ECONOMIA DE STOCKS PARA MATERIALES PETROLEROS

Por

ANTONIO ARNEZ VARGAS

TESIS DE GRADO PARA OPTAR EL TITULO
DE LICENCIADO EN ECONOMIA:
MENCION ESTADISTICA, PRESENTADA
A LA FACULTAD DE CIENCIAS
JURIDICAS, ECONOMICAS
Y SOCIALES

UNIVERSIDAD BOLIVIANA

UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRES

La Paz - Bolivia

Junio de 1977

I N D I C E   G E N E R A L

CAPITULO IV

LAS ECUACIONES ECONOMICAS CUANDO LA DEMANDA ES ALEATORIA

CAPITULO V

LA SIMULACION MONTE CARLO

CAPITULO VI

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

A N E X O S

SIMBOLOGIA

a	Tasa de ruptura de inventario
C	Costo total o esperanza matemática del costo total
C_o	Costo total óptimo para una cantidad pedida óptima
c_s	Costo de almacenamiento unitario por unidad de tiempo
c_ℓ	Costo de emisión de pedido
c_r	Costo de ruptura de inventario
$C(q)$	Costo total en función de la cantidad pedida q
$C(q_o)$	Costo total óptimo en función de la cantidad pedida q_o
$C(q,s)$	Costo total en función de las cantidades q y s
c_1	Costo o pérdida sobre excedentes cuando $r \leq s$
c_2	Costo suplementario de ruptura cuando $s < r$
$C(s)$	Costo total en función de la cantidad variable s
$C(s+1)$	Costo total en función de la cantidad variable $s+1$
$C(s-1)$	Costo total en función de la cantidad variable $s-1$
$C(s_o)$	Costo total óptimo en función de la cantidad variable s_o
$C(s_o-1)$	Costo total óptimo en función de la cantidad variable s_o-1
$C(s_o+1)$	Costo total óptimo en función de la cantidad variable s_o+1
$\frac{d\,C(q)}{d\,q}$	Derivada del costo total respecto de la cantidad q
$\frac{\partial C(q,s)}{\partial q}$	Derivada parcial del costo total respecto de q
$\frac{\partial C(q,s)}{\partial s}$	Derivada parcial del costo total respecto de s
$\bar{E}$	Escasez promedio
E	Frecuencias esperadas, obtenidas de la distribución de probabilidades
$\bar{I}$	Inventario promedio
k	Número de intervalos o clases
O	Frecuencias observadas a partir de la distribución de frecuencias
p	Número de pedidos

$p(r)$	Probabilidad de la cantidad demandada r
$p(r\leq s)$	Probabilidad de la cantidad demandada $r\leq s$
$p(r\leq s_o)$	Probabilidad de la cantidad demandada $r\leq s_o$
$p(r\leq s_o-1)$	Probabilidad de la cantidad demandada $r\leq s_o-1$
q	Cantidad pedida
q_o	Cantidad pedida óptima
Q	Necesidad total para el período de planificación T
r	Unidades demandadas
r^+	Número de series o lotes en el tiempo T
s	Existencia inicial o nivel del inventario
s_o	Nivel óptimo del inventario
t	Intervalo de tiempo entre pedidos
t_o	Intervalo de tiempo óptimo entre pedidos
t_1	Período de tiempo en el que el inventario responde a la demanda
t_2	Período de tiempo en el que se produce escasez o ruptura de inventario
T	Período para el que se establece una cierta política
v	Número de parámetros estimados a partir de la distribución de frecuencias
X,Y,Z	Variables aleatorias.

-- 0 --

R E S U M E N

El valor de las inversiones en materiales y equipos en la industria petrolera alcanza niveles cada vez más importantes. En general el control de stocks de estos materiales y equipos se basa en un sistema uniforme, es decir, se trata a cada artículo o item determinado con la misma dedicación y esfuerzo.

Si analizamos la actividad empresarial, veremos que casi siempre un número relativamente pequeño de items y de gran valor monetario, origina una parte considerable de las operaciones de la empresa. Consecuentemente, los costos asociados con los diferentes niveles de stock de estos items son de vital importancia cuando se trata de tomar algún tipo de decisión óptima, principalmente si se considera las contínuas fluctuaciones en el mercado del precio de los materiales.

La posibilidad de reducir los costos de mantenimiento, de emisión de pedido y de escasez por la falta de disponibilidad oportuna de existencias, etc. nos ha impulsado a realizar el presente estudio de carácter teórico, cuya objetividad principal es la de hacer ver al ejecutivo que existen técnicas científicas para la compra, manejo y control económico de materiales.

Una vez definido este propósito, se hace un análisis principalmente teórico del problema, utilizando para ello los razonamientos creados por los autores y estudiosos en la materia, considerando primero la manera de determinar los niveles de stock óptimos, mediante la aplicación de algunas de las ecuaciones correspondientes; posteriormente se hace una aplicación de la técnica de Simulación Monte Carlo a un problema hipótetico, explicando las bondades que ofrece el método a este tipo de controles bajo condiciones de tratamiento científico.

C A P I T U L O   I

1. IMPORTANCIA DE LOS MATERIALES Y EQUIPOS PETROLEROS

1.1. Los niveles de inversión en materiales y equipos

Es sabido que la actividad petrolera es una de las industrias que demanda grandes inversiones de capital. Es así que el valor de las inversiones en materiales y equipos en la industria petrolera boliviana, esta alcanzando niveles cada vez más importantes.

La compra de materiales importados por la empresa petrolera, acusó para 1974 una inversión de alrrededor de 20 millones de dólares, cifra que se ha incrementado al orden de los 60 millones para 1975.

El stock de estos materiales depositados en los almacenes de la empresa, al 31 de diciembre de los años 1973-74-75 se ha valorizado con los saldos que se muestran en la Tabla 1.1. 1/

TABLA 1.1

(Miles de dólares)

AÑO	SALDO	REDUCCION 5%	AHORRO
1973	17.719	886	266
1974	23.627	1.181	354
1975	32.621	1.631	489

Naturalmente que para un análisis más sereno del problema, hubiese sido conveniente contar con cifras valorizadas del consumo de estos materiales, sin embargo, dado que no se cuenta con este tipo de información a nivel global, no se puede hacer sino un breve comentario al respecto.

En la Tabla 1.1, podemos ver que si consideramos una reducción de solamente el 5% sobre el saldo de los materiales depositados en almacen a fines de gestión, se podía liberar un capital sin movimiento de alrrededor de un millon de dólares.

1/ Fuente: Balance General al 31-12-73-74-75, Tomo I.

Si bien aún no se han hecho estudios completos sobre la tasa de almacenaje, se puede estimar que ésta oscila entre el 30 y 45% 1/, lo que indica que un material que permanece, por ejemplo, tres años sin movimiento, duplica aproximadamente, su costo por este concepto.

Suponiendo una tasa del 30% sobre el valor reducido (5%) por gastos de posesión (como ser: interés del capital, obsolescencia, inventarios, seguros, depreciaciones, manipuleo y otros), advertimos un ahorro desde 200 a 500 mil dólares aproximadamente para el período 1973-75.

1... Características y clasificación de materiales

La industria petrolera por su naturaleza extractiva, cuenta en sus almacenes con stocks de materiales de las más diversas clases, cuyo empleo esta destinado a contribuir principalmente a las fases de exploración, explotación e industrialización de los hidrocarburos.

Debido a las características más o menos homogéneas que presentan estos materiales se pueden clasificar en los siguientes rubros:

Clase 1. Material de perforación y producción
Clase 2. Material de refinación
Clase 3. Accesorios y repuestos para vehículos
Clase 5. Material de escritorio
Clase 6. Materiales varios en general

Según se ve las clases 1 y 2 constituyen el material petrolero propiamente dicho, sin embargo el resto de los materiales, si bien no tiene ese carácter, representan valores de mucha importancia económica, como puede apreciarse por los datos de la Tabla 1.2., donde se ha incluido en la primera columna el número

---

1/ Boletín Técnico de ARPEL I (3) octubre 1972.

de la clase de material y en cada una de las restantes el saldo a fines de cada año y su correspondiente composición porcentual.

TABLA 1.2. 2/
(Miles de dólares)

CLASE	1973	%	1974	%	1975	%
1	6.191	34.9	7.392	31.3	8.591	26.3
2	1.795	10.1	1.491	6.3	2.483	7.6
3	790	4.5	1.365	5.8	1.339	4.1
6	8.094	45.7	11.886	50.3	19.041	58.4
Otros 1/	848	4.8	1.493	6.3	1.167	3.6
TOTAL	17.718	100.	23.627	100.0	32.6[illegible]	100.0

La clase 6 representa aproximadamente el 50% del valor total de los materiales, por que en ella estan contemplados la gama de artículos que no estan tipificados bajo las otras clases, lo que explica por que su monto es tan elevado.

1.3. La importancia de un adecuado control de materiales

Es importante que para la administración de materiales, se adecuen controles acordes con la relevancia que tienen cada uno de los items que participan en la gestion empresarial.

En primer lugar mencionaremos el sistema clásico del control uniforme, que se dedica al análisis de todos y cada uno de los artículos que forman parte del stock almacenado. El segundo sistema esta relacionado con el método del control selectivo del stock, basado en un análisis económico del consumo valorizado de los materiales.

1/ Incluye existencias de pulpería, material de escritorio (clase 5) y otros materiales.

2/ FUENTE: Balance General al 31-12-73-74-75, Tomo I.

1.3.1. El control uniforme de materiales

Este sistema de control trata a cada item con la misma dedicación y esfuerzo, es decir, controla con la misma frecuencia tanto a los items de alto valor y alto consumo, como aquellos de poca significación económica. En este caso a cada uno se les toma el mismo número de inventarios al año y todos estan por igual sometidos a los mismos controles físico contables.

Con este sistema del 70 al 90% del esfuerzo de administración es gastado en el 10% del valor de los materiales, y solo del 10 al 30% del esfuerzo estaría dedicado al control del 90% del valor total de los items 1/.

1.3.2. El control selectivo de materiales

Generalmente los items de gran valor estan constituidos por una parte relativamente pequeña de items respecto del conjunto total y viceversa, la mayor parte de los items tienen poca significación económica.

De acuerdo con la Tabla 1.2., obviamente, los materiales de las clases 1 y 2 deben merecer el máximo control por que tienen la mayor representación dentro el proceso productivo de la industria petrolera. La clase 6, como se indicó, incluye todo lo que no está en las otras clases, por lo que es necesario hacer un desgloce de los items, a fin de adoptar el control más conveniente.

Teóricamente estos conceptos pueden apreciarse en el diagráma de la Fig. 1.1., donde se ha clasificado la inversión en materiales en tres clases A, B y C, que pueden servir de base al grado de análisis y la sofisticación de los métodos de control, que deben guardar relación con el monto invertido en el stock total de un determinado item.

1/ Boletín Técnico de ARPEL, I (2) Agosto 1972

Según esta clasificación solo un 10% de los items tiene una inversión de alrrededor del 75% del valor total, clase A., en tanto que el 25% de artículos ocasiona un 20% de la inversión, clase B, y el 65% de los artículos ocasiona el 5% de la inversión, clase C. Obviamente la clase A debe merecer el máximo control de inventarios y la clase C una atención rutinaria solamente.

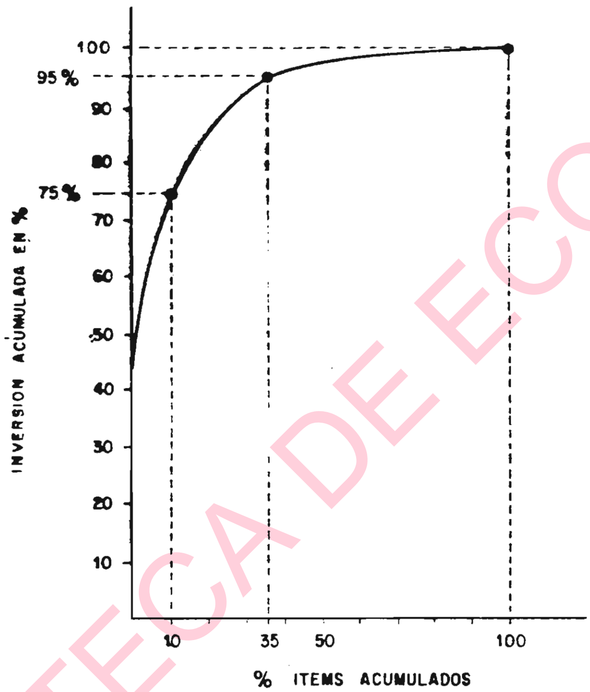

Fig. 1.1. Ojiva de Pareto para el control selectivo del Stock. 1/

1.4. <u>La necesidad de definir una política económica de control de stocks</u>

Por el análisis precedente se puede ver que las inversiones en materiales y equipos en la industria petrolera, representan valores de suma importancia, puesto que es necesario disponer de inmovilizaciones de capital bajo la forma de stocks, inmovilizaciones que siendo generalmente onerosas y las más de las veces muy embarazosas deben ser reducidas a un nivel óptimo.

1/ Wilfredo Pareto, S. XIX al estudiar la concentración de los ingresos en Italia, su país natal, encontró que un porcentaje muy grande de los ingresos nacionales se encontraba en manos de solo el 10% de la población. De ahí nació el concepto de la Ojiva de Pareto. "pocos items-mucho valor" y viceversa.

Generalmente las operaciones derivadas del control de stocks, tales como el almacenaje y los registros de los movimientos, estan considerados como faenas sin importancia a cuyo cargo se deja a escribientes dirigidos por un jefe de almacenes. Este es un concepto totalmente deformante de los reales valores que tiene la gestión de stocks, que siendo un servicio de carácter específicamente interno, se tiene, por este hecho, la tendencia a aislarlo e ignorarlo.

En suma, la incidencia que tienen estos valores dentro de la gestión empresarial y en definitiva sobre los costos de producción, exige la necesidad de planificar una política económica de stocks, integral, bien definida y estable, para su compra, manejo y control aplicando métodos científicos de carácter selectivo en función de la importancia de las inversiones en materiales.

Esta es la idea proposicional básica que se postula en los próximos capítulos, a fin de ayudar a los ejecutivos en la toma de mejores decisiones en la administración de inventarios.

CAPITULO II

CONCEPTOS GENERALES

2.1. La Investigación Operativa

A través de una combinación metódica de hombres y máquinas, existió la tendencia, cada vez más frecuente, de las empresas industriales a incursionar en la mecanización de los procesos de producción, hecho que dió lugar a un crecimiento tan acelerado de las empresas, que resultó físicamente imposible para una sola persona ejercer el control de toda una organización.

Así fue como se crearon nuevas funciones - inspector de producción, administrador de materiales, administrador de personal, - cada una con su propio campo de acción.

Más tarde se empezó a observar que muchos de los problemas que las empresas habían creado debido a su desarrollo acelerado, no podían aislarse unos de otros.

De esta manera existió la necesidad de incorporar en la gestión empresarial, algún sistema que permitiera enfrentar aquellos problemas con algún criterio científico, lo que condujo al nacimiento del concepto de Investigación Operativa (I.O.) bajo cuya disciplina, pueden tratarse, hoy en día, numerosos problemas de administración.

2.2. Clasificación de algunos problemas de I.O.

Aunque es imposible proponer una clasificación rígida para estudiar los problemas de la Investigación Operativa, mencionaremos algunos de los más importantes, especialmente aquellos relacionados con el problema de los stocks.

2.2.1. Problemas de capital de trabajo

Los problemas de control de stocks estan asociados con los problemas de capital de trabajo, por que los stocks de materiales para consumo o venta, llevan implícitamente un valor monetario inmovilizado de capital en la empresa. Así podemos ver que cuanto menor es el nivel del stock almacenado, mayor será el capital disponible para otras operaciones.

2.2.2. Los procesos de espera

Lo que interesa en estos procesos es el equilibrio óptimo entre los servicios proporcionados y los tiempos de espera para obtenerlos.

Como ejemplo podemos citar, las colas o líneas de espera de automovilistas en las gasolineras de una urbe importante; la provisión de vehículos de transporte público para atender el servicio de una ruta determinada y las colas en los bancos y supermercados.

2.2.3. Los procesos de reposición

En estos problemas figuran aquellos en los que se debe escoger, entre reemplazar una importante pieza de equipo de capital o repararla con la esperanza de que dure un tiempo tal que permita aplazar el reemplazo hasta una ocasión más propicia.

Esta situación ocurre en trabajos en los que la reposición o las tareas de mantenimiento se realizan, por ejemplo, durante las vacaciones anuales, a objeto de evitar las pérdidas que ocasionaría cerrar la planta en otras épocas del año.

2.3. Elementos básicos en los problemas de inventarios

Definiremos algunos conceptos importantes que nos servirán más adelante.

2.3.1. La demanda de un item a almacenes

En toda actividad empresarial existen fases productivas que demandan el suministro de un artículo determinado en forma generalmente irregular.

Es sabido que cuando los usuarios demandan estos artículos a los almacenes, tienen que esperar un lapso de tiempo desde la emisión del pedido hasta la recepción del mismo, ya se trate de una empresa que compra materiales para su uso y consumo o una que fabrica artículos terminados para la venta.

Como la demanda y el suministro son generalmente variables e independientes de un día a otro (siempre que las demandas sean diarias) se ha establecido la existencia de un almacen com stock de materiales, y el problema consiste en determinar por qué cantidad y con qué frecuencia debemos cursar un pedido para aprovisionar nuestro almacen, de tal manera que el costo total esperado sea mínimo.

2.3.2. Estructura de los costos

Los elementos más importantes en la administración económica de stocks, constituyen los costos asociados con una determinada política de inventarios.

Por una parte existen ciertos costos relacionados con el hecho de mantener artículos en existencia en los almacenes, es decir, el dinero que se gasta en la manipulación, en inventarios, seguros, depreciaciones y el interés del capital inmovilizado.

Por otra parte hay que considerar los costos de emisión de pedido, que estan asociados al hecho de efectuar pedidos de reaprovisionamiento de materiales.

Existe también un costo de ruptura o escasez, que se relaciona con la falta de disponibilidad oportuna del material, para satisfacer las demandas, lo cual redunda significativamente en las economías de la empresa.

Las tres categorías del costo son igualmente importantes, ya que si se considerara solamente los costos de emisión, convendría más a la empresa, hacer solo unas cuantas adquisiciones al año, manteniendo un stock elevado.

Y por el contrario si se valoran solo los costos implicados con el mantenimiento de existencias, convendría aumentar la frecuencia de las adquisiciones para no mantener artículos en stock.

Indudablemente hay un punto óptimo que contempla matemáticamente estos factores del costo, es decir, una cantidad pedida/comprada que minimiza los costos totales.

2. .3. Representación gráfica de un problema de inventarios

La evolución normal de un stock, puede ser representado en un gráfico como el de la Fig. 2.1., donde se aprecian las variaciones de la demanda mediante escalones a lo largo de un tiempo t.

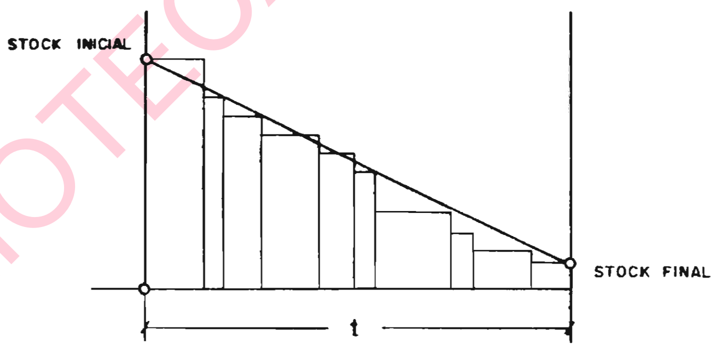

Fig. 2.1. Diagrama en un caso de Inventario

Para simplificar, los escalones de esta figura pueden reemplazarse mediante una recta, que proporcionará una descripción analítica más adecuada de la estructura de la demanda.

2.3.4. Los niveles de stock

El stock es el conjunto de materiales en espera de su utilización más o menos próxima que permita asegurar en las mejores condiciones la buena marcha de la empresa, con relación al ejercicio de sus funciones de producción y de comercialización.

Cuando este conjunto de materiales se agota, debe ser reaprovisionado o renovado. El reaprovisionamiento puede ser, contínuo periódico o realizarse a diferentes intervalos de tiempo.

Según el tipo de organización, existen diferentes clases de productos que se mantienen en stock. Así tenemos las materias primas, los materiales de consumo, productos semi-elaborados, productos terminados, embalajes, etc.

En toda actividad dirigida a la gestión económica de stocks, resulta particularmente importante conocer con frecuencia el nivel del stock que evoluciona entre dos límites extremos: un máximo y un mínimo.

Más allá del máximo habrá sobre-almacenamiento, con inmovilizaciones financieras que no reportan contrapartida útil.

Por debajo del nivel mínimo, se corre el riesgo de ruptura de stock, que conduce a un paro de la producción con el consiguiente daño económico para la empresa por la falta de disponibilidad oportuna.

Resulta pues, evidente que la administración de stocks es una actividad de carácter específicamente interno, cuya valoración permanece exclusivamente psicológica.

C A P I T U L O   III

LAS ECUACIONES ECONOMICAS DE COMPRA 1/

3.1. Consideraciones generales

Las ecuaciones contenidas en este capítulo se refieren a ecuaciones de compra con costos proporcionales, es decir, el costo de emisión es inversamente proporcional a la cantidad pedida, en tanto que el costo de almacenamiento es directamente proporcional a la cantidad pedida, como se verá mas adelante.

El problema a tratar implica la adopción de decisiones relativas a los niveles de inventario, y los costos que representan. Como estos niveles de inventario representan una considerable inversión de capital, el problema de la investigación es encontrar la manera de hacer óptimas tales decisiones.

Se desarrollan algunos modelos sencillos bajo una descripción matemática que constituye una base para la toma de decisiones, sacrificando la generalidad a cambio de dar al análisis un carácter práctico que resulte de fácil aplicación a los interesados en el asunto.

Como estos modelos conducen a la determinación de una cantidad pedida que minimiza los costos totales, se denominan modelos de la "cantidad económica pedida".

3.2. La ecuación económica de compra sin costo de ruptura

Supongamos que para las fases de prospección, perforación y producción, dentro los programas proyectados por Y.P.F.B., para una determinada política, los suministros de ciertas piezas de materiales a los centros de trabajo, como ser estructuras o campos petroleros, se tengan que cumplir de tal manera que no se puede admitir ningún retardo en las entregas a fin de no ocasionar perjuicios que darian lugar a pérdidas económicas.

1/ Los razonamientos matemáticos han sido extractados principalmente del libro de A. Kaufmann, Métodos y Modelos de la Investigación de Operaciones, Edit. CECSA, México.

Para esta política lo que se quiere determinar son los valores óptimos tales como cantidad a pedir a los proveedores, tiempo o frecuencia de los pedidos, y los costos asociados con estos valores, a fin de no mantener stocks inadecuados en los almacenes de la empresa.

Con estas consideraciones nuestro modelo se basará en los siguientes supuestos:

i) la demanda de piezas es constante

ii) el reaprovisionamiento es instantaneo

iii) los coeficientes del costo son constantes

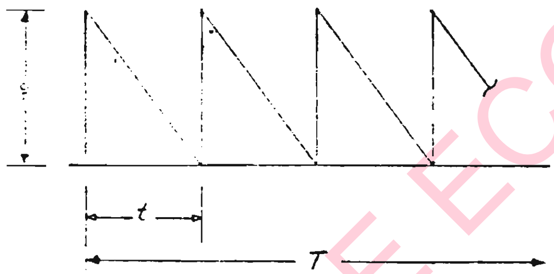

Fig. 3.1.

La representación gráfica de lo que hemos descrito esta dada en la Fig. 3.1., donde se ha representado el nivel máximo del inventario igual a q, el tiempo t entre pedidos o tiempo de un período, y el intervalo de tiempo T donde se establece una cierta política.

En la Fig. 3.1. se observa que el nivel diario del inventario es una función en dientes de sierra. Para dar mayor claridad al análisis, separaremos uno de estos dientes en forma ampliada tal como la que se muestra en la Fig. 3.2.

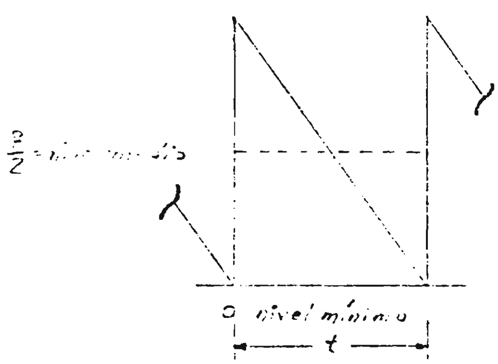

Fig. 3.2.

Como q es el nivel máximo del inventario; t el intervalo de tiempo entre pedidos que se inicia con q unidades en stock y termina en cero, entonces el nivel medio del inventario durante el período t es q/2: el costo de almacenamiento durante este intervalo es

$$\frac{1}{2}\, q\, c_r\, t$$

y el costo total para un lote o serie es igual a

$$\frac{1}{2}\, q\, c_s\, t + c_1$$

donde c_s: costo de almacenamiento y c_1: costo de emisión.

Si q es a su vez el tamaño de la serie que dura t y Q la necesidad total para el período planificado T, tenemos:

$$\frac{T}{t} = r^{+} = \frac{Q}{q}$$

que es el número de series o lotes en el tiempo T, de donde las siguientes relaciones son válidas:

$$t = \frac{T}{Q}\, q \quad , \qquad q = \frac{Q}{T}\, t$$

Luego el costo total o la esperanza matemática del costo total en el intervalo T es:

$$C = \left(c_1 + \frac{q}{2}\, t\, c_s \right) r^{+}$$

$$C = \left(c_1 + \frac{q}{2}\, t\, c_s \right) \frac{Q}{q}$$

Sustituyendo t por su equivalente antes dado y simplificando, tenemos,

$$C(q) = \frac{Q\, c1}{q} + \frac{T\, c_s}{2}\, q \qquad (3.1.)$$

Hemos obtenido el costo total en función de la variable q y las constantes Q, T, c_1 y c_s. Esta es la fórmula de la ecuación económica de compra sin costo de ruptura.

3.2.1. Representación gráfica del costo total

En la ecuación (3.1.) los términos del segundo miembro representan los costos de emisión y los costos de almacenamiento, respectivamente.

Es de advertir que el primer término disminuye al aumentar el tamño de la serie y el segundo aumenta, es decir, el primer término es inversamente proporcional a q, en tanto que el segundo es directamente proporcional a q,

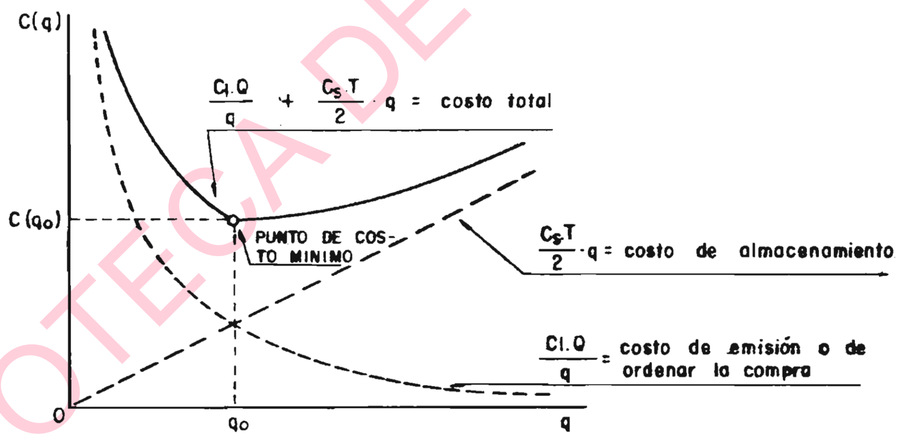

Fig. 3.3. Composicion de los costos para q_o sin ruptura.

Si los componentes del costo de la ecuación (3.1.) se los representa gráficamente como en la Fig. 3.3., se obtiene un punto óptimo de costo mínimo.

3.2.2. Solución analítica del costo total

La solución del problema consiste en encontrar el valor de q que haga mínima la suma de estos costos. Un procedimiento analítico consiste en utilizar el cálculo diferencial del análisis matemático.

Si derivamos la ecuación (3.1.) con respecto a q e igualamos luego la derivada a cero, obtenemos

$$\frac{d\,C(q)}{d\,q} = -\frac{c_1\,Q}{q^2} + \frac{c_s\,T}{2} = 0\ , \qquad (3.2.)$$

resolviendo la ecuación para q tenemos

$$q = q_0 = \sqrt{\frac{2\,c_1}{c_s}\,\frac{Q}{T}} \qquad (3.3.)$$

que es la "cantidad económica" buscada que ocasiona un costo mínimo; cualquier otra cantidad pedida ocasiona un costo mayor.

De la ecuación (3.2.) se infiere un balance entre los dos costos: "el mínimo de la función económica para administrar un inventario se presenta cuando el costo de emisión es igual al costo total de almacenamiento".

Utilizando las relaciones de r+ descritas anteriormente podemos obtener el correspondiente óptimo para el intervalo de tiempo t entre pedidos

$$t = t_0 = \sqrt{\frac{2\,c_1}{c_s}\,\frac{T}{Q}} = \frac{T}{Q}\,q\ ; \qquad (3.4.)$$

y el costo mínimo para una cantidad óptima q_0

$$C = C(q_0) = \sqrt{2\,Q\,T\,c_1\,c_s}\ , \qquad (3.5.)$$

ecuación que es equivalente a la (3.1.)

3.2.3. Análisis de sensibilidad

Cuando se determinan las cantidades óptimas de compra, es conveniente analisar las variaciones del costo total $cC(q_o)$, si se ha hecho la elección de un valor en los alrrededores del mínimo de q_o, tal como se muestra en la Fig. 3.4.

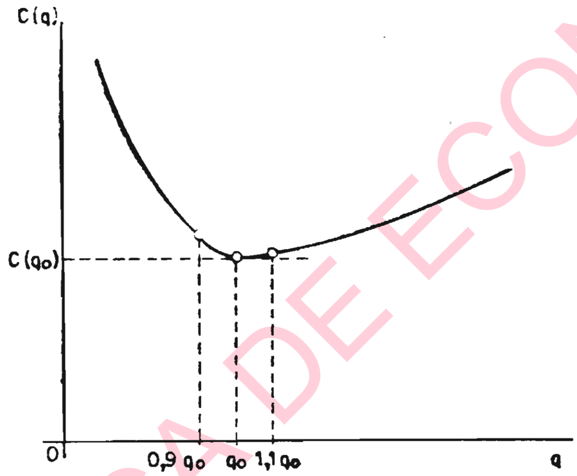

Fig. 3.4. Variaciones de C(qo) para valores vecinos a qo

De la fórmula (3.1.) derivamos la siguiente ecuación:

$$C(q_o \pm 10\% \, q_o) = \frac{Q \, c_1}{(q_o \pm 10\% \, q_o)} + \frac{T \, c_s}{2} (q_o \pm 10\% \, q_o) \qquad (3.6.)$$

que sirve para calcular los costos relativos a las desviaciones $(q_o \pm 10\% \, q_o)$, donde, recordemoslo q_o es la cantidad óptima.

El criterio de sensibilidad muestra las variaciones de $C(q_o)$ cuando se ha producido un cambio alrrededor de $\pm q_o$, es decir, nos permite reconocer si la elección de un valor vecino a q_o implica una gran variación del costo total $C(q_o)$.

Para nuestro caso, hemos elegido, en forma arbitraria, una desviación de $\pm$ 10%, es decir, $q_o - 10\% q_o$ y $q_o + 10\% q_o$, y la media de las variaciones, aplicando el cálculo diferencial, será:

$$d\,C = \frac{C(q_o - 10\% q_o) + C(q_o + 10\% q_o)}{2} - C(q_o)$$

dividiendo entre $C(q_o)$, factorizando y simplificando, se tiene,

$$\frac{d\,C}{C(q_o)} = \frac{1}{2}\left[\frac{C(q_o - 10\% q_o) + C(q_o + 10\% q_o)}{C(q_o)}\right] - 1 \qquad (3.7.)$$

fórmula que sirve para calcular la desviación relativa de los costos.

Con el fin de aclarar estos conceptos propondremos un ejemplo numérico que puede presentarse en la realidad; naturalmente que aquí los valores son hipotéticos.

3.2.4. <u>Ejemplo numérico 1</u>

La demanda de un tipo especial de accesorios de un equipo de perforación para la industria petrolera es de tal magnitud que anualmente se requieren 80.000 unidades.

El costo de almacenamiento por unidad y por día es de \$ 1.50 y el costo de emisión de pedido, es decir, el costo de ordenar una compra, es de \$ 60.000.

No se admiten situaciones en las que se tenga que posponer la entrega de estos accesorios a los usuarios de los trabajos de perforación por falta de stocks en almacenes, es decir, no se permite lo que se llama una ruptura de inventario, que daría lugar a pérdidas económicas a la empresa por la falta de atención oportuna de materiales.

Vamos a calcular las cantidades óptimas por las que se debe ordenar las compras q_o, el calendario de tiempo entre pedidos t_o, y el costo pertinente total esperado mínimo por año.

En este caso: T : 360 días
Q : 80.000 unidades por año
c_1 : \$ 60.000 por c/emisión
c_s : \$ 1.50 por unidad y por día;

sustituyendo estos valores en las ecuaciones (3.3.), (3.4.) y (3.5.) se tiene la solución.

$$q_o = \sqrt{\frac{2 \times 60.000 \times 80.000}{1.50 \times 360}} = 4.216 \text{ unidades Aprox.}$$

$$t_o = \sqrt{\frac{2 \times 60.000 \times 360}{1.50 \times 80.000}} = \frac{360 \times 4216}{80.000} = 19 \text{ días Aprox.}$$

$$C(q_o) = \sqrt{2 \times 80.000 \times 360 \times 60000 \times 1.50} = 2.276.840 \text{ \$ por año}$$

De manera que es necesario ordenar las compras de materiales, para mantener un stock adecuado en almacenes por lotes o series de 4.216 unidades cada lote y cada 19 días, con un costo total por año de \$ 2.276.840.

Como $r^+ = \frac{Q}{q_o} = 18,97$, es el número de pedidos por año, advirtase que el costo total sería mucho mayor si las compras se harían en una, dos, tres o mejor hasta $r^+ < 18,97$ partidas por año.

Con estas cantidades óptimas, el gerente de materiales cuenta ya con el herramental necesario para tomar decisiones sobre su aprovisionamiento.

Con los anteriores valores estamos en condiciones de efectuar un análisis de sensibilidad, aplicando las fórmulas (3.6.) y (3.7.). (ver anexo B) lo que nos da $\frac{dC}{d(q_o)} = 0.0051$, es decir que a una variación del 10% del valor de q_o, existe una modificación del costo total del 0.51%, en consecuencia, la sensibilidad es muy débil.

3.3. La ecuación económica de compra con costo de ruptura

Este modelo tiene las mismas suposiciones del modelo descrito en el numeral 3.2., con la única diferencia de que ahora se admiten inexistencias que dan lugar a un costo de ruptura de inventario, es decir, el stock mantenido en los almacenes es insuficiente y no responde a la demanda de los usuarios.

La Fig. 3.5. ilustra esquemáticamente la situación de un inventario con estas características, donde s es el nivel máximo de almacenamiento al principio de cada intervalo de tiempo t.

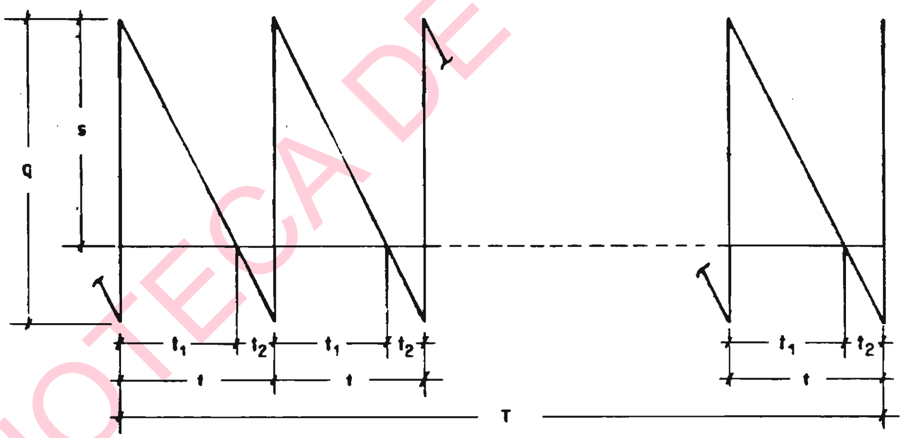

Fig. 3.5

En el transcurso de un lapso t_1 de cada intervalo t, el nivel diario del inventario es suficiente para satisfacer la demanda de los usuarios de materiales. En cambio no ocurre lo mismo durante el lapso t_2, donde se ha producido una escasez de materiales, que es satisfecha recién a partir del instante en que se reciben en almacenes los lotes siguientes.

En otros términos, si al final de cada período t se emite un pedido por un lote q, éste esta destinado, por una parte a satisfacer la demanda no satisfecha $q - s$ durante el lapso t_2, y por otra parte a reconstituir el nivel del inventario s.

Mediante relaciones geométricas a partir de la Fig. 3.5. podemos ver que,

$$t_1 = \frac{s}{q} t \quad ; \qquad t_2 = \frac{q - s}{q} t \quad ;$$

el número medio de unidades en almacen durante t_1 es $\frac{1}{2} s$; como c_s es el costo de almacenamiento de un lote por unidad de tiempo, tenemos que

$$c_s \cdot \frac{s}{2} t_1 \quad \text{es el costo medio de almacenamiento}$$

durante t_1.

De igual manera el número medio de unidades de inexistencia durante el lapso t_2 es $\frac{1}{2}(q - s)$; si c_p es el costo de inexistencias, entonces,

$$c_p \cdot \frac{q - s}{2} t_2 \quad \text{es el costo medio de inexistencias}$$

durante t_2.

Si recordamos, además, que el costo de emisión de una serie o lote es c_1, se tiene que el costo total esperado durante T, es igual a la suma de los costos anteriores,

$$C(q,s) = \left[c_s \frac{s}{2} t_1 + c_p \frac{q - s}{2} t_2 + c_1 \right] \frac{Q}{q} \qquad (3.8.)$$

para un número $r = \frac{Q}{q}$ de lotes.

Reemplazando en (3.8.) las relaciones

$t_1 = \frac{s}{q}\, t$; $t_2 = \frac{q - s}{q}\, t$ y $t = \frac{T}{Q}\, q$, obtenemos

$$C(q,s) = \frac{s^2\, T\, c_s}{2q} + \frac{(q - s)^2\, T\, c_p}{2q} + \frac{Q\, c_1}{q} \qquad (3.9.)$$

Esta es la fórmula de la ecuación económica de compra con costo de ruptura, en función de las variables q y s y las constantes Q, T, c_1, c_s y c_p.

3.3.1. Solución analítica del costo total

Como en la ecuación (3.9) existen dos variables, es necesario obtener las derivadas parciales con respecto a cada una de es - tas, e igualarlas a cero para obtener los valores óptimos de q y s .

Derivando con respecto a q y s , obtenemos:

$$\frac{\partial C(q,s)}{\partial q} = -\frac{2\, s^2\, T\, c_s}{4\, q^2} + \frac{4\, q\, T\, c_p(q - s) - 2\, T\, c_p(q - s)^2}{4\, q^2} - \frac{Q\, c_1}{q^2} = 0$$

$$\frac{\partial C(q,s)}{\partial s} = \frac{s\, T\, c_s}{q} - \frac{T\, c_p\, (q - s)}{q} = 0$$

Simplificando estas derivadas parciales tenemos,

$$q^2\, c_p - (\, c_s + c_p\,)\, s^2 = \frac{2\, Q\, c_1}{T} \qquad (3.10.)$$

$$s = q\, \frac{c_p}{c_s + c_p} \qquad (3.11.)$$

Reemplazando (3.11.) en(3.10.), encontramos,

$$q = q_o = \sqrt{\frac{2\ Q\ c_1}{T\ c_s}}\ \sqrt{\frac{c_s + c_p}{c_p}} \qquad (3.12.)$$

que es la fórmula de la cantidad económica buscada. El valor de s puede también escribirse de la siguiente manera,

$$s = s_o = \sqrt{\frac{2\ Q\ c_1}{T\ c_s}}\ \sqrt{\frac{c_p}{c_s + c_p}} = q_o \frac{c_p}{c_s - c_p} \qquad (3.13.)$$

donde la cantidad $a = \dfrac{c_p}{c_s + c_p}$ es la tasa de ruptura, importante en la administración de un inventario donde se admite un agotamiento de las existencias de materiales en los almacenes de una empresa, durante un lapso de tiempo dado.

Con las cantidades económicas s_o y q_o se debe verificar las siguientes igualdades:

$$\frac{s_o}{q_o} = a = \frac{c_p}{c_s + c_p} \qquad y \qquad 1 - \frac{s}{q} = 1 - a$$

es decir que si damos una tasa de ruptura igual a <u>a</u> , estamos aceptando que haya $1 - a$ veces, en porcentaje, una ruptura del inventario en el lapso t, considerando que la tasa de ruptura varia entre $0 \leqslant a \leqslant 1$, lo que nos indica que existe una asociación de <u>a</u> a la probabilidad.

Recordando que $t = t_o = \frac{T}{Q} q_o$ y reemplazando (3.12.) en este valor, encontramos el tiempo óptimo t_o

$$t = t_o = \sqrt{\frac{2\ T\ c_1}{Q\ c_s}}\ \sqrt{\frac{c_s + c_p}{c_p}} \qquad (3.14.)$$

Para encontrar $C(q,s)$ utilizamos la relación $\frac{s_o}{q_o} = \frac{c_p}{c_s + c_p}$ reemplazandola en (3.13.) y (3.14.) y luego en (3.9.) para obtener,

$$C_o = C(q,s) = \sqrt{2\ Q\ T\ c_1\ c_s}\ \sqrt{\frac{c_p}{c_s + c_p}} \qquad (3.15.)$$

3.3.2. Ejemplo numérico 2

Podemos suponer la misma situación del Ejemplo 1 del numeral 3.2., con la diferencia de que ahora tenemos un costo de inexistencias de $c_p = 10$ \$ por unidad y por día. Reemplazando datos en las ecuaciones (3.12.) a (3.15.) obtenemos los resultados correspondientes.

$$q_o = \sqrt{\frac{2 \times 80.000 \times 60.000}{360 \times 1.50}}\ \sqrt{\frac{1.50 + 10}{10}} = 4.512 \text{ unidades}$$

$$s_o = \sqrt{\frac{2 \times 80.000 \times 60.000}{360 \times 1.50}}\ \sqrt{\frac{10}{1.50 + 10}} = 3.921 \text{ unidades}$$

$$t_o = \sqrt{\frac{2 \times 360 \times 60.000}{80.000 \times 1.50}}\ \sqrt{\frac{1.50 + 10}{10}} = 20,3 \text{ días}$$

$$C_o = \sqrt{2 \times 80.000 \times 360 \times 60.000 \times 1.50}\ \sqrt{\frac{10}{1.50 + 10}} = 2.117.461 \text{ \$/año}$$

Como puede apreciarse utilizando una política óptima, el número esperado de inexistencias al final del período será

$$4.512 - 3.921 = 591 \text{ unidades}$$

y el número de pedidos por año $r^{+} = \frac{Q}{q_o} = 17.7$

3.3.3. Comparación de costos

Comparando los ejemplos 1 y 2 podemos ver que, el costo total aplicando la ecuación económica de compra con costos de ruptura, es menor que el costo total aplicando la ecuación económica de compra sin costo de ruptura. Es decir, comparando las ecuaciones de costo (3.5.) y (3.15), tenemos,

$$\sqrt{2.Q.T.c_1.c_s}\sqrt{\frac{c_p}{c_s + c_p}} < \sqrt{2.Q.T.c_1.c_s}$$

lo que puede demostrarse haciendo que c_p (costo de ruptura) se haga infinitamente grande en las ecuaciones (3.12), (3.14) y (3.15) ya que por otra parte la ecuación (3.5) no es más que un caso particular de la (3.15).

C A P I T U L O IV

LAS ECUACIONES ECONOMICAS CUANDO LA DEMANDA ES ALEATORIA

4.1. Introducción

Las situaciones prácticas en las que se conoce con precisión la demanda futura son bastante raras. En cambio cuando intervienen las probabilidades sobre la demanda de items, se supone que se conoce la distribución de probabilidades de dicha demanda futura, más que el valor exacto de la demanda misma.

Cuando se dice que la demanda es aleatoria, quiere significarse que la demanda es una cantidad variable cuyo valor está determinado por el resultado de un experimento aleatorio.

4.2. La ecuación económica con excedentes y ruptura de stock

En este modelo existe la situación de intentar equilibrar el costo de tener un exceso de piezas que no se usan, frente al costo de no disponer de piezas cuando son necesarias.

Consideraremos los siguientes supuestos:

i) la demanda de piezas es aleatoria y se supone conocida la distribución de probabilidad $p(r)$ de la demanda.

ii) Existe una pérdida c_1 sobre excedentes, es decir, si estos excedentes se venden, dan lugar a una pérdida unitaria.

iii) Se supone un costo suplementario de ruptura c_2, esto es, hay que hacer una compra especial de las piezas , a un costo adicional.

iv) El costo de almacenamiento es despreciable frente a las pérdidas sobre excedentes y al costo suplementario de ruptura.

Considerando una existencia inicial de s unidades en stock, de las cuales se utilizan r unidades, son posibles dos situaciones mutuamente excluyentes.

i) Si $r \leq s$, es decir, el número de unidades usadas, es menor o igual al número de unidades en stock, entonces, el nivel de inventario subre la demanda y existe un excedente de $(s - r)$ que origina una pérdida unitaria c_1.

ii) Si $s < r$, o sea, el número de unidades necesarias es mayor que el de unidades mantenidas en stock, entonces existe una ruptura de inventario de $(r-s)$ unidades, y es necesario hacer una compra adicional de piezas con un costo suplementario de c_2.

No se sabe anticipadamente, cual será el valor que tomará r , pero suponemos que cada uno de sus valores tiene su correspondiente función de probabilidad $p(r)$.

De esta manera los costos esperados, correspondientes a las dos situaciones dadas, para un determinado valor de r , serán:

$$p(r)\,(s-r)\,c_1 \qquad \text{si} \quad r \leq s$$

$$p(r)\,(r-s)\,c_2 \qquad \text{si} \quad r > s$$

$$0 \qquad \text{si} \quad r = s$$

Y el costo total esperado, será igual a la sumatoria de los gastos asociados a cada posible valor de r .

$$C(s) = c_1 \sum_{r=o}^{s} (s-r)\ p(r) \ + \ c_2 \sum_{r=s+1}^{\infty} (r-s)\ p(r) \qquad (4.1.)$$

4.2.1. Solución analítica del costo total

Con la fórmula (4.1.) conocida también como la esperanza matemática de los gastos, determinaremos el valor de s que hace mínimo el costo total esperado.

Hacemos la sustitución de s por $s+1$

$$C(s+1) = c_1 \sum_{r=o}^{s+1} (s+1-r)p(r) + c_2 \sum_{r=s+2}^{\infty} (r-s-1)p(r)$$

$$= c_1 \sum_{r=o}^{s} (s+1-r)p(r) + c_1 \left[(s+1)-(s+1)\right] p(s+1) +$$

$$+ c_2 \sum_{r=s+1}^{\infty} (r-s-1)p(r) - c_2 \left[(s+1)-(s+1)\right] p(s+1)$$

$$= c_1 \sum_{r=o}^{s} (s-r)p(r) + c_1 \sum_{r=o}^{s} p(r) + c_2 \sum_{r=s+1}^{\infty} (r-s)p(r) - c_2 \sum_{r=s+1}^{\infty} p(r)$$

pero sabemos que

$$\sum_{r=o}^{s} p(r) + \sum_{r=s+1}^{\infty} p(r) = 1$$

y
$$\sum_{r=s+1}^{\infty} p(r) = 1 - \sum_{r=o}^{s} p(r)$$

luego

$$= \underbrace{c_1 \sum_{r=o}^{s} (s-r)p(r) + c_2 \sum_{r=s+1}^{\infty} (r-s)p(r)}_{C(s)} + c_1 \sum_{r=o}^{s} p(r) - c_2 + c_2 \sum_{r=o}^{s} p(r)$$

$$C(s+1) = C(s) + \sum_{r=o}^{s} p(r)(c_1+c_2) - c_2$$

como $\sum_{r=o}^{s} p(r) = p(r \leqslant s)$ es la probabilidad de una deman da inferior o igual a s, tenemos

$$C(s+1) = C(s) + (c_1+c_2)\, p(r \leqslant s) - c_2 \quad \text{y} \qquad (4.2.)$$

$$C(s-1) = C(s) - (c_1+c_2)\, p(r \leqslant s) + c_2 \qquad (4.3.)$$

Si suponemos que s_o es un número tal que se cumple

$$C(s_o) < C(s_o-1) \quad ; \quad C(s_o) < C(s_o+1)$$

y
$$C(s_o-1) > C(s_o) < C(s_o+1)$$

entonces, s_o es el inventario que hace mínimo el costo total $C(s)$

Si en las ecuaciones (4.2.) y (4.3.) hacemos que

$$\begin{aligned} (c_1+c_2)\ p(r\leq s_o) - c_2 > 0 \\ -(c_1+c_2)\ p(r\leq s_o-1) + c_2 > 0 \end{aligned} \qquad (4.4.)$$

entonces

$$\begin{aligned} C(s+1) - C(s) > 0 \\ C(s-1) - C(s) > 0 \end{aligned} \qquad (4.5.)$$

finalmente de (4.4.) obtenemos

$$p(r\leq s_o-1) < \frac{c_2}{c_1+c_2} < p(r\leq s_o) \qquad (4.6.)$$

donde $a = \dfrac{c_2}{c_1+c_2}$ es la tasa de ruptura definida entre ambos límites de la distribución acumulada de la demanda. $p(r\leq s)$ que nos sirve para determinar el valor de s_o que hace mínimo el costo $C(s_o)$.

Ahora si $p(r\leq s_o-1) < a \doteq p(r\leq s_o)$ entonces la ecuación (4.2.) se transforma en $C(s_o+1) = C(s_o)$ y el óptimo es s_o o s_o+1 análogamente si $p(r\leq s_o-1) = a < p(r\leq s_o)$ entonces la ecuación (4.3.) se transforma en $C(s_o-1) = C(s_o)$ y el óptimo es s_o o s_o-1

4.2.2. Ejemplo numérico 1

Supongamos que se ha registrado, diariamente, las cantidades demandadas por los ingenieros de producción, de cierta pieza accesoria de alto valor que pertenece a un determinado equipo, utilizado en la extracción de petróleo. Se supone, ademas, que no es rentable solicitar este accesorio separado del equipo. Pues cada pieza esta fabricada para este equipo y no sirve para otro.

Se desea saber cuantas piezas de repuesto deberían pedirse cuando se confecciona la orden de compra para este equipo.

La muestra tomada para 30 días es la siguiente:

6	5	4	3	3	2	4	3	5	7
5	3	4	7	5	4	1	3	7	8
2	4	6	5	6	1	4	0	4	6

naturalmente que en la práctica, habrá que considerar una muestra mayor a fin de lograr un conjunto más representativo de la realidad.

El costo de no usar una pieza del stock, cuando $r \leq s$ es igual a $c_1 = 150$ \$, el costo de escasez $c_2 = 500$ \$ cuando $s < r$ y el costo de almacenamiento es insignificante.

Después de efectuados algunos cálculos auxiliares, la distribución se presenta en la Table 4.1., cuyos valores acumulados han sido representados en la Fig. 4.1.

Tabla 4.1.

s	r	p(r)	p(r ≤ s)
0	0	0.033	0.033
1	1	0.067	0.100
2	2	0.067	0.167
3	3	0.167	0.334
4	4	0.233	0.567
5	5	0.167	0.734
6	6	0.133	0.867
7	7	0.100	0.967
8	8	0.033	1.000
>8	>8	0.000	1.000

Un ligero análisis de la figura 4.1. nos demuestra que, si en el futuro se repiten las mismas frecuencias que las del pasado, se tendrá una probabilidad de aproximadamente el 10% de utilizar cuando más 1 pieza de accesorio del equipo; 57% de utilizar cuando más 4 piezas; 87% de usar a lo más 6 piezas. Se verá luego que sólo para ésta última cantidad se espera que el costo sea el más bajo de todos.

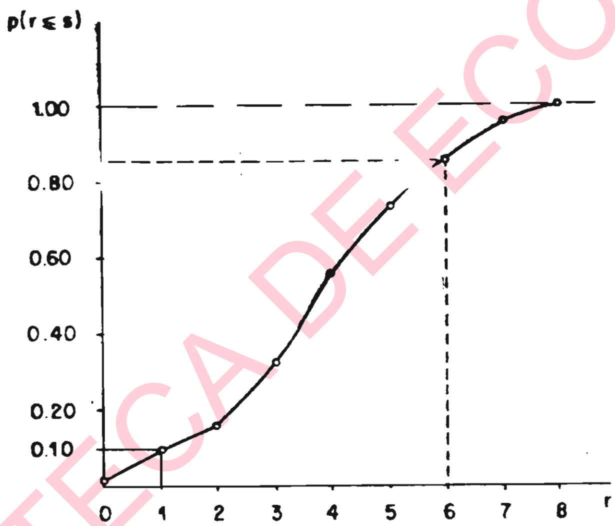

Fig. 4.1. Distribucion de probabilidad acumulada de una demanda r

Como la comparación de la tasa de ruptura a y la distribución acumulada $p(r \leqslant s)$ nos proporcionan una pauta para determinar la cantidad s_o y consecuentemente el mínimo de la función $C(s_o)$, calculamos

$$a = \frac{c_2}{c_1+c_2} = \frac{500}{150+500} = 0.769$$

Aplicando la Tabla 4.1. y la desigualdad (4.6.), este valor esta definido entre los siguientes límites,

$$p(r \leq s_o - 1) < a < p(r \leq s_o)$$

$$p(r \leq 5) < 0{,}769 < p(r \leq 6)$$

$$0{,}734 < 0{,}769 < 0{,}867$$

luego el número de piezas accesorias que debe pedirse con cada equipo para stock de almacen es $s_o = 6$, cuyo costo, aplicando la ecuación 4.1. es mínimo e igual a

$$C(6) = 150 \sum_{r=0}^{6} (6-r)p(r) + 500 \sum_{r=7}^{\infty} (r-6)p(r) = 373.25 \ \$$$

Sin aplicar la tasa de ruptura a , puede determinarse el s_o mediante el cálculo numérico, procesando $C(s)$ para valores de $s = 0, 1, 2, \ldots\ldots, 8$, con un $c_1 = 150$ \$ y $c_2 = 500$ \$[1/], obteniendose el mismo resultado como puede apreciarse en la Tabla 4.2. y en la Fig. 4.2., donde se advierte evidentemente un costo mínimo para una cantidad de $s_o = 6$.

Tabla 4.2.

s	C(s)
0	2.115.50
1	1.636.95
2	1.201.95
3	810.50
4	527.60
5	396.15
6	373.25
7	436.80
8	565.35

1/ Por brevedad se omiten las cuentas auxiliares.

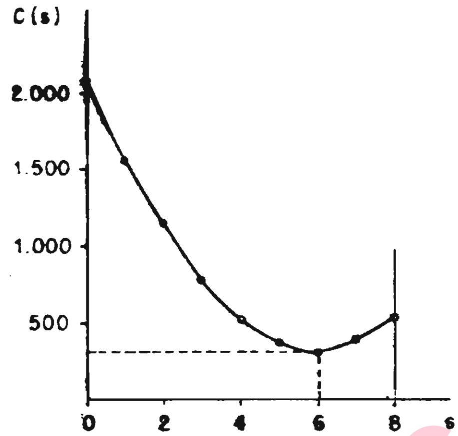

Fig. 4.2.

4.2.3. Alternativas del costo de ruptura

Es posible simular el costo total para diferentes alternativas del costo de ruptura c_2, tal como se muestra en la Tabla 4.3. donde se ha calculado el $C(s)$ para $c_2 = 250, 500, \ldots\ldots\ldots.3.000$, a fin de poder apreciar los efectos que produce una variación de c_2 sobre los diferentes niveles óptimos de stock. (Ver anexo C)

TABLA 4.3.

c_1	c_2	C(0)	C(1)	C(2)	C(3)	C(4)	C(5)	C(6)	C(7)	C(8)
150	250	1.057.75	820.95	610.95	427.75	311.35	288.15	331.75	428.55	565.35
150	500	2.115.50	1.636.95	1.201.95	810.50	527.60	396.15	373.25	436.80	565.35
150	750	3.173.25	2.452.95	1.792.95	1.193.25	743.85	504.15	414.75	445.05	565.35
150	1.000	4.231.00	3.268.95	2.383.95	1.576.00	960.10	612.15	456.25	453.30	565.35
150	1.250	5.288.75	4.084.95	2.974.95	1.958.75	1.176.35	720.15	497.75	461.55	565.35
150	1.500	6.346.50	4.900.95	3.565.95	2.341.50	1.392.60	828.15	539.25	469.80	565.35
150	1.750	7.404.25	5.716.95	4.156.95	2.724.25	1.608.85	936.15	580.75	478.05	565.35
150	2.000	8.462.00	6.532.95	4.747.95	3.107.00	1.825.10	1.044.15	622.25	486.30	565.35
150	2.250	9.519.75	7.348.95	5.338.95	3.489.75	2.041.35	1.152.15	663.75	494.55	565.35
150	2.500	10.577.50	8.164.95	5.929.95	3.872.50	2.257.60	1.260.15	705.25	502.80	565.35
150	2.750	11.635.25	8.980.95	6.520.95	4.255.25	2.473.85	1.368.15	746.75	511.05	565.35
150	3.000	12.693.00	9.796.95	7.111.95	4.638.00	2.690.10	1.476.15	788.25	519.30	565.35

La familia de curvas de esta función de costo, se ha representado gráficamente en la Fig. 4.3., donde se indican los puntos mínimos que hacen óptimos los niveles de inventario.

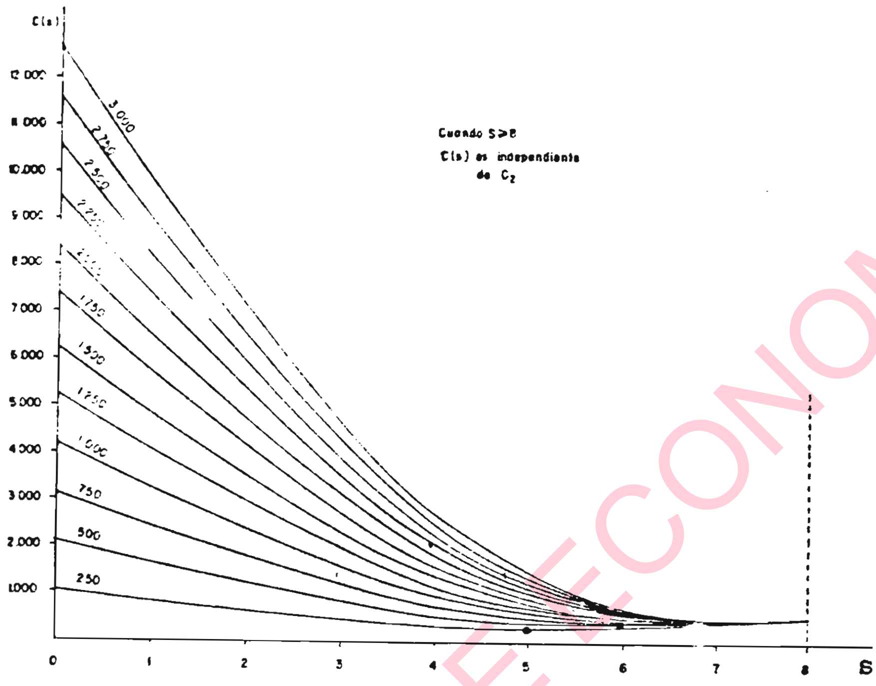

Fig 4.3

Observese que el costo total esperado C(s) es independiente del valor del costo de ruptura c_2 = 250, 500, ..., para valores de $s \geq 8$.

4.3. La ecuación económica con costos de almacenamiento y ruptura

Este es un modelo similar al analisado en el numeral 4.2. Para su estudio consideraremos lo siguiente:

i) la demanda r es aleatoria y suponemos conocida su distribución de probabilidad $p(r)$

ii) el costo de almacenamiento es c_s y el de escasez c_p por unidad de tiempo

Para un nivel de inventario s, se presentan los siguientes casos

i) Si el inventario s es suficiente y responde a la demanda r al final del período t se tendrá una existencia de $s - r$

ii) si el inventario s es insuficiente y no responde a la demanda r, al final del período t se tendrá una escasez de $r - s$

Traduciendo a la gráfica los conceptos anteriores, tenemos

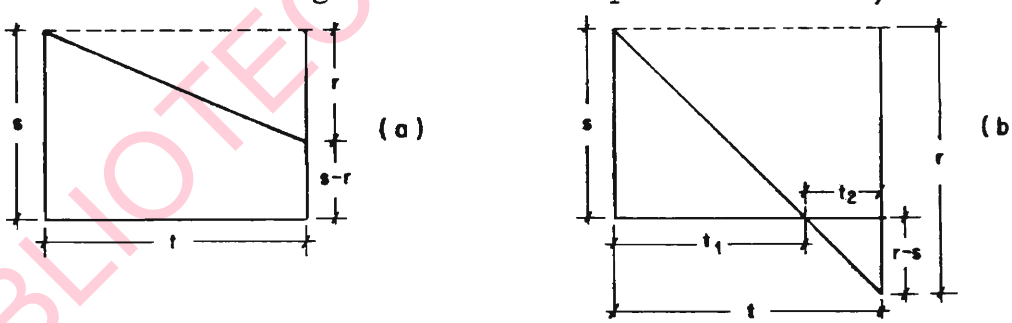

Fig. 4.4

La Fig. 4.4.a corresponde al caso en que $r \leq s$ y la 4.4.b al caso en que $s < r$.

En (a) para un valor dado de r el número medio de unidades en almacen en el período t es

$$\frac{s + s - r}{2} = s - \frac{r}{2}$$

En (b) el número medio de unidades para el período t_1 es

$$\frac{s}{2}\cdot\frac{t_1}{t} = \frac{s}{2}\cdot\frac{s}{r} = \frac{s^2}{2r}$$

y para t_2 $$\frac{r-s}{2}\cdot\frac{t_2}{t} = \frac{r-s}{2}\cdot\frac{r-s}{r} = \frac{(r-s)^2}{2r}$$ donde por

simetría $$\frac{s}{r} = \frac{t_1}{t} \quad y \quad \frac{r-s}{r} = \frac{t_2}{t}$$ respectivamente

Como $p(r)$ es la probabilidad de necesitar r unidades,los costos serán los siguientes:

costo de almacenamiento en (a) $\quad p(r)\left(s-\frac{r}{2}\right)c_s \quad$ si $r \leqslant s$

costo de almacenamiento en (b) $\quad p(r)\left(\frac{s^2}{2r}\right)c_s \quad$ si $r \leqslant s$

costo de inexistencias en (b) $\quad p(r)\frac{(r-s)^2}{2r}c_p \quad$ si $r > s$

Para (a) el costo total esperado se obtiene sumando todos los valores de $r \leqslant s$ y para (b) será la suma de todos los valores superiores a s; asi obtenemos la ecuación económica del coste total

$$C(s) = c_s\sum_{r=0}^{s}\left(s-\frac{r}{2}\right)p(r)+c_s\sum_{r=s+1}^{\infty}\frac{s^2}{2r}\,p(r)+c_p\sum_{r=s+1}^{\infty}\frac{(r-s)^2}{2r}\,p(r) \qquad (4.7.)$$

4.3.1. <u>Solución del costo total</u>

En la ecuación (4.7) encontraremos el valor de s que minimiza el costo total. Reemplazando s por $s+1$ obtenemos

$$C(s+1)=c_s\sum_{r=0}^{s+1}\left(s+1-\frac{r}{2}\right)p(r)+c_s\sum_{r=s+2}^{\infty}\frac{(s+1)^2}{2r}p(r)+c_p\sum_{r=s+2}^{\infty}\frac{(r-s-1)^2}{2r}p(r) \qquad (4.8.)$$

$$C(s+1)=c_s\sum_{r=0}^{s}\left(s+1-\frac{r}{2}\right)p(r)+c_s\left(s+1-\frac{s+1}{2}\right)p(s+1)+c_s\sum_{r=s+1}^{\infty}\frac{(s+1)^2}{2r}\,p(r)-$$

$$-\;c_s\frac{(s+1)^2}{2(s+1)}p(s+1)+c_p\sum_{r=s+1}^{\infty}\frac{(r-s-1)^2}{2r}p(r)$$

simplificando y ordenando, tenemos

$$=c_s\sum_{r=0}^{s}\left(s-\frac{r}{2}\right)p(r)+c_s\sum_{r=s+1}^{\infty}\frac{s^2}{2r}p(r)+c_p\sum_{r=s+1}^{\infty}\frac{(r-s)^2}{2r}p(r)\;+$$

$$+\;(c_s+c_p)\left[\sum_{r=0}^{s}p(r)\;+\;s\sum_{r=s+1}^{\infty}\frac{p(r)}{r}\;+\;\frac{1}{2}\sum_{r=s+1}^{\infty}\frac{p(r)}{r}\right]-c_p$$

los tres primeros términos del segundo miembro corresponden a $C(s)$ y $\sum_{r=0}^{s}p(r)=p(r\leq s)$, luego

$$=C(s)+(c_s+c_p)\left[p(r\leq s)+\left(s+\frac{1}{2}\right)\sum_{r=s+1}^{\infty}\frac{p(r)}{r}\right]-c_p$$

por comodidad haremos $\quad p(r\leq s)+\left(s+\frac{1}{2}\right)\sum_{r=s+1}^{\infty}\frac{p(r)}{r}=L(s) \quad (4.9)$

con lo que

$C(s+1)=C(s)+(c_s+c_p)\,L(s)-c_p \qquad (4.10)$ y por analogía

$C(s-1)=C(s)-(c_s+c_p)\,L(s-1)+c_p \qquad (4.11)$

A continuación demostraremos que $L(s)$ es una función creciente para s.

en(4.9) hagamos s+1 en lugar de s

$$L(s+1) = p(r \leq s+1) + (s + 1 \quad \tfrac{1}{2}) \sum_{r=s+2}^{\infty} \frac{p(r)}{r}$$

$$= p(r \leq s) + p(s+1) + (s + 1 + \tfrac{1}{2}) \sum_{r=s+1}^{\infty} \frac{p(r)}{r} - (s + 1 + \tfrac{1}{2}) \frac{p(s+1)}{(s+1)}$$

simplificando

$$= p(r \leq s) + (s + \tfrac{1}{2}) \sum_{r=s+1}^{\infty} \frac{p(r)}{r} + \sum_{r=s+2}^{\infty} \frac{p(r)}{r} + \tfrac{1}{2} \frac{p(s+1)}{(s+1)}$$ los dos

primeros términos del segundo miembro corresponden a $L(s)$

$$L(s+1) = L(s) + \sum_{r=s+2}^{\infty} \frac{p(r)}{r} + \tfrac{1}{2} \frac{p(s+1)}{(s+1)}$$ donde $\sum_{r=s+2}^{\infty} \frac{p(r)}{r} + \tfrac{1}{2} \frac{p(s+1)}{(s+1)} \geq 0$

luego

$$L(s+1) \geq L(s)$$

Si existe un s_o tal que se cumple

$$\begin{aligned} (c_s+c_p)L(s_o) - c_p &> 0 \\ -(c_s+c_p)L(s_o-1)+c_p &> 0 \end{aligned} \qquad (4.12)$$

entonces s_o es el valor que hace mínimo el costo total $C(s)$ y las ecuaciones (4.10) y (4.11) se convierten en

$$C(s+1) - C(s) > 0$$
$$C(s-1) - C(s) > 0$$

luego de las inecuaciones (4.12) resulta

$$L(s_o - 1) < \frac{c_p}{c_s + c_p} < L(s_o) \qquad (4.13)$$

donde $a = \frac{c_p}{c_s + c_p}$ es la tasa de ruptura de stock.

Si en (4.13) $L(s_0 - 1) < a = L(s_0)$

$L(s_0 - 1) = a < L(s_0)$

entonces las ecuaciones (4.10) y (4.11) se transforman en

$$C(s_0+1) = C(s_0)$$

$$C(s_0-1) = C(s_0)$$

y los valores óptimos serán en forma indiferente s_0 o s_0+1 y s_0 o s_0-1 respectivamente.

4.3.2. Ejemplo númerico 2

Considerando los mismos valores del ejemplo 1 del numeral 4.2.2., hemos construido la Tabla 4.4.

TABLA 4.4.

s	r	$p(r)$	$\frac{p(r)}{r}$	$\sum_{r=s+1}^{\infty} \frac{p(r)}{r}$	$(s+\frac{1}{2}) \sum_{r=s+1}^{\infty} \frac{p(r)}{r}$	$p(r \leq s)$	$L(s)$
0	0	0.033	∞	0.288	0.1440	0.033	0.1770
1	1	0.067	0.067	0.221	0.3315	0.100	0.4315
2	2	0.067	0.034	0.187	0.4675	0.167	0.6345
3	3	0.167	0.056	0.131	0.4585	0.334	0.7925
4	4	0.233	0.058	0.073	0.3285	0.567	0.8955
5	5	0.167	0.033	0.040	0.2200	0.734	0.9540
6	6	0.133	0.022	0.018	0.1170	0.867	0.9840
7	7	0.100	0.014	0.004	0.0300	0.967	0.9970
8	8	0.033	0.004	0.000	0.0000	1.000	1.0000
8	8	0.000	0.000	0.000	0.0000	1.000	1.0000

Si aplicamos arbitrariamente un costo de almacenamiento $c_s = 150.000$ y un costo de escasez $c_p = 1.000.000$ y comparamos la tasa de ruptura a y la distribución $L(s)$, tendremos

$$L(s_0 - 1) < \frac{1.000.000}{150.000+1.000.000} < L(s_0)$$

$$L(3) < 0.8696 < L(4)$$

$$0.7925 < 0.8696 < 0.8955$$

Así pues, el valor óptimo de este inventario es $s_o = 4$, cuyo costo mínimo aplicando la ecuación (4.7) es:

$$C(4) = 150\sum_{r=0}^{4}\left(4-\frac{r}{2}\right)p(r)+150\sum_{r=5}^{\infty}\frac{4^2}{2r}p(r)+1.000\sum_{r=5}^{\infty}\frac{(r-4)^2}{2r}p(r)=464.900\$$$

De igual manera, mediante el cálculo numérico, se puede obtener el s_o procesando el costo total $C(s)$ para $s = 0, 1, 2, ...8$ y escoger aquel s cuyo costo sea el menor de todos.

Como el estudio analítico de estos problemas, especialmente en la práctica, se vuelve demasiado complicado, es preferible a veces determinar los niveles óptimos mediante la técnica de simulación cuyas características veremos en el próximo capítulo.

CAPITULO V

LA SIMULACION MONTE CARLO

5.1. Naturaleza de la simulación

Una de las principales actividades de los dirigentes de empresa se ha orientado hacia la función de control, es decir, la medición y corrección del trabajo realizado por las unidades de subordinación. La función de control es uno de los aspectos de administración más importantes en toda empresa. Siempre los empresarios han estado interesados en los métodos que les permitan mantenerse informados de los resultados de sus planes y objetivos.

Antes de la aparición de nuevas técnicas, las decisiones de control se basaban principalmente en la experiencia, o en la Contabilidad y la Estadística, los que consideran sólo algunos factores en un problema dado, corriendo con ello ciertos riesgos. Este hecho dio lugar a los especialistas a encontrar técnicas que ayuden al empresario en la toma de mejores decisiones. Una de estas técnicas es precisamente la simulación, que permite el análisis de una variedad de sistemas.1/

Para simular es condición necesaria disponer de un modelo del sistema que se estudia, es decir, la simulación es un método de experimentación indirecta que no produce disturbios en el sistema analizado. No obstante lo que podemos obtener con la simulación podriamos hacerlo con la experimentación directa, pero la ventaja de la simulación radica en el hecho de que la experimentación directa resulta perjudicial y muy costosa y por eso mismo impracticable.

1/ Por sistema se entiende cualquier tipo de organización, es decir una división, sección o una empresa considerada en su conjunto.

5.2. El método de Monte Carlo

El método de Monte Carlo consiste en la toma y análisis de muestras de un problema, basado en un mecanismo de azar 1/ . Este método permite simular modelos matemáticos siempre y cuando el modelo involucre muestreo aleatorio a partir de una distribución de probabilidades.

La primera etapa del método consiste en la determinación de la distribución de probabilidades que rige el fenómeno en estudio. Esto implica la obtención de distribuciones empíricas que describan las variables.

El siguiente paso consiste en comprobar estadísticamente, si estas distribuciones pueden o no provenir de alguna de las distribuciones de probabilidad conocidas, para lo que es necesario utilizar la técnica estadística de la docimasia de hipótesis a fin de comprobar la bondad del ajuste de dichas distribuciones.

5.2.1. Consideraciones teóricas del método Monte Carlo

Para precisar el funcionamiento general de este método, veremos algunos aspectos de carácter teórico.

Sea **X** una variable aleatoria con función de densidad f(X) y función de distribución F(X) 2/.

Toda función puede constituir una función de densidad, si cumple las siguientes condiciones:

$$f(X) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(X).dx = 1 \qquad (5.1.)$$

1/ Como por ejemplo el uso de una tabla de números aleatorios

2/ Los mismos conceptos son válidos para una variable aleatoria discreta.

En este caso la función de distribución acumulativa $F(X)$ de una densidad $f(X) = 0$, esta definida por

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(t).dt = P(X \leq x) \qquad (5.2.)$$

donde la función $F(X)$ es monótona no decreciente y

$$F(-\infty) = 0$$
$$F(\infty) = 1$$

Si Y es una variable aleatoria definida por $Y = F(X)$, entonces Y esta uniformemente distribuida en el intervalo $(0,1)$ y $Y = F(X)$ puede resolverse para X en términos de Y, es decir,

$$X = F^{-1}(y) \qquad (5.3.)$$

y además

$$\begin{aligned} X &= F^{-1}(0) = a \quad \text{si} \quad x \leq a \\ X &= F^{-1}(1) = b \quad \text{si} \quad x \geq b \end{aligned} \qquad (5.4.)$$

lo que puede apreciarse en la gráfica de la Fig. 5.1.

A partir de la ecuación (5.3.) se procede a generar la muestra aleatoria de $Y = F(X)$ del siguiente modo.

Sea y_1 un valor definido en el intervalo $0 < y_1 < 1$, obtenido de una tabla de números aleatorios. Como $Y = F(X)$ esta distribuida uniformemente en $(0,1)$, entonces se puede también considerar a y_1 como una observación de esa variable aleatoria.

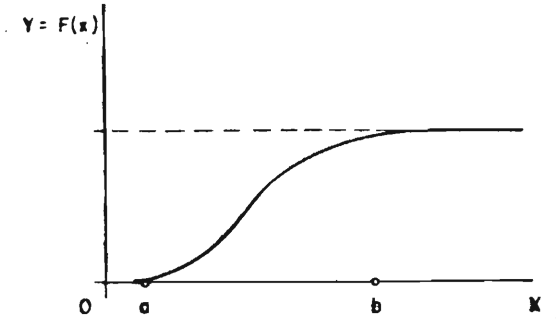

Fig. 5.1.

Hallando la solución de la ecuación $Y_1 = F(X)$, para X_1 , se obtendrá un valor de variable aleatoria, cuya función de distribución es $F(X)$, como puede observarse en la gráfica 5.2.

Siguiendo este procedimiento con los valores y_2, y_3, ..., y_n, obtenidos de una tabla de números aleatorios, se encontrarán los correspondientes valores de x_2, x_3, ..., x_n , los que constituyen la muestra aleatoria buscada, proveniente de cierta distribución de probabilidades.

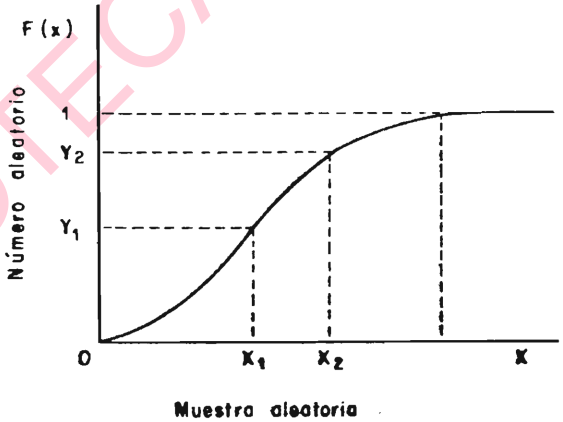

Fig. 5.2

5.2.2. Ejemplo de aplicación

Consideremos la función de densidad definida por,

$$f(x) \begin{cases} 2x & 0 \quad x \quad 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

de la cual se desea obtener una muestra aleatoria. Esta función cumple las dos condiciones descritas anteriormente en (5.1.), es decir,

$$f(x) = 2x >$$

$$y \qquad \int_0^1 2x.dx = 1$$

lo que hace que se trate de una función de distribución.

Para esto tenemos,

$$y = F(x) = \int_0^x 2t.dt = t^2\Big|_0^x = x^2.$$

Resolviendo esta ecuación para x, resulta

$$x = \sqrt{y} \qquad (5.5.)$$

Para este objeto se ha extraido una muestra de tamaño n=10, procedente de una tabla de números aleatorios, cuyos valores para y_i son los siguientes:1/

0.517; 0.240; 0.459; 0.305; 0.035

0.649; 0.156; 0.094; 0.216; 0.910

Aplicando la ecuación (5.5.) los cálculos se resumen en la Tabla 5.1. y los valores de x_i representan la muestra aleatoria buscada.

1/ Números extraidos del Manual de Fórmulas y Tablas Matemáticas de Murray R. Spiegel, Pag. 262.

TABLA 5.1.

Números Aleatorios	Muestra Aleatoria
(y_i)	(x_i)
0.517	0.719
0.240	0.489
0.459	0.677
0.305	0.552
0.035	0.187
0.649	0.805
0.156	0.395
0.094	0.309
0.216	0.465
0.910	0.954

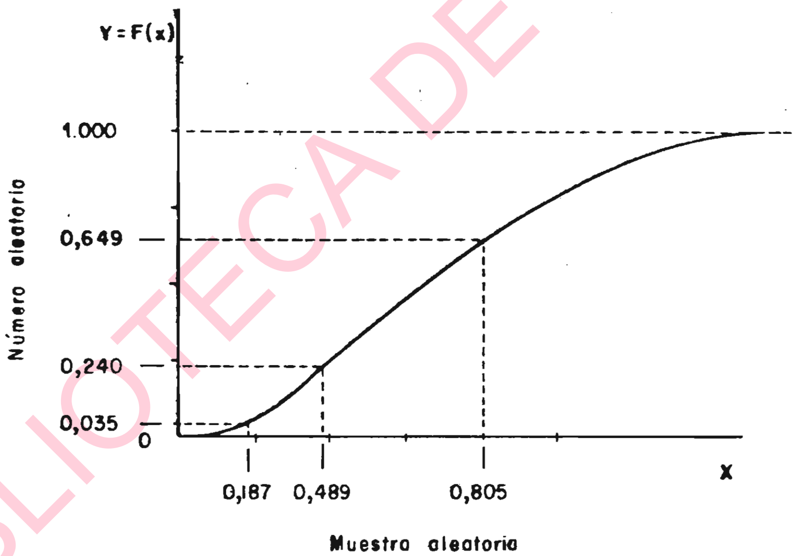

Fig. 5.3.

5.3. <u>Simulación de stocks de materiales</u>

Para demostrar que es la simulación y cómo se aplica, consideraremos un problema hipótético de control de stocks para mostrar como los métodos y muestreos se pueden utilizar para simular las demandas.

Se toma en cuenta la distribución del ejemplo 1, numeral 4.2.2., capítulo IV para la cual se desea simular la demanda de las piezas accesorias para un lapso de 33 días, a objeto de prevér las adquisiciones futuras 1/. Naturalmente que en un estudio real, se puede disponer de un mayor período de tiempo.

A lo largo de 30 días los resultados obtenidos dieron orígen a la siguiente distribución de frecuencias,

TABLA 5.2.

Valores Observados	Unidades Demandadas			
x_i	n_i	$x_i n_i$	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2 n_i$
0	1	1	- 4.27	18.23
1	2	2	- 3.27	21.38
2	2	4	- 2.27	10.30
3	5	15	- 1.27	8.05
4	7	28	- 0.27	0.49
5	5	25	0.73	2.65
6	4	24	1.73	11.96
7	3	21	2.73	22.35
8	1	8	3.73	13.91
	30	128		109.32

donde la media, la varianza y la desviación típica son respectivamente $\bar{x} = 4.3$; $\sigma^2 = 3.6$; $\sigma = 1.9$.

La etapa inicial del estudio constituye la determinación de la ley de probabilidades que rige el fenómeno, es decir, se trata de verificar de cual de las distribuciones conocidas proviene la muestra obtenida, para lo cual será necesario recurrir a los métodos estadísticos de la docimasia de hipótesis.

1/ para este caso se supone que las piezas son todas homogeneas y se puéden adquirir por lotes.

5.3.1. Dócima relacionada con una distribución de Poisson

Verificaremos si la muestra proviene de una población que se distribuye de acuerdo a Poisson.

La variable aleatoria se distribuye de acuerdo a Poisson si la función de densidad es,

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots$$

donde λ es cualquier número positivo y $\bar{x} = \sigma^2 = \lambda$. Se supondrá entonces que la muestra proviene de una población de Poisson de parámetro $\lambda = 4.3$.

Para probar la bondad del ajuste es necesario aplicar un test estadístico. Usaremos el que se basa en la distribución Ji-cuadrado,

$$\chi^2_{k-v-1} = \frac{(O - E)^2}{E}$$

donde O : frecuencias observadas a partir de la distribución de frecuencias

E : Frecuencias esperadas, obtenidas de la distribución de probabilidad

k : número de intervalos o clases

v : número de parámetros estimados a partir de la distribución de frecuencias.

Los cálculos se resumen en la Tabla 5.3.

En este caso k = 7 y v = 1, luego el valor calculado es $\chi^2_5 = 2.01$; tomando un nivel de confianza del 95% con 5 grados de libertad, la tabla de la Ji-cuadrado nos da $\chi^2_{5;\ 0.95} = 11.1$.

TABLA 5.3.

Valores Observ.	Frecuen. Relativa	Distribuc. de Probab.	Frecuen. Observ.	Frecuen. Esperad.		
x_i	h_i	$P(X=x_i)$	O	E	$(O - E)^2$	$\frac{(O - E)^2}{E}$
0	0,033	0,014	1,0	0,4	0,36	0,90
1	0,067	0,058	2,0	1,7	0,09	0,05
2	0,067	0,125	2,0	3,7	2,89	0,78
3	0,167	0,18[illegible]	5,0	5,4	0,16	0,03
4	0,233	0,193	7,0	5,8	1,44	0,25
5	0,167	0,166	5,0	5,0	0,00	0,00
6	0,133	0,119	4,0	3,6		
7	0,100	0,073	3,0 1/	2,2 1/	0,60	0,00
8 o +	0,033	0,072	1,0	2,2		
	1,000	1,000	30,0	30,0		2,01

Como el valor calculado es menor que el consignado en tablas la hipótesis no se rechaza y suponemos que la muestra proviene de una distribución de Poisson.

5.3.2. Dócima relacionada con la distribución normal

Ahora interesa docimar la hipótesis de que la muestra proviene de un universo que se distribuye según una normal de media $\mu = 4.3$, varianza $\sigma^2 = 3.6$ y desviación típica $\sigma = 1.9$.

Por definición una variable aleatoria X se distribuye normalmente si su función de densidad esta dada por,

$$n(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

Como esta distribución se refiere a una variable aleatoria continua, es necesario suponer que los valores de x, corresponden a marcas de clase.

1/ Considerados en forma conjunta.

Con objeto de calcular las áreas bajo la curva normal, haremos el siguiente cambio de variable,

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{x - 4.3}{1.9}$$

obteniendose así las probabilidades de la Tabla 5.4. y la gráfica de la Fig. 5.4.

TABLA 5.4.

X	Z	P(Z ≤ z)
0,5	- 2,00	0,0228
1,5	- 1,47	0,0708
2,5	- 0,95	0,1711
3,5	- 0,42	0,3372
4,5	0,11	0,5438
5,5	0,63	0,7357
6,5	1,16	0,8770
7,5	1,68	0,9535
8,5	2,21	0,9864
9,5	2,74	0,9969
10,5	3,26	0,9994

Los cálculos para docimar la hipótesis χ^2, se presentan en la Tabla 5.5.

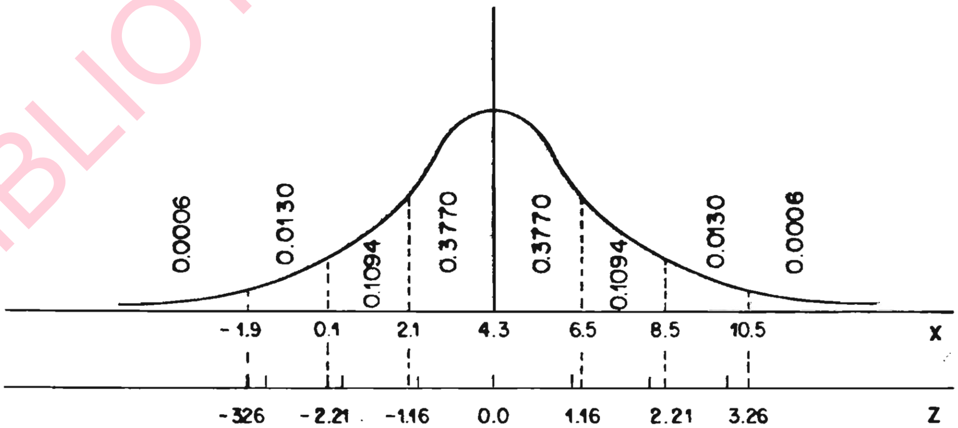

Fig. 5.4.

TABLA 5.5.

INTERVALO	Marca de Clase	Frecuen. Relativa	PROBABIL.	Frecuen. Observ.	Frecuen. Esperad.		
X'_{i-1} - X'_i	X_i	h_i	$P(X=x_i)$	O	E	$(O - E)^2$	$\frac{(O - E)^2}{E}$
- ∞ - 0,5	0	0,033	0,023	1,0	0,7	0,09	0,13
0,5 - 1,5	1	0,067	0,048	2,0	1,4	0,36	0,26
1,5 - 2,5	2	0,067	0,100	2,0	3,0	1,00	0,33
2,5 - 3,5	3	0,167	0,166	5,0	5,0	0,00	0,00
3,5 - 4,5	4	0,233	0,207	7,0	6,2	0,64	0,10
4,5 - 5,5	5	0,167	0,192	5,0	5,8	0,64	0,11
5,5 - 6,5	6	0,133	0,141	4,0	4,2		
6,5 - 7,5	7	0,100	0,076	3,0	2,3	0,01	0,00
7,5 - 8,5	8	0,033	0,033	1,0 1/	1,0 1/		
8,5 - ∞	> 8	0,000	0,014	0,0	0,4		
		1,000	1,000	30,0	30,0		0,93

El valor calculado es $\chi^2 = 0,93$. Como k = 7 y v = 2, el número de grados de libertad es 4. Considerando arbitrariamente un nivel de confianza del 95% con 4 grados de libertad, tenemos, $\chi^2_{4;0,95} = 9,49$. En este caso la hipótesis tampco se rechaza, puesto que el valor calculado es menor que el valor encontrado en tablas y no se cae por tanto en la zona de rechazo.

Por consiguiente, para nuestros fines, se concluye que la distribución normal es la que mejor representa el fenómeno en estudio,

5.3.3. <u>Simulación de la demanda de accesorios de un equipo petrolero</u>

Para obtener una muestra aleatoria, con ayuda de una tabla de números aleatorios, que provenga de una distribución normal, es conveniente disponer en una tabla, la distribución de números aleatorios que corresponderá a cada valor de X. Si consideramos, por ejemplo, 1.000 números aleatorios del 000 al 999 la distribución sería la siguiente.

1/ Considerados en forma conjunta.

TABLA 5.6.

Valores Observ.de la demanda	Distribuc. Normal Acumulada	Distribución de números Aleatorios
X_i	$F(x)=P(X=x)$	
0	0,023	000 - 022
1	0,071	023 - 070
2	0,171	071 - 170
3	0,337	171 - 336
4	0,544	337 - 543
5	0,736	544 - 735
6	0,877	736 - 876
7	0,953	877 - 952
8	0,986	953 - 985
8	1,000	986 - 999

Como puede verse los 1000 números aleatorios se distribuyen entre las clases en forma proporcional a la probabilidad con que la variable toma cada uno de los valores.

En un caso práctico de administración de materiales, es necesario considerar el intervalo de tiempo que transcurre, entre el momento de emitir un pedido y la recepción del mismo, lo que supone un retraso en los reaprovisionamientos. Si admitimos la hipótesis de que estos retrasos son aleatorios y se distribuyen de acuerdo a la ley de Poisson, con una media de 2 días, aplicando la misma técnica que para el caso precedente, la distribución de números aleatorios será la de la Tabla 5.7.

TABLA 5.7.

Valores Observados de los retrasos	Distribución de Poisson Acumulada	Distribución de números Aleatorios
X_i	$F(x)=P(X=x)$	
0	0,108	000 - 107
1	0,348	108 - 347
2	0,616	348 - 615
3	0,815	616 - 814
4	0,926	815 - 925
5	1,000	926 - 999

Con ayuda de la distribución de números aleatorios de las Tablas 5.6. y 5.7., para cada valor de y_i extraido de una tabla de números aleatorios, será posible obtener el correspondiente valor de x_i, lo que se ha hecho en la Tabla 5.8.

Para nuestro propósito tomaremos una muestra de 33 números aleatorios, para un número igual de días, considerando para la simulación los siguientes supuestos:

i) la existencia inicial en almacenes es de 30 piezas con un promedio de 4 piezas por día demandadas.

ii) cuando el nivel del stock es menor o igual a 3 veces la cantidad promedio diaria demandada, la dirección de la empresa ordena un reaprovisionamiento por un número de unidades igual a 3 veces dicho promedio.

iii) los costos son los siguientes:

costo de emisión de pedido	c_1 =	30 $ por pedido
costo de almacenamiento	c_s =	1.50 $ por unidad y por día
costo de escasez o ruptura	c_p =	2.50 $ por unidad y por día.

En la Fig. 5.6. se ha diagramado la información de la Tabla 5.8., la que nos servirá para determinar el costo esperado durante los 33 días, valiendonos de la siguiente ecuación,

$$C = c_1 . p + c_s . \bar{I} + c_p . \bar{E} \qquad (5.6.)$$

donde p = número de pedidos, $\bar{I}$ = inventario promedio y $\bar{E}$ = escasez promedio, siendo los otros símbolos ya conocidos.

TABLA 5.8.

SIMULACION DE LA DEMANDA DE ACCESORIOS DE UN EQUIPO PETROLERO

Final del dia	Número aleatorio de la demanda (Y_i)	Demanda diaria simulada (X_i)	Nivel de existencias al final del día	Número aleatorio del retraso en reaprov.	Retraso diario simulado.	Instrucciones
0			30			existencia inicial
1	517	4	26			
2	240	3	23			
3	459	4	19			
4	305	3	16			
5	035	1	15			
6	649	5	10	335	2	pedir 12 piezas para
7	156	2	8			recibir dentro de 2 días
8	094	2	6			
			18			recibir y saldar las
9	216	3	15			12 piezas
10	910	7	8	058	0	pedir 12 piezas sin
						retraso
			20			recibir 12 piezas
11	505	4	16			
12	071	2	14			
13	279	3	11	459	2	pedir 12 piezas
14	851	6	5			
15	543	4	1			
			13			recibir 12 piezas
16	655	5	8	032	0	pedir 12 piezas
			20			recibir 12 piezas
17	082	2	18			
18	398	4	14			
19	622	5	9	638	3	pedir 12 piezas
20	532	4	5			
21	746	6	- 1			
22	234	3	- 4			
			8	387	2	recibir 12 piezas y volver a pedir 12
23	601	5	3			
24	021	0	3			
			15			recibir 12 piezas
25	793	6	9	701	3	pedir 12 piezas
26	033	1	8			
27	647	5	3			
28	563	5	- 2			
			10	205	1	recibir 12 piezas y volver a pedir 12
29	911	7	3			
			15			recibir 12 piezas
30	174	3	12	759	3	pedir 12 piezas
31	254	3	9			
32	408	4	5			
33	647	5	0			
			12			recibir 12 piezas

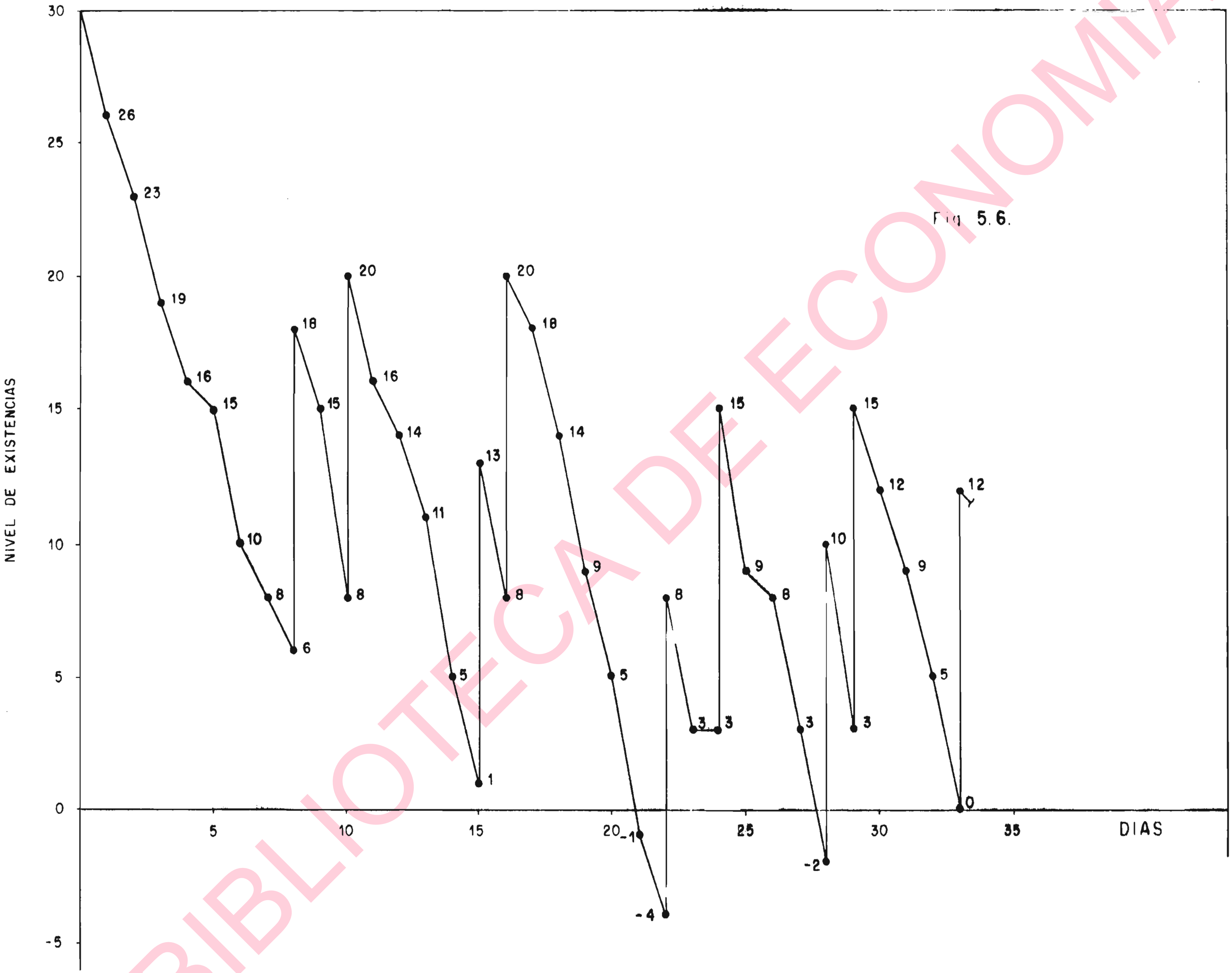

Fig. 5.6.

Los valores serán por lo tanto los que siguen:

Costo de emisión $c_1 = 30$ \$ por pedido

número de pedidos $p = 9$

costo de almacenamiento $c_s = 1.50$ \$ por unidad y por día

Inventario promedio $\bar{I} = \frac{\text{Area de inventario}}{\text{Número de días}} = \frac{361.03}{33} = 10.94$ Pzas.

Escasez promedio $\bar{E} = \frac{\text{Area de escasez}}{\text{Número de días}} = \frac{2.98}{33} = 0.09$ piezas

Costo de escasez $c_p = 2.50$ \$ por unidad y por día.

Como se ve la escasez promedio es insignificante y no llega ni al 10% de una pieza.

En estas condiciones, aplicando la ecuación 5.6. se tiene:

$$C = 30(9) + 1.50(10.94) + 2.50(0.09) = 286.64 \text{ \$ por día.}$$

Para procurar reducir al mínimo óptimo posible el costo de esta administración de inventarios, es necesario efectuar otras combinaciones, haciendo variar (50 o 500 veces) tanto las cantidades pedidas como el nivel del inventario de seguridad, para determinar en cada etapa el costo del inventario y escoger obviamente aquel que ofresca mejores ventajas.

Dado el carácter repetitivo de estos cálculos, es conveniente contar con el auxilio de un computador ya que sin la rapidez que ofrece este, la mayoría de los modelos de simulación Monte Carlo, no serán de utilidad práctica.

C A P I T U L O VI

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1. Conclusiones

Del estudio expuesto anteriormente se desprenden las siguientes conclusiones:

i) El análisis y cálculos realizados en el presente trabajo, se basa generalmente en especulaciones de carácter teórico, debido fundamentalmente a la falta de información histórica que hubiese dado un caris más real al problema. De ahí que las conclusiones y recomendaciones resulten más bien de tipo general que circunscritas a determinada situación.

ii) Las inversiones necesarias para la industria petrolera, como es de suponer, corresponden a sumas muy elevadas, especialmente aquellas destinadas a la compra de materiales y equipos: 20 y 60 millones de dólares para 1974 y 1975 respectivamente en el caso de la industria petrolera boliviana.

iii) Estas inversiones que representan inmovilizaciones de capital bajo la forma de stocks, implican gastos de posesión y adquisición del stock, tales como los *costos de almacenamiento*, los *costos de emisión de pedidos* y los *costos asociados con una ruptura de stocks* por la no disponibilidad oportuna de materiales, gastos que en definitiva determinan una fuerte incidencia sobre los costos de producción.

iv) La complejidad de sus operaciones y la magnitud cada vez mayor que desarrolla la industria del petróleo en sus diferentes fases, particularmente en nuestro país, hace ver que los stocks de materiales estan compuestos por un conjunto de las más diversas y variadas clases de items, al punto que resultaría aventurado ofrecer una solución inmediata al problema planteado de su adecuado control económico, en tanto no sea encarado el problema a través del diseño de implementación del sistema a ejecutarse por un grupo de profesionales entendidos.

v) Evidentemente, esta gama tan variada de artículos requiere alguna forma de control, y el grado de su análisis y la sofisticación de los métodos de este control debe guardar proporción con los montos invertidos en el stock total de un determinado artículo.

vi) Si se hace uso de la técnica propugnada por Wilfredo Pareto que nos dá a conocer la relación: "pocos items de alto valor" y "muchos items de poco valor", resulta pues muy comprensible e incuestinable concluir que más vale adoptar un sistema de control selectivo del stock, es decir, los "pocos items de alto valor" deberían ser objeto de inventarios más exactos y frecuentes.

vii) Con miras a su futura implementación, el presente trabajo demuestra que es posible el uso de técnicas matemáticas que permitan al ejecutivo y en este caso al administrador de stocks, enfrentar los problemas de decisión utilizando criterios científicos, que le proporcionen una actitud reflexiva para ejercer su actividad con más eficiencia, no obstante su sagacidad, su intuición y el fruto de su experiencia personal.

viii) Se pone en especial relieve el hecho de que la preparación de las decisiones relacionadas con la gestión económica de los stocks, esta ligada a los problemas generales de Inventarios y de Simulación que son parte integrante de las técnicas de la Investigación de Operaciones.

ix) Si bien los modelos de inventarios proporcionan los niveles óptimos de stocks para una determinada política, cuando las situaciones son bastante complejas estos modelos pueden complicarse a tal punto que se haría prácticamente imposible una solución analítica sencilla de estos problemas.

x) La técnica de simulación que está generalmente dirigida al computador, es un instrumento poderoso particularmente útil en el análisis de sistemas demasiado complejos, para analizarlos en forma matemática. Sin embargo la simulación no necesariamente dá una respuesta óptima y si la dá es sólo para un conjunto particular de circunstancias, debiendo ensayarse cambios en las variables para hallar nuevos efectos en los resultados y así sucesivamente hasta ver a nuestro criterio que se ha encontrado la solución óptima

xi) En general las técnicas utilizadas en una política de control de stocks son aplicaciones que de algún modo pretenden suprimir el obstáculo de la aleatoridad que caracteriza a este tipo de problemas y que perturban su tratamiento.

6.2. Recomendaciones

En base a las conclusiones anteriores expuestas en detalle, se resumen las siguientes recomendaciones generales:

i) La evolución de la empresa moderna hace ver la necesidad de recomendar a las autoridades ejecutivas y de dirección de la empresa petrolera boliviana, llevar a cabo los estudios pertinentes a objeto de implementar un sistema a nivel global para ejercitar el control económico tanto en las adquisiciones como en el mantenimiento de los materiales en los almacenes.

ii) A este objeto, una de las principales tareas debe estar referida a dar a los materiales una adecuada codificación y simbolización, dandoles fundamentalmente un carácter de homogeneidad, de manera que un artículo que pertenezca a una familia dada, no deba formar parte de otra familia, a fin de evitar las ambigüedades que siempre son posibles en estos casos.

iii) Las técnicas discutidas en este estudio son aplicables a un sólo artículo. Obviamente la empresa petrolera boliviana, cuenta en sus almacenes con muchas y variadas clases de artículos, para los cuales se recomienda una clasificación en función de la importancia que cada uno de ellos tenga en las operaciones de la empresa.
Los niveles de inversión y consumo darán en este caso, una pauta que permita decidir tanto sobre los controles selectivos de su mantenimiento, cuanto sobre las series económicas óptimas de compra a un costo mínimo.

iv) En el estudio de implementación del sistema de materiales, se recomienda, la aplicación de los métodos de la "clasificación ABC", ya que este método ha demostrado tener una aplicación casi universal y en el campo específico de las ciencias administrativas, es el eje alrrededor del cual giran las teorías de la administración por excepción y los controles selectivos.

A N E X O S

A N E X O   A

INVENTARIOS: STOCK DE MATERIALES POR CLASES

SALDOS DEL BALANCE GENERAL AL 31-12
1971-1975
(En pesos bolivianos corrientes)

	1971	1972	1973	1974	1975
LA PAZ	15.725.182	16.222.270	24.584.562	47.979.760	66.427.622
Stock Clase N° 3	2.026.528	3.084.871	6.970.060	14.761.912	11.867.265
Stock Clase N° 4	539.369	35.499	-	-	-
Stock Clase N° 5	2.147.399	2.129.797	2.634.207	3.108.111	4.156.201
Stock Clase N° 6	9.906.629	9.691.963	13.882.375	28.341.227	49.440.044
Stocks varios no clasific.	788.653	895.367	299.038	-	-
Stock mercaderías pulp.	316.604	384.773	798.882	1.768.510	964.112
CAMIRI	79.167.541	75.486.061	81.075.554	99.522.812	114.867.574
Stock Clase N° 1	46.605.407	42.534.590	48.167.887	58.649.967	71.770.483
Stock Clase N° 2	283.337	288.891	240.184	347.139	351.191
Stock Clase N° 3	2.974.349	3.163.705	2.935.086	4.485.222	4.698.210
Stock Clase N° 4	581.886	-	-	-	-
Stock Clase N° 5	273.821	92.440	129.746	100.398	86.351
Stock Clase N° 6	26.901.201	26.664.292	27.273.726	30.350.205	34.448.760
Stock mercad. pulper.	1.547.540	2.742.143	2.328.925	5.589.881	3.512.579
SANANDITA	6.920.413	7.199.312	2.699.420	2.240.606	16.839.902
Stock Clase N° 1	3.801.473	3.872.045	1.304.755	799.691	704.477
Stock Clase N° 2	26.305	16.703	6.558	114.674	86.405
Stock Clase N° 3	660.322	665.527	273.677	263.848	326.414
Stock Clase N° 4	182.425	106.968	-	-	-
Stock Clase N° 5	73.075	46.382	26.294	30.957	30.756
Stock Clase N° 6	1.931.217	1.860.846	902.172	747.603	15.408.689
Stock mater. absoletos		214.024	-	-	-
Stock merc. pulpería	245.596	416.817	185.964	283.833	283.161
BERMEJO	8.660.290	8.053.760	9.059.189	8.325.620	3.879.181
Stock Clase N° 1	5.155.862	4.804.820	5.730.336	5.300.976	1.812.250
Stock Clase N° 2	29.501	24.973	31.774	22.777	12.681
Stock Clase N° 3	623.472	599.591	662.074	506.216	441.087
Stock Clase N° 4	196.781	202.564	38.303	4.272	-
Stock Clase N° 5	48.197	44.392	54.481	62.725	34.680
Stock Clase N° 6	2.275.048	2.038.295	2.156.780	1.994.308	1.249.294
Stock mercad. pulp.	331.429	339.125	385.441	434.899	329.189
Stock mater. obsoletos	-	-	-	(553)	
COCHABAMBA	38.105.729	37.755.847	58.025.377	84.589.934	211.321.290
Stock Clase N° 2	12.294.485	8.653.318	10.824.088	19.106.112	45.246.574
Stock Clase N° 3	1.292.984	1.378.065	617.229	1.497.090	2.238.125
Stock Clase N° 4	91.196	-	-	33	-
Stock Clase N° 5	58.845	62.660	101.867	138.567	126.062
Stock Clase N° 6	24.114.873	27.456.541	45.809.428	62.974.115	162.371.654
Stocks no Clasificados	-	-	-	-	719.139
Stock mercad. pulper.	253.346	205.263	672.765	874.017	619.736
SUB TOTAL	148.579.155	144.717.250	175.444.102	242.658.732	413.335.569

INVENTARIOS: STOCK (continuación)

1971-1975
(En pesos bolivianos)

	1971	1972	1973	1974	1975
SANTA CRUZ	35.560.031	52.847.520	84.355.146	106.843.472	124.867.532
Stock Clase N° 1	19.461.500	30.145.560	45.909.261	57.588.889	67.997.798
Stock Clase N° 2	1.448.306	1.951.274	1.484.613	2.118.150	2.639.538
Stock Clase N° 3	1.124.344	1.488.402	2.993.721	3.008.913	3.894.911
Stock Clase N° 4	169.737	-	-	-	-
Stock Clase N° 5	99.801	102.188	144.121	162.675	507.402
Stock Clase N° 6	13.118.352	18.968.108	33.288.235	43.039.716	48.729.716
Stock mercad. pulp.	137.991	191.988	535.195	925.129	1.098.167
SUCRE	9.591.626	14.127.113	15.937.540	25.694.464	33.752.404
Stock Clase N° 1	-	-	-	-	-
Stock Clase N° 2	802.951	1.880.864	3.018.234	2.588.062	1.326.907
Stock Clase N° 3	266.281	503.646	455.131	1.369.482	2.419.877
Stock Clase N° 4	123.670	4.994	5.222	-	-
Stock Clase N° 5	32.287	38.418	42.719	68.058	90.612
Stock Clase N° 6	8.115.917	11.442.476	11.909.321	20.035.154	27.553.127
Stock mercad. pulp.	250.520	256.715	506.913	910.210	611.734
Stocks no clasifica.	-	-	-	723.498	1.750.146
GASODUCTO MGD-SCR	295.337	2.791.045	20.298.859	5.527.585	-
Stocks no clasificad.	270.901	2.790.847	20.298.661	5.527.585	-
Stocks varios (Prod. Ref.)	24.436	198	198	-	-
DIVISION SANTA CRUZ	18.768.004	45.871.020	56.208.609	87.666.484	76.982.991
Stock Clase N° 1	4.444.441	11.099.022	22.712.207	25.504.428	29.535.265
Stock Clase N° 3	529.060	913.193	892.470	1.399.628	885.013
Stock Clase N° 5	134.575	253.365	193.392	366.385	121.196
Stock Clase N° 6	10.131.550	25.752.617	26.656.090	50.235.953	41.611.892
Stocks varios	3.528.378	7.852.823	5.754.450	10.160.090	3.314.429
Stock mercad. pulp.	-	-	-	-	1.514.196
ORURO	90.785	519.266	2.126.504	4.157.551	3.480.392
Stock Clase N° 1	-	31.226	-	-	-
Stock Clase N° 3	-	82.230	-	-	-
Stock Clase N° 4	29.307	-	-	-	-
Stock Clase N° 5	-	44.427	-	-	-
Stock Clase N° 6	-	291.800	-	-	-
Stocks no clasificados	31.069	-	1.872.506	3.166.281	3.480.392
Stocks mercad. pulp.	30.409	69.583	253.998	991.270	-
SUBTOTAL	64.305.783	116.155.964	178.926.658	229.889.556	239.083.319
TOTAL GENERAL	212.884.938	260.873.214	354.370.760	472.548.288	652.418.888

A N E X O B

CALCULO DE SENSIBILIDAD DEL EJEMPLO NUMERICO 1, CAPITULO III

Aplicando la ecuación (3.6.) con $q_o-10\%q_o$, tenemos

$$(q_o-10\%q_o) = \frac{Q\ c_1}{(q_o-10\%q_o)} + \frac{T\ c_s}{2}(q_o-10\%q_o)$$

$$C(4216-422) = \frac{(80.000)(60.000)}{4216-422} + \frac{(360)(1.50)}{2}(4216-422)$$

$$C(\ 3.794\ ) = 1.265.156 + 1.024.380$$

$$\boxed{C(\ 3.794\ ) = 2.289.536\ \$}$$

Aplicando $q_o+10\%q_o$, tenemos

$$C(q_o+10\%q_o) = \frac{Q\ c_1}{(q_o+10\%q_o)} + \frac{T\ c_s}{2}(q_o+10\%q_o)$$

$$C(4216+422) = \frac{(80.000)(60.000)}{4216+422} + \frac{(360)(1.50)}{2}(4216+422)$$

$$C(\ 4.638\ ) = 1.034.929 + 1.252.260$$

$$\boxed{C(\ 4.638\ ) = 2.287.189\ \$}$$

Luego la desviación relativa, aplicando la fórmula (3.7.) será

$$\frac{d\ C}{C(q_o)} = \frac{1}{2}\left[\frac{C(q_o-10\%q_o) + C(q_o+10\%q_o)}{C(q_o)}\right] - 1$$

$$\frac{d\ C}{C(q_o)} = \frac{1}{2}\left[\frac{2.289.536 + 2.287.189}{2.276.840}\right] - 1 = 0.0051 \text{ aproximadamente.}$$

A N E X O   C

CALCULOS AUXILIARES DE LAS ALTERNATIVAS DEL COSTO DE RUPTURA, NUMERAL 4.2.3, TABLA 4.3 CAPITULO IV.

APLICACION DE LA ECUACION $C(s) = c_1\sum_{r=0}^{s}(s - r)\ p(r) + c_2\sum_{r=s+1}^{\infty}(r - s)\ p(r)$ PARA $s=0,1,2,\ldots,8$; $c_1=150$; $c_2=250,500,750,\ldots,3000.$

	c(0)	c(1)	c(2)	c(3)	c(4)	c(5)	c(6)	c(7)	c(8)
	150(0)+250(4,231)	150(0,033)+250(3,264)	150(0.133)+250(2,364)	150(0,3)+250(1,531)	150(0,634)+250(0,865)	150(1,201)+250(0,432)	150(1,935)+250(0,166)	150(2,802)+250(0,033)	150(3,769)+250(0
250	0+1057,75	4,95+ 816= 820,95	19,95+ 591= 610,95	45+ 382,75= 427,75	95,1+ 216,25= 311,35	180,15+ 108= 288,15	290,25+ 41,5=331,75	420,3+ 8,25=428,55	565,35+0
500	0+2115,50	4,95+1632=1636,95	19,95+1182=1201,95	45+ 765,50= 810,50	95,1+ 432,50= 527,60	180,15+ 216= 396,15	290,25+ 83,0=373,25	420,3+16,50=436,80	565,35+0
750	0+3173,25	4,95+2448=2452,95	19,95+1773=1792,95	45+1148,25=1193,25	95,1+ 648,75= 743,85	180,15+ 324= 504,15	290,25+124,5=414,75	420,3+24,75=445,05	565,35+0
1000	0+4231,00	4,95+3264=3268,95	19,95+2364=2383,95	45+1531,00=1576,00	95,1+ 865,00= 960,10	180,15+ 432= 612,15	290,25+166,0=456,25	420,3+33,00=453,30	565,35+0
1250	0+5288,75	4,95+4080=4084,95	19,95+2955=2974,95	45+1913,75=1958,75	95,1+1081,25=1176,35	180,15+ 540= 720,15	290,25+207,5=497,75	420,3+41,25=461,55	565,35+0
1500	0+6346,50	4,95+4896=4900,95	19,95+3546=3565,95	45+2296,50=2341,50	95,1+1297,50=1392,60	180,15+ 648= 828,15	290,25+249,0=539,25	420,3+49,50=469,80	565,35+0
1750	0+7404,25	4,95+5712=5716,95	19,95+4137=4156,95	45+2679,25=2724,25	95,1+1513,75=1608,85	180,15+ 756= 936,15	290,25+290,5=580,75	420,3+57,75=478,05	565,35+0
2000	0+8462,00	4,95+6528=6532,95	19,95+4728=4747,95	45+3062,00=3107,00	95,1+1730,00=1825,10	180,15+ 864=1044,15	290,25+332,0=622,25	420,3+66,00=486,30	565,35+0
2250	0+9519,75	4,95+7344=7348,95	19,95+5319=5338,95	45+3444,75=3489,75	95,1+1946,25=2041,35	180,15+ 972=1152,15	290,25+373,5=663,75	420,3+74,25=494,55	565,35+0
2500	0+10577,50	4,95+8160=8164,95	19,95+5910=5929,95	45+3827,50=3872,50	95,1+2162,50=2257,60	180,15+1080=1260,15	290,25+415,0=705,25	420,3+82,50=502,80	565,35+0
2750	0+11635,25	4,95+8976=8980,95	19,95+6501=6520,95	45+4210,25=4255,25	95,1+2378,75=2473,85	180,15+1188=1368,15	290,25+456,5=746,75	420,3+90,75=511,05	565,35+0
3000	0+12693,00	4,95+9792=9796,95	19,95+7092=7111,95	45+4593,00=4638,00	95,1+2595,00=2690,10	180,15+1296=1476,15	290,25+498,0=788,25	420,3+99,00=519,30	565,35+0

B I B L I O G R A F I A

1. A. KAUFMANN, Métodos y Modelos de la Investigación de Operaciones, editorial C.E.C.S.A., 8va. edición, México 1969.

2. C. WEST CHURCHMAN, RUSSELL L. ACKOFF y E. LEONARD ARNOFF, Introducción a la Investigación Operativa, editorial Aguilar, 1ra. edición, España 1973.

3. JAMES E. SHAMBLIN, G. T. STEVENS, Jr., Investigación de Operaciones, un enfoque fundamental, Libros Mc Graw-Hill, traducido de la 1ra. edición, Colombia 1975.

4. JOSEPH F. Mc CLOSKEY, FLORENCE N. TREFETHEN, Introducción a la Investigación Operativa, editorial Casal I. Vall, Andorra 1968.

5. ALEXANDER M. MOOD, FRANKLIN A. GRAYBILL, Introducción a la Teoría de la Estadística, editorial Aguilar, 4ta. edición, España 1969.

6. MURRAY R. SPIEGEL, Ph.D., Manual de Fórmulas y Tablas Matemáticas, Libros Mc Graw-Hill, Colombia 1970.

7. Y.P.F.B., Balance General al 31-12, años 1971 a 1975, Tomo I. La Paz.

8. A.R.P.E.L., Asistencia Recíproca Petrolera Estatal Latinoamericana, Boletín Técnico, volúmen I, Nº 2 y 3, Argentina 1972.

-- 0 --