - \bar{x}$, tal que:

a) $V(\bar{x}) = 0$ y $V(x) > 0$ si $x \neq \bar{x}$.

b) $\dot{V} \leq 0$ en $U - \bar{x}$ entonces \bar{x} es estable.

Además, si también:

c) $\dot{V} < 0$ en $U - \bar{x}$ entonces \bar{x} es asintóticamente estable.

Demostración. Sea \bar{x} un punto de equilibrio de f y sea V una función continua definida en una vecindad $U \subset W$ de \bar{x} , diferenciable en $U - \bar{x}$.

Sea $\delta > 0$ tan pequeño que la bola cerrada $B_\delta(\bar{x})$ (alrededor de \bar{x} de radio δ) se encuentra completamente en U .

Como V es continua y la esfera $S_\delta(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - \bar{x}| = \delta\} \subset W$ es compacta, tenemos que

$$\alpha = \min_{|x - \bar{x}| = \delta} V(x).$$

Luego por a) ($V(x) > 0$ si $x \neq \bar{x}$) entonces $\alpha > 0$. Ya que $V(x)$ es continua y $V(\bar{x}) = 0$. Sea

$$U_1 = \{x \in B_\delta(\bar{x}) : V(x) < \alpha\},$$

entonces ninguna solución que comience en U_1 puede cumplir $S_\delta(\bar{x})$, ya que V no incrementa a lo largo de las curvas de solución esto por b) ($\dot{V} \leq 0$ en $U - \bar{x}$).

Por lo tanto, todas las soluciones que comiencen en U_1 nunca salen de $B_\delta(\bar{x})$, esto prueba que \bar{x} es estable. Ahora, asumamos c) ($\dot{V} < 0$ en $U - \bar{x}$), de modo que V esta decreciendo estrictamente en órbitas en $U - \bar{x}$.

Sea $x(t)$ una solución que comienza en $U_1 - \bar{x}$.

Supongamos que $x(t_n) \rightarrow z_0$, donde $z_0 \in B_\delta(\bar{x})$, para alguna sucesión $\{t_n\}$ donde $t_n \rightarrow \infty$, esta sucesión existe por la compacidad de $B_\delta(\bar{x})$.

Afirmamos que $z_0 = \bar{x}$, observemos que

$$V(x(t)) > V(z_0), \quad \forall t \geq 0, \tag{2.3.2}$$

ya que $V(x(t))$ decrece y $V(x(t_n)) \rightarrow V(z_0)$, por continuidad de V .

Si $z_0 \neq \bar{x}$. Sea $z(t)$ la solución que comienza en z_0 , para cualquier $s > 0$, tenemos

$$V(z(s)) < V(z_0).$$

Por lo tanto, por continuidad para cualquier solución $y(s)$ que comience lo suficientemente cerca de z_0 tenemos

$$V(y(s)) < V(z_0).$$

Pero entonces para $y(0) = x(t_n)$ para n suficientemente grande tenemos

$$V(x(t_n + s)) < V(z_0).$$

que contradice (2.3.2). Por lo tanto, $z_0 = \bar{x}$, lo cual demuestra que \bar{x} es el único punto límite posible del conjunto $\{x(t) : t \geq 0\}$. Luego, \bar{x} es asintóticamente estable.

Así, se demostró el teorema de Liapunov. \square

Definición 32. Una función V que satisface *a*) y *b*) es llamada una función de Liapunov para \bar{x} . Si *c*) también se cumple llamamos a V una función estricta de Liapunov. El único equilibrio es el origen $x = y = 0$.

El teorema de Liapunov se puede aplicar sin resolver la ecuación diferencial. Por otro lado, no existe un método corto y rápido para encontrar las funciones de Liapunov; es una cuestión de ingenio, prueba y error en cada caso.

En el caso de sistemas mecánicos o eléctricos, la energía es a menudo una función de Liapunov.

Ejemplo 12. Considere el sistema dinámico en \mathbb{R}^3 descrito por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} x' &= 2y(z-1) \\ y' &= -x(z-1) \\ z' &= -z^3 \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Veamos.

El eje z ($\{(x, y, z) : x = y = 0\}$) consiste enteramente en puntos de equilibrio.

Luego $f(x, y, z) = (2yz - 2y, -xz + x, -z^3)$ campo vectorial.

$$Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2z-2 & 2y \\ -z+1 & 0 & -x \\ 0 & 0 & -3z^2 \end{pmatrix}.$$

Investiguemos la estabilidad del origen. La parte lineal del sistema en $(0, 0, 0)$ es la matriz

$$Df(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Halleemos sus autovalores

$$\det(Df(0, 0, 0) - \lambda I) = \lambda(-\lambda^2 - 2).$$

Así, los autovalores son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \sqrt{2}i$ y $\lambda_3 = -\sqrt{2}i$. Observemos que se tiene un autovalor 0 y dos autovalores imaginarios. Así, concluimos que el origen no es un pozo.

Busquemos una función Liapunov para $(0, 0, 0)$ de la forma $V(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$ con $a, b, c > 0$.

Claramente $V(0, 0, 0) = 0$ y $V(x, y, z) > 0$ para cada $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. Recordemos

$$\dot{V}(x, y, z) = \langle \nabla V(\phi_t(x)), f(\phi_t(x)) \rangle.$$

Así,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y, z) &= \langle \nabla V(x, y, z), f(x, y, z) \rangle \\ &= \langle (2ax, 2by, 2cz), (2y(z-1), -x(z-1), -z^3) \rangle \\ &= 2ax2y(z-1) + 2by(-x(z-1)) + 2cz(-z^3) \\ &= 4axyz - 4axy - 2bxyz + 2bxy - 2cz^4 \\ \dot{V}(x, y, z) &= (2b - 4a)xy + (4a - 2b)xyz - 2cz^4. \end{aligned}$$

Como deseamos que $\dot{V} \leq 0$, esto se puede lograr estableciendo

$$2b - 4a = 0 \implies b = 2a,$$

$$a = 1, b = 2a = 2, c = 1.$$

Así, en $\dot{V}(x, y, z) = (2b - 4a)xy + (4a - 2b)xyz - 2cz^4$ tenemos

$$\dot{V}(x, y, z) = -2z^4 \leq 0.$$

Por lo tanto, concluimos que

$$V(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2$$

es una función de Liapunov. Luego por el teorema de Liapunov podemos concluir que el origen es un punto de equilibrio *estable*. Además, el origen es *asintóticamente estable* ya que nuestra función V es Liapunov estricta, es decir, satisface c).

Ejemplo 13. Considere una masa (constante) m que se mueve bajo la influencia de un campo de fuerza conservativo $-\text{grad}\Phi(x)$ definida por una función potencial

$$\Phi : W_0 \longrightarrow \mathbb{R}$$

en un conjunto abierto $W_0 \subset \mathbb{R}^3$.

El sistema dinámico correspondiente en el espacio de estado $W = W_0 \times \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, es para $(x, v) \in W_0 \times \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -\text{grad}\Phi(x) \end{aligned}$$

Sea $(\bar{x}, \bar{v}) \in W_0 \times \mathbb{R}^3$ un punto de equilibrio. Entonces $\bar{v} = 0$ y $\text{grad}\Phi(\bar{x}) = 0$. Para investigar la estabilidad en $(\bar{x}, 0)$, intentamos usar la energía total

$$E(x, v) = \frac{1}{2}m|v|^2 + m\Phi(x),$$

para construir una función Liapunov. Como una función de Liapunov se desvanece en $(\bar{x}, 0)$, restamos $E(x, v)$ la energía del estado $(\bar{x}, 0)$ que es $\Phi(\bar{x})$ y definimos

$$V : W_0 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

por

$$\begin{aligned} V(x, v) &= E(x, v) - E(\bar{x}, 0) \\ &= \frac{1}{2}m|v|^2 + m\Phi(x) - m\Phi(\bar{x}). \end{aligned}$$

Por conservación de energía $\dot{V} \equiv 0$. Como $\frac{1}{2}m|v|^2 \geq 0$, asumimos que $\Phi(x) > \Phi(\bar{x})$ para x cerca de \bar{x} , $x \neq \bar{x}$, esto para que V sea una función de Liapunov.

Así, hemos demostrado el conocido Teorema de Lagrange. Un equilibrio $(\bar{x}, 0)$ de un campo de fuerza conservativo es estable, si la energía potencial tiene un mínimo absoluto local en \bar{x} .



Figura 2.3.1: **Superficie Nivelada de una función de Liapunov**

La Figura 2.3.1 hace que el teorema sea intuitivamente obvio. La condición $\dot{V} \leq 0$ significa que, cuando una trayectoria cruza una *superficie nivelada* $V^{-1}(c)$, se mueve dentro del conjunto donde $V \leq c$ y nunca puede volver a salir. Desafortunadamente no se puede justificar el diagrama.

Por supuesto, en muchos casos la Figura 2.3.1 es correcta. Por ejemplo si V es una forma cuadrática definida positiva como $x^2 + 2y^2$. Pero, que pasa si las superficies niveladas se parecen a la Figura 2.3.2. Es difícil imaginar una V que cumpla con todos los requisitos de una función de Liapunov.

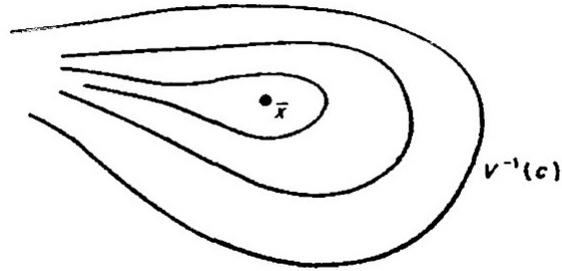


Figura 2.3.2: Superficie Nivelada de una función de Liapunov

Las funciones de Liapunov no solo detectan equilibrios estables, si no que pueden utilizarse para estimar la extensión de la cuenca de un equilibrio asintóticamente estable como muestra el siguiente teorema. Para enunciarlo, enunciaremos las siguientes dos definiciones.

Definición 33. Un conjunto P es positivamente invariante para un sistema dinámico, si para todo x en P , $\phi_t(x)$ está definido y está en P , para todo $t \geq 0$. (ϕ denota el flujo del sistema).

Definición 34. Una órbita completa del sistema dinámico (2,3,1) es un conjunto de la forma:

$$\{\phi_t(x) : t \in \mathbb{R}\}$$

donde $\phi_t(x)$ es definido para todo $t \in \mathbb{R}$.

Teorema 24. Sean $\bar{x} \in W$ un equilibrio del sistema dinámico (2.3.1) y $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Liapunov para \bar{x} , U una vecindad de \bar{x} . Sea $P \subset U$, P es una vecindad de \bar{x} que es cerrado en W . Suponga que P es positivamente invariante y que no existe una órbita completa en $P - \bar{x}$ en la que V sea constante entonces \bar{x} es asintóticamente estable y $P \subset B(\bar{x})$.

Demostración. Por el Teorema 25 de Liapunov, tenemos que \bar{x} es un punto de equilibrio estable de f .

Para establecer que \bar{x} es estable asintóticamente y $P \subset B(\bar{x})$ basta mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}.$$

(Por contradicción) Sea $x(t)$ una trayectoria, $0 \leq t < \infty$, en el conjunto positivamente invariante P . Suponga $x(t)$ no tiende a \bar{x} cuando $t \rightarrow \infty$.

Entonces debe haber un punto $a \neq \bar{x}$ en P y una sucesión $t_n \rightarrow \infty$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) = a.$$

Si $\alpha = V(a)$, entonces α es el límite inferior más grande de $\{V(x(t)) : t \geq 0\}$, esto se debe a la continuidad de V y al hecho que V disminuye a lo largo de las trayectorias.

Sea L el conjunto de todos los puntos a en W

$$L = \{a \in W : \text{existe } t_n \rightarrow \infty \text{ con } x(t_n) \rightarrow a\}$$

donde $x(t)$ es la trayectoria mencionada anteriormente.

Como cada punto de L es un límite de puntos en P , y P está cerrado en W , se deduce que $L \subset P$. Además, si $a \in L$, toda la órbita de a está en L ; esto es $\phi_t(a)$ está definida y en L , para todo $t \in \mathbb{R}$.

Para $\phi_t(a)$ definido para todo $t \geq 0$ ya que P es positivamente invariante. Por otro lado, cada punto $\phi_t(x(t_n))$ está definido para todo t en el intervalo $[-t_n, 0]$, ya que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) = a$$

y suponemos que $t_1 < t_2 < \dots$, esto se sigue por la anterior sección ya que $\phi_t(a)$ está definido para todo $t \in [-t_n, 0]$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Dado que $-t_n \rightarrow -\infty$, $\phi_t(a)$ se define para todo $t \leq 0$.

Para ver que $\phi_s(a) \in L$, para cualquier $s \in \mathbb{R}$, note que si $x(t_n) \rightarrow a$, entonces

$$x(t_n + s) \rightarrow \phi_s(a).$$

Llegamos a una contradicción, para $V(a) = \alpha$ para todo $a \in L$, por lo tanto, V es constante en toda una órbita en P . Esto es una contradicción, por lo tanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x},$$

para todas las trayectorias en P .

Esto prueba que \bar{x} es estable asintóticamente, y también que $P \subset B(\bar{x})$. □

Apliquemos este teorema con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 14. Recordemos el anterior ejemplo simple físico de un pozo no lineal el cual está dada por un péndulo en movimiento en un plano vertical

Aplicamos al equilibrio $\bar{x} = (0, 0)$ del péndulo discutido en la sección 2.1. Para una función de Liapunov probamos la energía total E , que esperamos que disminuya a lo largo de las trayectorias debido a la fricción.

Ahora,

$$E = E_p + E_c$$

donde $E_p = \text{energía potencial}$ y $E_c = \text{energía cinética}$.

Así, se tiene que

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(l\theta')^2 = \frac{1}{2}ml^2\omega^2,$$

pues $v = l\frac{d\theta}{dt} = l\theta'$. Para la energía potencial, tenemos la masa por la altura que esta por encima del punto más bajo del círculo

$$E_p = m(l - l\cos\theta).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} E &= m(l - l\cos\theta) + \frac{1}{2}ml^2\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}ml^2\omega^2 + ml - ml\cos\theta. \end{aligned}$$

Por el sistema de primer orden obtenido en el ejemplo del péndulo de la sección 2.1, se tiene

$$\begin{aligned} \theta' &= \omega \\ \omega' &= -\frac{1}{l}\sin\theta - \frac{k}{m}\omega. \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Así, tenemos $f(\theta, \omega) = (\omega, -\frac{1}{l}\sin\theta - \frac{k}{m}\omega)$ entonces

$$\begin{aligned} E'(\theta, \omega) &= \langle \nabla E(\theta, \omega), f(\theta, \omega) \rangle \\ &= \left\langle (ml\sin\theta, ml^2\omega), \left(\omega, -\frac{1}{l}\sin\theta - \frac{k}{m}\omega \right) \right\rangle \\ &= ml\omega\sin\theta - ml\omega\sin\theta - l^2\omega^2k \\ &= -kl^2\omega^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $E' \leq 0$ y $E(0,0) = 0$ de modo que E es de hecho una función de Liapunov.

Para estimar la *cuenca* o *bacio de atracción* del punto de equilibrio $\bar{x} = (\theta, \omega) = (0,0)$, fijemos un número “ c ”, tal que

$$0 < c < 2ml. \tag{2.3.5}$$

Y define $P_c = \{(\theta, \omega) : E(\theta, \omega) \leq c \text{ y } |\theta| < \pi\}$. Claramente $(0,0) \in P_c$, probaremos que $P_c \subset B(0,0)$ es positivamente invariante.

Por supuesto, $(\theta(t), \omega(t)), 0 \leq t \leq \alpha$ donde $\alpha > 0$ es una trayectoria con

$$(\theta(0), \omega(0)) \in P_c.$$

Para ver que $(\theta(\alpha), \omega(\alpha)) \in P_c$, observemos que $E(\theta(\alpha), \omega(\alpha)) \leq c$, ya que $E' \leq 0$.

Si $|\theta(\alpha)| \geq \pi$, debe existir $t_0 \in [0, \alpha]$ suficientemente pequeño, tal que $\theta(t_0) = \pm\pi$ entonces

$$\begin{aligned} E(\theta(t_0), \omega(t_0)) &= E(\pm\pi, \omega(t_0)) \\ &= ml \left(\frac{1}{2} l \omega^2(t_0) + 1 - \cos(\pm\pi) \right) \\ E(\theta(t_0), \omega(t_0)) &= ml \left(\frac{1}{2} l \omega^2(t_0) + 2 \right) \geq 2ml. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Esto contradice el hecho de que $E(\theta(\alpha), \omega(\alpha)) \leq c < 2ml$. Esta contradicción muestra que $\theta(\alpha) < \pi$ y así P_c es positivamente invariante. Así, P cumple la 2da condición del Teorema 24.

Supongamos que E es constante en una trayectoria., entonces a lo largo de esta trayectoria $E' = 0$ y así, $\omega = 0$.

Por lo tanto, de (2.3.4) tenemos $\theta' = 0 = \omega$. Así, θ es constante en la órbita y también $\sin \theta = 0$. Ya que $|\theta| < \pi$ se deduce que $\theta = 0$.

Por lo tanto, la única órbita completa en P_c en la que E es constante, es la órbita de equilibrio $(0, 0)$.

Finalmente, P_c es un conjunto cerrado.

Si (θ_0, ω_0) es un punto limite de P_c entonces $|\theta_0| \leq \pi$ y $E(\theta_0, \omega_0) \leq c$ por continuidad de E .

Pero $|\theta_0| = \pi$ implica $E(\theta_0, \omega_0) > c$ esto por (2.3.5) y (2.3.6).

Por lo tanto, $|\theta_0| < \pi$ y así $(\theta_0, \omega_0) \in P_c$.

Del Teorema 24 concluimos que cada $P_c \subset B(0, 0)$, de ahí el conjunto

$$P = \cup \{P_c : 0 < c < 2ml\}$$

está contenido en $B(0, 0)$.

Note que

$$P = \{(\theta, \omega) : E(\theta, \omega) < 2ml \text{ y } |\theta| < \pi\}.$$

Para $2ml$ es la energía total del estado $(\pi, 0)$ donde la bolilla del péndulo se equilibra por encima del pivote. Por lo tanto, si el péndulo no apunta hacia arriba y la energía total es menor que la energía total del estado ascendente equilibrado entonces el péndulo se acercará gradualmente al estado $(0, 0)$.

Habrán otros estados en la cuenca de $(0, 0)$ que no están en el conjunto P .

Veamos

Considere un estado (π, μ) , donde μ es muy pequeño pero no cero.

Entonces $(\pi, \mu) \notin P$, pero el péndulo se mueve inmediatamente a un estado en P y por lo tanto, se acerca a $(0, 0)$. Así, $(\pi, \mu) \in B(0, 0)$.

2.4. Sistemas Gradiente

Un sistema gradiente en un conjunto abierto $W \subset \mathbb{R}^n$, es un sistema dinámico de la forma

$$x' = -\text{grad} V(x), \quad (2.4.1)$$

donde $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función C^2 (Una función es de clase C^2 si existen sus derivadas parciales de orden 2 y son continuas, es decir, una función C^2 se denomina dos veces continuamente diferenciable) y

$$\text{grad} V(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)$$

es el campo vectorial gradiente de V .

$$\text{grad} V : U \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

El signo negativo en (2.4.1) es tradicional, notemos que $-\text{grad}(V(x)) = \text{grad}(-V(x))$.

Los sistemas de gradiente tienen propiedades especiales que hacen que sus flujos sean bastante simples.

Propiedad 1. Sea $DV : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, evaluado en $y \in \mathbb{R}^n$

$$DV(x)y = \langle \text{grad} V(x), y \rangle. \quad (2.4.2)$$

Demostración. Observemos que

$$\begin{aligned} DV(x)y &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j}(x) y_j \\ &= \left\langle \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right), (y_1, \dots, y_n) \right\rangle. \end{aligned}$$

Como $\text{grad} V = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)$ y $y = (y_1, \dots, y_n)$. Por lo tanto,

$$DV(x)y = \langle \text{grad} V(x), y \rangle.$$

□

Definición 35. Sea $\dot{V} : U \rightarrow \mathbb{R}$ la derivada de V a lo largo de las trayectorias de (2.4.1), que es

$$\dot{V}(x) = \frac{dV(x(t))}{dt} \Big|_{t=0}.$$

Teorema 25. Sea $\dot{V}(x) \leq 0$ para todo $x \in U$ y $\dot{V}(x) = 0$ si y solo si x es un equilibrio de $x' = -\text{grad} V(x)$. (Hirsch [4] pág. 200)

Demostración. Por la regla de la cadena

$$\dot{V}(x) = DV(x)x'$$

y como $x' = -\text{grad}V(x)$ y $DV(x)y = \langle \text{grad}V(x), y \rangle$.

Luego

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \langle \text{grad}V(x), x' \rangle \\ &= \langle \text{grad}V(x), -\text{grad}V(x) \rangle \\ &= -|\text{grad}V(x)|^2.\end{aligned}$$

Como $|\text{grad}V(x)| \geq 0$ entonces $|\text{grad}V(x)|^2 \geq 0$. Así,

$$\dot{V}(x) = -|\text{grad}V(x)|^2 \leq 0.$$

Además, x es un punto de equilibrio $\Leftrightarrow f(x) = -\text{grad}V(x) = 0 \Leftrightarrow \dot{V}(x) = 0$.

Así, se ha demostrado el teorema. \square

Corolario 2. Sea \bar{x} un mínimo aislado de V . Entonces \bar{x} es un equilibrio estable asintóticamente del sistema gradiente $x' = -\text{grad}V(x)$.

Demostración. Sea $T : W \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^2 definida por $T(x) = V(x) - V(\bar{x})$, luego como \bar{x} es un mínimo aislado entonces $\text{grad}V(\bar{x}) = 0$ y por tanto \bar{x} es un punto de equilibrio de (2.4.1), además T cumple

a) $T(\bar{x}) = V(\bar{x}) - V(\bar{x}) = 0$.

b) Sea $x \in U - \{\bar{x}\}$, como \bar{x} es mínimo aislado tenemos $V(x) > V(\bar{x})$ entonces $T(x) = V(x) - V(\bar{x}) > 0$.

c) Sea $x \in U - \{\bar{x}\}$ entonces

$$\begin{aligned}\dot{T}(x) &= DT(x)(-\text{grad}V(x)) \\ &= D(V(x) - V(\bar{x}))(-\text{grad}V(x)) \\ &= (DV(x) - DV(\bar{x}))(-\text{grad}V(x)) \\ &= DV(x)(-\text{grad}V(x)) \\ &= \dot{V}(x).\end{aligned}$$

Luego como $\dot{V}(x) = -|\text{grad}V(x)|^2$ tenemos que $\dot{T}(x) = -|\text{grad}V(x)|^2$, como $x \neq \bar{x}$ y \bar{x} el único mínimo, entonces $\text{grad}V(x) \neq 0$, por tanto $\dot{T}(x) < 0$ para todo $x \in U - \{\bar{x}\}$. Así, de a), b) y c), existe $T : W \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $T(\bar{x}) = 0$; $T(x) > 0$ para todo $x \in U - \{\bar{x}\}$ y $\dot{T}(x) < 0$ para todo $x \in U - \{\bar{x}\}$.

Por lo tanto, por el Teorema de Liapunov, \bar{x} es un punto de equilibrio estable asintóticamente. \square

Definición 36. (*) Todo punto u donde $-\text{grad}V(u) \neq 0$ es punto regular del sistema (2.4.1).

(**) Una curva de nivel de V es una curva donde $V(x) = c$ (c constante), es decir, una curva de nivel es la proyección sobre el plano xy de todos los puntos de la gráfica de la función V que se encuentra a una misma altura.

Para entender geoméricamente un flujo de gradiente, podemos observar las superficies niveladas de la función $V : U \rightarrow \mathbb{R}$, estos son los subconjuntos $V^{-1}(c) = \{x \in U : V(x) = c\}$, $c \in \mathbb{R}$.

Si $u \in V^{-1}(c)$ es un punto regular donde $\text{grad}V(x) \neq 0$ entonces $V^{-1}(c)$ se ve como una “superficie” de dimensión $n - 1$ cerca de x .

Teorema 26. En puntos regulares, el campo vectorial $-\text{grad}V(x)$ es perpendicular a las superficies niveladas de V .

Demostración. Sea $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V^{-1}$ un camino diferenciable dado, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ tenemos que $g(t) \in V^{-1}$ entonces $V(g(t)) = c \implies (V \circ g)'(t) = 0 \implies DV(g(t))g'(t) = 0$. Luego $\langle \text{grad}V(g(t)), g'(t) \rangle = 0$ entonces $\langle -\text{grad}V(g(t)), g'(t) \rangle = 0$. \square

Ejemplo 15. Sea $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función $V(x, y) = x^2(x - 1)^2 + y^2$

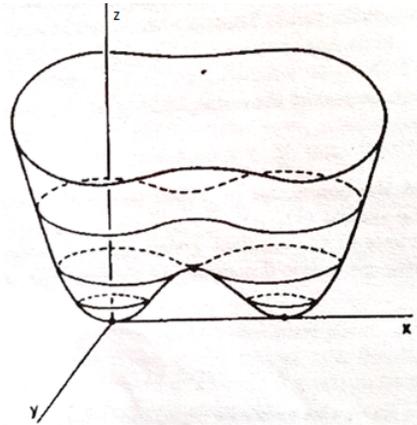


Figura 2.4.1: Gráfico de $V = x^2(x - 1)^2 + y^2$ (Hirsch [4])

Entonces, por $z = (x, y)$

$$f(z) = -\text{grad}V(z) = \left(-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y} \right) = (-2x(x - 1)(2x - 1), -2y)$$

o

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -2x(x - 1)(2x - 1) \\ \frac{dy}{dt} &= -2y. \end{aligned}$$

El estudio de estas ecuaciones diferenciales inician con el equilibrio. Así, hallemos los puntos de equilibrio.

$$\begin{aligned} -2x(x-1)(2x-1) &= 0 \\ -2y &= 0. \end{aligned}$$

Así, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{1}{2}$ y $y = 0$.

Así, obtenemos tres equilibrios: $z_1 = (0,0)$, $z_2 = (1,0)$ y $z_3 = (\frac{1}{2},0)$.

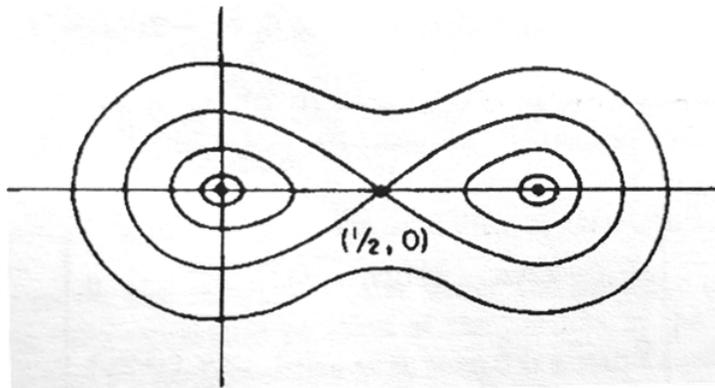


Figura 2.4.2: Curvas de nivel de $V(x,y)$ (Hirsch [4])

Para examinar sus propiedades de estabilidad, calculamos la derivada $Df(z)$

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2(6x^2 - 6x + 1) & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Evaluando en los tres equilibrios dados

$$Df(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad Df(1,0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad Df\left(\frac{1}{2},0\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Del resultado principal de los pozos no lineales, concluimos que $z_1 = (0,0)$ y $z_2 = (1,0)$ son pozos mientras que $z_3 = (\frac{1}{2},0)$ es una silla.

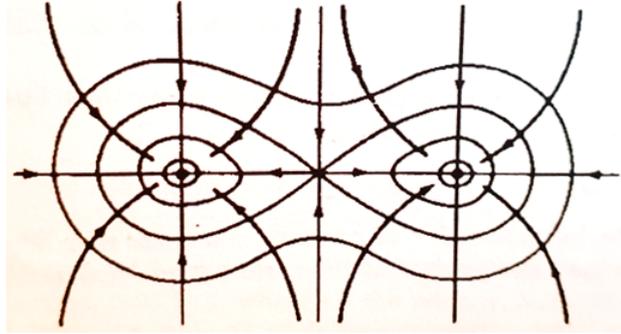


Figura 2.4.3: **Curvas de nivel de $V(x,y)$ y líneas gradientes $(x',y') = -grad V(x,y)$ (Hirsch [4])**

Por el Teorema 22 de la sección 2.2, z_3 no es un equilibrio estable.

El gráfico de V se ve en la Figura 2.4.1. Las curvas en el gráfico representan intersecciones con planos horizontales. Las superficies de nivel (curvas en este caso) se parecen a las de la Figura 2.4.2. Curvas de nivel de $V(x,y) = x^2(x-1)^2 + y^2$ y el retrato fase $(x',y') = -grad V(x,y)$ superpuesta en la Figura 2.4.2, se parece a la Figura 2.4.3.

2.5. Gradiente y Producto Interno

En esta sección se tratará el gradiente de una función de valor real V en un espacio vectorial E dotado con un producto interno \langle, \rangle .

Definición 37. Definimos el dual de un espacio vectorial (*real*) E como el espacio vectorial

$$E^* = L(E, \mathbb{R})$$

de una función lineal $E \rightarrow \mathbb{R}$.

Teorema 27. E^* es isomorfo a E y por lo tanto tiene la misma dimensión. (Hirsch [4] pág. 204)

Demostración. Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base para E y \langle, \rangle el producto interno inducido.

Definamos

$$\begin{aligned} u &: E \rightarrow E^* \\ x &\mapsto u_x \end{aligned}$$

donde $u_x(y) = \langle x, y \rangle$.

Demostremos que u es lineal para todo $x, z \in E$ y $c \in \mathbb{R}$.

$$u_{cx+z}(y) = \langle cx+z, y \rangle = \langle cx, y \rangle + \langle z, y \rangle = c \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle = cu_x(y) + u_z(y).$$

Por lo tanto, u es lineal. Ahora, probemos que u es inyectiva

$$u_x \neq 0 \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{ya que} \quad u_x(x) = \langle x, x \rangle \neq 0.$$

Así, el Kernel de u es 0, en consecuencia, u es inyectiva.

Demostremos que u es sobreyectiva.

Sea $v \in E^*$ y $v(e_i) = l_i$. Definimos $x = \sum l_i e_i$, luego

$$u_x(e_k) = \langle e_k, x \rangle = \langle e_k, \sum l_i e_i \rangle = l_k.$$

Así $u_k = v$. Entonces $\dim E = \dim E^*$, esto prueba el teorema. \square

Observación 8. Ya que E y E^* tienen la misma dimensión, supongamos n , luego E^* tiene una base de n elementos.

Definición 38. Si $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ es una base para E , determinan una base $B^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ para E^* , definiendo

$$\begin{aligned} e_j^* : E &\rightarrow \mathbb{R} \\ e_j^* \left(\sum l_i e_i \right) &= l_j. \end{aligned}$$

Para $i, j = 1, \dots, n$. Por lo tanto, e_j^* es caracterizado por $e_j^*(e_i) = \delta_{ij}$. Así, B^* es llamado la base dual de B .

Definición 39. Supongamos que E es dotado con un producto interno arbitrario \langle, \rangle . Definimos una función asociada $\Phi : E \rightarrow E^*$ por

$$\Phi(x)(y) = \langle x, y \rangle.$$

Claramente Φ es un isomorfismo por Teorema 27, ya que su Kernel es 0.

Sea $V : W \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable definida en un conjunto abierto $W \subset E$.

La derivada de V es una función continua

$$DV : W \rightarrow L(E, \mathbb{R}) = E^*.$$

Una función $W \rightarrow E^*$ se llama 1-forma en W . Una ecuación diferencial ordinaria es lo mismo que un campo vectorial en W , es decir, $W \rightarrow E$. Usamos $\Phi^{-1} : E^* \rightarrow E$ para convertir la 1-forma $DV : W \rightarrow E^*$ en un campo vectorial $grad V : W \rightarrow E$.

Definición 40. Sea $grad V(x) = \Phi^{-1}(DV(x))$, $x \in W$. De la definición de Φ obtenemos la formulación equivalente

$$DV(x)y = \langle grad V(x), y \rangle, \quad \forall y \in E. \quad (2.5.1)$$

Si $E = \mathbb{R}^n$ con el producto interno usual, entonces esta definición de $grad V(x)$ es la misma que

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}(x) \right).$$

Demostremos algunos resultados de la sección anterior sobre la ecuación diferencial

$$x' = -\text{grad} V(x). \quad (2.5.2)$$

Usando nuestra nueva definición de $\text{grad} V$.

Teorema 28. Sea $V : W \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^2 (que es $DV : W \rightarrow E^*$ es C^1 o V tiene una segunda derivada parcial continua) en un conjunto abierto W en un espacio vectorial E con un producto interno. (Hirsch [4] pág. 205)

- a) \bar{x} es un punto de equilibrio de la ecuación diferencial (2.5.2) si y solo si $DV(\bar{x}) = 0$.
 b) Si $x(t)$ es una solución de (2.5.2) entonces

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = -|\text{grad} V(x(t))|^2.$$

- c) Si $x(t)$ no es constante entonces $V(x(t))$ es una función decreciente de t .

Demostración. Demostremos a).

Tenemos la ecuación diferencial

$$x' = -\text{grad} V(x).$$

Ya que V es C^2 , el lado derecho de (2.5.2) es una función C^1 de x , por lo tanto, la teoría básica de unicidad y existencia del anterior capítulo se aplica a (2.5.2).

Por las definiciones, con \bar{x} un punto de equilibrio,

$$-\text{grad} V(\bar{x}) = 0$$

si y solo si $DV(\bar{x}) = 0$, ya que $\Phi : E \rightarrow E^*$ es un isomorfismo lineal, esto prueba a).

Demostremos b).

Usando la regla de la cadena

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = DV(x(t))x'(t) = DV(x(t))(-\text{grad} V(x(t))),$$

por (2.5.2). Luego por (2.5.1) esto es igual

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = \langle \text{grad} V(x(t)), -\text{grad} V(x(t)) \rangle = -|\text{grad} V(x(t))|^2.$$

Ahora probemos c).

Si $x(t)$ no es constante, entonces por a), $\text{grad} V(x(t)) \neq 0$. Así, b) implica

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = -|\text{grad} V(x(t))|^2 < 0.$$

Así, $V(x(t))$ es una función decreciente en t . Esto prueba c). □

Definición 41. Definimos la adjunta de un operador

$$T : E \rightarrow E,$$

(donde E tiene algún producto interno fijo) para ser el operador

$$T^* : E \rightarrow E,$$

definido por la igualdad

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle; \quad \forall x, y \text{ en } E.$$

Primero mantengamos y fijo y notemos que la función

$$x \mapsto \langle Tx, y \rangle$$

es una función lineal $E \rightarrow \mathbb{R}$, por lo tanto, define un elemento $\lambda(y) \in E^*$. Así, definimos

$$T^*y = \Phi^{-1}\lambda(y),$$

donde $\Phi : E \rightarrow E^*$ es el isomorfismo definido anteriormente.

Si B es una *base ortonormal* para E , es decir,

$$E = \{e_1, \dots, e_n\}, \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

entonces la B -matriz de T^* resulta ser la transpuesta de la B -matriz para T .

Un operador $T \in L(E)$ es la autoadjunta de $T^* = T$ que es

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle, \quad \forall x, y \text{ en } E.$$

En una *base ortonormal*, esto significa la matriz $[a_{ij}]$ de T es simétrica, que es

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Teorema 29. Sea E un espacio vectorial real con un producto interno y sea T un operador auto-adjunta en E . Entonces los autovalores de T son reales.

Demostración. Sea E_C la complejización de E .

Extendemos \langle, \rangle a una función $E_C \times E_C \rightarrow \mathbb{C}$.

Si $x + iy, u + iv \in E_C$, se define

$$\langle x + iy, u + iv \rangle = \langle x, u \rangle + i(\langle y, u \rangle - \langle x, v \rangle) + \langle y, v \rangle.$$

Verifiquemos que para todo $a, b \in E_C, \lambda \in \mathbb{C}$

$$\langle a, a \rangle > 0 \text{ si } a \neq 0, \tag{2.5.3}$$

$$\lambda \langle a, b \rangle = \langle \lambda a, b \rangle = \langle a, \bar{\lambda} b \rangle. \quad (2.5.4)$$

Demostremos (2.5.3). Sea $a = x + iy$

$$\langle a, a \rangle = \langle x + iy, x + iy \rangle = \langle x, x \rangle + i(\langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle) - \langle y, y \rangle > 0.$$

Si $\langle x, x \rangle > 0$ si $x \neq 0$ y $\langle y, y \rangle > 0$ si $y \neq 0$. Así, $a = x + iy \neq 0$.

Demostremos (2.5.4). Sea $a = x + iy, b = u + iv \in E_C$,

$$\begin{aligned} \lambda \langle a, b \rangle &= \lambda \langle x + iy, u + iv \rangle = \lambda (\langle x, u \rangle + i(\langle y, u \rangle - \langle x, v \rangle) + \langle y, v \rangle) \\ &= \langle \lambda x + i\lambda y, u + iv \rangle = \langle \lambda(x + iy), u + iv \rangle = \langle \lambda a, b \rangle = \langle a, \bar{\lambda} b \rangle \end{aligned}$$

donde $\bar{\cdot}$ denota la conjugada compleja.

Sea $T_C : E_C \rightarrow E_C$ la complejización de T ; por lo tanto,

$$T_C(x + iy) = Tx + iTy.$$

Sea $(T^*)_C$ la complejización de T^*

$$\begin{aligned} \langle T_C a, b \rangle &= \langle Tx + iTy, u + iv \rangle = \langle Tx, u \rangle + i(\langle Ty, u \rangle - \langle Tx, v \rangle) + \langle Ty, v \rangle \\ &= \langle x, T^* u \rangle + i(\langle y, T^* u \rangle - \langle x, T^* v \rangle) + \langle y, T^* v \rangle \\ &= \langle x + iy, T^* u + iT^* v \rangle \\ &= \langle x + iy, (T^*)_C(u + iv) \rangle \\ &= \langle a, (T^*)_C b \rangle \end{aligned}$$

$$\langle T_C a, b \rangle = \langle a, (T^*)_C b \rangle. \quad (2.5.5)$$

Supongamos $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalor para T y $a \in E_C$ un autovector para λ , entonces $T_C a = \lambda a$.

Por (2.5.5)

$$\langle T_C a, a \rangle = \langle a, (T^*)_C a \rangle = \langle a, T_C a \rangle,$$

esto pues $T^* = T$ (T es un operador auto-adjunto en E). Por consiguiente,

$$\langle \lambda a, a \rangle = \langle a, \lambda a \rangle.$$

Pero por (2.5.4)

$$\lambda \langle a, a \rangle = \langle \lambda a, a \rangle.$$

Por otro lado,

$$\bar{\lambda} \langle a, a \rangle = \langle a, \lambda a \rangle.$$

Así, por (2.5.3)

$$\lambda = \bar{\lambda}.$$

Así λ es real. □

Corolario 3. *Una matriz simétrica real $n \times n$ tiene autovalores reales.*

Demostración. Es una consecuencia del anterior Teorema 29. □

Ahora consideremos de nuevo un campo vectorial de gradiente

$$F(x) = -\text{grad} V(x).$$

Por simplicidad, suponemos que el espacio vectorial es \mathbb{R}^n dotado con el producto interno usual.

Sea \bar{x} un equilibrio del sistema $x' = -\text{grad} V(x)$.

El operador $DF(\bar{x})$ tiene la matriz

$$-\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) \right],$$

en la base estándar.

Ya que la matriz es simétrica concluimos:

Teorema 30. *En un equilibrio de un sistema de gradiente los autovalores son reales.*

Este teorema también es cierto para gradientes definidos por productos internos arbitrarios.

Por ejemplo, un sistema de gradiente no puede tener espirales o centros en equilibrio. De hecho tampoco puede tener nodos impropios pues por el siguiente teorema.

Teorema 31. *Sea E un espacio vectorial real con un producto interno. Entonces cualquier operador autoadjunto en E puede ser diagonalizado.*

Demostración. Sea $T : E \rightarrow E$ autoadjunto.

Ya que los autovalores de T son reales esto por Teorema 32, existe un vector distinto de cero $e_1 \in E$, tal que

$$Te_1 = \lambda_1 e_1, \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}.$$

Sea $E_1 = \{x \in E : \langle x, e_1 \rangle = 0\}$ el complemento ortogonal de e_1 .

Sea $x \in E_1$ entonces $Tx \in E_1$ para

$$\langle Tx, e_1 \rangle = \langle x, Te_1 \rangle = \langle x, \lambda_1 e_1 \rangle = \lambda_1 \langle x, e_1 \rangle = 0.$$

De ahí T deja E_1 invariante.

Dotando a E_1 el mismo producto interno que E entonces el operador

$$T_1 = T|_{E_1} \in L(E_1)$$

es autoadjunta.

De la misma forma encontramos un vector $e_2 \neq 0$, $e_2 \in E_1$, tal que

$$Te_2 = \lambda_2 e_2, \quad \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Notemos que e_1, e_2 son L.I., ya que $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$.

Así, continuando de esa manera encontramos un conjunto independiente máximo al cual denotamos por $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ de autovectores de T , estos deben generar E , de lo contrario podríamos extender el conjunto al observar la restricción de T al subespacio ortogonal $\{e_1, \dots, e_n\}$. En esta base B , T es diagonal. \square

Capítulo 3

Modelo SIR Epidemiológico

Este capítulo tiene como objetivo principal el estudio y análisis matemático cualitativo del modelo SIR epidemiológico, el cual se basa en la teoría expuesta en los anteriores capítulos.

En tal sentido, se inicia con la sección 3.1, donde se realiza una breve reseña histórica sobre las epidemias y la aplicación de la matemática a la epidemiología. Asimismo, se introducen algunas definiciones sobre los tipos de enfermedades, donde se observa bajo qué condiciones se puede considerar que la enfermedad que se está estudiando es una epidemia o una endemia. Luego, se asume una serie de hipótesis bajo las cuales se establecen los modelos S.I., S.I.S. y S.I.R, en consecuencia se definen los compartimentos de la población afectada, pues los modelos que se formulan son modelos compartimentales. En la sección 3.2, se hace un breve estudio del modelo S.I.(Susceptibles-Infectados). En la sección 3.3, se estudia y analiza el modelo S.I.S. (Susceptible-Infectados-Susceptible) donde se define la tasa de reproducción básica \mathcal{R}_0 , mediante el cual se hace un análisis de este modelo, donde se obtiene algunos resultados que se demuestran en el transcurso. En la sección 3.4, se realiza el análisis y estudio matemático cualitativo del modelo S.I.R.(Susceptibles-Infectados-Removidos) epidemiológico (la cual es una extensión del los modelos S.I y S.I..S), mediante variables adimensionales y un simplex bidimensional. Para el análisis cualitativo se halla los puntos de equilibrio del sistema y se estudia la estabilidad de las mismas.

En la siguiente sección, se observa un enfoque distinto al de la sección anterior, donde se halla la relación de tamaño y el número máximo de individuos infecciosos en cualquier instante de tiempo. Finalmente, en la última sección, se analiza y estudia un modelo SIR con vacunación, donde también se hallan sus puntos de equilibrio y se estudia la estabilidad de los mismos.

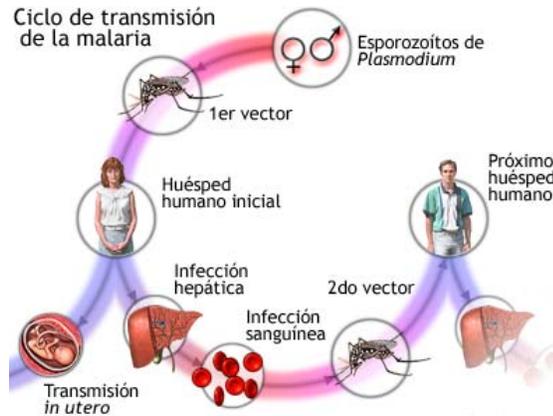
3.1. Introducción y Consideraciones Preliminares

A lo largo de la historia de la humanidad, el hombre ha sufrido y atravesado por diversas enfermedades, las cuales se extendieron rápidamente, produciendo epidemias y pandemias, dejando a su paso un gran número de muertos. La epidemia del Sida, la reciente epidemia del COV-2(Covid-19), pandemias recurrentes y estallidos de enfermedades como el virus del Ébola, son eventos de preocupación y de interés para muchas personas. En términos históricos, las enfermedades infecciosas han constituido una amenaza muy grave para la humanidad.

El historiador William H. McNeill argumenta en su libro *Plagues and People* (1976) que la propagación de enfermedades transmisibles influyeron en la historia, es así que la caída de varios imperios se ha atribuido directa o indirectamente a enfermedades epidémicas; por ejemplo, la derrota de millones de aztecas por Cortez, puede explicarse, en parte, por la epidemia de viruela que devastó a los aztecas, pero que tuvo poco efecto en los españoles, debido a que los aztecas no tenían inmunidad natural ante esta enfermedad a diferencia de los españoles, lo cual propició la pronta caída del imperio; otro ejemplo, fue la peste negra o también conocida como la muerte negra, propagada a través de Asia hasta Europa en el siglo XIV, causando la muerte de hasta un tercio de la población de Europa.

En la antigüedad y en la época medieval las epidemias eran conocidas como “plagas” debido a la creencia general de que las epidemias representaban una retribución divina por una vida pecaminosa, lo cual obstaculizó y retrasó los intentos de controlar estas epidemias.

La aplicación de la matemática a la epidemiología puede remontarse hasta 1760, cuando Daniel Bernoulli un matemático sueco-holandés, quien tenía conocimientos médicos y matemáticos, publicó un tratado sobre la epidemia de la viruela, la cual azotó a Europa durante los años 1665-1666. Bernoulli propuso varios modelos matemáticos mediante ecuaciones diferenciales para modelar algunas enfermedades infecciosas. Los resultados obtenidos por Bernoulli son válidos aún y al principio de utilizar una técnica matemática de investigación para evaluar medidas alternativas de salud. En 1892, Ronald Ross, un médico escocés y un competente matemático aficionado, quien estaba convencido de la necesidad de usar la matemática para apoyar las investigaciones epidemiológicas, explicó el ciclo completo de la malaria humana, con la inclusión del mosquito como vector y el parásito Plasmodium. Después, Ross formuló un modelo matemático en su libro “The prevention of Malaria” en 1911, con el propósito de erradicar dicha enfermedad, ya que no era necesario extinguir a los mosquitos, sino disminuir su población. Esta idea fue rechazada en aquellos tiempos, puesto que se creía que la cantidad de enfermos no estaba relacionada con la densidad de la población de mosquitos. Ross desarrolló un método que consistía en suponer hipótesis de las posibles causas de un brote epidémico. Posteriormente, formulaba un sistema de ecuaciones diferenciales para describir el brote; después analizaba los resultados que obtenía con sus ecuaciones y las implicaciones epidémicas. Finalmente, comparaba sus predicciones con los datos previamente capturados.



En 1906, Hamer propuso la Ley de acción de masas, que expresa que el número de personas susceptibles que pasan a convertirse en infecciosas es proporcional al número de individuos susceptibles de contraerla, multiplicado por el número de infecciosos. El siguiente gran avance fue el trabajo matemático de Kermack y McKendrick del Laboratory of The Royal College of Physicians en Edimburgo, realizado durante el periodo de 1927 a 1939. Ellos formularon un modelo simple en la matemática epidemiológica, conocido como modelo SIR, el cual es un modelo compartimental determinista que es descrito mediante sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y que se basa en la razón de flujo entre los miembros de las clases susceptibles, infectados y recuperados. En este modelo se asume que luego de recuperarse de la enfermedad, el individuo ya no se volverá a contagiar de esta. Así, las enfermedades que se comportan de esta manera, son las causadas por un virus como el sarampión o la varicela, que cumplen con el esquema del SIR. En su trabajo también se consideraron las enfermedades endémicas y diversos hallazgos interesantes, el resultado excepcional fue el célebre Teorema Umbral, según el cual la introducción de individuos infecciosos dentro de una población de susceptibles podía originar una epidemia solo si la densidad de susceptibles rebasa un cierto valor crítico o umbral. Si el umbral se excede, entonces sobreviene el brote, de lo contrario, desaparece.

Daniel Bernoulli



W.O. Kermack



A.G. McKendrick

Sir Ronald A. Ross



Los experimentos en epidemiología con controles son a menudo difíciles o imposibles de diseñar, incluso si es posible organizar un experimento hay serias cuestiones éticas relacionadas con la aplicación del tratamiento, mientras que el modelaje matemático en epidemiología proporciona una comprensión de los mecanismos que influyen en la propagación de la enfermedad y en el proceso sugiere estrategias de control. A menudo identifican comportamientos que no son claros en datos de experimentos, pues los datos no son reproducibles y el número de datos es limitado; y sujeto a errores de medición.

El modelaje matemático epidemiológico consiste en el uso del lenguaje y herramientas matemáticas para explicar y predecir el comportamiento de agentes infecciosos y potencialmente dañinos para la población humana o animal. Además, los modelos matemáticos pueden proyectar cómo progresan las enfermedades infecciosas, luego mostrar el resultado probable de una epidemia para ayudar a informar a las instituciones de salud pública y sanidad. Los modelos matemáticos usan suposiciones básicas o estadísticas recopiladas para encontrar parámetros para enfermedades infecciosas, las cuales se usan para calcular los efectos de diferentes intervenciones, como programas de vacunación masiva. El modelado puede ayudar a estudiar los mecanismos por los cuales se propagan las enfermedades, predecir el curso de un brote y evaluar estrategias para controlar una epidemia.

Existen dos grandes tipos de modelos matemáticos epidemiológicos: deterministas y estocásticos.

Modelo Determinista: Es un modelo matemático donde las mismas entradas o condiciones iniciales producirán invariablemente las mismas salidas o resultados, no contemplándose la existencia de azar, o incertidumbre en el proceso modelado mediante dicho modelo. Está estrechamente relacionado con la creación de entornos a través de simuladores para el estudio de situaciones hipotéticas.

Modelo Estocástico: Es una abstracción matemática de un proceso empírico cuyo desarrollo está gobernado por leyes probabilísticas. Un modelo estocástico representa una situación donde la incertidumbre está presente.

Por otro lado, para diseñar un modelo de una enfermedad se debe decidir que factores se incorporarán respecto a las características de la población afectada, el tipo de enfermedad y el modelo de la salida de los infectados de la población. Entre los factores están los siguientes:

- a) **La Transmisión de la enfermedad:** Las enfermedades pueden ser transmitidas por **agentes virales, bacteriales y por vectores**. Generalmente, las enfermedades **transmitidas por agentes virales** como la influenza, el sarampión, la rubéola y la varicela confieren inmunidad contra la reinfección, mientras que las enfermedades **transmitidas por agentes bacteriales** como la tuberculosis, meningitis y gonorrea no confieren inmunidad contra la reinfección.



Otras enfermedades humanas, como la malaria, son transmitidas no directamente de persona a persona, sino por **vectores** (generalmente insectos) que son infectados por humanos y que luego transmiten la enfermedad a la población restante. También existen enfermedades como el virus del Nilo Occidental, que se transmiten de un lado a otro entre animales y vectores.

- b) **La dinámica de la población:** La población puede ser considerada **cerrada**, es decir, no existen nacimientos ni fallecimientos naturales en la población, o **abierta**, es decir, se consideran nacimientos y fallecimientos naturales
- c) **El grado de una enfermedad:** Se debe decidir si un individuo puede ser afectado por una enfermedad de manera gradual o si la naturaleza de la enfermedad permite solamente constatar si el individuo está enfermo o no.
- d) **La estructura de edad de la población:** Esta información importa si se trata de una enfermedad que afecta particularmente a niños o alternativamente a ancianos.
- e) **Distribución por sexo:** Esta información es evidentemente de interés para el modelamiento de enfermedades de transmisión sexual.

Por otro lado, se tiene la clasificación de las enfermedades, la cual está condicionado al criterio que se use para agruparla.

Clasificación de las enfermedades según el organismo causante.

- **Enfermedades microparasitarias:** La enfermedad es causada por un virus (por ejemplo el sarampión), una bacteria (por ejemplo la tuberculosis) o un insecto (por ejemplo la malaria).
- **Enfermedades macroparasitarias:** La enfermedad es transmitida por un gusano, por ejemplo la lombriz parasitaria o un artrópodo como la pulga. En tales casos, el grado de la enfermedad es interesante.

Clasificación de las enfermedades según la extensión y permanencia de la enfermedad.

- **Enfermedades epidémicas:** La enfermedad se dice epidémica cuando una enfermedad contagiosa se propaga rápidamente en una población determinada, afectando

simultáneamente a un gran número de personas, esta estalla solamente en ciertos momentos o bajo condiciones determinadas, al contrario de las llamadas endémicas.

- **Enfermedades endémicas:** La enfermedad se dice endémica si es muy extendida en una población de una región específica y reaparece en periodos regulares.
- **Enfermedades pandémicas:** Es una epidemia que afecta a zonas geográficas extensas (hasta llegar a la distribución mundial) generalmente durante un tiempo concreto.

De este modo, en este capítulo se describirá modelos para epidemias donde se considera

- Una población homogénea afectada por una enfermedad microparasitaria.
- Los modelos epidemiológicos se basarán en dos hipótesis fundamentales: la hipótesis determinista del modelo y la continuidad de las variables.
- Dentro de la modelización epidemiológica, se tratarán modelos compartimentales, es decir, se dividirá la población total en distintos conjuntos y estudiaremos las relaciones que se establezcan entre ellos.

Observación. Las enfermedades que confieren inmunidad tienen una estructura compartimental diferente de las enfermedades sin inmunidad y de enfermedades transmitidas por vectores. (Brauer [1] pág. 349)

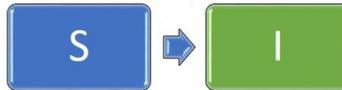
Así, dividimos la población afectada por una enfermedad en los siguientes compartimentos:

- **Susceptibles:** Los susceptibles están denotados por “ S ” que contiene a todos aquellos individuos que no están enfermos, pero que pueden o son susceptibles a enfermarse.
- **Infecciosos:** Los infecciosos están denotados por “ I ” que contiene a los individuos enfermos, es decir, quienes son infecciosos y exhiben los síntomas.
- **Removidos:** La clase de los removidos están denotados por “ R ” que contiene a todos los individuos que ya no pueden ser infectados por la enfermedad porque han fallecido o porque son inmunes.

Definición 42. La variable independiente en los siguientes modelos compartimentales es el tiempo “ t ” y las tasas de transferencia entre compartimentos se expresan matemáticamente como derivadas con respecto al tiempo de los tamaños de los compartimentos y como resultado nuestros modelos se formulan como ecuaciones diferenciales. (Brauer [1] pág. 349)

3.2. Modelo S.I. (Susceptibles-Infectedos) Epidémico

El modelo *S.I.* (*Susceptibles – Infectados*) (Bürger [2] pág. 71) es el más simple posible, donde la población solamente consiste en Susceptibles(*S*) e Infecciosos(*I*) y si se enferma un individuo (la enfermedad es permanente) no hay recuperación. Por consiguiente, el modelo *S.I.* (*Susceptibles(S) – Infectados(I)*) puede ser representado por el siguiente esquema



Dentro de este marco, se asumirán las siguientes hipótesis para este modelo:

- La población está homogéneamente mezclada
- El modelo se aplica al caso en el que una única infección cause la epidemia.
- El tiempo de incubación de la enfermedad es despreciable y la duración de la epidemia comparada con la esperanza de vida de los huéspedes es igualmente despreciable, así que no se tomaran en cuenta los nacimientos y fallecimientos. Entonces se considera una población cerrada

$$S(t) + I(t) = N,$$

donde N es la población total de individuos, $S(t)$ es el número de los susceptibles e $I(t)$ es el número de los infecciosos en el instante t .

- Toda persona sana será considerada susceptible
- La enfermedad se transmite por contacto directo entre las personas.
- El proceso de transmisión de la enfermedad está regido por la ley de acción de masas, es decir, el número de personas susceptibles que pasan a convertirse en infecciosas es proporcional al número de individuos susceptibles por el número de individuos infectados.
- En cuanto un individuo es infectado, pasa a estar en el compartimento de los infectados y no sale de este compartimento, es decir, no hay recuperación.

A partir de las hipótesis explicadas, se formulará el modelo *S.I.*

En este sentido, el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias describe el modelo *S.I.*

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= -f(S,I) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= f(S,I) \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

donde $f(S, I)$ es la incidencia ¹ de la enfermedad y como se mencionó en la ley de acción de masas, el número de personas susceptibles que pasan a convertirse en infecciosas, es proporcional al producto del número de individuos susceptibles por infecciosos, así, se tiene

$$f(S, I) = \beta S(t) I(t).$$

Es decir, el flujo de paso del compartimento de susceptibles al de infectados viene determinado por $\beta S(t) I(t)$ donde $\beta > 0$ es el parámetro que se conoce como tasa de infección por contacto, que representa básicamente la probabilidad de contagio.

Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= -\beta S(t) I(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \beta S(t) I(t) \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

con el número inicial de susceptibles $S(0) = S_0$ y el de infectados $I(0) = I_0$. Aunque, el número de individuos en cada compartimento es un número natural, las variables S e I pueden ser tratadas como variables continuas.

Interpretando el sistema, en la primera ecuación el signo negativo de $f(S, I)$ indica la salida (perdida) de individuos susceptibles y en la segunda ecuación el signo positivo de $f(S, I)$ indica la entrada (ganancia) de individuos infecciosos.

Luego

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\frac{dI(t)}{dt}.$$

Sin embargo, como $S(t) = N - I(t)$ podemos eliminar $S(t)$. Luego, por (3.2.2) se obtiene la ecuación

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta I(t) (N - I(t))$$

ya conocida.

Luego, esta ecuación es solucionable por el método de separación de variables seguido de la descomposición en fracciones simples. Así, la solución para $I(0) = I_0$ es

¹La incidencia es el número de casos nuevos de una enfermedad en una población determinada y en un periodo determinado

$$\frac{dI}{dt} = \beta IN - \beta I^2$$

$$\int_{I_0}^{I_t} \frac{dI}{\beta IN - \beta I^2} = \int_0^t dt$$

$$\frac{1}{N} \int_{I_0}^{I_t} \frac{1}{\beta I} dI + \frac{1}{N\beta} \int_{I_0}^{I_t} \frac{1}{N-I} dI = t$$

$$\frac{1}{N\beta} \left[\ln \left| \frac{I_t(N-I_0)}{I_0(N-I_t)} \right| \right] = t$$

$$I(t) = \frac{I_0 N}{e^{-N\beta t} (N - I_0) + I_0}.$$

Puesto que $I(t) \rightarrow N$ cuando $t \rightarrow \infty$, se advierte que, a la larga toda la población acabará infectada.

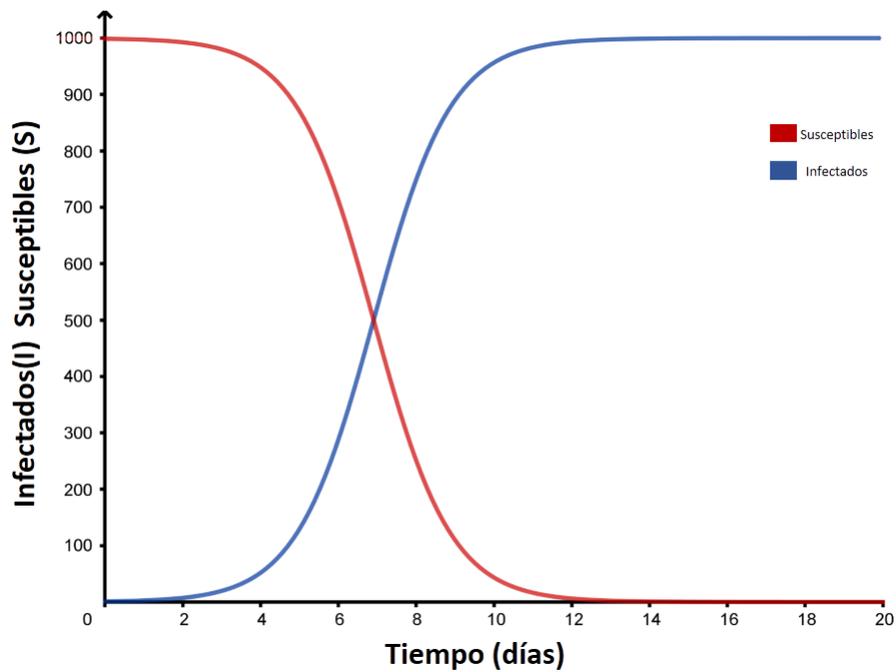
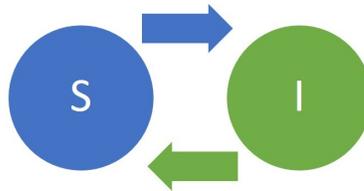


Figura 3.2.1: Simulación de la dinámica de la enfermedad para el modelo SI con parámetro $\beta = 10^{-3}$ y condiciones iniciales $S_0 = 999$, $I_0 = 1$. (Bürger [2])

3.3. Modelo S.I.S (Susceptibles-Infectedos-Susceptibles) Epidémico

Para mejorar el modelo S.I. (*Susceptibles(S) – Infectados(I)*) de la anterior sección, consideremos ahora el efecto de recuperación, pero la recuperación no resulta en inmunidad (un individuo recuperado puede nuevamente enfermarse), es decir, pasa a ser susceptible.

Por consiguiente, el modelo S.I.S. (*Susceptibles(S) – Infectados(I) – Susceptibles(S)*) puede ser representado por el siguiente esquema:



Dentro de este marco, se asumirán las siguientes hipótesis para este modelo:

- La población está homogéneamente mezclada.
- El modelo se aplica al caso en el que una única infección cause la epidemia.
- El tiempo de incubación de la enfermedad es despreciable y la duración de la epidemia comparada con la esperanza de vida de los huéspedes es igualmente despreciable, así que no se tomarán en cuenta los nacimientos y fallecimientos. Entonces se considera una población cerrada

$$S(t) + I(t) = N$$

donde N es la población total de individuos, $S(t)$ es el número de los susceptibles e $I(t)$ es el número de los infecciosos en el instante t .

- Toda persona sana será considerada susceptible
- La enfermedad se transmite por contacto directo entre las personas.
- El proceso de transmisión de la enfermedad está regido por la ley de acción de masas, es decir, el número de personas susceptibles que pasan a convertirse en infecciosas es proporcional al número de individuos susceptibles por el número de individuos infectados.
- En cuanto un individuo es infectado, pasa a estar en el compartimento de los infectados.

- Se considera el efecto de recuperación, pero la recuperación no resulta en inmunidad (un individuo recuperado puede nuevamente enfermarse), es decir, pasa a ser susceptible.

A partir de las hipótesis explicadas, se formula el modelo S.I.S.

En este sentido, se formula el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que describe el modelo S.I.S. (*Susceptibles(S)–Infectados(I)–Susceptibles(S)*).

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= -f(S,I) + g(I), \\ \frac{dI(t)}{dt} &= f(S,I) - g(I),\end{aligned}$$

donde $f(S,I)$ es la incidencia de la enfermedad y como se mencionó en la ley de acción de masas, el número de personas susceptibles que pasan a convertirse en infecciosas, es proporcional al producto del número de individuos susceptibles por infecciosos, así, se tiene

$$f(S,I) = \beta S(t)I(t).$$

Es decir, el flujo de paso del compartimento de susceptibles al de infectados viene determinado por $\beta S(t)I(t)$ donde $\beta > 0$ es el parámetro que se conoce como tasa de infección por contacto, que representa básicamente la probabilidad de contagio. Por otro lado, el flujo de paso del compartimento de infectados al de susceptibles viene determinado por $g(I) = \gamma I(t)$ donde $\gamma > 0$ es la tasa de recuperación, es decir, la probabilidad de recuperación de un individuo.

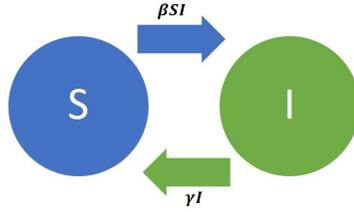
Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= -\beta S(t)I(t) + \gamma I(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t)\end{aligned}\tag{3.3.1}$$

con el número inicial de susceptibles $S(0) = S_0$ y el de infectados $I(0) = I_0$. Aunque, el número de individuos en cada compartimento es un número natural, las variables S e I pueden ser tratadas como variables continuas.

Interpretando el sistema de ecuaciones diferenciales, en la primera ecuación el signo negativo de $f(S,I)$ indica la salida (perdida) de individuos susceptibles, el signo positivo de $g(I)$ indica la entrada (ganancia) de individuos susceptibles y en la segunda ecuación el signo positivo de $f(S,I)$ indica la entrada (ganancia) de individuos infecciosos, el signo negativo de $g(I)$ indica la salida (pérdida) de individuos infectados.

Entonces mediante el modelo S.I.S., se describe los flujos de entrada y salida.



Así, por (3.3.1) se puede reducir el sistema a una dimensión, luego con la sustitución $S(t) = N - I(t)$, se tiene la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dI}{dt} = \beta I \left[\left(N - \frac{\gamma}{\beta} \right) - I \right],$$

que admite solución analítica por el método de separación de variables. Por tanto, la solución con $I(0) = I_0$ es

$$I(t) = \frac{\beta N - \gamma}{\beta + \left[\frac{(\beta N - \gamma)}{I_0} - \beta \right] e^{-(\beta N - \gamma)t}}.$$

Para facilitar la discusión del modelo introduciremos variables no dimensionales, utilizando

$$\begin{aligned} u &= \frac{S}{N} \longrightarrow S = uN, \\ v &= \frac{I}{N} \longrightarrow I = vN, \\ T &= \gamma t \longrightarrow t = \frac{T}{\gamma}. \end{aligned}$$

Luego de la primera ecuación de (3.3.1), se obtiene la ecuación para u

$$\frac{d(uN)}{d\left(\frac{T}{\gamma}\right)} = -\beta vNuN + \gamma vN \longleftrightarrow \frac{du}{dT} = -\frac{\beta vuN}{\gamma} + v$$

y de la segunda ecuación de (3.3.1), se obtiene la ecuación para v

$$\frac{d(vN)}{d\left(\frac{T}{\gamma}\right)} = \beta vNuN - \gamma vN \longleftrightarrow \frac{dv}{dT} = \frac{\beta vuN}{\gamma} - v.$$

Definición 43. Definimos el número de reproducción básico \mathcal{R}_0 como

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta N}{\gamma}$$

donde βN es la tasa con la cual un infeccioso individual en una población de tamaño N contagia a los demás individuos, $\frac{1}{\gamma}$ es la esperanza del tiempo que un infectado permanece infeccioso, por lo tanto, \mathcal{R}_0 es el número esperado de contactos infecciosos hechos por un infectado.

Por consiguiente, por la definición de \mathcal{R}_0 , la ecuación para u asume la forma

$$\frac{du}{dT} = -(\mathcal{R}_0 u - 1)v \quad (3.3.2)$$

y la ecuación para v asume la forma

$$\frac{dv}{dT} = (\mathcal{R}_0 u - 1)v. \quad (3.3.3)$$

Así, se tiene el nuevo modelo

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dT} &= -\mathcal{R}_0 uv + v \\ \frac{dv}{dT} &= \mathcal{R}_0 uv - v \end{aligned} \right\}$$

cuyo único parámetro es $\mathcal{R}_0 = \frac{\beta N}{\gamma}$, que es el número de reproducción básico. Así, se procede con el análisis cualitativo del nuevo sistema.

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = f(u, v) = (-\mathcal{R}_0 uv + v, \mathcal{R}_0 uv - v)$$

$$Df(u, v) = \begin{bmatrix} -\mathcal{R}_0 v & -\mathcal{R}_0 u + 1 \\ \mathcal{R}_0 v & \mathcal{R}_0 u - 1 \end{bmatrix}.$$

Hallemos los puntos de equilibrio

$$\begin{aligned} -\mathcal{R}_0 uv + v &= 0 \\ \mathcal{R}_0 uv - v &= 0. \end{aligned}$$

Luego, los puntos de equilibrio son de la forma $P = (u, 0)$ y $T = \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0}, v\right)$, en específico los puntos de equilibrio $(1, 0)$ y $\left(\frac{1}{\mathcal{R}_0}, 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)$.

Analicemos la estabilidad de estos puntos de equilibrio.

Respecto al punto $(1, 0)$, los autovalores son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = \mathcal{R}_0 - 1$, en este caso el punto de equilibrio no es hiperbólico, pues posee un autovalor nulo, esto por el anterior capítulo. Así, no se puede inferir conclusiones de estabilidad.

Respecto al punto $\left(\frac{1}{\mathcal{R}_0}, 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)$, los autovalores son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1 - \mathcal{R}_0$, en este caso el punto de equilibrio también no es hiperbólico, pues posee un autovalor nulo, esto por el anterior capítulo. Así, no se puede inferir conclusiones de estabilidad.

Por otro lado, a partir de \mathcal{R}_0 es posible estimar el comportamiento del proceso infeccioso en la población. Así, se tiene el siguiente teorema denominado Teorema umbral.

Teorema 32. *Para $\mathcal{R}_0 < 1$ se extingue la enfermedad. Para $\mathcal{R}_0 > 1$ la enfermedad permanece en la población como enfermedad endémica. (Bürger [2] pág. 75)*

Demostración. Iniciemos con el primer caso.

Sea $\mathcal{R}_0 < 1$ con $u = 1 - v$.

Por (3.3.3), se obtiene

$$v' = \frac{dv}{dT} = (\mathcal{R}_0(1 - v) - 1)v = \mathcal{R}_0v - \mathcal{R}_0v^2 - v = (\mathcal{R}_0 - 1)v - \mathcal{R}_0v^2.$$

Puesto que, $\mathcal{R}_0 < 1$ y $v^2 > 0$, así $-\mathcal{R}_0v^2 < 0$, por lo tanto,

$$v' = \frac{dv}{dT} < (\mathcal{R}_0 - 1)v$$

para $\mathcal{R}_0 < 1$. Luego, v decrece exponencialmente y tiende a cero.

Efectivamente, la solución positiva de $v' = \frac{dv}{dT} = (\mathcal{R}_0 - 1)v$ es

$$v = Ce^{(\mathcal{R}_0 - 1)T}.$$

Luego, como $e^{(\mathcal{R}_0 - 1)T} \rightarrow 0$ cuando $T \rightarrow \infty$ (ya que $T = \gamma t$), la cantidad v desaparece exponencialmente cuando $T \rightarrow \infty$.

Veamos el segundo caso.

Sea $\mathcal{R}_0 > 1$ con $u = 1 - v$. Se demostrará que la ecuación (3.3.3) posee un límite cuando $T \rightarrow \infty$ y que este límite es un estado estacionario.

Tomamos la ecuación diferencial ordinaria

$$v' = \frac{dv}{dT} = (\mathcal{R}_0 - 1)v - \mathcal{R}_0v^2,$$

que es del tipo Bernoulli. Así, se toma $z(T) = (v(T))^{1-\alpha}$, luego

$$z'(T) = (1 - \alpha)(v(T))^{-\alpha}v'(T).$$

Con $\alpha = 2$, en el presente caso se tiene la solución

$$z(T) = (v(T))^{-1} \rightarrow z'(T) = -(v(T))^{-2}v'(T).$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} v'(T) - (\mathcal{R}_0 - 1)v &= -\mathcal{R}_0v^2, \\ v^{-2}v'(T) - (\mathcal{R}_0 - 1)v^{-1} &= -\mathcal{R}_0, \\ -z'(T) - (\mathcal{R}_0 - 1)z(T) &= -\mathcal{R}_0, \\ z'(T) + (\mathcal{R}_0 - 1)z(T) &= \mathcal{R}_0. \end{aligned}$$

Luego, observamos que $P(T) = (\mathcal{R}_0 - 1)$, $Q(T) = \mathcal{R}_0$. Entonces,

$$e^{\int P(T)dT} = e^{\int (\mathcal{R}_0 - 1)dT} = e^{(\mathcal{R}_0 - 1)T}.$$

Así, en

$$z(T) = e^{-\int P(T)dT} \left[\int e^{\int P(T)dT} Q(T) dT + C \right]$$

se tiene

$$\begin{aligned} z(T) &= e^{-\int (\mathcal{R}_0-1)dT} \left[\int e^{\int (\mathcal{R}_0-1)dT} \mathcal{R}_0 dT + C \right] \\ &= e^{-(\mathcal{R}_0-1)T} \left[\mathcal{R}_0 \int e^{(\mathcal{R}_0-1)T} dT + C \right] \\ &= e^{-(\mathcal{R}_0-1)T} \left[\frac{\mathcal{R}_0}{\mathcal{R}_0-1} e^{(\mathcal{R}_0-1)T} + C \right] \\ &= \frac{\mathcal{R}_0}{\mathcal{R}_0-1} + C e^{-(\mathcal{R}_0-1)T} \\ z(T) &= \frac{\mathcal{R}_0 + C(\mathcal{R}_0-1) e^{-(\mathcal{R}_0-1)T}}{\mathcal{R}_0-1}. \end{aligned}$$

Como $z(T) = v^{-1}(T) \rightarrow v(T) = \frac{1}{z(T)}$

$$\begin{aligned} v(T) &= \frac{1}{\frac{\mathcal{R}_0 + C(\mathcal{R}_0-1)e^{-(\mathcal{R}_0-1)T}}{\mathcal{R}_0-1}} \\ &= \frac{\mathcal{R}_0-1}{\mathcal{R}_0 + C(\mathcal{R}_0-1)e^{-(\mathcal{R}_0-1)T}} \\ &= \frac{\mathcal{R}_0-1}{\frac{\mathcal{R}_0 e^{(\mathcal{R}_0-1)T} + C(\mathcal{R}_0-1)}{e^{(\mathcal{R}_0-1)T}}} \\ v(T) &= \frac{(\mathcal{R}_0-1)e^{(\mathcal{R}_0-1)T}}{\mathcal{R}_0 e^{(\mathcal{R}_0-1)T} + C(\mathcal{R}_0-1)} = \frac{f(T)}{g(T)}. \end{aligned}$$

Luego, el

$$\lim_{T \rightarrow \infty} v(T) = 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}.$$

En efecto, ya que $\lim_{T \rightarrow \infty} v(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{f(T)}{g(T)} = \frac{\infty}{\infty}$, aplicamos la Regla de L'Hopital. Así, se tiene

$$\lim_{T \rightarrow \infty} v(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{f(T)}{g(T)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{f'(T)}{g'(T)}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{f'(T)}{g'(T)} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{(\mathcal{R}_0 - 1)(\mathcal{R}_0 - 1)e^{(\mathcal{R}_0 - 1)T}}{(\mathcal{R}_0 - 1)\mathcal{R}_0 e^{(\mathcal{R}_0 - 1)T}} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{R}_0 - 1}{\mathcal{R}_0} \\ &= 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}. \end{aligned}$$

Entonces, se tiene

$$\lim_{T \rightarrow \infty} v(T) = 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}.$$

Luego, como $\mathcal{R}_0 > 1$, la enfermedad permanece en la población. □

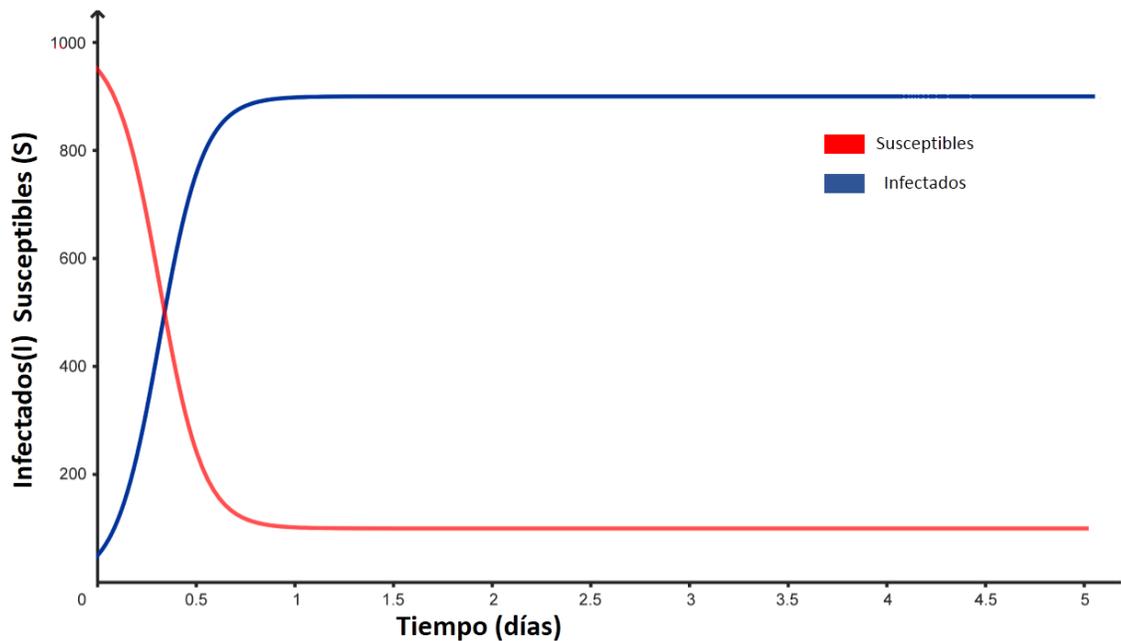


Figura 3.3.1: Dinámica de la enfermedad para el modelo SIS con parámetros $\beta = 0,01$ y $\gamma = 1$, con condiciones iniciales $S_0 = 950$ e $I_0 = 50$. El número de reproducción es $\mathcal{R}_0 = 10$, lo que significa que los 50 infectados introducidos en la población de susceptibles contagiarán, en promedio, a otras 10 personas. Entonces la enfermedad permanece endémica. (Bürger [2])

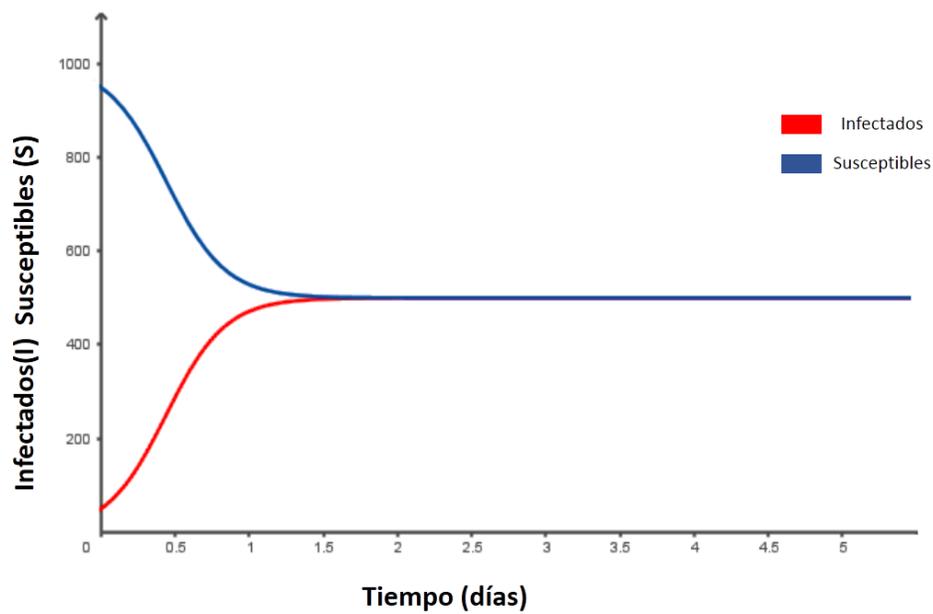


Figura 3.3.2: Dinámica de la enfermedad para el modelo S.I.S con parámetros $\beta = 0,01$ y $\gamma = 5$, y condiciones iniciales $S_0 = 950$ e $I_0 = 50$ con el número reproductivo básico $\mathcal{R}_0 = 2$. Así, la enfermedad permanece endémica. (Bürger [2])

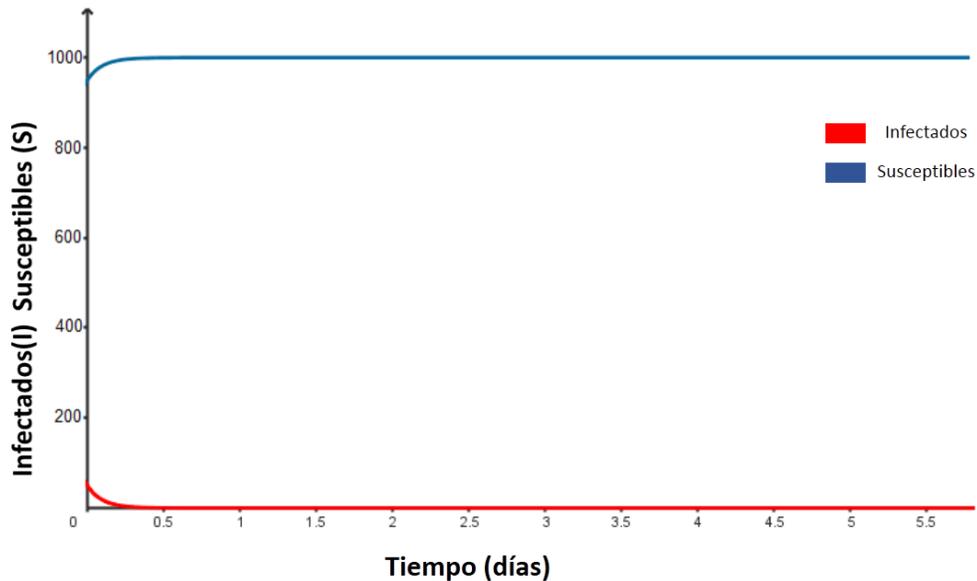


Figura 3.3.3: Dinámica de la enfermedad para el modelo S.I.S con parámetros $\beta = 0,01$ y $\gamma = 20$, y condiciones iniciales $S_0 = 950$ e $I_0 = 50$ con el número reproductivo básico $\mathcal{R}_0 = 0,5$. Así, la enfermedad se extingue. (Bürger [2])

3.4. Modelo S.I.R (Susceptibles-Infectados-Removidos) Epidémico

El modelo S.I.R. epidémico es una extensión de los modelos S.I. y S.I.S. con la novedad esencial de que ahora los individuos que salen de la clase I (*Infectados*) no pueden ser infectados nuevamente, sino que terminan en la clase R (*Removidos*), es decir, para el propósito del modelamiento, estos individuos se consideran inmunes, muertos o aislados.

Por consiguiente, el modelo S.I.R. (*Susceptibles*(S) – *Infectados*(I) – *Removidos*(R)) puede ser representado por el siguiente esquema.



Dentro de este marco, se asumirán las siguientes hipótesis para este modelo:

- La población está homogéneamente mezclada
- El modelo se aplica al caso en el que una única infección cause la epidemia.

- El tiempo de incubación de la enfermedad es despreciable y la duración de la epidemia comparada con la esperanza de vida de los huéspedes es igualmente despreciable, así que no se tomaran en cuenta los nacimientos y fallecimientos. Entonces se considera una población cerrada.

$$S(t) + I(t) + R(t) = N$$

donde N es la población total de individuos, $S(t)$ es el número de los susceptibles, $I(t)$ es el número de los infecciosos en el instante t y $R(t)$ es el número de los removidos en el instante t .

- Toda persona sana será considerada susceptible
- La enfermedad se transmite por contacto directo entre las personas.
- El proceso de transmisión de la enfermedad está regido por la ley de acción de masas, es decir, el número de personas susceptibles que pasan a convertirse en infecciosas es proporcional al número de individuos susceptibles por el número de individuos infectados.
- En cuanto un individuo es infectado, pasa a estar en el compartimento de los infectados.
- Los individuos del compartimento de infectados $I(t)$ se acaban recuperando de la enfermedad y adquieren la inmunidad o mueren, pasando en ambos casos al compartimento de los removidos $R(t)$.

A partir de las hipótesis mencionadas, se formulará el modelo S.I.R. Así, según la Ley de acción de masas, el número de personas susceptibles que pasan a convertirse en infecciosos, es proporcional al producto del número de individuos susceptibles por infecciosos, es decir, el flujo de paso del compartimento de susceptibles al de infectados viene determinado por $\beta S(t)I(t)$ donde $\beta > 0$ es el parámetro que se conoce como tasa de infección por contacto, que representa básicamente la probabilidad de contagio. El flujo de paso del compartimento de infectados al de removidos viene determinado por $\gamma I(t)$ donde $\gamma > 0$ es la tasa de remoción.

En este sentido, se formula el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que describe el modelo S.I.R. (*Susceptibles(S) – Infectados(I) – Removidos(R)*).

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= -\beta S(t)I(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I(t), \end{aligned} \right\} \quad (3.4.1)$$

con el número inicial de susceptibles S_0 , el de infectados I_0 y el de removidos R_0 . Aunque, el número de individuos en cada compartimento es un número natural, las variables S , I y R pueden ser tratadas como variables continuas.

Interpretando el sistema, en la primera ecuación el signo negativo de $\beta S(t)I(t)$ indica la salida (perdida) de individuos susceptibles, en la segunda ecuación el signo positivo de $\beta S(t)I(t)$ indica la entrada (ganancia) de individuos infecciosos y el signo negativo de $\gamma I(t)$ indica la salida (perdida) de individuos infectados; y en la tercera ecuación el signo positivo de $\gamma I(t)$ indica la entrada (ganancia) de individuos.

Entonces mediante el modelo S.I.R. se describe los flujos de entrada y salida.



A diferencia de los modelos anteriores, el modelo S.I.R. carece de solución analítica explícita, por lo que se realizará un estudio cualitativo del sistema anterior.

Para facilitar la discusión del modelo introduciremos variables no dimensionales, utilizando

$$u = \frac{S}{N} \longrightarrow S = uN,$$

$$v = \frac{I}{N} \longrightarrow I = vN,$$

$$w = \frac{R}{N} \longrightarrow R = Nw,$$

$$T = \gamma t \longrightarrow t = \frac{T}{\gamma}.$$

Así, en (3.4.1).

De $\frac{dS}{dt} = -\beta IS$, obtenemos

$$\frac{d(uN)}{d\left(\frac{T}{\gamma}\right)} = -\beta vNuN \longleftrightarrow \frac{du}{dT} = -\frac{\beta uvN}{\gamma},$$

de $\frac{dI}{dt} = \beta IS - \gamma I$

$$\frac{d(vN)}{d\left(\frac{T}{\gamma}\right)} = \beta vNuN - \gamma vN \longleftrightarrow \frac{dv}{dT} = \frac{\beta uvN}{\gamma} - v$$

y de $\frac{dR}{dt} = \gamma I$

$$\frac{d(Nw)}{d\left(\frac{T}{\gamma}\right)} = \gamma vN \longleftrightarrow \frac{dw}{dT} = v.$$

Por lo tanto, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{du}{dT} &= -\frac{\beta uvN}{\gamma}, \\ \frac{dv}{dT} &= \frac{\beta uvN}{\gamma} - v, \\ \frac{dw}{dT} &= v.\end{aligned}$$

Pero, como se definió en la anterior sección la tasa de reproducción básica $\mathcal{R}_0 = \frac{\beta N}{\gamma}$, se tiene un nuevo sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left. \begin{aligned}\frac{du}{dT} &= -\mathcal{R}_0 uv \\ \frac{dv}{dT} &= \mathcal{R}_0 uv - v = (\mathcal{R}_0 u - 1)v \\ \frac{dw}{dT} &= v.\end{aligned}\right\} \quad (3.4.2)$$

Así, se puede proceder con el análisis cualitativo del nuevo sistema, pero antes se tiene la siguiente definición.

Definición 44. El n – *simplex* estándar es el subconjunto de \mathbb{R}^{n+1} dado por

$$\Delta^n = \left\{ (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_i t_i = 1 \quad y \quad t_i \geq 0 \quad \forall i \right\},$$

retirando la restricción $t_i \geq 0$ en la condición anterior da una n – *dimensional* subespacio afín de \mathbb{R}^{n+1} conteniendo el n – *simplex* estándar. Por ejemplo, un 0 – *simplex* es un punto, un 1 – *simplex* un segmento de una línea, un 2 – *simplex* un triángulo, un 3 – *simplex* es un tetraedro y un 4 – *simplex* es un pentácoron.

Entonces, el sistema de ecuaciones (3.4.2) puede ser resuelta sobre el *simplex* bi-dimensional

$$S_2 = \{(u, v, w) : 0 \leq u \leq 1; 0 \leq v \leq 1; 0 \leq w \leq 1; \quad u + v + w = 1\}.$$

Como las dos primeras ecuaciones de (3.4.2) no depende de w , este *simplex* puede ser proyectado sobre el plano (u, v) . De modo que, resulta un triángulo acotado por $u = 0$, $v = 0$ y $u + v = 1$ (nos limitaremos a consideraciones cualitativas) entonces se tiene

$$\left. \begin{aligned}\frac{du}{dT} &= -\mathcal{R}_0 uv \\ \frac{dv}{dT} &= \mathcal{R}_0 uv - v = (\mathcal{R}_0 u - 1)v\end{aligned}\right\} \quad (3.4.3)$$

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = f(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v)) = (-\mathcal{R}_0 uv, \mathcal{R}_0 uv - v),$$

$$Df(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathcal{R}_0 v & -\mathcal{R}_0 u \\ \mathcal{R}_0 v & \mathcal{R}_0 u - 1 \end{bmatrix}.$$

Así, hallemos los puntos de equilibrio

$$\begin{aligned} \frac{du}{dT} &= -\mathcal{R}_0 uv = 0, \\ \frac{dv}{dT} &= \mathcal{R}_0 uv - v = (\mathcal{R}_0 u - 1)v = 0. \end{aligned}$$

Luego, los puntos de equilibrio son todos aquellos $P^* = (\bar{u}, 0)$ con $\bar{u} \in [0, 1]$, en específico los puntos de equilibrio $a = (0, 0)$, $b = \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0}, 0\right)$ y $c = (1, 0)$. Así, cada punto del eje u es un punto de equilibrio cuando $v = 0$.

Puesto que, el interés está en la estabilidad de los puntos de equilibrio, analizamos la matriz asociada a los puntos de equilibrio.

Respecto al punto de equilibrio $a = (0, 0)$

$$Df(0, 0) = \begin{bmatrix} -\mathcal{R}_0 0 & -\mathcal{R}_0 0 \\ \mathcal{R}_0 0 & \mathcal{R}_0 0 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Así, tenemos los autovalores $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -1$

Respecto al punto de equilibrio $b = \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0}, 0\right)$

$$Df\left(\frac{1}{\mathcal{R}_0}, 0\right) = \begin{bmatrix} -\mathcal{R}_0 0 & -\mathcal{R}_0 \frac{1}{\mathcal{R}_0} \\ \mathcal{R}_0 0 & \mathcal{R}_0 \frac{1}{\mathcal{R}_0} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Así, tenemos los autovalores $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 0$

Respecto al punto de equilibrio $c = (1, 0)$

$$Df(1, 0) = \begin{bmatrix} -\mathcal{R}_0 0 & -\mathcal{R}_0 \\ \mathcal{R}_0 0 & \mathcal{R}_0 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathcal{R}_0 \\ 0 & \mathcal{R}_0 - 1 \end{bmatrix}.$$

Así, tenemos los autovalores $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = \mathcal{R}_0 - 1$

Claramente, se observa que los puntos de equilibrio $a = (0, 0)$, $b = \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0}, 0\right)$ y $c = (1, 0)$ no son hiperbólicos, ya que poseen autovalores nulos, esto por lo estudiado en el anterior capítulo. Por lo tanto, no se pueden inferir conclusiones de estabilidad para los puntos de equilibrio.

Otro método para determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio consiste en buscar una función Lyapunov $V(u, v)$. Dado un punto de equilibrio $P = (\bar{u}, 0)$, con $\bar{u} \in (0, 1]$ se propone la siguiente función (Goh [12]):

$$V(u, v) = u - \bar{u} - \bar{u} \ln\left(\frac{u}{\bar{u}}\right) + v$$

definida en el dominio $U = \{(u, v) : u \in (0, 1], v \in [0, 1] \text{ } u + v = 1\}$, contenido en la proyección de S_2 sobre el plano (u, v) . Esta función cumple que

- $V(\bar{u}, 0) = 0$.
- $V(u, v) > 0$ para todo $(u, v) \in U \setminus \{P\}$. En primer lugar, se observa que no existen mínimos relativos en $\text{Int}(U)$ (interior de U). En efecto, analizando los extremos relativos a cada variable, se tiene que las derivadas parciales resultan

$$\frac{\partial V(u, v)}{\partial u} = 1 - \frac{\bar{u}}{u}; \quad \frac{\partial V(u, v)}{\partial v} = 1.$$

De este modo, se comprueba que es imposible encontrar un mínimo relativo que anule ambas derivadas parciales. Además, puede verse que

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} V(u, v) = -\bar{u} - \bar{u} \left[\lim_{u \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{u}{\bar{u}} \right) \right] + v = \infty.$$

A continuación se estudia la función en la frontera de U , denotada como ∂U , salvo en $u = 0$, donde V no está definida. En particular, se busca el mínimo cuando $v = 0$. Definiendo $f(u)$ como $V(u, 0)$, se tiene

$$\text{mín } V(u, 0) = \text{mín } f(u) = \text{mín } u - \bar{u} - \bar{u} \ln \left(\frac{u}{\bar{u}} \right).$$

De la primera derivada, se encuentra un extremo de f

$$f'(u) = 1 - \frac{\bar{u}}{u} \implies f'(\bar{u}) = 0.$$

La segunda derivada indica que se trata de un mínimo, pues

$$f''(u) = \frac{\bar{u}}{u^2} > 0 \quad \forall u \in (0, 1].$$

Además, se observa que $f(\bar{u}) = 0$. Por tanto, $f(u)$ alcanza un mínimo absoluto en $u = \bar{u}$. Queda analizar V en los puntos de la frontera que cumplen $v = 1 - u$ con $u \in (0, 1]$. Así, definiendo $g(u)$ como $V(u, 1 - u)$, se tiene

$$g(u) = u - \bar{u} - \bar{u} \ln \left(\frac{u}{\bar{u}} \right) + 1 - u, \quad u \in (0, 1].$$

Luego, se observa que

$$g(1) = 1 - \bar{u} - \bar{u} \ln \left(\frac{1}{\bar{u}} \right) + 1 - 1 = 1 - \bar{u}(1 - \ln(\bar{u})), \quad u \in (0, 1].$$

Si se define $h(x)$ como $x(1 - \ln x)$ para $x \in (0, 1]$, puede verse que toma un máximo en $x = 1$. En efecto, $h'(x) = (1 - \ln x) + \left(x \frac{(-1)}{x} \right) = -\ln x$, por lo que $h'(1) = 0$. Se comprueba que es un máximo, ya que $h''(x) = -\frac{1}{x} < 0$ para todo $x > 0$. Así,

$$g(1) = 1 - h(u) \geq 1 - \text{máx } h(\bar{u}) = 1 - h(1) = 0.$$

Por otra parte, $g'(u) = -\frac{\bar{u}}{u} < 0$ para todo $u \in (0, 1]$. De este modo, puede concluirse que $g(u) \geq g(1) \geq 0$, para todo $u \in (0, 1]$. Por todo lo anterior, se confirma que $V(u, v) > 0$ para todo $(u, v) \in U \setminus \{P\}$.

- $\dot{V}(u, v) \leq 0$ para todo $(u, v) \in U \setminus \{P\}$, si el punto de equilibrio cumple que $\bar{u} \leq \frac{1}{\mathcal{R}_0} \leq 1$. Luego,

$$\begin{aligned} \dot{V}(u, v) &= \langle \nabla V(u, v), (-\mathcal{R}_0 uv, \mathcal{R}_0 uv - v) \rangle \\ &= \left\langle \left(1 - \frac{\bar{u}}{u}, 1 \right), (-\mathcal{R}_0 uv, \mathcal{R}_0 uv - v) \right\rangle \\ &= -\mathcal{R}_0 uv + \mathcal{R}_0 uv \frac{\bar{u}}{u} + \mathcal{R}_0 uv - v \\ &= \mathcal{R}_0 v \bar{u} - v \\ &= (\mathcal{R}_0 \bar{u} - 1) v. \end{aligned}$$

En efecto, si $\bar{u} \leq \frac{1}{\mathcal{R}_0}$ entonces $\dot{V}(u, v) \leq 0$ para todo $(u, v) \in U \setminus \{P\}$. El proceso anterior es válido para todos los puntos de equilibrio $P = (\bar{u}, 0)$ con $\bar{u} \in (0, 1]$. Por ello, queda probado que son estables si cumplen que $\bar{u} \leq \frac{1}{\mathcal{R}_0} \leq 1$ por el Teorema de Liapunov mencionado en el anterior capítulo. Claramente, V no es una función estricta de Liapunov.

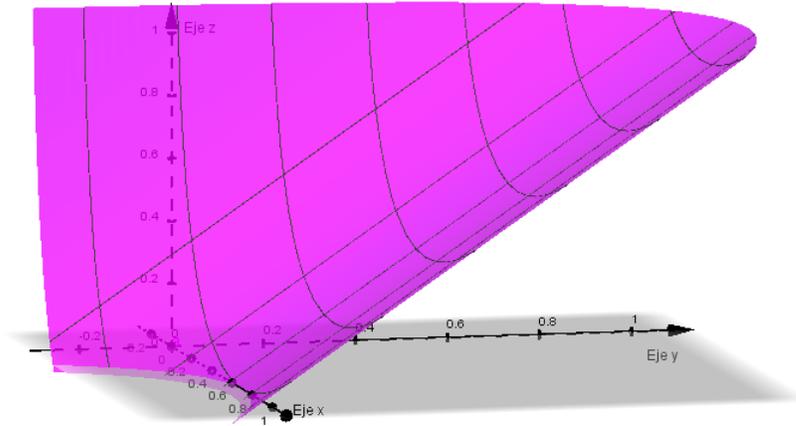


Figura 3.4.1: **Gráfico de** $V(u, v) = u - \bar{u} - \bar{u} \ln\left(\frac{u}{\bar{u}}\right) + v$ **con** $\bar{u} = 0,7$

El trazado del retrato fase puede ser determinado mediante el campo vectorial o por integración de las ecuaciones diferenciales. Como queremos limitarnos a consideraciones cualitativas, estudiaremos las nulclinas, es decir, las curvas en el plano de fase en las cuales el campo vectorial es horizontal o vertical, es decir, donde $u' = 0$ o $v' = 0$.

Veamos las *nulclinas*, primero definamos lo que es nulclina.

Definición 45. (*Nulclinas en el plano*) Dado el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = f(u, v)$. Las nulclinas en el plano son curvas donde

$$f(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v)) = 0,$$

es decir, son los puntos donde se producen los cambios de signo de las derivadas, puntos donde $u(t), v(t)$ pasan de crecer a decrecer o viceversa.

Analicemos las nulclinas correspondientes al sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{du}{dT} &= -\mathcal{R}_0 uv = 0, \\ \frac{dv}{dT} &= \mathcal{R}_0 uv - v = (\mathcal{R}_0 u - 1)v = 0. \end{aligned}$$

La nulclina respecto de $u'(T)$ están dados por los ejes u y v pues

$$\begin{aligned} u(T) &= 0; 0 \leq v \leq 1, \\ v(T) &= 0; 0 \leq u \leq 1. \end{aligned}$$

La nulclina respecto de $v'(T)$

$$\begin{aligned} v(T) &= 0; 0 \leq u \leq 1, \\ u(T) &= \frac{1}{\mathcal{R}_0}; 0 \leq v \leq 1, \end{aligned}$$

luego las nulclinas son el eje u y la línea vertical $u = \frac{1}{\mathcal{R}_0}$.

Así, el eje u ($v = 0$) es una nulclina para ambas ecuaciones.

Veamos, como es la dirección del campo vectorial sobre las nulclinas.

- Sobre el eje v . Se obtiene que $u' = 0$ e $v' = -v$, entonces, las soluciones tienden al punto $(0, 0)$ a lo largo de esta línea.
- Sobre la recta $u = \frac{1}{\mathcal{R}_0}$. Se obtiene que $v' = 0$ e $u' = -v$, entonces, el campo vectorial sobre esta línea vertical, apunta al oeste.
- Si se toma un punto (u_0, v_0) , con $v_0 > 0$ y $u_0 > \frac{1}{\mathcal{R}_0}$. Se obtiene que $\mathcal{R}_0 uv > v$ entonces u' será negativo, e v' será positivo, y el campo vectorial apuntará hacia el noroeste.
- Si se toma un punto (u_0, v_0) , con $v_0 > 0$ y $u_0 < \frac{1}{\mathcal{R}_0}$. Se obtiene que u' y v' serán negativos, y las soluciones apuntarán hacia el sudoeste.

En la siguiente figura se observa el diagrama de las nulclinas y el retrato fase del sistema de ecuaciones diferenciales (3.4.3), por lo que se confirma la información que se tenía sobre la estabilidad de los puntos de equilibrio.

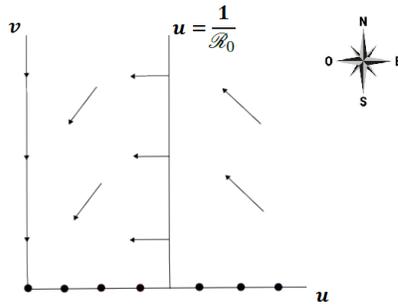


Figura 3.4.2: Nulclinas y dirección del campo vectorial del Modelo S.I.R. (M.W.Hirsh [9])

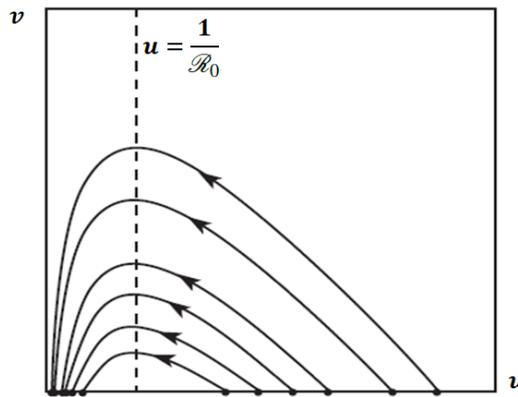


Figura 3.4.3: Retrato fase para el Modelo S.I.R (M.W.Hirsh [9])

En el diagrama derecho de la siguiente figura, que corresponde al caso $\mathcal{R}_0 > 1$, la nulclina $\mathcal{R}_0 u - 1 = 0$ divide el triángulo. En el diagrama izquierdo esto no sucede, puesto que $u = \frac{1}{\mathcal{R}_0}$ está fuera de la región considerada.

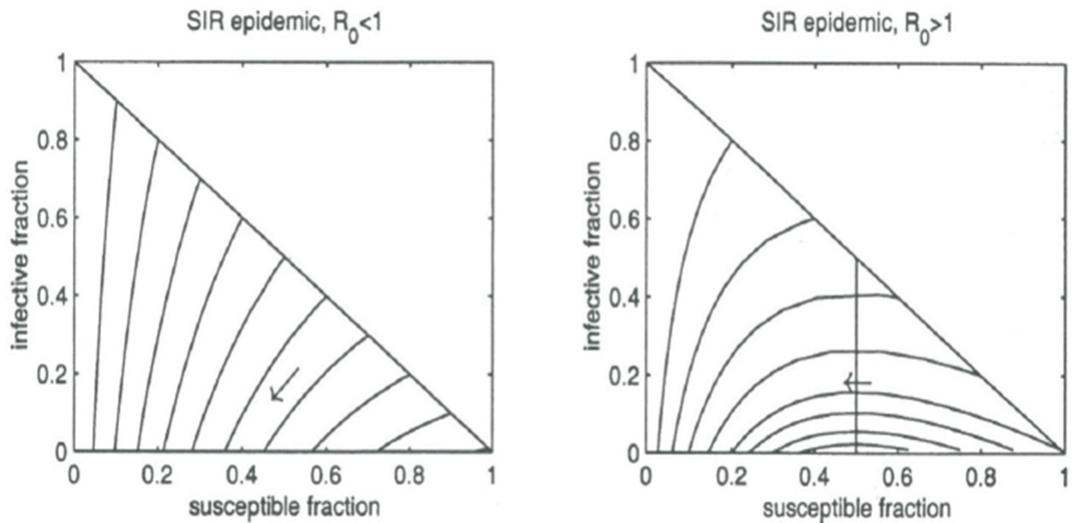


Figura 3.4.4: Plano de fase del modelo SIR epidémico para $\mathcal{R}_0 < 1$ (izquierda) y $\mathcal{R}_0 > 1$ (derecha). (Bürger [2] pág. 79)

A continuación, se presenta a modo de ejemplo las siguientes figuras, que son ejemplos numéricos de los casos $\mathcal{R}_0 = 10$, $\mathcal{R}_0 = 2$ y $\mathcal{R}_0 = 0,90$, respectivamente.

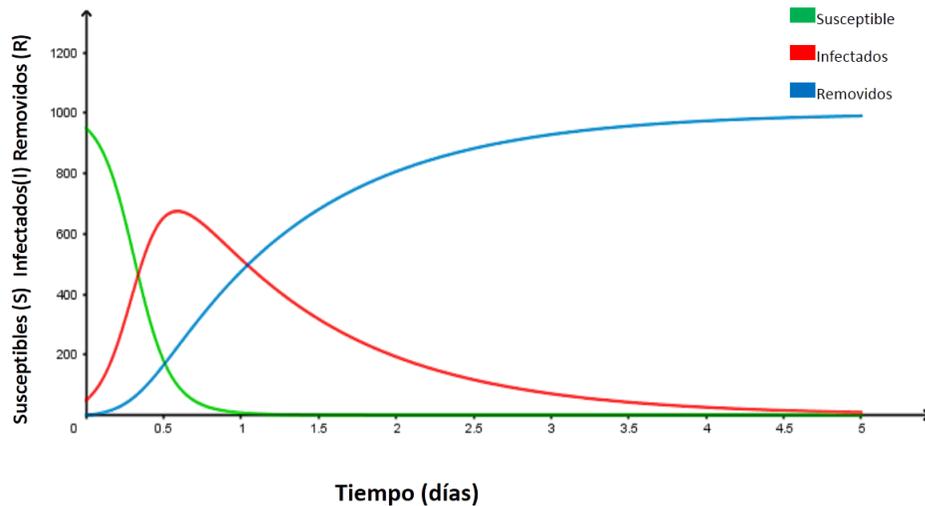


Figura 3.4.5: Dinámica de la enfermedad para el modelo SIR. Los parámetros utilizados son $N = 1000$, $\beta = 0,01$ y $\gamma = 1$, con condiciones iniciales $S(0) = 950$, $I(0) = 50$ y $R(0) = 0$. En este caso $\mathcal{R}_0 = \frac{\beta N}{\gamma} = 10$. (Bürger [2] pág. 80)

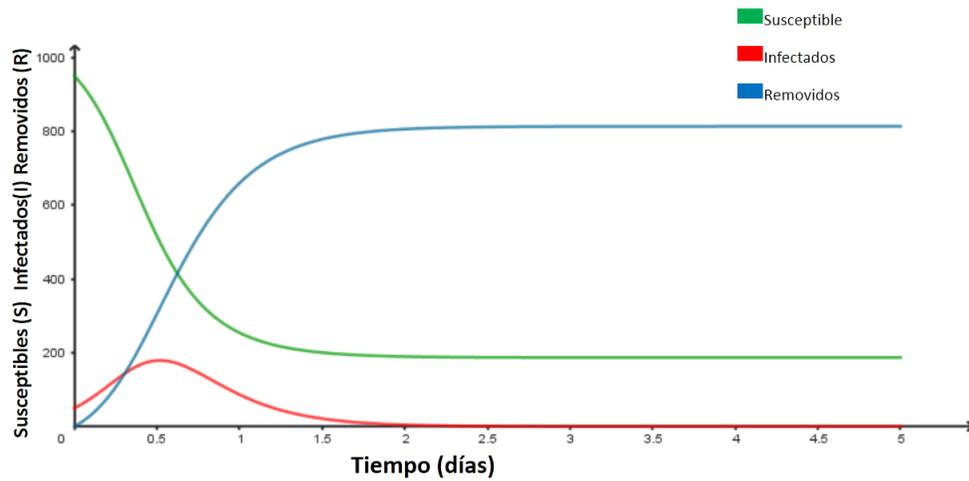


Figura 3.4.6: Dinámica de la enfermedad para el modelo SIR. Los parámetros utilizados son $N = 1000$, $\beta = 0,01$ y $\gamma = 5$, con condiciones iniciales $S(0) = 950$, $I(0) = 50$ y $R(0) = 0$. En este caso $\mathcal{R}_0 = \frac{\beta N}{\gamma} = 2$. (Bürger [2] pág. 81)

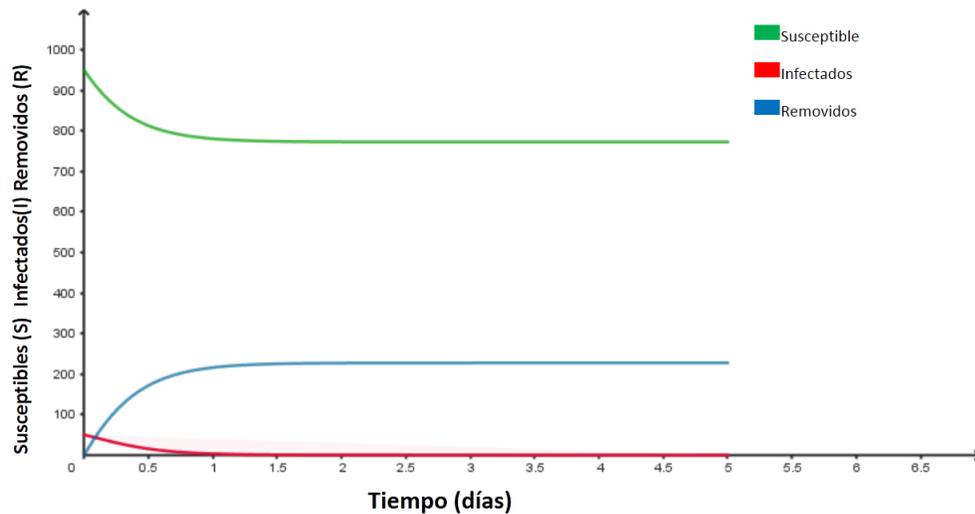


Figura 3.4.7: Dinámica de la enfermedad para el modelo SIR. Los parámetros utilizados son $N = 1000$, $\beta = 0,01$ y $\gamma = 11$, con condiciones iniciales $S(0) = 950$, $I(0) = 50$ y $R(0) = 0$. En este caso $\mathcal{R}_0 = \frac{\beta N}{\gamma} = 0,90$. (Bürger [2] pág. 80)

3.5. Modelo S.I.R Simple Epidémico de Kermack–McKendrick

Uno de los primeros triunfos de la epidemiología matemática fue la formulación de un modelo simple por Kermack y McKendrick (1927) (Brauer [1] pág. 350) (F. Brauer [10]pág. 19) cuyas predicciones son muy similares a comportamientos observados en innumerables epidemias.

Cabe mencionar que William Ogilvy Kermack fue un bioquímico escocés, que hizo sus estudios matemáticos de la propagación de la epidemia, y estableció vínculos entre factores ambientales, y enfermedades específicas, por otro lado, Anderson Gray McKendrick fue un médico militar y epidemiólogo escocés, que fue pionero en el uso de métodos matemáticos en epidemiología.

Kermack y McKendrick elaboraron modelos compartimentales básicos que describen la transmisión de enfermedades, estos modelos están contenidas en una secuencia de tres artículos, la primera fue publicada en 1927, la segunda en 1932 y la tercera en 1933. El primer artículo describió los modelos epidémicos, lo que a menudo se denomina Modelo de Kermack y McKendrick que es en realidad un caso especial del modelo general presentado en este artículo. El modelo general incluye la dependencia de la edad de la infección, que es el tiempo transcurrido desde la infección, y se puede utilizar para proporcionar un enfoque unificado de modelos epidémicos compartimentales.

Así, el caso especial del modelo propuesto por Kermack y McKendrick de 1927 es un modelo compartimental basado en supuestos relativamente simples sobre las tasas de flujo entre diferentes clases de miembros de la población, donde divide la población en estudio en tres compartimentos *Susceptible* (S), *Infectados* (I) y *Removidos* (R).

Entonces, se usará la terminología *S.I.R.* para describir una enfermedad que confiere inmunidad contra la reinfección.

Observación. * El número de miembros en un compartimento es una función diferenciable del tiempo “ t ”. (Brauer [1])

* Este modelo es plausible cuando el brote de la enfermedad se ha establecido, pero no es válido al comienzo de un brote. (Brauer [1])

Luego, el caso especial del modelo propuesto por Kermack y McKendrick es el siguiente

$$\left. \begin{aligned} S' &= -\beta SI, \\ I' &= \beta SI - \gamma I, \\ R' &= \gamma I. \end{aligned} \right\}$$

Así, se tiene el siguiente diagrama de flujo para el modelo *S.I.R.*

$$S \longrightarrow I \longrightarrow R,$$

el cual se basa en las siguientes suposiciones.

- i) Un miembro promedio de la población hace suficiente contacto para transmitir la infección con βN por unidad de tiempo, donde N representa el tamaño total de la población.

- ii) Los infecciosos abandonan la clase infecciosa a una tasa γ por unidad de tiempo.
- iii) No hay entrada ni salida de la población, excepto posiblemente a través de muerte por la enfermedad.
- iv) No hay muertes por enfermedades y el tamaño total de la población es N .

Según i)

- Dado que la probabilidad de que un contacto aleatorio con un infectado sea con un susceptible, quien puede transmitir la infección, es $\frac{S}{N}$; el número de nuevas infecciones en unidad de tiempo por infeccioso es $\beta N \left(\frac{S}{N}\right)$, lo que nos da nuevas infecciones

$$(\beta N) \left(\frac{S}{N}\right) I = \beta SI.$$

- Alternativamente, para un contacto por un susceptible, la probabilidad de que este contacto sea con un infeccioso es $\frac{I}{N}$, por lo tanto, la tasa de nuevas infecciones por susceptibles es $(\beta N) \left(\frac{I}{N}\right)$, lo que nos da nuevas infecciones

$$(\beta N) \left(\frac{I}{N}\right) S = \beta SI.$$

Tomemos en cuenta que para un modelo de enfermedad $S.I.R.$

$$N = S + I + R.$$

Según iii)

- La escala de tiempo de la enfermedad es mucho más rápida que la escala de tiempo de nacimientos y muertes. Así, los efectos demográficos en la población puede ser ignorada (es decir, solo nos interesa estudiar la dinámica de un solo brote epidémico).

Expliquemos ii).

- Así, consideremos la *cohorte*² de miembros que fueron todos infectados al mismo tiempo y sea $u(s)$ que denota el número de los mencionados, que todavía son infecciosos s – unidades de tiempo después de haber sido infectados. Si una fracción γ de estos deja la clase infecciosa en la unidad de tiempo, entonces

$$u' = -\gamma u.$$

²Cohorte se refiere a un grupo de sujetos que comparten una característica, en el campo de la medicina, una cohorte es un grupo que forma parte de un ensayo clínico o estudio al que se observa durante un periodo de tiempo.

La solución de esta ecuación diferencial elemental es

$$\begin{aligned}
 u' &= -\gamma u \\
 \frac{du}{ds} &= -\gamma u \\
 \int \frac{du}{u} &= \int -\gamma ds \\
 \log u(s) - \log u(0) &= -\gamma s \\
 u(s) &= u(0) e^{-\gamma s}.
 \end{aligned}$$

Puesto que $u(0) = 1$, así

$$u(s) = e^{-\gamma s}$$

De modo que, la duración del periodo infeccioso se distribuye exponencialmente con promedio

$$\begin{aligned}
 \text{periodo promedio} &= \int_0^{\infty} e^{-\gamma s} ds \\
 &= -\frac{1}{\gamma} [e^{-\gamma\infty} - e^0] \\
 &= \frac{1}{\gamma}.
 \end{aligned}$$

Esto es lo que ii) realmente asume.

Volviendo a nuestro sistema

$$\left. \begin{aligned}
 S' &= -\beta SI, \\
 I' &= \beta SI - \gamma I, \\
 R' &= \gamma I.
 \end{aligned} \right\} \quad (3.5.1)$$

En la primera ecuación del sistema (3.5.1), el signo negativo indica la pérdida de individuos susceptibles; en la 2da ecuación del sistema (3.5.1), el signo positivo del primer término indica la ganancia de individuos infecciosos y el signo negativo del segundo término indica la salida de la clase de los infecciosos; y en la tercera ecuación del sistema (3.5.1) indica la ganancia de individuos recuperados la cual salió de la clase de los infecciosos.

Cabe resaltar que se puede construir y analizar modelos más generales, pero nuestro objetivo aquí es mostrar lo que se puede deducir de modelos extremadamente simples, pues resultará que muchos modelos más realistas exhiben comportamientos cualitativos muy similares.

Retomando el modelo, se observa que R se puede determinar una vez que se conocen S e I , por lo cual podemos dejar de lado la ecuación R' de nuestro modelo dejando el sistema de dos ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} S' &= -\beta SI, \\ I' &= (\beta S - \gamma)I, \end{aligned}$$

con las condiciones iniciales $S(0) = S_0$; $I(0) = I_0$ y $S_0 + I_0 = N$.

Supongamos que se introduce una pequeña cantidad de infecciosos en una población de susceptibles, la pregunta es si habrá una epidemia.

Observemos que el modelo tiene sentido mientras $S(t)$ e $I(t)$ permanezcan no negativos. Entonces, si $S(t)$ o $I(t)$ llegan a cero consideramos que el sistema ha terminado.

En otras palabras, se tiene los siguientes casos.

Caso I: Si $I' > 0$ en el tiempo t_0 entonces $I'(0) = I_0(\beta S_0 - \gamma) > 0$, por las condiciones iniciales sabemos $I_0 > 0$, si $S_0 > \frac{\gamma}{\beta}$; es decir, si $\frac{\beta S_0}{\gamma} > 1$, por tanto el número de infecciones aumentará y habrá una epidemia, entonces para algún $t > 0$ existirá un brote epidémico si $I(t) > I_0 > 0$.

Caso II: Si $I' < 0$ en el tiempo t_0 entonces $I'(0) = I_0(\beta S_0 - \gamma) < 0$, por las condiciones iniciales sabemos $I_0 > 0$. Como $I'(0) = I_0(\beta S_0 - \gamma) < 0$ si $\beta S_0 - \gamma < 0$; es decir, si $\frac{\beta S_0}{\gamma} < 1$, por tanto, no habrá una epidemia, pues podemos observar que $S' < 0$ para cualquier instante de tiempo t , por tanto, $S'(t) \leq 0 \forall t \geq 0$.

Si se considera inicialmente la condición $S_0 \leq \frac{\gamma}{\beta}$ siempre se cumplirá que $I'(t) = I(\beta S - \gamma) \leq 0$ entonces $I_0 \geq I(t) \forall t \geq 0$.

Observemos que dentro del análisis expuesto se tiene la cantidad $\frac{\beta S_0}{\gamma}$, la cual es similar a la cantidad umbral o **número básico de reproducción**.

Definición 46. El **Número Básico de Reproducción** (\mathcal{R}_0) es el número de infecciones secundarias causadas por un único infeccioso en una población totalmente susceptible de tamaño $N \approx S_0$ durante el transcurso de la infección de este único infeccioso. Como un infeccioso hace βN contactos en una unidad de tiempo, todos los cuales son con susceptibles, por lo tanto, se producen nuevas infecciones, y el periodo infeccioso promedio es $\frac{1}{\gamma}$, por lo cual, el número de reproducción básico es en realidad $\frac{\beta N}{\gamma}$ en lugar de $\frac{\beta S_0}{\gamma}$. Así, $\mathcal{R}_0 = \frac{\beta N}{\gamma}$.

Donde si $\mathcal{R}_0 < 1$ se extingue la enfermedad, mientras que si $\mathcal{R}_0 > 1$ hay una epidemia.

Otra forma de ver esta aparente discrepancia es considerar dos formas en las que una epidemia puede comenzar.

Ira Forma: Es una epidemia iniciada por un miembro de la población estudiada, por ejemplo, al regresar de un viaje con una infección adquirida fuera de casa, se tendría

$$I_0 > 0, S_0 + I_0 = N.$$

2da Forma: Es una epidemia iniciada por un visitante de fuera de la población. En este caso se tendría

$$S_0 = N.$$

Revisando el sistema

$$\left. \begin{aligned} S' &= -\beta SI \\ I' &= (\beta S - \gamma)I. \end{aligned} \right\} \quad (3.5.2)$$

Ya que este sistema de ecuaciones diferenciales es autónoma y bidimensional, el enfoque natural sería encontrar equilibrios y linealizar sobre cada equilibrio para determinar su estabilidad (se determinó su estabilidad en la anterior sección). Sin embargo, dado que cada punto con $I = 0$ es un equilibrio, el sistema tiene una línea de equilibrio y este enfoque no es aplicable (la matriz de linealización en cada equilibrio tiene un autovalor cero). Afortunadamente, existe un enfoque alternativo que nos permite analizar el sistema.

La suma de las dos ecuaciones es

$$(S+I)' = -\gamma I. \quad (3.5.3)$$

Así, $S+I$ es una función decreciente suave no negativa, por lo tanto, tiene un límite cuando $t \rightarrow \infty$.

Como $I_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$, por lo tanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) + I(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) + \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = S_\infty.$$

Ahora demostremos que $I_\infty = 0$.

Demostración. $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} R'(t) = 0$ ya que $R'(t) = \alpha I(t)$.

Por reducción al absurdo, supongamos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = I_\infty, \text{ con } I_\infty \in (0, N].$$

Entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R'(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma I(t) = \gamma I_\infty \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \hat{t} > 0,$$

$$|R'(t) - \gamma I_\infty| < \varepsilon, \forall t > \hat{t},$$

tomando $\varepsilon = \frac{\gamma I_\infty}{2}$ entonces $-\frac{\gamma I_\infty}{2} < R'(t) - \gamma I_\infty < \frac{\gamma I_\infty}{2} \quad \forall t > \hat{t}$, entonces

$$R'(t) > -\frac{\gamma I_\infty}{2} + \gamma I_\infty = \frac{-\gamma I_\infty + 2\gamma I_\infty}{2} = \frac{\gamma I_\infty}{2}, \forall t > \hat{t}.$$

Integrando $\forall t > \hat{t}$

$$R(t) > \frac{\gamma I_\infty}{2} t + k \longrightarrow \infty$$

cuando $t \rightarrow \infty$, esta es una contradicción al hecho que $R(t)$ esta acotada. Por lo tanto, $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$. \square

Luego, la integración de (3.5.3) de 0 a ∞ da

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} Idt &= -\frac{1}{\gamma} \int_0^{\infty} (S(t) + I(t))' dt \\ &= \frac{1}{\gamma} (-S_{\infty} + S_0 - I_{\infty} + I_0) \\ &= \frac{1}{\gamma} (S_0 + I_0 - S_{\infty}) \\ \int_0^{\infty} Idt &= \frac{1}{\gamma} (N - S_{\infty})\end{aligned}$$

esto por la condición inicial $S_0 + I_0 = N$ y por $I_{\infty} = 0$.

Por otro lado, dividimos la 1ra ecuación del sistema, es decir, $S' = -\beta SI$ por S

$$-\frac{S'}{S} = \frac{\beta SI}{S}.$$

Luego la integramos de 0 a ∞ ,

$$\begin{aligned}-\int_0^{\infty} \frac{dS(t)}{S(t)} &= \int_0^{\infty} \beta Idt \\ -(\log S_{\infty} - \log S_0) &= \beta \int_0^{\infty} Idt \\ \log \frac{S_0}{S_{\infty}} &= \beta \frac{1}{\gamma} (N - S_{\infty}) \\ \log \frac{S_0}{S_{\infty}} &= \frac{\beta N}{\gamma} \left(1 - \frac{S_{\infty}}{N}\right)\end{aligned}$$

$$\log \frac{S_0}{S_{\infty}} = \mathcal{R}_0 \left(1 - \frac{S_{\infty}}{N}\right), \quad (3.5.4)$$

donde la ecuación (3.5.4) se llama *Relación de Tamaño Final*, que da una relación entre el **número básico de reproducción** y el tamaño de la epidemia. Tomemos en cuenta que el tamaño final de la epidemia, el número de miembros de la población que están infectados durante el transcurso de la epidemia es $N - S_{\infty}$. La relación de tamaño final (3.5.4) se puede generalizar a modelos epidémicos con más estructura compartimental que el modelo *S.I.R.* simple, incluyendo modelos con periodos expuestos, modelos de tratamiento y modelos que incluyen cuarentena de individuos sospechosos y aislamiento de infecciosos diagnosticados.

Luego, integrando (3.5.3) de 0 a t , se obtiene

$$\begin{aligned}\int_0^t Ids &= -\frac{1}{\gamma} \int_0^t (S(s) + I(s))' ds \\ &= \frac{1}{\gamma} (-S(t) + S_0 - I(t) + I_0) \\ &= \frac{1}{\gamma} (S_0 + I_0 - S(t) - I(t))\end{aligned}$$

$$\int_0^\infty Idt = \frac{1}{\gamma} (N - S(t) - I(t))$$

esto por la condición inicial $S_0 + I_0 = N$.

Dividiendo la primera ecuación del sistema, es decir $S' = -\beta SI$ por S , se tiene

$$-\frac{S'}{S} = \frac{\beta SI}{S},$$

luego, integrando de 0 a t

$$\begin{aligned}-\int_0^t \frac{dS(t)}{S(t)} &= \int_0^t \beta Idt, \\ \log \frac{S_0}{S(t)} &= \frac{\beta}{\gamma} (N - S(t) - I(t)),\end{aligned}$$

se obtiene

$$\frac{\gamma}{\beta} \log \frac{S_0}{S(t)} = N - S(t) - I(t),$$

$$I(t) + S(t) = -\frac{\gamma}{\beta} \log \frac{S_0}{S(t)} + N$$

$$I(t) + S(t) = -\frac{\gamma}{\beta} \log S_0 + \frac{\gamma}{\beta} \log S(t) + N$$

$$I(t) + S(t) - \frac{\gamma}{\beta} \log S(t) = N - \frac{\gamma}{\beta} \log S_0. \quad (3.5.5)$$

Esta relación implícita entre S e I describe las órbitas de las soluciones de (3.5.2) en el plano (S, I) .

Cabe considerar que las cantidades S_0 y S_∞ pueden calcularse mediante estudios serológicos³, antes y después de una epidemia; y a partir de estos datos el número \mathcal{R}_0 puede estimarse utilizando (3.5.4).

³La serología (también, pruebas serológicas) es el estudio o examen o conjunto de estudios o exámenes que permite comprobar la presencia de anticuerpos en la sangre.

Si existiera una epidemia, primero nos interesaría saber que tan severa es, por lo cual calcularemos el número máximo de infecciosos, al cual denotaremos como $I_{\text{máx}}$. El número máximo de individuos infecciosos en cualquier instante de tiempo, es el número de infecciosos cuando $I' = 0$ e $I \neq 0$. Así, de la segunda ecuación de (3.5.2)

$$0 = I' = \beta IS - \gamma I,$$

$$(\beta S - \gamma)I = 0.$$

Como $I \neq 0$, se obtiene

$$S = \frac{\gamma}{\beta}.$$

Entonces, el número máximo de infecciosos; es decir, $I_{\text{máx}}$ se da cuando $S = \frac{\gamma}{\beta}$ en (3.5.5). Así, se obtiene

$$I(t) + \frac{\gamma}{\beta} - \frac{\gamma}{\beta} \log \frac{\gamma}{\beta} = N - \frac{\gamma}{\beta} \log S_0,$$

$$I(t) = I_{\text{máx}} = N + \frac{\gamma}{\beta} \log \left(\frac{\frac{\gamma}{\beta}}{S_0} \right) - \frac{\gamma}{\beta}.$$

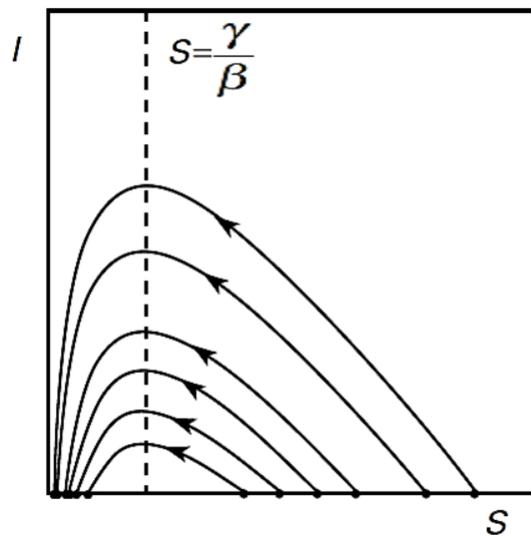


Figura 3.5.1: Retrato de fase del Modelo S.I.R. (M.W.Hirsh [9] pág. 237)

3.6. Modelo S.I.R. con Vacunación

En esta sección veremos una aplicación del modelo SIR a la elección de estrategias de vacunación. Así, si un individuo de la población recibe una vacunación exitosa, este pasa directamente al compartimento de personas removidas $R(t)$, es decir, que esta persona ya no puede ni recibir ni transmitir la enfermedad. Por lo tanto, introduciremos un modelo en donde se considera que la razón de individuos vacunados es ρ .



Dentro de este marco, se asumirán las siguientes hipótesis para este modelo:

- La población está homogéneamente mezclada.
- El modelo se aplica al caso en el que una única infección cause la epidemia.
- El tiempo de incubación de la enfermedad es despreciable y la duración de la epidemia comparada con la esperanza de vida de los huéspedes es igualmente despreciable, así que no se tomaran en cuenta los nacimientos y fallecimientos. Entonces se considera una población cerrada.

$$S(t) + I(t) + R(t) = N$$

donde N es la población total de individuos, $S(t)$ es el número de los susceptibles, $I(t)$ es el número de los infecciosos en el instante t y $R(t)$ es el número de los removidos en el instante t .

- Toda persona sana será considerada susceptible
- La enfermedad se transmite por contacto directo entre las personas.

- El proceso de transmisión de la enfermedad está regido por la ley de acción de masas, es decir, el número de personas susceptibles que pasan a convertirse en infecciosas es proporcional al número de individuos susceptibles por el número de individuos infectados.
- En cuanto un individuo es infectado, pasa a estar en el compartimento de los infectados.
- Los individuos del compartimento $I(t)$ se acaban recuperando de la enfermedad y adquieren la inmunidad o mueren, pasando en ambos casos al compartimento $R(t)$.
- Los únicos que son vacunados son los susceptibles.
- Si un individuo de la población recibe una vacunación exitosa, este pasa directamente al compartimento de individuos removidos $R(t)$. Donde la razón de individuos vacunados es ρ .

Así, el modelo SIR con individuos vacunados es

$$\left. \begin{aligned} S' &= -\beta SI - VS \\ I' &= \beta SI - \gamma I \\ R' &= \gamma I + VS. \end{aligned} \right\} \quad (3.6.1)$$

Como lo denotamos en la Sección 3.4, un individuo pasa de estar susceptible a infectado con una tasa de infección β y pasa de estar infectado a recuperado con una tasa de recuperación γ . Cabe resaltar que los parámetros β y γ son positivos. Un individuo vacunado sale de la clase de susceptibles con una razón $\rho > 0$.

Ya que $S + I + R = N$ es constante, sabemos que una vez determinadas $I(t)$ y $S(t)$ se puede hallar $R(t)$. De esta manera, se puede considerar el siguiente sistema bidimensional

$$\left. \begin{aligned} S' &= (-\beta I - \rho) S \\ I' &= (\beta S - \gamma) I. \end{aligned} \right\} \quad (3.6.2)$$

Como el sistema carece de una solución explícita, se realizará un estudio cualitativo del sistema. Entonces hallemos los puntos de equilibrio del sistema (3.6.2).

Para encontrar los puntos de equilibrio, observemos en que puntos S' e I' se anulan

$$(-\beta I - \rho) S = 0, \quad (3.6.3)$$

$$(\beta S - \gamma) I = 0. \quad (3.6.4)$$

Luego, se tiene que (3.6.4) se anula en $I = 0$ y $S = \frac{\gamma}{\beta}$ entonces

- Si $I = 0$ en (3.6.3) obtenemos $S = 0$.

- Si $S = \frac{\gamma}{\beta}$ en (3.6.3) obtenemos $\frac{\gamma}{\beta}(-\beta I - \rho) = 0 \rightarrow I = -\frac{\rho}{\beta}$

De modo que, se tiene dos puntos de equilibrio $M = (0,0)$ y $G = \left(\frac{\gamma}{\beta}, -\frac{\rho}{\beta}\right)$. Pero como las ecuaciones solo tienen sentido para $S, I \geq 0$, entonces el sistema está en \mathbb{R}_+^2 , luego el único punto de equilibrio que admite es $M = (0,0)$.

Analicemos la estabilidad en $M = (0,0)$.

$$\begin{pmatrix} S' \\ I' \end{pmatrix} = f(S, I) = (f_1(S, I), f_2(S, I)) = (-\beta SI - \rho S, \beta SI - \gamma I),$$

$$Df(S, I) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial I} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta I - \rho & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \gamma \end{bmatrix}.$$

Así, la matriz asociada al punto de equilibrio M es

$$Df(0,0) = \begin{bmatrix} -\rho & 0 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix},$$

obteniendo los autovalores $\lambda_1 = -\rho$, $\lambda_2 = -\gamma$ y como los autovalores tienen parte real negativa, entonces el punto de equilibrio es un pozo, lo cual nos dice que M es un punto de equilibrio asintóticamente estable, por tanto, es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

Por otro lado, como el sistema es de interés cuando S e I son positivos y como $S + I + R = N$ entonces se tiene que $S + I \leq N$, por lo tanto, el modelo $S.I.R.$ con vacunación será de interés en la región triangular

$$\Delta = \{(S, I) \in \mathbb{R}^2 : S, I \geq 0; S + I \leq N\}.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} S' + I' &= -\beta SI - \rho S + \beta SI - \gamma I \\ Q' &= -(\rho S + \gamma I). \end{aligned}$$

Por esta razón, se obtiene que $Q' < 0$, lo que implica que $Q = S + I$ es decreciente, por lo tanto, el campo vectorial sobre la hipotenusa apunta hacia dentro de la región Δ .

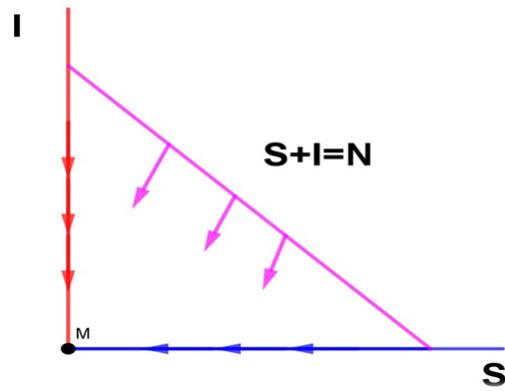


Figura 3.6.1: $Q' < 0$, así $Q = S + I$ es decreciente. ()

Por lo tanto, las soluciones en el modelo de vacunación tienden al punto de equilibrio $M = (0,0)$ cuando $t \rightarrow \infty$. Así, el estado final del sistema será $S = I = 0$ y $R = N$.

Conclusiones

Una vez desarrollado el modelo S.I.R. epidemiológico para analizar su comportamiento cualitativo, se plantean conclusiones que corresponden a los objetivos del presente trabajo.

Con respecto a los objetivos generales, se concluye que el modelo S.I.R. epidemiológico es descrito por un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias homogéneas no lineales, las cuales están descritas en función de los compartimentos establecidos por el modelo; es decir, Susceptibles(S), Infectados(I) y Removidos(R), donde se refleja el flujo de paso de los compartimentos. Por otro lado, el comportamiento cualitativo del modelo es establecido mediante la linealización del sistema, pero antes se realiza un cambio de variables, donde se observa que los puntos de equilibrio no son hiperbólicos, por lo que se recurre a la función de Liapunov $V(u, v) = u - \bar{u} - \bar{u} \ln\left(\frac{u}{\bar{u}}\right) + v$, para determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio, donde se observa que el comportamiento en los puntos $P = (\bar{u}, 0)$ con $\bar{u} \in (0, 1]$ será estable si $\bar{u} \leq \frac{1}{\mathcal{R}_0} \leq 1$. Además, se observa que el comportamiento de la enfermedad depende mucho del número básico de reproducción \mathcal{R}_0 , ya que este permite analizar el impacto de una enfermedad, así como un panorama general de su desarrollo, por lo cual es recomendable tener datos precisos sobre la tasa de infección β y la tasa de recuperación γ , esto para determinar \mathcal{R}_0 . Así mismo, el modelo permite una descripción aproximada en lo que se refiere al número máximo de infectados de lo que se podría llamar una primera ola.

Con respecto, al modelo S.I.R. epidemiológico con vacunación, la cual también es descrita por un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias homogéneas no lineales, donde a través del estudio de los puntos de equilibrio, se determinó un punto de equilibrio hiperbólico, donde se observó que el comportamiento de la enfermedad suponiendo que la vacuna es exitosa es bastante favorable, pues este desaparece.

En conclusión, el modelo SIR, aunque limitado, es una herramienta matemática muy útil para reproducir de manera aproximada el comportamiento de una epidemia. Así, el modelo SIR sirve como punto de partida para el estudio de modelos más complejos, donde se pueden contemplar nuevos aspectos como el introducir nuevos compartimentos y otros.

Apéndice A

Ecuaciones Diferenciales con Coeficientes Constantes y Operadores

La teoría y teoremas de este apéndice se encuentra principalmente en Hirsch [4] y Lima [7].

A.1. Ecuaciones Diferenciales con Autovalores Reales y Distintos

Teorema. 1. Sea A un operador en \mathbb{R}^n que tiene n autovalores distintos reales. Entonces para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la ecuación diferencial lineal

$$x' = Ax, \tag{A.1.1}$$

con $x(0) = x_0$, tiene una única solución.

Demostración. Sea un operador T en \mathbb{R}^n y A la matriz representante de T en una base estándar B

$$[T]_B = A_{n \times n},$$

la cual tiene n distintos autovalores reales, por un teorema conocido se tiene que existe una matriz invertible R ($n \times n$) tal que la matriz RAR^{-1} es diagonal. Así,

$$RAR^{-1} = \text{diag} \{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \} = B$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los autovalores de A . Introduciendo las nuevas coordenadas $y = Rx$ en \mathbb{R}^n con $x = R^{-1}y$, como $x' = Ax$ entonces

$$y' = Rx' = RAx = RAR^{-1}y = By$$

entonces

$$y' = By. \quad (\text{A.1.2})$$

Como B es diagonal esto significa

$$y'_i = \lambda_i y_i; \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{A.1.3})$$

Sabemos que (A.1.3) tiene una única solución para cada condición inicial $y_i(0)$

$$y_i(t) = y_i(0) e^{t\lambda_i}.$$

Para resolver (A.1.1), coloquemos $y(0) = Rx_0$. Si $y(t)$ es la solución correspondencia de (A.1.2) entonces la solución de (A.1.1) es

$$x(t) = R^{-1}y(t).$$

Más explícitamente,

$$x(t) = R^{-1} \left(y_1(0) e^{\lambda_1 t}, \dots, y_n(0) e^{\lambda_n t} \right).$$

La diferenciación muestra que

$$x'(t) = R^{-1}y'(t) = R^{-1}By(t) = R^{-1}RAR^{-1}y = AR^{-1}y = Ax(t).$$

Además,

$$x(0) = R^{-1}y(0) = R^{-1}Rx_0 = x_0.$$

Ya que $x(t)$ realmente resuelve (A.1.1).

Ahora, demostremos que (A.1.1) tiene una única solución. Notemos que $x(t)$ es una solución para (A.1.1) si y solo si $Rx(t)$ es una solución para $y' = By$, $y(0) = Rx(0)$,

por lo tanto, dos soluciones diferentes de (A.1.1) conducirían a dos soluciones diferentes para $y' = By$, lo cual es imposible ya que B es diagonal. \square

Observemos que la prueba es constructiva; en realidad muestra como encontrar soluciones en cualquier caso específico. Revisemos el procedimiento para encontrar la solución de $x' = Ax$.

1. Encontrar los autovalores de A , encontrando las raíces del polinomio característico de A a través de $\text{Det}(A - \lambda I) = 0$.
2. Para cada autovalor λ_i encontrar un correspondiente autovector f_i resolviendo el sistema de ecuaciones lineales correspondiente a la ecuación vectorial

$$(A - \lambda_i I) f_i = 0.$$

3. Escribir cada autovector f_i en coordenadas: $f_i = (p_{i1}, \dots, p_{in})$. Obteniendo así una matriz $P = [p_{ij}]$, luego

$$x_j = \sum_i p_{ij} y_i \quad \text{o} \quad x = P^t y. \quad (\text{A.1.4})$$

la i -ésima columna de P^t consiste en las coordenada de f_i . La matriz R en la prueba del teorema es la inversa de P^t .

4. En las nuevas coordenadas la ecuación diferencial original se convierte en

$$y' = \lambda_i y_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{A.1.5})$$

5. Así, la solución general es

$$y_i(t) = a_i e^{t\lambda_i}, \quad (\text{A.1.6})$$

con $i = 1, \dots, n$ donde a_1, \dots, a_n son constantes arbitrarias, $a_i = y_i(0)$.

6. Para la ecuación original, la solución general se encuentra a partir de (A.1.4), es decir,

$$x_j(t) = \sum_i p_{ij} a_i e^{t\lambda_i}; \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{A.1.7})$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}; y(t) = \begin{bmatrix} a_1 e^{t\lambda_1} \\ \vdots \\ a_n e^{t\lambda_n} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = P^t y(t).$$

Para encontrar una solución $x(t)$ con valor inicial especificada

$$x(0) = u = (u_1, \dots, u_n),$$

una sustitución $t = 0$ en (A.1.7), iguala el lado derecho a u , y resuelve el sistema resultante de ecuaciones algebraicas lineales para las incógnitas (a_1, \dots, a_n)

$$\sum_i p_{ij} a_i = u_j; \quad j = 1, \dots, n,$$

esto es equivalente a la ecuación matriz $P^t a = u$; $a = (a_1, \dots, a_n)$. Ya que $a = (P^t)^{-1} u$. Otra forma de decir esto, es que los valores iniciales $x(0) = u$ corresponden al valor inicial $y(0) = (P^t)^{-1} u$ de (A.1.6).

La siguiente observación es una consecuencia inmediata de la prueba del Teorema 1.

Teorema. 2. Sea la matriz A ($n \times n$) que tiene n distintos autovalores reales $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ entonces cada solución para la ecuación diferencial

$$x' = Ax; \quad x(0) = u, \quad (\text{A.1.8})$$

es de la forma

$$x_i(t) = c_{i1}e^{t\lambda_1} + \dots + c_{in}e^{t\lambda_n}; \quad i = 1, \dots, n,$$

para constantes únicas dependiendo de u .

Demostración. Como la matriz A ($n \times n$) tiene n distintos autovalores reales $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Ellos son reales y distintos, así, el teorema se aplica

$$x' = Ax; x(0) = u,$$

tiene una única solución. Así la matriz $B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = QAQ^{-1}.$

Introduciendo las nuevas coordenadas $y = Qx$, entonces

$$y' = Qx' = QAx = QAQ^{-1}y = By.$$

Así, $y'_i = \lambda_i y_i$ que tiene como solución a

$$y_i(t) = a_i e^{\lambda_i t} \quad (\text{A.1.9})$$

donde a_i constantes arbitrarias. Ahora, para relacionar las antiguas coordenadas x_1, \dots, x_n con las nuevas coordenadas y_1, \dots, y_n debemos encontrar los autovalores correspondientes a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Resolviendo: $(A - \lambda_i I) f_i = 0$, se tiene los f_i autovectores correspondientes a cada autovalor λ_i con $i = 1, \dots, n$ donde $f_i = (p_{i1}, \dots, p_{in})$.

Así, obtenemos una matriz $P = [p_{ij}]$. De donde $x = P^t y$ siendo $P^t = Q^{-1}$. Donde

$$P^t = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & \dots & p_{n1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1.10})$$

Luego por (A.1.9) y (A.1.10)

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & \dots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22} & \dots & p_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 e^{\lambda_1 t} \\ a_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ a_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix},$$

la solución para (A.1.8) es de la forma

$$x_j(t) = p_{1j}ae^{\lambda_1 t} + p_{2j}ae^{\lambda_2 t} + \dots + p_{nj}a_n e^{\lambda_n t}$$

donde cada solución para la ecuación diferencial $x' = Ax$; $x(0) = u$, $j = 1, \dots, n$ es de la forma

$$x_j(t) = c_{j1}e^{\lambda_1 t} + \dots + c_{jn}e^{\lambda_n t}.$$

□

Si todos los autovalores son negativos evidentemente $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ para cada solución $x(t)$ y recíprocamente. Este aspecto de la ecuación diferencial lineal va ser investigado en el primer capítulo.

El Teorema 2 nos conduce a otro método de solución de (A.1.8). Consideremos c_{ij} coeficientes como incógnitas

$$x_i(t) = \sum_j c_{ij} e^{\lambda_j t}; i = 1, \dots, n,$$

y lo sustituimos en $x' = Ax$; $x(0) = u$ luego igualamos los coeficientes de $e^{\lambda_j t}$ y resolvemos para los c_{ij} . Se obtienen un sistema de ecuaciones algebraicas lineales para los c_{ij} que siempre se puede satisfacer siempre que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sean reales y distintos. Este es el método de los coeficientes indeterminados.

Observemos que la conclusión del Teorema 2 es definitivamente falsa para algunos operadores con autovalores reales y repetidos.

Ejemplo. 1 Considere el operador $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ cuyo único autovalor es 1 y el sistema $x' = Ax$

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \\ x_2' &= x_1 + x_2. \end{aligned}$$

Obviamente $x_1(t) = ae^t$, $a = cte$ pero no hay una constante b tal que $x_2(t) = be^t$ es una solución. De hecho una solución es:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= ae^t \\ x_2(t) &= e^t(at + b), \end{aligned} \quad \text{con } a, b \text{ constantes.}$$

A.2. Autovalores Complejos

Una clase de operadores que no tienen autovalores reales son los operadores planares $T_{a,b} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ representados por matrices de la forma

$$A_{a,b} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, b \neq 0.$$

El polinomio característico es $\lambda^2 - 2a\lambda + (a^2 + b^2)$, donde las raíces son $a + ib$, $a - ib$ e $i = \sqrt{-1}$. Interpretemos $T_{a,b}$ geoméricamente como sigue; introduciendo los números r, θ por

$$r = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}; \quad \theta = \arccos\left(\frac{a}{r}\right); \quad \cos \theta = \frac{a}{r}.$$

Entonces al proporcionar $b > 0$, $T_{a,b}$ es una rotación en sentido antihorario a través de los radianes θ seguido de un estiramiento (o reducción) de la longitud de cada vector por un factor de r . Que es, si R_θ denota la rotación a través θ radianes, entonces

$$T_{a,b}(x) = rR_\theta(x) = R_\theta(rx).$$

Para ver esto primero observe que $a = r \cos \theta$ y $b = r \operatorname{sen} \theta$. En la base estándar, la matriz de R_θ es $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$.

La matriz de la multiplicación escalar por r es $rI = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$. La igualdad

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

confirma nuestra afirmación. Hay otra interpretación algebraica de $T_{a,b}$. Se identifica el plano \mathbb{R}^2 con el campo de los números complejos

$$(x, y) \leftrightarrow x + iy.$$

Entonces con la identificación, el operador $T_{a,b}$ corresponde a la multiplicación por $a + ib$

$$\begin{array}{ccc} & (x, y) & \leftrightarrow & x + iy \\ \text{Operar por } T_{a,b} & \downarrow & & \downarrow & \text{multiplicar por } a + ib \\ & (ax - by, bx + ay) & \leftrightarrow & (ax - by) + i(bx + ay) \end{array}$$

Note también que r es la norma (valor absoluto) de $a + bi$ y θ es su argumento. Recordemos la fórmula $a + ib = re^{i\theta}$.

La interpretación geométrica de $T_{a,b}$ hace que sea fácil de calcular. Por ejemplo para calcular la p -ésima potencia de $T_{a,b}$:

$$(T_{a,b})^p = (rI)^p (R_\theta)^p = (r^p I) (R_{p\theta}) = \begin{bmatrix} r^p \cos p\theta & -r^p \operatorname{sen} p\theta \\ r^p \operatorname{sen} p\theta & r^p \cos p\theta \end{bmatrix}.$$

A continuación, consideremos el operador T en \mathbb{R}^2 donde la matriz es $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Así, el polinomio característico es

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2$$

dando las raíces son $1 + i$ y $1 - i$. T no corresponde a la multiplicación por un número complejo ya que su matriz no es de la forma $A_{a,b}$. Pero es posible introducir nuevas coordenadas en \mathbb{R}^2 , que es, encontrar una nueva base dando a T una matriz $A_{a,b}$.

Sea (x_1, x_2) las coordenadas estándar en \mathbb{R}^2 , sustituyendo

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + y_2 \\ x_2 &= -y_1. \end{aligned}$$

Así, que las nuevas coordenadas están dadas por

$$\begin{aligned} y_1 &= -x_2 \\ y_2 &= x_1 + x_2. \end{aligned}$$

La matriz de T en las y -coordenadas es $A_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Para esta matriz $r = \sqrt{2}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$. Por lo tanto, en el plano (y_1, y_2) , T es una rotación de $\frac{\pi}{4}$, seguida de un estiramiento de $\sqrt{2}$. En las coordenadas originales (x_1, x_2) , T es una clase de *rotación elíptica* seguida por el estiramiento $\sqrt{2}$. Si los vectores en \mathbb{R}^2 se identifican con números complejos a través de las coordenadas y ; el vector y cuyas coordenadas son (y_1, y_2) se convierten en $y_1 + iy_2$ entonces T corresponde a la multiplicación por $1 + i$. Esto muestra que aunque T no es diagonalizable, se pueden introducir coordenadas en las que T tiene una interpolación geométrica simple, es decir, una rotación seguida de un estiramiento uniforme. Además, la cantidad de rotaciones y estiramientos se puede deducir de las raíces del polinomio característico, ya que $\frac{\pi}{4} = \arg(1 + i)$; $\sqrt{2} = |1 + i|$.

Ahora, mostramos como la estructura compleja en \mathbb{R}^2 (que es, la identificación de \mathbb{R}^2 por \mathbb{C}) podría ser usada para resolver una clase correspondiente de ecuaciones diferenciales

Ejemplo. 2 Sea

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - by \\ \frac{dy}{dt} &= bx + ay \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2.1})$$

Usamos variables complejas para encontrar formalmente una solución. Así, reemplazar (x, y) por $x + yi = z$ y $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ por $a + bi = \mu$ entonces (A.2.1) se convierte en

$$z' = \mu z. \quad (\text{A.2.2})$$

Escribimos una solución para (A.2.2)

$$z(t) = Ke^{t\mu}.$$

Interpretemos esto en términos de números complejos y reales. Escribamos el número complejo K como $u + iv$ y el conjunto $z(t) = x(t) + iy(t)$; $e^{t\mu} = e^{ta}e^{tb}$. Una fórmula estándar para números complejos nos dice que

$$e^{itb} = \cos tb + i \sin tb.$$

Reuniendo esta información y tomando partes reales e imaginarias obtenemos

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= ue^{ta} \cos tb - ve^{ta} \sin tb \\ y(t) &= ue^{ta} \sin tb + ve^{ta} \cos tb \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2.3})$$

Luego, vimos como la introducción de variables complejas puede ser una ayuda para resolver ecuaciones diferenciales. Este caso fue un caso muy especial. Sin embargo, muchos sistemas que no están en la forma (A.2.1) se pueden llevar a esa forma a través de un cambio de coordenadas.

A.3. Aplicación de Álgebra Lineal Compleja a Ecuaciones Diferenciales

Extendiendo un operador T en un espacio vectorial E (*real*) a un operador $T_{\mathbb{C}}$ en un espacio complejo $E_{\mathbb{C}}$. Los autovalores complejos de T están asociados con autovectores complejos de a .

Primeramente, desarrollemos espacios vectoriales complejos. Cabe resaltar que las definiciones y propiedades elementales de \mathbb{R}^n van directamente a \mathbb{C}^n ; y los espacios vectoriales complejos mediante la sustitución sistemática de los números reales con números complejos.

Sea el espacio cartesiano complejo \mathbb{C}^n ($\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$) que es el conjunto de todas las n -tuplas $z = (z_1, \dots, z_n)$ de números complejos. (El conjunto de números complejos \mathbb{C} es el plano cartesiano \mathbb{R}^2 considerado como un espacio vectorial; $i = (0, 1)$ en \mathbb{R}^2).

Sea $z = (z_1, \dots, z_n)$ en \mathbb{C}^n un vector complejo o un punto en \mathbb{C}^n y λ es un número complejo. Así,

$$\lambda z = (\lambda z_1, \dots, \lambda z_n) \text{ multiplicación escalar}$$

Sea $F \neq \emptyset$, $F \subset \mathbb{C}^n$ un subespacio o un subespacio lineal si es cerrado bajo las operaciones de adición y multiplicación escalar en \mathbb{C}^n un espacio vectorial complejo va a significar un subespacio de \mathbb{C}^n . Cabe mencionar que todas las propiedades algebraicas del espacio vectorial real y sus mapas lineales se trasladan a espacios vectoriales complejos y sus mapas lineales. En particular, la determinante de un operador complejo T , o una matriz $n \times n$ es definida en \mathbb{C} .

Considere ahora un operador en \mathbb{C}^n o más generalmente, un operador T en un espacio vectorial complejo $F \subset \mathbb{C}^n$

$$T : F \rightarrow F$$

donde procedemos a estudiar sus autovalores y autovectores. Sea λ un autovalor de T , donde $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $Tv = \lambda v$ tiene una solución distinta de cero con $v \in F$. El vector $v \in F$ es llamado autovector perteneciente a λ . Los métodos para encontrar autovalores y autovectores reales se aplica a este caso de números complejos.

Así, dado un operador complejo T , se le asocia un polinomio $p(\lambda) = \det(T - \lambda I)$ con coeficientes complejos tal que el grado de $p(\lambda)$ es la dimensión de F y las raíces de $p(\lambda)$ son los autovalores de T . (Hirsch, M. W. and Smale [4] pág. 63.)

Teorema. 3. Sea $T : F \rightarrow F$ un operador en un espacio vectorial complejo F n -dimensional. Si el polinomio característico tiene raíces distintas entonces T puede ser diagonalizable. Esto implica que cuando estas raíces son distintas, entonces uno puede encontrar una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de autovectores para T . Así, que

$$z = \sum_{j=1}^n z_j e_j,$$

en F entonces

$$Tz = \sum_{j=1}^n \lambda_j z_j e_j,$$

donde e_j es el autovector perteneciente al autovalor complejo λ_j (*complejo*).

Observemos que este teorema es más fuerte que el teorema correspondiente en el caso real.

Como hemos señalado $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$, ahora consideramos de manera más general las relaciones entre espacios vectoriales en \mathbb{R}^n y espacios vectoriales complejos en \mathbb{C} . Sea F un subconjunto complejo de \mathbb{C}^n entonces $F_{\mathbb{R}} = F \cap \mathbb{R}^n$ conjunto de todas las n -tuplas (x_1, \dots, x_n) que están en F y son reales. Evidentemente $F_{\mathbb{R}}$ es cerrado bajo la operación de adición, así como la de multiplicación escalar por números reales. Por lo tanto $F_{\mathbb{R}}$ es un espacio vectorial real (subespacio de \mathbb{R}^n).

Ahora el proceso inverso. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio y $E_{\mathbb{C}}$ un subconjunto de \mathbb{C}^n obtenido por tomar todas las combinaciones de vectores en E con coeficientes complejos. Por lo tanto,

$$E_{\mathbb{C}} = \left\{ z \in \mathbb{C}^n / z = \sum_{i=1}^k \lambda_i z_i, z_i \in E, \lambda_i \in \mathbb{C} \right\},$$

donde $E_{\mathbb{C}}$ es un subespacio complejo de \mathbb{C}^n . Note que $(E_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} = E$. Recuerde que si $z = x + iy$ un número complejo, entonces $\bar{z} = x - iy = \sigma(z)$, así que

$$\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C},$$

con la propiedad $\sigma^2 = \sigma \cdot \sigma = 1$ la identidad. El conjunto de puntos fijos de σ , que es el conjunto z tal que $\sigma(z) = z$, es exactamente el conjunto de números reales en \mathbb{C} .

Esta operación σ o conjugación puede ser extendida a \mathbb{C}^n definiendo

$$\sigma : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n,$$

conjugando cada coordenada; es decir, $\sigma(z_1, \dots, z_n) = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$, para esta extensión el conjunto de puntos fijos están en \mathbb{R}^n . Note también que si F es un subespacio complejo de \mathbb{C}^n tal que $\sigma(F) = F$ entonces el conjunto de puntos fijos de σ en F es exactamente $F_{\mathbb{R}}$.

Sea $F \subset \mathbb{C}^n$ un subespacio lineal σ – invariante de \mathbb{C}^n así para $v \in F$ y $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\sigma(\lambda v) = \sigma(\lambda) \sigma(v)$$

o si escribimos $\sigma(w) = \bar{w}$ para $w \in F$, $\overline{\lambda v} = \bar{\lambda} \bar{v}$. Por lo tanto, σ no es complejo lineal. Sin embargo

$$\sigma(v + w) = \sigma(v) + \sigma(w).$$

Así, se sigue que para cualquier subespacio $F \subset \mathbb{C}^n$

$$F_{\mathbb{R}} = \{z \in F / \sigma(z) = z\},$$

$F \subset \mathbb{C}^n$ puede ser descomplejizado; esto es, expresado en forma $F = E_{\mathbb{C}}$ donde $E \subset \mathbb{R}^n$, F puede ser descomplejizado si y solo si $\sigma(F) \subset F$.

Por si $\sigma(F) \subset F$ entonces $x - iy \in F$ cuando $x + iy \in F$ con $x, y \in \mathbb{R}^n$; así $x \in F$ pues

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} [(x + iy) + (x - iy)] \\ y &= \frac{1}{2i} [(x + iy) - (x - iy)]. \end{aligned}$$

Así, F es la complejización del espacio de vectores reales en F . La inversa es trivial.

Al igual que cada subespacio $E \subset \mathbb{R}^n$ tiene una complejización $E_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^n$, cada operador $T : E \rightarrow E$ tiene una extensión a un operador lineal complejo

$$T_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \rightarrow E_{\mathbb{C}},$$

llamado la complejización de T . Para definir $T_{\mathbb{C}}$, $z \in E_{\mathbb{C}}$, sea

$$z = \sum \lambda_j x_j; \quad \lambda_j \in \mathbb{C}, \quad x_j \in E \tag{A.3.1}$$

entonces $T_{\mathbb{C}} z = \sum \lambda_j T x_j$.

Si $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ es una base para E que es también una base para el espacio vectorial complejo $E_{\mathbb{C}}$ y la matriz B para $T_{\mathbb{C}}$ es la misma para T .

En particular, si $T \in L(\mathbb{R}^n)$ es representado por una matriz $A_{n \times n}$ entonces $T_{\mathbb{C}} \in L(\mathbb{C}^n)$ es también representado por A .

Proposición. 1. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un espacio vectorial y $E_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^n$ su complejización. Si $Q \in L(E_{\mathbb{C}})$ entonces $Q = T_{\mathbb{C}}$ para algún $T \in L(E)$ si y solo si

$$Q\sigma = \sigma Q.$$

donde $\sigma : E_{\mathbb{C}} \rightarrow E_{\mathbb{C}}$ es la conjugación.

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos $Q = T_{\mathbb{C}}$, por otro lado tenemos $\sigma : E_{\mathbb{C}} \rightarrow E_{\mathbb{C}}$ la conjugación donde $\sigma(z) = \bar{z}$.

Como se definió $T_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \rightarrow E_{\mathbb{C}}$ llamado complejización de T definida por $T_{\mathbb{C}}(z) = \sum \lambda_j T x_j$ donde $T \in L(E)$.

Como $z \in E_{\mathbb{C}}$ entonces $\bar{z} = \sum \bar{\lambda}_j x_j$; $\bar{\lambda}_j \in \mathbb{C}$, $x_j \in E$, así

$$\begin{aligned} Q\sigma(z) &= T_{\mathbb{C}}(\sigma(z)) \\ &= T_{\mathbb{C}}(\bar{z}) \\ &= \sum \bar{\lambda}_j T x_j \\ &= T\left(\sum \bar{\lambda}_j x_j\right) \\ &= T(\bar{z}) \\ &= T(\sigma(z)) \\ &= \sigma(T(z)) \\ &= \sigma\left(T\left(\sum \lambda_j x_j\right)\right) \\ &= \sigma\left(\sum \lambda_j T x_j\right) \\ &= \sigma(T_{\mathbb{C}}(z)) \\ Q\sigma(z) &= \sigma T_{\mathbb{C}}(z). \end{aligned}$$

(\Leftarrow) Supongamos que Q conmuta con σ . Entonces $Q(E) \subset E$; por si $x \in E$ entonces $\sigma(x) = x$ por lo tanto

$$\sigma Qx = Q\sigma(x) = Qx.$$

Así, $Qx \in \{y \in E_{\mathbb{C}} / \sigma(y) = y\} = E_{\mathbb{C}\mathbb{R}} = E$. Sea

$$Q \setminus E = T \in L(E)$$

Esta claro por la definición de $T_{\mathbb{C}}$ que $T_{\mathbb{C}} = Q$. □

Observación. Un operador T en un espacio vectorial real E es semisimple si su complejización $T_{\mathbb{C}}$ es un operador diagonalizable en $E_{\mathbb{C}}$.

A.3.1. Operadores Reales con Autovalores Complejos

Ahora descartamos la hipótesis de que los autovalores deben ser reales.

Proposición. 2. Sea T un operador en un espacio vectorial real E entonces el conjunto de sus autovalores se conserva bajo conjugación compleja. Por lo tanto, si λ es un autovalor también lo es $\bar{\lambda}$.

Podemos escribir los autovalores de T como:

$$\lambda_1, \dots, \lambda_r \text{ todos reales,}$$

$$u_1, \bar{u}_1, \dots, u_r, \bar{u}_r \text{ todos no reales.}$$

Demostración. Primero observemos que los autovalores de T coinciden con los autovalores de su complejización $T_{\mathbb{C}}$, pues ambos T y $T_{\mathbb{C}}$ tienen el mismo polinomio característico.

Sea λ un autovalor de $T_{\mathbb{C}}$ y v un autovector correspondiente en $E_{\mathbb{C}}$, así,

$$T_{\mathbb{C}}v = \lambda v.$$

Aplicando la operación de conjugación σ a ambos lados

$$\sigma(T_{\mathbb{C}}v) = \sigma(\lambda v) = \bar{\lambda} \bar{v},$$

por la proposición anterior

$$\sigma(T_{\mathbb{C}}v) = T_{\mathbb{C}}\sigma(v) = T_{\mathbb{C}}(\bar{v}).$$

Por lo tanto,

$$T_{\mathbb{C}}\bar{v} = \bar{\lambda} \bar{v}.$$

En otras palabras, $\bar{\lambda}$ es un autovalor de $T_{\mathbb{C}}$ con autovector correspondiente \bar{v} . \square

Las propiedades básicas de los operadores reales están contenidas en los siguientes tres teoremas.

Teorema. 4. Sea $T : E \rightarrow E$ un operador real con autovalores distintos enumerados como en la proposición anterior. Entonces E y T tiene una descomposición de suma directa

$$E = E_a \oplus E_b; \quad T = T_a \oplus T_b,$$

con $T_a : E_a \rightarrow E_a$, $T_b : E_b \rightarrow E_b$ donde T_a tiene autovalores reales y T_b autovalores no reales.

Demostración. El operador $T : E \rightarrow E$ tiene una extensión a un operador lineal complejo $T_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \rightarrow E_{\mathbb{C}}$, aplicando el teorema anterior, el cual implica que encontramos una base $\beta = \{e_1, \dots, e_n, f_1, \bar{f}_1, \dots, f_n, \bar{f}_n\}$ para $E_{\mathbb{C}}$, compuesta por autovectores de $T_{\mathbb{C}}$ correspondientes a los autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_r, u_1, \bar{u}_1, \dots, u_n, \bar{u}_n$.

Sea F_a el subespacio complejo de $E_{\mathbb{C}}$ generado por $\{e_1, \dots, e_n\}$ y F_b el subespacio generado por $\{f_1, \bar{f}_1, \dots, f_n, \bar{f}_n\}$. Por lo tanto F_a y F_b son subespacios invariantes para $T_{\mathbb{C}}$ en $E_{\mathbb{C}}$ donde $E_{\mathbb{C}} = F_a \oplus F_b$.

Además, F_a y F_b son invariantes bajo la conjugación compleja. Sea $E_a = E \cap F_a$ y $E_b = E \cap F_b$ entonces F_a y F_b son las complejizaciones de E_a y E_b , $E = E_a \oplus E_b$. \square

Este teorema proporciona un desacoplamiento de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = Tx.$$

Así, podemos escribir, esta ecuación como un par de ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{dx_a}{dt} &= T_a x_a, \\ \frac{dx_b}{dt} &= T_b x_b,\end{aligned}$$

donde T_a, T_b son como están definidas en el teorema y $x_a \in E_a, x_b \in E_b$.

Teorema. 5. *Sea $T : E \rightarrow E$ un operador en un espacio vectorial real con autovalores no reales $(u_1, \bar{u}_1, \dots, u_n, \bar{u}_n)$. Entonces hay una descomposición de suma directa invariante para E y una correspondiente descomposición de suma directa para T*

$$\begin{aligned}E &= E_1 \oplus \dots \oplus E_n, \\ T &= T_1 \oplus \dots \oplus T_n,\end{aligned}$$

cada E_i es bidimensional y $T_i \in L(E_i)$ tiene autovalores u_i, \bar{u}_i .

Demostración. Sea F_i el subespacio complejo de $E_{\mathbb{C}}$ generado por los autovectores f_i, \bar{f}_i correspondientes a los autovalores u_i, \bar{u}_i . Entonces sea $E_i = F_i \cap E$ entonces F_i es la complejización de E_i donde $i = 1, \dots, n$ y $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n$ además $T_i : E_i \rightarrow E_i$; así $T = T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_n$. \square

Teorema. 6. *Sea $T : E \rightarrow E$ un operador en un espacio vectorial bidimensional $E \subset \mathbb{R}^n$ con autovalores no reales u, \bar{u} con $u = a + ib$. Entonces existe una matriz representante A para T*

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Demostración. Sea $T_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \rightarrow E_{\mathbb{C}}$ la complejización de T . Por lo tanto, $T_{\mathbb{C}}$ tiene los mismos autovalores como T , hay autovectores v, \bar{v} en $E_{\mathbb{C}}$ pertenecientes a u, \bar{u} respectivamente. Sea $v = \alpha + i\beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ entonces $\bar{v} = \alpha - i\beta$, note que α, β están en $E_{\mathbb{C}}$ para

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2}(v + \bar{v}), \\ \beta &= -\frac{1}{2i}(\bar{v} - v).\end{aligned}$$

Por lo tanto α y β están en $E_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^n = E$. Además, es fácil ver que α, β son independientes (por la independencia de v y \bar{v}). Por lo tanto, $\{\beta, \alpha\}$ es una base para E . Para calcular la matriz de T en esta base, iniciamos en

$$\begin{aligned}T_{\mathbb{C}}(\alpha + i\beta) &= (a + ib)(\alpha + i\beta) \\ &= a\alpha + ia\beta + i\alpha b - b\beta \\ &= (-b\beta + a\alpha) + i(a\beta + \alpha b).\end{aligned}$$

También $T_{\mathbb{C}}(\alpha + i\beta) = T(\alpha) + iT(\beta)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}T(\beta) &= a\beta + b\alpha, \\T(\alpha) &= -b\beta + a\alpha.\end{aligned}$$

Entonces la matriz de T en la base $\{\beta, \alpha\}$ es $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$. □

En el curso de la demostración, hemos encontrado la siguiente interpretación de un autovalor complejo de un operador real $T \in L(E)$, $E \subset \mathbb{R}^n$:

Corolario. 1. Sea $v \in E_{\mathbb{C}}$ un autovector de T perteneciente a $u = a + ib$, $b \neq 0$. Si $v = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ entonces $\{\beta, \alpha\}$ es una base para E dando v la matriz $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.

Demostración. Es consecuencia del teorema anterior. □

Ahora, consideremos

$$\frac{dx}{dt} = Tx, \tag{A.3.2}$$

en \mathbb{R}^n , T un operador en \mathbb{R}^n (matriz 3×3). Supongamos T tiene n autovalores distintos entonces los Teoremas 5,4 y 6 se aplican. Dejando $E = \mathbb{R}^n$, primero aplicamos el teorema 5 para obtener el siguiente sistema equivalente a (A.3.2).

$$\frac{dx_a}{dt} = T_a x_a, \tag{A.3.3}$$

$$\frac{dx_b}{dt} = T_b x_b. \tag{A.3.4}$$

Por lo tanto, $T = T_a \oplus T_b$, $x = (x_a, x_b) \in E = E_a \oplus E_b$. Donde T_a tiene autovalores reales y T_b tiene autovalores no reales, (A.3.3) definida en el subespacio E_a y (A.3.4) definida en el subespacio en E_b .

Ejemplo. 3 Considere la ecuación

$$\begin{aligned}x_1' &= -2x_2 \\x_2' &= x_1 + 2x_2\end{aligned}$$

o $x' = Ax$, $x = (x_1, x_2)$ donde $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Así, los autovalores de A son $\lambda_1 = 1 + i$, $\bar{\lambda}_1 = 1 - i$. Encontramos el autovector perteneciente a $\lambda_1 = 1 + i$

$$(A - (1 + i)I)w = 0, w \in \mathbb{C}^2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 - i & -2 \\ 1 & 1 - i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Luego, se tiene

$$\begin{aligned}(-1-i)w_1 &= 2w_2 \\ w_1 &= (-1+i)w_2\end{aligned}$$

donde podemos observar que todas las soluciones son complejas.

Si $w_2 = -i \Rightarrow w_1 = i + 1$. Así, $w = (1+i, -i) = (1,0) + i(1,-1) = \alpha + i\beta$ autovector complejo perteneciente a $1+i$. Así, elegimos la nueva base $\{\beta, \alpha\}$ para $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$, con $\beta = (1,-1)$, $\alpha = (1,0)$.

Para encontrar nuevas coordenadas y_1, y_2 correspondiente a esta nueva base, note que cualquier x puede escribirse

$$x = x_1(1,0) + x_2(0,1) = y_1(1,-1) + y_2(1,0),$$

$$\begin{aligned}x_1 &= y_1 + y_2 \\ x_2 &= -y_1\end{aligned}$$

o $x = Py$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Las nuevas coordenadas están dadas por

$$\begin{aligned}y_1 &= -x_2 \\ y_2 &= x_1 + x_2\end{aligned} \rightarrow y = P^{-1}x, P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz A en las y -coordenadas es

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = B.$$

Luego, nuestra ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = Ax,$$

en \mathbb{R}^2 , teniendo la forma $\frac{dy}{dt} = By$.

$$\begin{aligned}y_1' &= y_1 - y_2 \\ y_2' &= y_1 + y_2\end{aligned}$$

entonces se tiene $y'(t) = ke^{tu}$, $e^{tu} = e^{ta}e^{ib} = e^{ta}(\text{cost}b + isentb)$, donde $k = \alpha + \beta i$. Así,

$$\begin{aligned}y_1(t) &= \alpha e^t \text{cost} - \beta e^t \text{sent}, \\ y_2(t) &= \alpha e^t \text{sent} + \beta e^t \text{cost},\end{aligned}$$

La ecuación original tiene como solución general

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha e^t \cos t - \beta e^t \sin t \\ \alpha e^t \sin t + \beta e^t \cos t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\alpha e^t \cos t - \beta e^t \sin t) + (\alpha e^t \sin t + \beta e^t \cos t) \\ -\alpha e^t \cos t + \beta e^t \sin t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (\alpha + \beta) e^t \cos t + (\alpha - \beta) e^t \sin t, \\ x_2(t) &= -\alpha e^t \cos t + \beta e^t \sin t. \end{aligned}$$

Apéndice B

Topología en \mathbb{R}^n

La teoría y teoremas de este apéndice se encuentra principalmente en Hirsch [4] y Lima [7].

B.1. Norma en \mathbb{R}^n y Producto interior

Definamos la función **producto interior**

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \langle x, y \rangle.\end{aligned}$$

Sea $x, y \in \mathbb{R}^n$ tal que $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$ que satisface:

i) *Simetría* $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

ii) *Bilinealidad* $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$, $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$,
 $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

iii) *Definición Positiva* $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Definamos la función **norma euclidiana**

$$\begin{aligned}|\cdot| : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto |x|.\end{aligned}$$

Sea $x, y \in \mathbb{R}^n$ tal que $|x| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ que tiene las siguientes propiedades:

i) $|x| \geq 0$.

ii) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

iii) $|\lambda x| = |\lambda| |x|$, donde $|\lambda|$ es el valor absoluto del escalar λ .

iv) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Además, se tiene la **Desigualdad de Cauchy** para lo cual, sea $x, y \in \mathbb{R}^n$, tal que

$$\langle x, y \rangle \leq |x| \cdot |y|.$$

La igualdad vale si uno de los vectores x, y es múltiplo de otro, es decir, $y = \alpha x$.

Demostración. Si $x = 0 \rightarrow \langle 0, y \rangle = 0 \rightarrow 0 = \langle x, y \rangle \leq |x| |y| = |0| |y| = 0$

Supongamos que $x \neq 0$ y para $y \in \mathbb{R}^n$ se cumple $y = \alpha x + z$ con $x \perp z$ donde $\alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle}$ entonces

$$\begin{aligned} |y|^2 &= |\alpha x + z|^2 = |\alpha x|^2 + |z|^2 \geq |\alpha x|^2 \\ |y|^2 &\geq \alpha^2 |x|^2. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} |y|^2 &\geq \left(\frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} \right)^2 |x|^2 = \frac{\langle x, y \rangle^2}{|x|^4} |x|^2 \\ |y|^2 &\geq \frac{\langle x, y \rangle^2}{|x|^2} \\ |y|^2 |x|^2 &\geq \langle x, y \rangle^2 \\ |x| |y| &\geq \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Si $y = \lambda x$

$$\begin{aligned} |\langle x, y \rangle| &= |\langle x, \lambda x \rangle| = |\lambda| \langle x, x \rangle = |\lambda| |x|^2 \\ |x| |\lambda x| &= |x| |\lambda| |x| = |\lambda| |x|^2. \end{aligned}$$

□

Además, geoméricamente, $|x|$ es la longitud del vector x y

$$\langle x, y \rangle = |x| \cdot |y| \cdot \cos \theta.$$

Definamos la distancia entre dos puntos, para lo cual, sea $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) = |x - y|, \end{aligned}$$

que satisface

- i) $d(x, y) \geq 0 = \langle y, x \rangle$; $d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$.
- ii) $d(x, y) = d(y, x)$.
- iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

B.2. Bolas

Sea $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n / |y - x| < \varepsilon\},$$

una bola abierta de centro x y radio ε .

Sea $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$

$$B[x, \varepsilon] = \{y \in \mathbb{R}^n / |y - x| \leq \varepsilon\},$$

una bola cerrada de centro x y radio ε .

B.3. Conjuntos Abiertos y Acotados

- Un punto $a \in X \subset \mathbb{R}^n$ es llamado punto interior de X si existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset X$. Así, un conjunto se dice abierto si todos sus puntos son interiores; es decir, $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto si y solo si $\forall x \in X$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset X$.
- Denotamos con $Int(X)$ al conjunto de todos los puntos interiores de $X \subset \mathbb{R}^n$.
- Si $Int(X) = X$ entonces X es abierto.
- Si $a \in Int(X)$ decimos que X es una vecindad de a .
- Decimos que $X \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto acotado si existe $a > 0$ tal que $X \subset B(0, a)$.

B.4. Sucesiones en \mathbb{R}^n

Una sucesión es una función \mathbb{N} sobre \mathbb{R}^n de la forma

$$x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$$
$$k \mapsto x_k = (x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^n),$$

que denotamos por $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ o $\{x_k\}$.

Definición. 1 * Decimos que la sucesión $\{x_k\}$ converge a un punto $y \in \mathbb{R}^n$ si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq k_0$ entonces $|x_k - y| < \varepsilon$; es decir, $k > k_0 \rightarrow x_k \in B(y, \varepsilon)$.

* La sucesión $\{x_k\}$ en \mathbb{R}^n converge a el limite $y \in \mathbb{R}^n$ si $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - y| = 0$.

* Una sucesión $\{x_k\}$ en \mathbb{R}^n se dice convergente cuando existe $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$, así resulta que toda sucesión convergente es acotada.

Teorema. 7 $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ converge al punto y , es decir,

$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = y$ si y solo si $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{ki} = y_i$ donde $i = 1, 2, \dots, n$.

Demostración. (\rightarrow) Para cada $i = 1, \dots, n$ se tiene $|x_{ki} - y_i| \leq |x_k - y|$. Por otro lado, tenemos que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = y$ que es $\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq k_0$ entonces $|x_k - y| < \varepsilon$.

Así, tenemos que $\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq k_0$, $|x_{ki} - y_i| \leq |x_k - y| < \varepsilon$ entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{ki} = y_i$.

(\leftarrow) Ahora, supongamos $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{ki} = y_i$, dado $\varepsilon > 0$, existen $\exists k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ tales que $k > k_i \rightarrow |x_{ki} - y_i| < \varepsilon$ ($i = 1, \dots, n$). Tomando $k_0 = \max\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ tomando la norma del máximo vemos que $k > k_0 \rightarrow |x_k - y| < \varepsilon$. Así, tenemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = y.$$

□

Definición. 2 Una subsucesión de una sucesión $\{x_k\}$ es una restricción de esta sucesión a un subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{k_1 < \dots < k_m < \dots\} \subset \mathbb{N}$.

$$\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}'}, \{x_{k_m}\}_{m \in \mathbb{N}} \quad o \quad (x_{k_1}, \dots, x_{k_m}, \dots),$$

denotan una subsucesión.

Proposición. 3 Toda sucesión convergente es acotada.

Demostración. Sea $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ una sucesión que converge a $y \in \mathbb{R}^n$; es decir,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = y \text{ entonces } \lim_{k \rightarrow \infty} x_{ki} = y_i \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, n.$$

Por lo tanto, se tiene $\{x_{ki}\}$ es acotada entonces

$$\exists M_i > 0 \text{ tal que } |x_{ki}| \leq M_i \forall k.$$

Así, se tiene que

$$|x_k| \leq |x_{1k}| + |x_{2k}| + |x_{3k}| + \dots + |x_{nk}| \leq n \cdot \max\{x_{ki}\} = n \cdot M_i = M.$$

Por lo tanto, $\{x_k\}$ es acotada. □

Teorema. 8 (Bolzano – Weierstrass) Toda sucesión acotada en \mathbb{R}^n posee una subsucesión convergente.

Demostración. Sea $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ una sucesión acotada que converge a $y \in \mathbb{R}^n$ entonces la sucesión coordinada $\{x_{ki}\} \subset \mathbb{R}$ con $i = 1, 2, \dots, n$ también es acotada. Consideremos la sucesión $\{x_{k_1}\} \subset \mathbb{R}$ acotada, así, por el teorema de Bolzano-Weierstrass aplicado a \mathbb{R} , existe un conjunto $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ infinito y un $y_1 \in \mathbb{R}$ tal que existe una subsucesión x_{k_1} que converge a y_1 , es decir,

$$\lim_{k \in \mathbb{N}_1} x_{k_1} = y_1.$$

Por otro lado, la sucesión acotada $\{x_{k_2}\}_{k \in \mathbb{N}_1}$ en \mathbb{R} , así, por el teorema de Bolzano-Weierstrass aplicado a \mathbb{R} , existe un conjunto $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ infinito y un $y_2 \in \mathbb{R}$ tal que existe una subsucesión x_{k_2} que converge a y_2 ; es decir,

$$\lim_{k \in \mathbb{N}_2} x_{k_2} = y_2.$$

Así, sucesivamente hasta que consigamos n conjuntos infinitos

$$\mathbb{N}_n \subset \mathbb{N}_{n-1} \subset \dots \subset \mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$$

y números reales y_1, y_2, \dots, y_n tal que

$$\lim_{k \in \mathbb{N}_i} x_{ki} = y_i, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n.$$

Luego, por $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ y el Teorema 7 mencionado, se tiene

$$\lim_{k \in \mathbb{N}_n} x_k = y.$$

□

Definición. 3 (*Sucesión de Cauchy*) Una sucesión de puntos $\{x_k\}$ en \mathbb{R}^n se llama sucesión de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ dado, existe } k_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } k, r > k_0 \implies |x_k - x_r| < \varepsilon,$$

lo que implica que $\lim_{k, r \rightarrow \infty} |x_k - x_r| = 0$ o $\lim_{k \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{N}} |x_k - x_r| = 0$.

Así, toda sucesión de Cauchy es acotada.

Teorema. 9 (*Criterio de Cauchy*) Una sucesión en \mathbb{R}^n converge si y solo si es una sucesión de Cauchy en \mathbb{R}^n

Demostración. (\rightarrow) Sea $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ una sucesión que converge a $y \in \mathbb{R}^n$; es decir,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - y| = 0.$$

Así,

$$\begin{aligned} |x_k - x_r| &= |x_k - y + y - x_r| = |(x_k - y) - (x_r - y)| \\ |x_k - x_r| &= |(x_k - y) - (x_r - y)| \\ |x_k - x_r| &\leq |x_k - y| + |x_r - y|, \end{aligned}$$

luego

$$\lim_{k, r \rightarrow \infty} |x_k - x_r| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - y| + \lim_{r \rightarrow \infty} |x_r - y| = 0 + 0 = 0$$

$$\lim_{k, r \rightarrow \infty} |x_k - x_r| = 0$$

entonces $\{x_k\}$ es de Cauchy en \mathbb{R}^n .

(\leftarrow) Supongamos que $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ es de Cauchy entonces $\{x_k\}$ es acotado por el Teorema de Bolzano-Weierstrass $\{x_k\}$ posee una subsucesión que converge; es decir, existe $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $\lim_{r \in \mathbb{N}'} x_r = y, y \in \mathbb{R}^n$ o $\lim_{r \in \mathbb{N}'} |x_r - y| = 0$. También se sabe

$$\lim_{k \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{N}'} |x_k - x_r| = 0,$$

esto por la definición de Cauchy entonces

$$\begin{aligned} |x_k - y| &= |x_k - x_r + x_r - y| \\ &= |x_k - x_r| + |x_r - y| \\ \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - y| &= \lim_{\substack{k, r \rightarrow \infty \\ k \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{N}'}} |x_k - x_r| + \lim_{r \rightarrow \mathbb{N}'} |x_r - y| = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - y| = 0$, así $\{x_k\}$ converge a y en \mathbb{R}^n . \square

B.5. Conjunto Cerrado

Sea $X \subset \mathbb{R}^n$, un punto $a \in \mathbb{R}^n$ se dice que es adherente a X si existe una sucesión de términos $\{x_k\}$ en X tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a.$$

Definición. 4 La clausura de $X \subset \mathbb{R}^n$ es el conjunto de puntos:

$$\bar{X} = \{a \in \mathbb{R}^n / a \text{ es adherente a } X\},$$

es decir,

$$a \in \bar{X} \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a; \{x_k\} \subset \mathbb{R}^n.$$

* Un conjunto $Y \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado $\Leftrightarrow \bar{Y} = Y$.

Teorema. 10

(a) Un punto a es adherente al conjunto $X \subset \mathbb{R}^n \Leftrightarrow$ toda bola de centro a contiene algún punto de X .

(b) Y es cerrado en $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow \mathbb{R}^n - Y$ es abierto

Demostración. a) (\rightarrow) Si a es adherente a X entonces

$$\exists x_k \in X \forall k \in \mathbb{N} : \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a,$$

por definición de convergencia, toda bola $B(a, r)$, $r > 0$ contiene puntos de X , en este caso todos los x_k con k suficientemente grande.

(\leftarrow) Supongamos que toda bola de centro a contiene un elemento de X entonces podemos considerar las bolas

$$B\left(a, \frac{1}{k}\right) \text{ con } k \in \mathbb{N}.$$

Por hipótesis, $x_k \in B\left(a, \frac{1}{k}\right)$ con $x_k \in X$ entonces $|x_k - a| < \frac{1}{k}$ tomando limite $k \rightarrow \infty$. Así, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$. Por lo tanto, a es adherente al conjunto X .

b) Supongamos que Y es cerrado en $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^n - Y$ entonces x no es adherente a $Y \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^n - Y$ entonces existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n - Y$ por la parte (a) $\Leftrightarrow (\mathbb{R}^n - Y)$ es abierto. \square

El inciso b) es equivalente a: Un subconjunto $Y \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado si toda sucesión de puntos en Y que es convergente tiene su límite en Y .

B.6. Aplicaciones Continuas y Conjuntos Compactos

Definición. 5 Una función $f : X \rightarrow Y$ es continua en $a \in X$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$

$$x \in X, |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

En términos de bolas abiertas $f : X \rightarrow Y$ es continua en $a \in X$:

$$\forall B(f(a); \varepsilon), \exists B(a, \delta) \text{ tal que } f(B(a, \delta) \cap X) \subset B(f(a); \varepsilon).$$

Teorema. 11 Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua en $a \in X \Leftrightarrow \forall \{x_k\} \subset X$ sucesión tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \text{ entonces } \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(a).$$

Demostración. (\rightarrow) Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua en el punto a . Dada una sucesión de puntos $x_k \in X$ con $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$. Para δ , existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0, x_k \in B(a, \delta)$, luego $k > k_0$ entonces $f(x_k) \in B(f(a), \varepsilon)$. Por lo tanto, $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(a)$.

(\leftarrow) Por contradicción. Supongamos que f no es continua en a , así, existe $\varepsilon > 0$ para todo $\delta > 0$

$$\exists x : |x - a| < \delta, |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

Aplicando lo anterior a los x_k tenemos existe $\varepsilon > 0$ para todo $\delta = \frac{1}{k} > 0$ con $k > k_0$ se tiene

$$|x_k - a| < \frac{1}{k} \quad \text{y} \quad |f(x_k) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

Así, tenemos $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ más no tenemos que $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(a)$, lo cual es una contradicción a nuestra hipótesis de que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(a)$. Por lo tanto f es continua en a . \square

Definición. 6. Un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si y solo si X es cerrado y acotado.

Teorema. 12. Si $K \subset \mathbb{R}^n$ son equivalentes

- i) K compacto en \mathbb{R}^n .
- ii) Toda sucesión de puntos $\{x_k\} \subset K$ admite una subsucesión que converge en K .

Demostración. (i) \rightarrow ii) Supongamos K es compacto entonces K es cerrado y acotado.

Sea $\{x_k\}$ una sucesión en K , como K es acotado por el Teorema de Bolzano-Weierstrass esta sucesión posee una subsucesión convergente $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}'}$ que converge a un punto a . Además, como K es cerrado se tiene que $a \in K$.

(ii) \rightarrow i)) Por demostrar K es cerrado y acotado.

Supongamos que toda sucesión de puntos $\{x_k\} \subset K$ admite una subsucesión que converge en K

Demostremos que K acotado.

Supongamos K no es acotado entonces $\exists M \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_k\} \subset K$ se cumple $|x_k| > M$ así ninguna sucesión $\{x_k\} \subset K$ converge en K . Así, esta no poseería una subsucesión convergente, lo cual es una contradicción a nuestra hipótesis. Por lo tanto K es acotado.

Demostremos que K es cerrado.

Sea $\{x_k\} \subset K$ tal que $\lim_{k \in \mathbb{N}} x_k = a \forall k \in \mathbb{N}$ entonces por hipótesis esta admite una subsucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}'}$ que converge a $a \in K$. Pero, sabemos por unicidad de limite que si

$$\lim_{k \in \mathbb{N}} x_k = a \rightarrow \lim_{k \in \mathbb{N}'} x_k = a.$$

Y como $a \in K$, así K es cerrado. □

Teorema. 13 Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto y $f : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua entonces $f(K)$ es compacto.

Demostración. Sea $\{y_k\}$ una sucesión de puntos en $f(K)$

$$\begin{aligned} f : K &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x_k &\rightarrow f(x_k) \end{aligned}$$

tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $x_k \in K$ tal que $f(x_k) = y_k$. Como K es compacto en \mathbb{R}^n . Así, por el anterior teorema tenemos que toda sucesión $\{x_k\} \subset K$ admite una subsucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}'}$ que converge para un punto en K

$$\lim_{k \in \mathbb{N}'} x_k = a, a \in K.$$

Como f es continua entonces por el Teorema 11 mencionado

$$\lim_{k \in \mathbb{N}'} f(x_k) = f(a), \text{ donde } f(a) \in f(K).$$

Luego, toda sucesión de puntos $y_k = f(x_k) \in f(K)$ posee una subsucesión $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}'}$ convergente para un punto $f(a) \in f(K)$. Por consiguiente, $f(K)$ es compacto por el Teorema 12 mencionado. □

Teorema. 14 Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto y $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una función real continua entonces existen $x_0, x_1 \in K$ tal que $\forall x \in K$

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1).$$

Demostración. Como $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto y f continua entonces $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ es compacto esto por Teorema 13. Como $f(K)$ es compacto, $f(K)$ es cerrado y acotado. Luego como $f(K)$ es acotado, por el axioma del supremo, existe $y_0 = \inf(f(K))$ y $y_1 = \sup(f(K))$ y como $f(K)$ es cerrado se tiene $y_0, y_1 \in f(K)$.

Por otro lado, como

$$y_0 \in f(K) \rightarrow \exists x_0 \in K \text{ tal que } f(x_0) = y_0.$$

$$y_1 \in f(K) \rightarrow \exists x_1 \in K \text{ tal que } f(x_1) = y_1.$$

Luego, para todo $x \in K$

$$f(x_0) = y_0 = \inf(f(x)) \leq f(x) \leq \sup(f(x)) = y_1 = f(x_1).$$

□

Apéndice C

Normas

La teoría y teoremas de este apéndice se encuentra principalmente en Hirsch [4] y Lima [7].

C.1. Norma en General

Definamos una norma cualquiera en \mathbb{R}^n :

$$N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

que satisface:

- i) $N(x) \geq 0$.
- ii) $N(x) = 0 \leftrightarrow x = 0$.
- iii) $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.
- iv) $N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$.

Ahora veamos normas específicas en \mathbb{R}^n :

$$\begin{aligned} |x|_{\text{máx}} &= \text{máx} \{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}, \\ |x|_{\text{sum}} &= |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|. \end{aligned}$$

Veamos la siguiente **equivalencia de normas**:

$$|x|_{\text{máx}} \leq |x| \leq |x|_{\text{sum}} \leq n |x|_{\text{máx}}.$$

Demostración. Primero demosremos que $|x|_{\text{sum}} \leq n |x|_{\text{máx}}$

Luego, como

$$\begin{array}{r} |x|_{\text{máx}} \geq |x_1| \\ \vdots \\ |x|_{\text{máx}} \geq |x_n| \\ \hline n |x|_{\text{máx}} \geq |x_1| + \dots + |x_n| = |x|_{\text{sum}}. \end{array}$$

Por lo tanto, $|x|_{sum} \leq n|x|_{m\acute{a}x}$.

A continuaci3n, demostremos que $|x| \leq |x|_{sum}$.

Por inducci3n, para $k = 2$

$$\begin{aligned} (|x_1| + |x_2|)^2 &= |x_1|^2 + 2|x_1||x_2| + |x_2|^2 \geq |x_1|^2 + |x_2|^2 = x_1^2 + x_2^2 \\ |x_1| + |x_2| &\geq \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \end{aligned}$$

Entonces $|x|_{sum} \geq |x|$ para \mathbb{R}^2 . Supongamos, para $k = n - 1$ se cumple

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_{n-1}| \geq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2}.$$

Por demostrar $k = n$

$$\begin{aligned} (|x_1| + |x_2| + \dots + |x_{n-1}| + |x_n|)^2 &\geq \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2} + |x_n| \right)^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n^2) + 2 \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2} \right) (|x_n|) \\ &\geq x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n^2. \end{aligned}$$

As3,

$$\begin{aligned} |x_1| + |x_2| + \dots + |x_{n-1}| + |x_n| &\geq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n^2} \\ |x|_{sum} &\geq |x|, \end{aligned}$$

en \mathbb{R}^n .

Ahora, demostremos $|x|_{m\acute{a}x} \leq |x|$.

Sea $|x_i| = m\acute{a}x\{|x_1|, \dots, |x_i|, \dots, |x_n|\} = |x|_{m\acute{a}x}$ entonces

$$\begin{aligned} |x_i|^2 &\leq |x_1|^2 + \dots + |x_i|^2 + \dots + |x_n|^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_i^2 + \dots + x_n^2 \\ |x|_{m\acute{a}x} = |x_i| &\leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_i^2 + \dots + x_n^2} = |x| \\ |x|_{m\acute{a}x} &\leq |x|. \end{aligned}$$

□

Sea $\beta = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ una base para \mathbb{R}^n y define la norma β – euclidiana

$$|x|_\beta = \sqrt{(t_1^2 + \dots + t_n^2)},$$

si $x = \sum_{j=1}^n t_j f_j$; en otras palabras, $|x|_\beta$ es la norma Euclidiana de x en β – coordenadas (t_1, t_2, \dots, t_n) .

La norma β – m\acute{a}ximo de x , $\beta = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ una base para \mathbb{R}^n y se define la norma

$$|x|_{\beta-m\acute{a}x} = m\acute{a}x\{|t_1|, \dots, |t_n|\}.$$

Proposición. 4 Sea $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ alguna norma. Existen constantes $A > 0$, $B > 0$ tales que

$$A|x| \leq N(x) \leq B|x|$$

para todo x en \mathbb{R}^n , donde $|x|$ es la norma euclidiana.

Demostración. Tomamos $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ alguna norma. Consideremos la norma del máximo. Claramente por la equivalencia de normas

$$\begin{aligned} |x|_{\text{máx}} &\leq |x| \leq n|x|_{\text{máx}} \\ (|x|_{\text{máx}})^2 &\leq \sum_j x_j^2 \leq n(|x|_{\text{máx}})^2, \end{aligned}$$

tomando la raíz cuadrada

$$|x|_{\text{máx}} \leq |x| \leq \sqrt{n}|x|_{\text{máx}}.$$

Así, la norma del máximo puede tomar $A = \frac{1}{\sqrt{n}}$ y $B = 1$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}|x| \leq |x|_{\text{máx}} \leq |x|. \quad (\text{C.1.1})$$

Ahora, mostraremos que N es continua.

Tenemos $x = \sum x_j e_j$, luego

$$N(x) = N\left(\sum x_j e_j\right) \leq \sum x_j N(e_j),$$

donde $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ es la base estándar. Si tomamos $M = \text{máx}\{N(e_1), \dots, N(e_n)\}$ entonces

$$N(x) \leq M \cdot \sum_j |x_j| = M \cdot |x|_{\text{sum}} \leq M \cdot n|x|_{\text{máx}} \leq M \cdot n|x|, \quad (\text{C.1.2})$$

por (C.1.1). Luego por la desigualdad triangular $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ y por (C.1.2), se tiene

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x-y) \leq M \cdot n|x-y|.$$

Así, se tiene la definición de Funciones Lipchitz.

Por otro lado, sea $\{x_k\}$ una sucesión en \mathbb{R}^n y supongamos $\lim x_k = y$ en \mathbb{R}^n . Así, se tiene

$$|N(x_k) - N(y)| \leq M \cdot n|x_k - y|$$

entonces $\lim N(x_k) = N(y)$ en \mathbb{R} . Por lo tanto, N es continua y este alcanza un valor máximo B y un valor mínimo A en el conjunto cerrado acotado

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n / |x| = 1\}.$$

Como K compacto y N continua entonces por Teorema 8 del Apéndice 2, N toma valores máximo y mínimo.

Ahora, sea $x \in \mathbb{R}^n$. Si $x = 0$

$$\begin{aligned} A|0| &\leq N(x) \leq B|0| \\ N(x) &= 0. \end{aligned}$$

Si $|x| = \alpha \neq 0$ entonces

$$N(x) = N(\alpha\alpha^{-1}x) = \alpha N(\alpha^{-1}x).$$

Ya que $|\alpha^{-1}x| = \alpha^{-1}|x| = \alpha^{-1}\alpha = 1$ se tiene

$$A \leq N(\alpha^{-1}x) \leq B.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A &\leq \alpha^{-1}N(x) \leq B \\ A\alpha &\leq N(x) \leq B\alpha \\ A|x| &\leq N(x) \leq B|x|. \end{aligned}$$

Así, queda demostrada la desigualdad. \square

Definición. 7 Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio. Definamos una norma en E , sea

$$N : E \rightarrow \mathbb{R},$$

que satisface *i*), *ii*) , *iii*) y *iv*). (Cada norma en E es obtenida de una norma en \mathbb{R}^n por restricción). Definimos un espacio vectorial normado (E, N) para ser un espacio vectorial (que es subespacio de \mathbb{R}^n) junto con una norma particular N en E .

Existen $A, B \in \mathbb{R}$ tal que la Proposición 4 se mantiene $\forall x$ en \mathbb{R}^n , así esto se mantiene con mayor motivo $\forall x$ en E .

Proposición. 5 Sea (E, N) espacio vectorial normado. Una sucesión $\{x_k\}$ en E converge a a y si y solo si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} N(x_k - a) = 0.$$

Demostración. (\Leftarrow) Sea (E, N) espacio vectorial normado, donde N cumple la proposición anterior. Sea $A > 0, B > 0$ tal que

$$A|x| \leq N(x) \leq B|x|. \tag{C.1.3}$$

Sea $\{x_k\}$ una sucesión en E , supongamos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} N(x_k - a) = 0,$$

es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k \geq k_0$ $N(x_k - a) < \varepsilon$ y por (C.1.3)

$$\begin{aligned} A|x_k - a| &\leq N(x_k - a) \leq B|x_k - a| \\ |x_k - a| &\leq A^{-1}N(x_k - a) < \frac{1}{A}\varepsilon < \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = y$.

(\rightarrow) Sea (E, N) espacio vectorial normado y supongamos que una sucesión $\{x_k\}$ en E converge a y , es decir,

$$\forall \frac{\varepsilon}{B} > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall k \geq k_0 \quad |x_k - y| < \frac{\varepsilon}{B}.$$

Como $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ alguna norma, cumple la Proposición 4.

Así,

$$N(x_k - y) \leq B|x_k - y| < B \frac{\varepsilon}{B} = \varepsilon.$$

Por lo tanto, $\lim_{k \rightarrow \infty} N(x_k - y) = 0$. □

Proposición. 6 Sea (E, N) espacio vectorial normado entonces la bola unitaria:

$$D = \{x \in E / N(x) \leq 1\}$$

es compacta.

Demostración. Como (E, N) espacio vectorial normado entonces sea $B > 0$ tal que

$$N(x) \leq B|x|$$

entonces D esta contenida en

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n / |x| \leq B^{-1}\}.$$

Por lo tanto, D es un subconjunto acotado de \mathbb{R}^n . Sea $\{x_k\}$ una sucesión en D , por la Proposición 5, tenemos que $\lim_{k \rightarrow \infty} N(x_k) = 0$. Así, se tiene que D es cerrado. □

Proposición. 7 Sea (E, N) espacio vectorial normado entonces una sucesión $\{x_k\}$ en E converge a un elemento en E si y solo si para cada $\varepsilon > 0$, existe un entero $n_0 > 0$ tal que si $p > n \geq n_0$ entonces $N(x_p - x_n) < \varepsilon$

Demostración. Supongamos $E \subset \mathbb{R}^n$ y consideremos $\{x_k\}$ una sucesión en \mathbb{R}^n que converge a $y \in E \subset \mathbb{R}^n$ si y solo si $\{x_k\}$ es de Cauchy

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ dado, existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } p, n \geq n_0 \implies |x_p - x_n| < \frac{\varepsilon}{B}.$$

Por la equivalencia de normas de la Proposición 4

$$A|x_p - x_n| \leq N(x_p - x_n) \leq B|x_p - x_n|.$$

Luego,

$$\begin{aligned} N(x_p - x_n) &\leq B|x_p - x_n| < B \frac{\varepsilon}{B} = \varepsilon \\ &N(x_p - x_n) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Pero $y \in E$, porque los subespacios son conjuntos cerrados. □

Notemos que una sucesión en \mathbb{R}^n (o en un subespacio de \mathbb{R}^n) es frecuentemente denotado por una serie infinita

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k.$$

Esta es una notación sugestiva para la sucesión de sumas parciales $\{s_k\}$, donde

$$s_k = x_1 + x_2 + \dots + x_k.$$

Si $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = y$ se escribe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k = y,$$

la serie $\sum x_k$ converge a y .

Observemos, que si todos los x_k están en un subespacio $E \subset \mathbb{R}^n$ entonces también $y \in E$ pues E es un conjunto cerrado.

Definición. 8 Una serie $\sum x_k$ en un espacio vectorial normado (E, N) es absolutamente convergente si la serie de números reales $\sum_{k=0}^{\infty} N(x_k)$ es convergente.

Por otro lado, se tiene el Criterio de Comparación que menciona que dados $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de términos positivos tal que $a_n \leq b_n \forall n \geq n_0$ entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge}.$$

Definición. 9 Una serie $\sum x_k$ en un espacio vectorial normado (E, N) converge absolutamente siempre que haya una serie convergente $\sum a_k$ de números reales a_k no negativos tal que

$$N(x_k) \leq a_k; \dots k = 1, 2, \dots$$

. Tomemos la sucesión de sumas parciales. Sean $p, q \in \mathbb{N}$ y supongamos $q < p$, tenemos claramente

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p N(x_k) - \sum_{k=1}^q N(x_k) &= \sum_{k=q+1}^p N(x_k) \\ \sum_{k=1}^p a_k - \sum_{k=1}^q a_k &= \sum_{k=q+1}^p a_k \\ 0 \leq \sum_{k=q+1}^p N(x_k) &\leq \sum_{k=q+1}^p a_k. \end{aligned}$$

Luego, por hipótesis $\sum a_k$ es convergente. Así, es de Cauchy, para todo $\varepsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para $p, q \geq m$ se tiene

$$\left| \sum_{k=1}^p a_k - \sum_{k=1}^q a_k \right| < \varepsilon.$$

Así, se tiene que para $p, q \geq m$

$$\left| \sum_{k=1}^p N(x_k) - \sum_{k=1}^q N(x_k) \right| = \left| \sum_{k=q+1}^p N(x_k) \right| < \varepsilon$$

entonces también es una sucesión de Cauchy. Por lo tanto, una sucesión de Cauchy.

Teorema. 15 *Toda serie absolutamente convergente es convergente, lo que implica que $\sum x_k$ que es convergente en E . (Independientemente de la norma en E , esto por la equivalencia de normas).*

Demostración. Sea una serie $\sum x_k$ es un espacio vectorial normado (E, N) que converge absolutamente, por definición, entonces la serie de números reales $\sum_{k=0}^{\infty} N(x_k)$ es convergente, que significa que existe una serie convergente $\sum a_k$ de números reales no negativos a_k tal que

$$N(x_k) \leq a_k; k = 1, 2, \dots,$$

esto por la Definición 9. Por otro lado, sean $p, q \in \mathbb{N}$ y supongamos $q < p$, claramente

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^p x_k - \sum_{k=1}^q x_k \right| &= \left| \sum_{k=q+1}^p x_k \right| \leq \sum_{k=q+1}^p |x_k| \\ &= \sum_{k=1}^p |x_k| - \sum_{k=1}^q |x_k|. \end{aligned}$$

Por hipótesis, $\sum |x_k|$ es convergente. Así, es una sucesión de Cauchy, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para $p, q \geq m$ se tiene

$$\left| \sum_{k=1}^p |x_k| - \sum_{k=1}^q |x_k| \right| < \varepsilon.$$

Así, para $p, q \geq m$ se tiene

$$\left| \sum_{k=1}^p x_k - \sum_{k=1}^q x_k \right| < \varepsilon,$$

luego $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ es convergente. □

Bibliografía

- [1] Brauer, F. and Castillo Chavez, C., *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. 2^a Edición. New York, Springer - Verlag, 2011.
- [2] Bürger, R., *Introducción al Modelamiento en Biomatemática.*, Universidad de Concepción-Chile, 2010.
- [3] Doering, C. I. and Lopes, A. O., *Equações Diferenciais Ordinárias*. 2^a Edición. Rio de Janeiro, IMPA, 2007.
- [4] Hirsch, M. W. and Smale, S., *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. San Diego-California, Academic Press, 1974.
- [5] Montesinos, O. A. and Hernández, C. M., *Modelos Matemáticos para Enfermedades Infecciosas*. *Salud pública de México* 49(3): 218-226, 2007.
- [6] Perko, L., *Differential Equations and Dynamical Systems*. 3^a Edición. New York, Springer-Verlag, 2001.
- [7] Lima, Elon Lages, *Análise real, v2*, 3^a Edición. Rio de Janeiro, IMPA, 2007.
- [8] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*. New York, John Wiley y Sons, 1964.
- [9] M.W.Hirsh, S.Smale, R.L.Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and An Introduction to Chaos*, Elsevier, 2004.
- [10] Brauer, P. van den Driessche y J. Wu, *Mathematical Epidemiology*, Springer, New York, USA, 2008.
- [11] Friedberg, S. H., Insel, A. J., and Spence, L. E. *Álgebra lineal*. México, Publicaciones Cultural, 1982
- [12] Goh, B-S. *Management and analysis of biological populations*. Elsevier Science, 1980