UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS
FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES
CARRERA DE MATEMÁTICA

CONJUGACIÓN DE SUBÁLGEBRAS DE CARTAN

(Álgebras de Lie)

Proyecto de Grado presentado para la obtención del Grado de Licenciatura

POR: JORGE JOAQUÍN MOLLINEDO CALLE

TUTOR: DR. GUILLERMO FERNANDO VERA HURTADO

LA PAZ - BOLIVIA

Diciembre, 2022

DEDICATORIA

A mis padres

AGRADECIMIENTOS

A mi familia, en especial a mis padres Hilda y Geovanny por todo su apoyo, a mi tutor el Dr. Fernando Vera y tribunales Msc. Marcelo Machicao Rossi y Msc. Roberto Huaranca Ampa por sus aclaraciones y correcciones. Finalmente agradecezco a toda la comunidad de la Universidad Mayor de San Andrés que directa o indirectamente colaboró en el desarrollo del presente trabajo.

Índice general

Resumen

El objetivo del presente trabajo de proyecto de grado es estudiar un resultado importante en la teoría de álgebras de Lie de dimensión finita, sobre un campo algebraicamente cerrado de característica cero: Cada par de subálgebras de Cartan son conjugadas entre sí, vía algún automorfismo de la álgebra. Este resultado es relevante pues garantiza la existencia de elementos regulares contenidos en las subálgebras de Cartan, los cuales hacen más fácil describirlas por completo. Para la demostración en el caso de álgebras de Lie complejas de dimensión finita, se requieren apenas herramientas del análisis y la topología como el Teorema de la Función Implícita para el caso real y nociones de componentes conexas del complemento de las raíces de cierto polinomio distinguido (polinomio de Killing), en el caso complejo. En el caso de álgebras de Lie de dimensión finita, cuyo cuerpo de escalares es algebraicamente cerrado de característica cero, ya que la noción de límite, esencial para el cálculo diferencial en este caso esta ausente, pues requiere para su uso pleno la completitud del cuerpo . Por tanto requeriremos de ciertos resultados algebraicos cuya finalidad es de obtener un resultado análogo al Teorema de la Función Implícita para funciones y aplicaciones polinomiales.

Introducción

En 1870, Sophus Lie y el joven matemático aleman Felix Klein, cuyos primeros artículos trataban sobre geometría, estaban interesados en grupos continuos y su importancia para la geometría. Mientras Klein se decanto hacia la interpretación de la geometría de Lobachevski, Lie orientó su estudio sobre las conexión entre transformaciones geométricas y ecuaciones diferenciales, específicamente el problema de integrabilidad por cuadraturas de ecuaciones diferenciales, es decir la expresión de la solución de esas ecuaciones en términos de integrales de funciones conocidas. Sus investigaciones, le llevaron a publicar, entre los años 1883 y 1884, un artículo llamado «Clasificación e integración de ecuaciones diferenciales ordinarias que admiten un grupo de transformaciones», en donde establecía la relación entre una ecuación diferencial y un grupo continuo admitido bajo esta ecuación. Según Cartan, Lie «sintió» la necesidad de exponer en un gran compendio didáctico, los resultados de sus primeras investigaciones, principalmente aquellas relacionadas con la teoría de grupos. En un periodo de 9 años de trabajo, fue publicado sucesivamente en tres volúmenes, su "Teoría de grupos de transformaciones". Lie consideró una gran clase de grupos continuos, cuyos elementos dependen de un número finito de parámetros reales o complejos, el mismo denominó a tales grupos con el nombre de "grupos finitos continuos". Actualmente, estos grupos son denominados «Grupos de Lie». También Lie, acabaría descubriendo lo que el mismo denominaría "Grupos Infinitesimales"; y que si uno es dado, entonces define completamente el grupo de transformaciones en una vecindad de la transformación identidad. En la actualidad, a dichos grupo infinitesimales, se les denomina "Álgebras de Lie", debido a la sugerencia del matemático Hermann Weyl, en su artículo "La estructura y representaciones de grupos continuos"(1935). Elie Cartan había mostrado en su tesis el año 1894, que todo elemento regular en un álgebra de Lie, pertenece a una únicamente determinada subálgebra nilpotente, de dimensión l. En su trabajo, daba una pureba rigurosa del hecho de que el «subgrupo de rango cero» de un grupo de Lie semisimple es conmutativo y puede ser considerado como un conjunto de elementos

del grupo que conmutan con un elemento general(elemento regular) del grupo. Gracias a este hecho, en el presente; este subgrupo es llamado el Subgrupo de Cartan, y el subálgebra del álgebra de Lie correspondiente a este subgrupo es llamado Subálgebra de Cartan.
En 1941, el matemático francés Claude Chevalley, se hizo conocido al otorgar un enfoque más algebraico, a los resultados publicados por su colega, el matemático alemán Hermann Weyl, sobre conjugación de subálgebras de Cartan, cuando la álgebra $\mathfrak{g}$ es semisimple. El trabajo de Chevalley en este aspecto es sorprendente a primera vista, pues ya que el grupo adjunto en sí mismo, no es necesariamente algebraico, este contiene un subgrupo algebraico que tiene la sufiente cantidad de elementos, como para transformar cualquier subálgebra de Cartan, en otra.
Este enfoque algebraico, funciona cuando el álgebra de Lie en cuestión, utiliza como cuerpo de base, a uno que sea algebraicamente cerrado de característica cero. Chevalley consigue la conjugación de cualquier par de subálgebras de Cartan, gracias a resultados de geometría algebraica, aplicados a polinomios en varias variables. Una álgebra de Lie es un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ dotado de un producto(denominado corchete), el cual es bilineal, antisimétrico y que satisface la identidad de Jacobi. Las álgebras de Lie constituyen la base de lo que se conoce como la teoría de Lie. Dentro de esta, similarmente a otras estructuras, se estudian las subálgebras de Lie, ideales, homomorfismos, derivaciones, representaciones, etc.
Ya que, el objeto matemático utilizado son las subálgebras de Cartan; que en particular son maximales nilpotentes, el presente trabajo se inclinará más en aquellos resultados que brinden información sobre la cualidad de nilpotente. Los más utilizados son los siguientes:

- (**Teorema**) Dado un espacio vectorial, de dimensión finita V, sea $\mathfrak{h}$ un subálgebra de $\mathfrak{g}l(V)$, de modo que todo elemento de $\mathfrak{h}$ es nilpotente, entonces existe un elemento $v \in V$, con $v \neq 0$, tal que para todo $A \in \mathfrak{h}$, $Av = 0$.

- (**Teorema de Engel**) Dada una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión finita, si la adjunta de todo elemento de $\mathfrak{g}$ es nilpotente, entonces la álgebra de Lie también es nilpotente.

- (**Descomposición en espacio de pesos**) Suponga que el cuerpo de escalares es algebraicamente cerrado. Sea ρ una representación de $\mathfrak{g}$ en V, donde V es de dimensión finita y $\mathfrak{g}$ es nilpotente. Entonces, existen funcionales lineales $\lambda_1, \dots \lambda_s$, tal que si

$$V_{\lambda_i} = \{v \in V : \forall X \in \mathfrak{g}, \exists n \geq 1, (\rho(X) - \lambda_i(X))^n v = 0\},$$

entonces V_{λ_i} es $\mathfrak{g}$ - invariante, con $i = 1, \ldots, s$ y

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}.$$

El primero, interviene en muchas de las propiedades y resultados necesarios de las subálgebras de Cartan. Respecto al segundo resultado, ayuda a conseguir una descomposición de una álgebra de Lie en espacio de pesos; en particular, para la representación adjunta, el funcional lineal nulo es siempre un peso de tal representación.

Un resultado respecto a las derivaciones de una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ que será desarrollado en el presente trabajo, dice que al tomar D una de ellas y su respectiva descomposición en componentes primarias

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_i \mathfrak{g}_{\lambda_i},$$

entonces $[\mathfrak{g}_{\lambda_i}, \mathfrak{g}_{\lambda_j}] \subset \mathfrak{g}_{\lambda_{i+j}}$. Por tanto, una subálgebra de Cartan es exactamente una subálgebra como $\mathfrak{g}_0$, que es el autoespacio generalizado asociado al autovalor nulo de la adjunta de un elemento regular.

Los elementos regulares jugarán un rol muy importante en el desarrollo del presente trabajo, ya que través de estos, se da la existencia de subálgebras de Cartan, en álgebras de Lie de dimensión finita .
El resultado recíproco; es decir, dada un subálgebra de Cartan de una álgebra de Lie de dimensión finita, entonces esta contiene un elemento regular, será uno de los principales focos de atención del presente trabajo. Este será desarrollado primero de forma particular, para después ver el caso general.
En el caso particular; es decir, cuando el cuerpo de escalares es $\mathbb{R}$, el resultado anterior será desarrollado vía herramientas del análisis como el Teorema de la Función Implícita. Esto es posible ya que $\mathbb{R}$ es completo. Dado este hecho, el resultado anterior cuando el álgebra de Lie es compleja, se obtendrá vía realificaciones. Con estas mismas herramientas, además de algunas otra relacionadas con los conceptos de conexidad y clases de equivalencia de automorfismos de $\mathfrak{g}$, se obtendrá uno de los principales resultados del presente trabajo:

- (**Teorema**) En álgebras de Lie complejas, las subálgebras de Cartan son conjugadas entre sí.

Ahora, al considerar álgebras de Lie sobre cuerpos algebraicamente cerrados de característica cero en general, serán utilizados métodos puramente algebraicos, considerando aplicaciones polinomiales.

En realidad, para este tipo de aplicaciones, se mostrará una versión «análoga» del Teorema de la Función Implícita, que es la siguiente:

- (**Teorema**) Sea $P : V \longrightarrow W$ una aplicación polinomial y supongamos que $d_{X_0}P$ es sobreyectiva para algún $X_0 \in V$. Sea $p \neq 0 \in \mathbb{K}[V]$, entonces existe $q \in \mathbb{K}[W]$ tal que para todo $Y \in W$ tal que $q(Y) \neq 0$, existe $X \in V$, con $p(X) \neq 0$ y tal que $P(X) = Y$.

Finalmente se definirá lo que es la exponencial de una aplicación, donde el contexto es netamente algebraico. Este tipo de aplicaciones serán entonces los automorfismos que buscamos para obtener otro de los resultados principales del presente trabajo:

- (**Teorema**) En una álgebra de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero, las subálgebras de Cartan son dos a dos conjugadas entre sí.

Capítulo 1

Definiciones y Preliminares

Definición 1.1. *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Una* ***álgebra de Lie*** *$\mathfrak{g}$, es un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial dotado de un producto (usualmente llamada corchete o commutador):*

$$\begin{aligned}[,] :&\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}\\ &(X, Y) \mapsto [X, Y],\end{aligned}$$

que satisface las siguientes propiedades:

1. *(**Antisimetría**)* $[X, X] = 0$
2. *(**Identidad de Jacobi**)* $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$,

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Observación 1.0.1. 1. *De (2), tenemos que para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ $[X + Y, X + Y] = 0$; es decir:*

$$[X, X] + [X, Y] + [Y, X] + [Y, Y] = 0,$$

y por (1), $[X, X] = [Y, Y] = 0$, entonces

$$[X, Y] + [Y, X] = 0 \Leftrightarrow [X, Y] = -[Y, X].$$

2. *De (1), haciendo $X = Y$ tenemos que:*

$$2[X, X] = 0.$$

Si $\mathbb{K}$ no es de característica dos, entonces $[X, X] = 0$; es decir, tenemos la equivalencia.

3. *La identidad de Jacobi puede ser reescrita de las siguientes formas, vía (2) y la bilinealidad del corchete:*

(a) $[X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z] + [Y,[Z,X]]$,

(b) $[[X,Y],Z] = [[X,Y],Z] + [Y,[Z,X]]$

4. *Para cualquier* $X \in \mathfrak{g}$*:*

$$[0,X] = \cancel{[0,X]} + 0 = [0+0,X] = \cancel{[0,X]} + [0,X].$$

Luego $[0,X] = 0$*. De manera análoga* $[X,0] = 0$ *y por tanto* $[X,0] = 0 = [0,X]$*.*

5. *Dos elementos* $X, Y \in \mathfrak{g}$ *cualesquiera, tal que* $[X,Y] \neq 0$*, son linealmente independientes sobre* $\mathbb{K}$*. En efecto, sean* $a, b \in \mathbb{K}$ *de modo que:*

$$aX + bY = 0. \qquad (*)$$

Por 4:

$$0 = [0,X] = [aX + bY, X] = a[X,X] + b[Y,X] = -b[X,Y],$$

de modo que $b = 0$*. Del mismo modo:*

$$0 = [0,Y] = [aX + bY, Y] = a[X,Y] + b[Y,Y] = a[X,Y],$$

de mod que $a = 0$*. Así,* X, Y *son linealmente independientes.*

Definición 1.2. *Una álgebra* A*, es un espacio vectorial sobre un cuerpo* $\mathbb{K}$ *dotado de operación binaria* $m(\cdot,\cdot) : A \times A \longrightarrow A$ *que es bilineal, es decir:*

$$m(au + bv, w) = am(u,w) + bm(v,w),$$
$$m(w, au + bv) = am(w,u) + bm(w,v)$$

para todo $a, b \in \mathbb{K}$ *y* $u, v, w \in A$*. La aplicación* $m(\cdot,\cdot)$ *es llamada* ***operación algebraica****. La álgebra* A *se denomina* ***asociativa****, si*

$$m(u, m(v,w)) = m(m(w,v), w).$$

Observación 1.0.2. *A partir de este punto, se denotará* $m(u,v) = u \cdot v$ *o simplemente* uv*. Dado esto, las ecuaciones anteriores se pueden reescribir así:*

$$(au + bv) \cdot w = a(u \cdot w) + b(v \cdot w)$$
$$w \cdot (au + bv) = a(w \cdot u) + b(w \cdot v),$$

y si A *es asociativa:*

$$u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot v) \cdot w.$$

Ejemplo 1.0.1 (Álgebras Asociativas). *1. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Denotamos por $gl(V)$ al conjunto de operadores lineales de V. Entonces $\mathfrak{g}l(V)$, junto con la composición de funciones se convierte en una álgebra asociativa.*

2. Del ejemplo anterior, si V es de dimensión finita, entonces podemos tomar una base de V, para obtener $\mathfrak{g}l(n, \mathbb{K})$, esto es la álgebra asociativa de las matrices de $n \times n$, con entradas en $\mathbb{K}$.

Proposición 1.1. *Sea $(A, \cdot)$ una álgebra asociativa y $[\cdot, \cdot]$ otra operación algebraica en A, tal que para $u, v \in A$:*

$$[u, v] = u \cdot v - v \cdot u,$$

denominado el conmutador de u y v en A. Entonces $(A, [\cdot, \cdot])$ es una álgebra de Lie.

Demostración. 1. (Antisimetría)

$$\begin{aligned} [u, u] &= u \cdot u - u \cdot u \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. (Identidad de Jacobi)

$$\begin{aligned} [u, [v, w]] + [w, [u, v]] + [v, [w, u]] &= \\ [u, v \cdot w - w \cdot v] + [w, u \cdot v - v \cdot u] + [v, w \cdot u - u \cdot w] &= \\ u \cdot (v \cdot w - w \cdot v) - (v \cdot w - w \cdot v) \cdot u & \\ +w \cdot (u \cdot v - v \cdot u) - (u \cdot v - v \cdot u) \cdot w & \\ +v \cdot (w \cdot u - u \cdot w) - (w \cdot u - u \cdot w) \cdot v &= \\ u \cdot (v \cdot w) - u \cdot (w \cdot v) - (v \cdot w) \cdot u + (w \cdot v) \cdot u & \\ +w \cdot (u \cdot v) - w \cdot (v \cdot u) - (u \cdot v) \cdot w + (v \cdot u) \cdot w & \\ +v \cdot (w \cdot u) - v \cdot (u \cdot w) - (w \cdot u) \cdot v + (u \cdot w) \cdot v &= \\ u \cdot (v \cdot w) - u \cdot (w \cdot v) - (v \cdot w) \cdot u + (w \cdot v) \cdot u & \\ +w \cdot (u \cdot v) - (w \cdot v) \cdot u - u \cdot (v \cdot w) + (v \cdot u) \cdot w & \\ +(v \cdot w) \cdot u - (v \cdot u) \cdot w - w \cdot (u \cdot v) + u \cdot (w \cdot v) &= 0, \end{aligned}$$

pues $(A, \cdot)$ es asociativa.
Por tanto, $(A, \cdot, [,])$ define una estructura de álgebra de Lie.

$\square$

Ejemplo 1.0.2. *Por la proposición anterior, $gl(V)$ define una álgebra de Lie, junto con la composición de funciones, y lo mismo para $\mathfrak{g}l(n, \mathbb{K})$ junto con la multiplicación de matrices, si V es de dimensión finita.*

Ejemplo 1.0.3. *Sean* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *y el espacio vectorial* $\mathbb{R}^3$*, sobre* $\mathbb{K}$*. El* ***producto vectorial*** *es una función bilineal* $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$*, tal que para cualesquiera* $x = (x_1, x_2, x_3)$*,* $y = (y_1, y_2, y_3)$*:*

$$x \times y = (x_2y_3 - x_3y_2, -(x_1y_3 - x_3y_1), x_1y_2 - x_2y_1).$$

Entonces $(\mathbb{R}^3, \times)$ *es una álgebra de Lie.*
En efecto, si además $z = (z_1, z_2, z_3)$*, entonces*

$$\begin{aligned}
&[x+y, z] = (x+y) \times z \\
&= ((x_2+y_2)z_3 - (x_3+y_3)z_2, (x_3+y_3)z_1 - (x_1+y_1)z_3, (x_1+y_1)z_2 - (x_2+y_2)z_1)
\end{aligned}$$

multiplicando y asociando:

$$\begin{aligned}
&= (x_2y_3 - x_3y_2, -(x_1y_3 - x_3y_1), x_1y_2 - x_2y_1) \\
&+ (y_2z_3 - y_3z_2, -(y_1z_3 - y_3z_1), y_1z_2 - y_2z_1) \\
&= (x \times z) + (y \times z) \\
&= [x, y] + [y, z].
\end{aligned}$$

Análogo para $[x, y+z]$ *y la propiedad* $[ax, y] = a[x, y] = [x, ay]$*. La antisimetría es un hecho muy conocido del producto vectorial. Ahora, para la Identidad de Jacobi, será necesaria la siguiente propiedad:*

$$x \times (y \times z) = (x \cdot z)y - (x \cdot y)z, \tag{$*$}$$

donde " $\cdot$ *" es el producto escalar usual de* $\mathbb{R}^3$*. Por tanto, para los demás sumandos de la identidad de Jacobi:*

$$z \times (x \times y) = (z \cdot y)x - (z \cdot x)y \qquad \text{y} \qquad y \times (z \times x) = (y \cdot x)z - (y \cdot z)x,$$

al sumarlos todos obtenemos que $x \times (y \times z) + z \times (x \times y) + y \times (z \times x) = 0$*.*
Así, $(\mathbb{R}^3, \times)$*, es una álgebra de Lie.*

Proposición 1.2 (Complexificación de una Álgebra de Lie)**.** *Sea* $\mathfrak{g}$ *una álgebra de Lie real de dimensión finita y* $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ *su complexificación. Entonces el corchete sobre* $\mathfrak{g}$ *se extiende a* $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$*, que hace de* $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ *una álgebra de Lie compleja, denominada* complexificación *de la álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$*.*

Demostración. Sean $X_1 + iX_2, Y_1 + iY_2 \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. La multiplicación por escalares complejo esta dada por:

$$i(X_1 + iX_2) = -X_2 + iX_1.$$

Extendemos el corchete en $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ siendo:

$$[X_1 + iX_2, Y_1 + iY_2] = ([X_1, Y_1] - [X_2, Y_2]) + i([X_1, Y_2] + [X_2, Y_1]),$$

el cual satisface las tres condiciones de la definición de álgebras de Lie, en efecto:

1. (Bilinealidad) Sea $\alpha = (a+ib) \in \mathbb{C}$, entonces:

$$\begin{aligned}
[\alpha(X_1+iX_2), Y_1+iY_2] &= [(a+ib)(X_1+iX_2), Y_1+iY_2] \\
&= [a(X_1+iX_2)+ib(X_1+iX_2), Y_1+iY_2] \\
&= [aX_1+a(iX_2)+b(iX_1)-bX_2, Y_1+iY_2] \\
&= [aX_1-bX_2+i(aX_2+bX_1), Y_1+iY_2] \\
= [aX_1-bX_2, Y_1]-[aX_2+bX_1, Y_2] &+ i([aX_1-bX_2, Y_2]+[aX_2+bX_1, Y_1]) \\
&= a[X_1,Y_1]-b[X_2,Y_1]-a[X_2,Y_2]-b[X_1,Y_2] \\
&+ia[X_1,Y_2]-bi[X_2,Y_2]+ia[X_2,Y_1]+ib[X_1,Y_1] \\
&= (a+ib)([X_1,Y_1]-[X_2,Y_2])+i([X_1,Y_2]+[X_2,Y_1]) \\
&= \alpha[X_1+iX_2, Y_1+iY_2].
\end{aligned}$$

Análogo podemos concluir que:

$$[X_1+iX_2, \alpha(Y_1+iY_2)].$$

La suma por la izquierda, con $Z_1+iZ_2 \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$:

$$\begin{aligned}
[(X_1+iX_2)+(Y_1+iY_2), Z_1+iZ_2] &= [(X_1+Y_1)+i(X_2+Y_2), Z_1+iZ_2] \\
&= [X_1+Y_1, Z_1]-[X_2+Y_2, Z_2] \\
&+ i([X_1+Y_1, Z_2]+[X_2+Y_2, Z_1]) \\
&= [X_1+iX_2, Z_1+iZ_2]+[Y_1+iY_2, Z_1+iZ_2].
\end{aligned}$$

Análogo concluimos también que:

$$[X_1+iX_2, (Y_1+iY_2)+(Z_1+iZ_2)].$$

2. (Antisimetría)

$$\begin{aligned}
[X_1+iX_2, Y_1+iY_2] &= [X_1,Y_1]-[X_2,Y_2]+i([X_1,Y_2]+[X_2,Y_1]) \\
&= [Y_2,X_2]-[Y_1,X_1]-i([Y_2,X_1]+[Y_1,X_2]) \\
&= -([Y_1,X_1]-[Y_2,X_2]+i([Y_1,X_2]+[Y_2,X_1])) \\
&= -[Y_1+iY_2, X_1+iX_2]
\end{aligned}$$

3. (Identidad de Jacobi)

$$\begin{aligned}
[X_1+iX_2, [Y_1+iY_2, Z_1+iZ_2]] &= [X_1,[Y_1,Z_1]]-[X_1,[Y_2,Z_2]]-[X_2,[Y_1,Z_2]]-[X_2,[Y_2,Z_1]] \\
&= i[X_1,[Y_1,Z_2]]+i[X_1,[Y_2,Z_1]]+i[X_2,[Y_1,Z_1]]-i[X_2,[Y_2,Z_2]]. \qquad (*)
\end{aligned}$$

También:

$$[Z_1 + iZ_2, [X_1 + iX_2, Y_1 + iY_2]] = [Z_1, [X_1, Y_1]] - [Z_1, [X_2, Y_2]] - [Z_2, [X_1, Y_2]] - [Z_2, [X_2, Y_1]] + i[Z_1, [X_1, Y_2]] + i[Z_1, [X_2, Y_1]] + i[Z_2, [X_1, Y_1]] - i[Z_2, [X_2, Y_2]]. \quad (**)$$

Por otra parte:

$$[Y_1 + iY_2, [Z_1 + iZ_2, X_1 + iX_2]] = [Y_1, [Z_1, X_1]] - [Y_1, [Z_2, X_2]] - [Y_2, [Z_1, X_2]] - [Y_2, [Z_2, X_1]] + i[Y_1, [Z_1, X_2]] + i[Y_1, [Z_2, X_1]] + i[Y_2, [Z_1, X_1]] - i[Y_2, [Z_2, X_2]]. \quad (***)$$

Sumando (1),(2) y (3), tenemos que:

$$[X_1+iX_2, [Y_1+iY_2, Z_1+iZ_2]]+[Z_1+iZ_2, [X_1+iX_2, Y_1+iY_2]]+[Y_1+iY_2, [Z_1+iZ_2, X_1+iX_2]] = 0$$

Luego de $(*), (**), (***)$ tenemos la identidad de Jacobi en $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Así, de 1,2 y 3, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ es una álgebra de Lie compleja. □

1.1. Subálgebras

Definición 1.3. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie. Un subespacio $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, es una* ***subálgebra****, si $[X, Y] \in \mathfrak{h}$, para todo $X, Y \in \mathfrak{h}$. Si $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$, denotamos tal hecho siendo $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$.*

Definición 1.4. *Si X, Y son subconjuntos de una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, entonces $[X, Y] = Span\{[X_1, Y_1] : X_1 \in X, Y_1 \in Y\}$, denotará al subespacio generado por los corchetes de elementos de X e Y. Es claro que $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ si y solo sí $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$.*
Cuando $X = Y = \mathfrak{g}$, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ se denomina la subálgebra derivada *de $\mathfrak{g}$, denotada por $\mathfrak{g}'$.*

Proposición 1.3. *Sean $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \mathfrak{n}, \mathfrak{p}$ subespacios de $\mathfrak{g}$, entonces*

1. $[\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}] \subset [\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}] + [\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}]$.
2. $[\mathfrak{n}, \mathfrak{p}] = [\mathfrak{p}, \mathfrak{n}]$.
3. $[\mathfrak{h}, [\mathfrak{n}, \mathfrak{p}]] \subset [\mathfrak{n}, [\mathfrak{p}, \mathfrak{h}]] + [\mathfrak{p}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{n}]]$

Demostración. 1. Sean $X_1 + X_2 \in \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ y $H \in \mathfrak{h}$, entonces $[X_1 + X_2, H] \in [\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}]$ y

$$[X_1 + X_2, H] = [X_1, H] + [X_2, H].$$

Por lo tanto, $[X_1 + X_2, H] \in [\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}] + [\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}]$; es decir, $[\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}] \subset [\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}] + [\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}]$.

2. Sea $N \in \mathfrak{n}$ y $P \in \mathfrak{p}$, entonces
$$\begin{aligned} [N, P] \in [\mathfrak{n}, \mathfrak{p}] &\Leftrightarrow [N, P] = -[P, N] \\ &\Leftrightarrow [N, P] = [P, N'] && \text{(por la antisimetría)} \\ &\Leftrightarrow [N, P] \in [\mathfrak{p}, \mathfrak{n}]. && \text{(donde } N' = -N\text{)} \end{aligned}$$

3. De la observación 1.0.1, tenemos que:
$$[H, [N, P]] = [[H, N], P] + [N, [P, H]].$$
Así, $[H, [N, P]] \in [[\mathfrak{h}, \mathfrak{n}], \mathfrak{p}] + [\mathfrak{n}[\mathfrak{p}, \mathfrak{h}]]$. Del item anterior, $[[\mathfrak{h}, \mathfrak{n}], \mathfrak{p}] = [\mathfrak{p}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{n}]]$. Por tanto $[H, [N, P]] \in [\mathfrak{n}[\mathfrak{p}, \mathfrak{h}]] + [\mathfrak{p}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{n}]]$; es decir $[\mathfrak{h}, [\mathfrak{n}, \mathfrak{p}]] \subset [\mathfrak{n}, [\mathfrak{p}, \mathfrak{h}]] + [\mathfrak{p}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{n}]]$.

□

Ejemplo 1.1.1 (Álgebras Abelianas). *Cualquier espacio vectorial V dotado de un corchete de Lie, definido por $[X, Y] = 0$, para todo $X, Y \in V$, define una estructura de álgebra de Lie conocida como álgebra de Lie abeliana.*

1. *Cualquier álgebra de Lie, de dimensión uno es abeliana, por la antisimetría del corchete.*

2. *Si $\mathfrak{h}$ es un subespacio de una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión uno, entonces $\mathfrak{h}$ es una subálgebra abeliana de $\mathfrak{g}$. En sí, todo subespacio de una subálgebra abeliana, es una subálgebra.*

Ejemplo 1.1.2 (Subálgebras de $\mathfrak{g}l(n, \mathbb{K})$). *1. El espacio de las matrices diagonales es una subálgebra abeliana de $\mathfrak{g}l(n, \mathbb{K})$. En efecto, sean $A = diag\{a_1, ..., a_n\}$ y $B = diag\{b_1, ..., b_n\}$ dos matrices diagonales, entonces:*
$$\begin{aligned} [A, B] &= AB - BA \\ &= diag\{a_1 b_1, \ldots, a_n b_n\} - diag\{b_1 a_1, \ldots, b_n a_n\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. *Sea $\mathfrak{s}o(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{g}l(n, \mathbb{K}) : X + X^t = 0$; es decir, el espacio de matrices antisimétricas, entonces, $\mathfrak{s}o(n, \mathbb{K})$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}l(n, \mathbb{K})$.*
En efecto, dados $X, Y \in \mathfrak{s}o(n, \mathbb{K})$,
$$\begin{aligned} [X, Y]^t &= (XY - YX)^t \\ &= (XY)^t - (YX)^t \\ &= Y^t X^t - (X^t Y^t) && \text{(propiedad de la transpuesta)} \\ &= (-1)Y(-1)X - ((-1)X(-1)Y)) \\ &= YX - XY \\ &= -(XY - YX) \\ &= -[X, Y]. \end{aligned}$$

Por tanto, $\mathfrak{so}(n, \mathbb{K})$ *es una subálgebra de* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$*.*

3. *Sea* $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) : tr(X) = 0\}$*, el subespacio de matrices de traza cero.*
   Para $X, Y \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$*,*

$$\begin{aligned} tr([X, Y]) &= tr(XY - YX) \\ &= tr(XY) - tr(YX) \end{aligned}$$

   como $tr(XY) = tr(YX)$*,*

$$tr([X, Y]) = 0.$$

   Por tanto, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ *es un subálgebra de* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$*.*

4. *El subespacio de matrices triangulares superiores; es decir,*

$$\{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) : X = \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}\},$$

   es una subálgebra de Lie.

Ejemplo 1.1.3. *Es posible caracterizar todas las álgebras de Lie de dimensión dos. En efecto, para una álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$*, consideremos una base* $\{X', Y'\}$*. Sean* $W, Z \in \mathfrak{g}$*, entonces:*

$$W = a'X' + b'Y' \qquad \text{y} \qquad Z = c'X' + d'Y'$$

por tanto,

$$\begin{aligned} [W, Z] &= [a'X' + b'Y', c'X' + d'Y'] \\ &= a'd'[X', Y'] - c'b'[X', Y'] \\ &= (a'd' - c'b')[X', Y']. \end{aligned}$$

Si $[X'.Y'] = 0$*, entonces* $\mathfrak{g}$ *es abeliana.*
Por otra parte si $[X'.Y'] \neq 0$*, sea* $Y = [X', Y']$*. Luego, para* $X \notin Span\{Y\}$*, el conjunto* $\{X, Y\}$ *constituye una base de* $\mathfrak{g}$*. Ahora:*

$$X' = aX + bY \qquad \text{y} \qquad Y' = cX + dY.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} [X', Y'] &= [aX + bY, cX + dY] \\ &= (ad - cb)[X, Y]. \end{aligned}$$

Ya que el corchete es bilineal, para $ad - cb \neq 0$ *podemos poner* $X = (ad - bc)^{-1}X$ *;es decir, si* $\mathfrak{g}$ *no es abeliana, existe una base* $\{X, Y\}$ *de* $\mathfrak{g}$*, tal que* $[X, Y] = Y$*.*

1.2. Generalidades Algebraicas

1.2.1. Homomorfismos

Definición 1.5. *Sean $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$, dos álgebras de Lie, sobre $\mathbb{K}$ y $\phi : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_2$ una transformación lineal.*

1. *ϕ es un **homomorfismo**, si $\phi([X,Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$.*
2. *ϕ es un **isomorfismo**, si es un homomorfismo inversible.*
3. *ϕ es un **automorfismo**, si ϕ es un isomorfismo y $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2$.*

Si existe un isomorfismo entre $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$, entonces decimos que $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$ son isomorfos, denotado por $\mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{g}_2$.

Ejemplo 1.2.1. *Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$. Consideremos una base $\alpha = \{M_1, M_2, M_3\}$ de $\mathfrak{g}$, donde*

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces tenemos las siguientes igualdades: $[M_1, M_2] = M_3$, $[M_2, M_3] = M_1$, $[M_3, M_1] = M_2$. Sean $X, Y \in \mathfrak{g}$, luego

$$[X,Y] = (x_2y_3 - x_3y_2)M_1 + (-(x_1y_3 - x_3y_1))M_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)M_3.$$

Sea la correspondencia siguiente:

$$\begin{aligned} \phi : (\mathbb{R}^3, \mathbb{K}) &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto \phi(x_1, x_2, x_3) = x_1M_1 + x_2M_2 + x_3M_3. \end{aligned}$$

Entonces ϕ es un isomorfismo entre las álgebras de Lie $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ del ejemplo 1.0.3 y $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$.

Ejemplo 1.2.2. *Sea $P \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ una matriz invertible. Entonces, la conjugación por P:*

$$\begin{aligned} \phi : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}) \\ A &\mapsto \phi(A) = PAP^{-1}, \end{aligned}$$

define un automorfismo de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$. En efecto,

1. (Linealidad) Para $A, B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ y $a, b \in \mathbb{K}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\phi(aA + bB) &= P(aA + bB)P^{-1}\\ &= (aPA + bPB)P^{-1}\\ &= aPAP^{-1} + bPBP^{-1}\\ &= a\phi(A) + b\phi(B).\end{aligned}$$

2. (Preservación del corchete)

$$\begin{aligned}\phi([A, B]) &= P([A, B])P^{-1}\\ &= P(AB - BA)P^{-1}\\ &= PABP^{-1} - PBAP^{-1}\\ &= PA(P^{-1}P)BP^{-1} - PB(P^{-1}P)AP^{-1}\\ &= (PAP^{-1})(PBP^{-1}) - (PBP^{-1})(PAP^{-1})\\ &= [PAP^{-1}, PBP^{-1}]\\ &= [\phi(A), \phi(B)]\end{aligned}$$

3. (Inyectiva) Basta verificar, que $ker\ \phi = 0$. Si $A \in ker\ \phi$, entonces

$$\begin{aligned}\phi(A) &= PAP^{-1}\\ &= 0\end{aligned}$$

   entonces,

$$\begin{aligned}PA(P^{-1}P) &= 0P\\ PA &= 0\\ (P^{-1}P)A &= P^{-1}0\\ A &= 0.\end{aligned}$$

   Por tanto, $ker\ \phi$ es inyectiva.

4. (Sobreyectiva) Sea $B = P^{-1}AP$, entonces

$$\begin{aligned}\phi(B) &= PBP^{-1}\\ &= P(P^{-1}AP)P^{-1}\\ &= A.\end{aligned}$$

   Por tanto, $A \in im\phi$, y por tanto ϕ es sobreyectiva.

En resumen, por $(1), (2), (3), (4)$, ϕ es un automorfismo de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.

Ejemplo 1.2.3. *La aplicación traza*

$$tr : \mathfrak{gl}(V) \longrightarrow \mathbb{K},$$

vista en el ejemplo 1.1.2, es un ejemplo de homomorfismo de álgebras de Lie, pues al ser $tr(XY - YX) = 0$ para cualesquiera $X, Y \in V$, esto implica que $tr[X,Y] = 0 = [trX, trY]$, pues $\mathbb{K}$ visto como una álgebra de Lie, es unidimensional y por tanto abeliana.

1.2.2. Construcciones con Ideales y Cocientes

Definición 1.6. *Sea $\mathfrak{h}$ un subespacio de una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{h}$ es un **ideal**, si $[X,Y] \in \mathfrak{h}$, para todo $X \in \mathfrak{g}$ y $Y \in \mathfrak{h}$.*

Observación 1.2.1. *Por la antisimetría del corchete, los ideales por la derecha, coinciden con los ideales por la izquierda.*
La definición anterior, también puede replantearse como sigue:

$$\mathfrak{h} \textit{ es ideal de } \mathfrak{g} \textit{ si y solo sí } [\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}.$$

Ejemplo 1.2.4. *Todo ideal es una subálgebra, pero no toda subálgebra es un ideal. En efecto, sea $\mathfrak{h} = Span\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\} \leq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Luego, para la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, su respectivo conmutador:*

$$\begin{aligned}
[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

no es un elemento de $\mathfrak{h}$.

Proposición 1.4. *Sean $\mathfrak{h}_1$ y $\mathfrak{h}_2$ subespacios de $\mathfrak{g}$:*

1. *$\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ y $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ son ideales, cuando $\mathfrak{h}_1$ y $\mathfrak{h}_2$, también lo son.*
2. *Si $\mathfrak{h}_1$ es una subálgebra y $\mathfrak{h}_2$ es un ideal, entonces $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ y $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ son subálgebras.*

Demostración. Sean X_1, X_2 en $\mathfrak{h}_1$ y $\mathfrak{h}_2$, respectivamente y $X \in \mathfrak{g}$, entonces

1.

$$[X, X_1 + X_2] = [X, X_1] + [X, X_2]. \tag{$*$}$$

Como $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ son ideales de $\mathfrak{g}$, entonces en $(*)$, $[X, X_1] \in \mathfrak{h}_1$ y $[X, X_2] \in \mathfrak{h}_2$. Por lo tanto $[X, X_1 + X_2] \in \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$, para todo $X \in \mathfrak{g}$ y por ende, $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ es un ideal de $\mathfrak{g}$. Por otra parte, para $Y \in \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$, tenemos que $[X, Y] \in \mathfrak{h}_1$ y $[X, Y] \in \mathfrak{h}_2$ o $[X, Y] \in \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$, entonces, $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ también es un ideal de $\mathfrak{g}$.

2. Ahora, cuando $\mathfrak{h}_1$ es un subálgebra, sean $X_1 + X_2, Y_1 + Y_2 \in \mathfrak{h}_1 + h_2$, entonces

$$\begin{aligned} [X_1 + X_2, Y_1 + Y_2] &= [X_1, Y_1 + Y_2] + [X_2, Y_1 + Y_2] \\ &= [X_1, Y_1] + [X_1, Y_2] + [X_2, Y_1] + [X_2, Y_2]. \end{aligned}$$

Entonces, $[X_1, Y_1] \in \mathfrak{h}_1$ por ser $\mathfrak{h}_1$ subálgebra, y $[X_1, Y_2] + [X_2, Y_1] + [X_2, Y_2] \in h_2$, por ser este ideal de $\mathfrak{g}$. Así, $\mathfrak{h}_1 + h_2$ es un subálgebra de $\mathfrak{g}$. Finalmente, la intersección de subálgebras, es también una subálgebra y como todo ideal es una subálgebra, entonces tenemos que $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$ cuando $\mathfrak{h}_1$ es una subálgebra.

$\square$

Proposición 1.5. *Sea $\phi : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_2$ un homomorfismo de álgebras de Lie, entonces*

1. *$ker\,\phi$ es un ideal de $\mathfrak{g}_1$.*
2. *$im\,\phi$ es un subálgebra de $\mathfrak{g}_2$.*

Demostración. 1. Sea $X_1 \in \mathfrak{g}_1$, luego para todo $Y \in ker\,\phi$,

$$\phi([X_1, Y]) = [\phi(X_1), \phi(Y)] = [\phi(X_1), 0] = 0.$$

Por lo tanto, $[X_1, Y] \in ker\,\phi$; es decir, $\ker\,\phi$ es un ideal de $\mathfrak{g}_1$.

2. Para $Y, Z \in im\,\phi$, existen $Y', Z' \in \mathfrak{g}_1$, tal que

$$\phi(Y') = Y, \phi(Z') = Z,$$

respectivamente.
Ahora,

$$\begin{aligned} [Y, Z] &= [\phi(Y'), \phi(Z')] \\ &= \phi([Y', Z']); \end{aligned}$$

es decir, $[Y, Z] \in im\,\phi$.

$\square$

Definición 1.7. *Sea h un ideal de $\mathfrak{g}$, entonces considerando el espacio vectorial cociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, se puede dotar a $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, una estructura de álgebra de Lie como sigue:*

$$[\overline{X}, \overline{Y}] = \overline{[X, Y]},$$

donde $\overline{X}$ denota la clase de equivalencia $X + \mathfrak{h} = \{X + H : H \in \mathfrak{h}\}$.

Proposición 1.6. *El espacio vectorial $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ es una álgebra de Lie, sobre $\mathbb{K}$.*

Demostración.

1. Sean $\overline{X} = \overline{X'}$ y $\overline{Y} = \overline{Y'}$, entonces $X - X' \in \mathfrak{h}$ y $Y - Y' \in \mathfrak{h}$.
   Ahora, como $\mathfrak{h}$ es un ideal:

   $$[X - X', Y'] = [X, Y'] - [X', Y'] \in \mathfrak{h}.$$

   De la misma forma:

   $$[X, Y - Y'] = [X, Y] - [X, Y'] \in \mathfrak{h},$$

   Entonces

   $$[X, Y] - [X, Y'] + [X, Y'] - [X', Y'] = [X, Y] - [X', Y'] \in \mathfrak{h}.$$

   Esto es equivalente decir que $\overline{[X, Y]} = \overline{[X', Y']}$. Por lo tanto, el corchete de Lie, para $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ está bien definido.

2. (Bilinealidad)

   $$\begin{aligned} \overline{[X + Y, Z]} &= \overline{[X, Z] + [Y, Z]} \\ &= \overline{[X, Z]} + \overline{[Y, Z]} \\ &= [\overline{X}, \overline{Z}] + [\overline{Y}, \overline{Z}] \end{aligned}$$

   Análogamente:

   $$\begin{aligned} \overline{[Z, X + Y]} &= \overline{[Z, X] + [Z, Y]} \\ &= \overline{[Z, X]} + \overline{[Z, Y]} \\ &= [\overline{Z}, \overline{X}] + [\overline{Z}, \overline{Y}]. \end{aligned}$$

   Sea $a \in \mathbb{K}$,

   $$\begin{aligned} a\overline{[X, Y]} &= \overline{[aX, Y]} \\ &= [\overline{aX}, \overline{Y}] \\ &= [a\overline{X}, \overline{Y}] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} a\overline{[X,Y]} &= \overline{[X,aY]} \\ &= [\overline{X},\overline{aY}] \\ &= [\overline{X},a\overline{Y}], \end{aligned}$$

para cualesquiera $\overline{X},\overline{Y} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

3. (Antisimetría)

$$[\overline{X},\overline{Y}] = \overline{[X,Y]} = \overline{-[Y,X]} = -\overline{[Y,X]} = -[\overline{Y},\overline{X}].$$

4. (Identidad de Jacobi) Sean $X,Y,Z \in \mathfrak{g}$. Al ser $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie, entonces
$$[X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] = 0.$$
Por la buena definición del corchete en $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$:

$$\begin{aligned} &\overline{[X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]]} = \overline{[X,[Y,Z]]} + \overline{[Z,[X,Y]]} + \overline{[Y,[Z,X]]} \\ &= [\overline{X},\overline{[Y,Z]}] + [\overline{Z},\overline{[X,Y]}] + [\overline{Y},\overline{[Z,X]}] \\ &= [\overline{X},[\overline{Y},\overline{Z}]] + [\overline{Z},[\overline{X},\overline{Y}]] + [\overline{Y},[\overline{Z},\overline{X}]] \\ &= \overline{0}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, de 1,2,3 y 4, $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ es una álgebra de Lie con el corchete definido en 1.7. □

Proposición 1.7. *Sea $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, donde para $X \in \mathfrak{g}$, $\pi(X) = \overline{X}$. Entonces, π es un homomorfismo sobreyectivo.*

Demostración. Sean $X,Y \in \mathfrak{g}$ y $a \in \mathbb{K}$,

1. (Linealidad)

$$\begin{aligned} \pi(X+Y) &= \overline{X+Y} \\ &= \overline{X} + \overline{Y} \\ &= \pi(X) + \pi(Y) \end{aligned}$$

;y

$$\begin{aligned} \pi(aX) &= \overline{aX} \\ &= a\overline{X} \\ &= a\pi(X) \end{aligned}$$

2. (Homomorfismo)

$$\begin{aligned}\pi([X,Y]) &= \overline{[X,Y]}\\ &= [\overline{X},\overline{Y}]\\ &= [\pi(X),\pi(Y)].\end{aligned}$$

3. (Sobreyectividad) Si tomamos $\overline{X} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, entonces para $X \in \mathfrak{g} - \mathfrak{h}$, tenemos que $\overline{X} = \pi(X)$. Ahora, si $X \in \mathfrak{h}$ entonces $\overline{X} = \overline{0}$.

Por tanto de $(1), (2), (3)$, π es un homomorfismo sobreyectivo. □

Teorema 1.1.
- *Sea $\phi : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_2$, un homomorfismo de álgebras de Lie, entonces*

$$\mathfrak{g}_1/ker\ \phi \cong im\ \phi.$$

- *Si $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{h}'$ son ideales de $\mathfrak{g}$, entonces*

$$\mathfrak{h} + \mathfrak{h}'/\mathfrak{h}' \cong \mathfrak{h}/(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}').$$

Demostración.
- La correspondencia α de $\mathfrak{g}_1/ker\ \phi$ a $im\ \phi$; tal que $\alpha(\overline{X_1}) = \phi(X_1)$ es un isomorfismo, en efecto:

 1. (Buena Definición) Sean $\overline{Y}, \overline{Z} \in \mathfrak{g}_1/ker\ \phi$ tal que $\overline{Y} = \overline{Z}$. Sea $Y, Z \in \mathfrak{g}_1$ representantes de clase de $\overline{Y}, \overline{Z}$ respectivamente, entonces $Y - Z \in ker\ \phi$, luego

 $$\phi(Y - Z) = \phi(Y) - \phi(Z) = 0.$$

 Por lo tanto $\phi(Y) = \alpha(\overline{Y}) = \alpha(\overline{Z}) = \phi(Z)$.

 2. (Linealidad)

 $$\begin{aligned}\alpha(\overline{Y} + \overline{Z}) &= \alpha(\overline{Y + Z})\\ &= \phi(Y + Z)\\ &= \phi(Y) + \phi(Z)\\ &= \alpha(\overline{Y}) + \alpha(\overline{Z}).\end{aligned}$$

 Además, para $a \in \mathbb{K}$,

 $$\alpha(a\overline{Y}) = a(\alpha\overline{Y}) = \phi(aY) = a\phi(Y) = a\alpha(\overline{Y}).$$

 3. (Homomorfismo)

 $$\begin{aligned}\alpha([\overline{Y}, \overline{Z}]) &= \alpha(\overline{[Y, Z]})\\ &= \phi([Y, Z])\\ &= [\phi(Y), \phi(Z)]\\ &= [\alpha(\overline{Y}), \alpha(\overline{Z})].\end{aligned}$$

4. (Inyectividad) Si $\alpha(\overline{Y}) = \alpha(\overline{Z})$, entonces $\phi(Y) - \phi(Z) = \phi(Y - Z) = 0$. Esto implica que $Y - Z \in ker\ \phi$ y por tanto $\overline{Y} = \overline{Z}$.
5. (Sobreyectividad) Sea $Y \in im\ \phi$, entonces existe $Z \in \mathfrak{g}_1$, tal que $\phi(Z) = Y$, es decir $\alpha(\overline{Z}) = Y$, $(im\ \phi = \alpha(\mathfrak{g}_1/ker\ \phi))$.

Así, de 1),2,3,4,5, α es un isomorfismo de álgebras de Lie.

El segundo item es consecuencia inmediata de lo mostrado recientemente. En efecto, la correspondencia que permite el isomorfismo es el siguiente:

$$\begin{aligned}\phi :&\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2 \longrightarrow \mathfrak{h}_2/(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)\\ &(X_1 + X_2) \longmapsto \phi(X_1 + X_2) = \overline{X_2},\end{aligned}$$

cuyo codominio es una álgebra de Lie pues $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ es un ideal de $\mathfrak{g}$, por la proposición 1.4.

1. ϕ esta bien definida, pues para cualesquiera $X_1 + X_2$, $Y_1 + Y_2 \in h_1 + \mathfrak{h}_2$ de modo que $X_1 + X_2 = Y_1 + Y_2$; es decir, $X_1 - Y_1 = Y_2 - X_2$. Esto último implica que $X_1 - Y_1 \in \mathfrak{h}_2$, en consecuencia $X_1 - Y_1 \in \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$. Ahora por la proyección canónica, tenemos que $\overline{X_1 - Y_1} = \overline{0} = \overline{Y_2 - X_2}$. Así $\overline{Y_2 - X_2} = \overline{Y_2} - \overline{X_2} = \overline{0}$.
   Por tanto $\overline{Y_2} = \overline{X_2}$ o equivalentemente $\phi(X_1 + X_2) = \phi(Y_1 + Y_2)$.
2. (Linealidad) Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}\phi(a(X_1 + X_2) + b(Y_1 + Y_2)) &= \phi(aX_1 + bY_1 + aX_2 + bY_2)\\ &= \overline{aX_2 + bY_2}\\ &= a\phi(X_1 + X_2) + b\phi(Y_1 + Y_2).\end{aligned}$$

3. (Preservación del Corchete)

$$\phi([X_1 + X_2, Y_1 + Y_2]) = \phi([X_1, Y_1] + [X_1, Y_2] + [X_2, Y_1] + [X_2, Y_2]),$$

como $[X_1, Y_1] \in \mathfrak{h}_1$ y $[X_1, Y_2], [X_2, Y_1] \in \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$,

$$\begin{aligned}\phi([X_1 + X_2, Y_1 + Y_2]) &= \overline{[X_2, Y_2]}\\ &= [\overline{X_2}, \overline{Y_2}]\\ &= [\phi(X_1 + X_2), \phi(Y_1 + Y_2)].\end{aligned}$$

Por lo tanto de (1), (2) y (3), ϕ es un homomorfismo. Entonces del item anterior, tenemos que $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2/ker(\phi) \cong im(\phi)$, lo cual indica que hace falta verificar que $ker(\phi) = \mathfrak{h}_1$ y $im(\phi) = \mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$.

- ($ker(\phi) = \mathfrak{h}_1$) En efecto,

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 \in ker(\phi) &\Leftrightarrow \phi(X_1 + X_2) = \overline{0} \\ &\Leftrightarrow \phi(X_2) = \overline{0} \\ &\Leftrightarrow X_2 \in \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2 \qquad (h_1 \text{ y } \mathfrak{h}_2 \text{ son ideales de } \mathfrak{g}) \\ &\Leftrightarrow X_1 + X_2 \in \mathfrak{h}_1. \end{aligned}$$

- ($im(\phi) = \mathfrak{h}_2/h_1 \cap \mathfrak{h}_2$) Para cualquier $Z_2 \in \mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$, existe $Z_1\mathfrak{h}_1$, tal que $\phi(Z_1 + Z_2) = \overline{Z_2}$. Por tanto $im(\phi) \supset \mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$.

En conclusión, $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1 \cong \mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$.

□

Ejemplo 1.2.5. *Sean*

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{g}l(3, \mathbb{K}) : X = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\}$$

y

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g}l(3, \mathbb{K}) : X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\}.$$

*Notemos que $\mathfrak{h}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$, ya que si $X \in \mathfrak{h}$ y $Y \in \mathfrak{g}$ son cualquiera, entonces $[X, Y] = 0$. Entonces el espacio cociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ es una álgebra abeliana, pues dados cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{g}$, tenemos que $[X, Y] \in \mathfrak{h}$. Por tanto $\overline{[X, Y]} = [\overline{X}, \overline{Y}] = \overline{0}$. La álgebra $\mathfrak{g}$ es conocida como **álgebra de Heisenberg**.*

1.2.3. Extensión del cuerpo de escalares

Definición 1.8. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $\overline{\mathbb{K}}$ una extensión de $\mathbb{K}$. Sea también $\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}$ el espacio vectorial sobre $\overline{\mathbb{K}}$. Los elementos de $\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}$ son de la forma $X = \sum a_i X_i$ con $a_i \in \overline{\mathbb{K}}, X_i \in \mathfrak{g}$.*
Para $X = \sum a_i X_i, Y = \sum b_i Y_i \in \mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}$, se define:

$$[X, Y] = \sum a_i b_j [X_i, Y_j].$$

Proposición 1.8. *El corchete de la definición 1.8 asociado a $\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}$, define una estructura de álgebra de Lie*

Demostración. Ya que la bilinealidad, antisimetría y la identidad de Jacobi, son propiedades de $\mathfrak{g}$, se concluye que $\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}$ es también una álgebra de Lie. □

1.3. Representaciones

Definición 1.9. *Sea V un espacio vectorial, $\mathfrak{gl}(V)$ la álgebra de transformaciones lineales de V y $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie, sobre el mismo cuerpo de escalares de V. Una **representación** de $\mathfrak{g}$ en V es un homomorfismo*

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V).$$

Ejemplo 1.3.1. *Sea $\mathfrak{g}$ una subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$, entonces*

$$\begin{aligned} I : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(V) \\ X &\mapsto I(X) = X, \end{aligned}$$

*es una representación de $\mathfrak{g}$ en V, denominada **representación canónica**.*

Ejemplo 1.3.2. *Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ y sea la aplicación ρ:*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \xrightarrow{\rho} \begin{pmatrix} 2a & -2b & 0 \\ -c & 0 & b \\ 0 & 2c & -2a \end{pmatrix},$$

la cual es una representación de $\mathfrak{g}$. Para ver esto, sean $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & -a' \end{pmatrix}$ en $\mathfrak{g}$. La linealidad de ρ es evidente. Se procede a continuación a verificar la preservación del corchete:

$$\rho([A,B]) = \rho(AB - BA) = \rho(\begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' - ba \\ ca' - ac' & cb' + aa' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a'a - b'c & -a'b + b'a \\ -c'a + a'c & -c'b - a'a \end{pmatrix})$$
$$= \rho(\begin{pmatrix} bc' - b'c & -2a'b + 2ab' \\ -2ac' + 2a'c & aa' - a'a \end{pmatrix})$$
$$= \begin{pmatrix} 2bc' - 2b'c & 4a'b - 4ab' & 0 \\ 2ac' + 2a'c & 0 & -2a'b + 2ab' \\ 0 & 4a'c - 4ac' & 2b'c - 2bc' \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} [\rho(A), \rho(B)] &= \rho(A)\rho(B) - \rho(B)\rho(A) \\ &= \begin{pmatrix} 4aa' + 2bc' & -4ab' & -2bb' \\ -2a'c & 2b'c + 2bc' & -2a'b \\ -2cc' & -4ac' & 2b'c + 4aa' \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} -4aa' - 2bc' & 4ab' & 2bb' \\ 2ac' & -2b'c - 2bc' & 2ab' \\ 2cc' & 4a'c & -2c'b - 4aa' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2bc' - 2b'c & 4a'b - 4ab' & 0 \\ 2ac' - 2a'c & 0 & 2ab' - 2a'b \\ 0 & 4a'c - 4ac' & 2cb' - 2c'b \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2}$$

Por lo tanto de 1 y 2, $\rho([A,B]) = [\rho(A), \rho(B)]$ *es decir,* ρ *es una representación.*

1.3.1. Representación Adjunta

Proposición 1.9. *Sea* $X \in \mathfrak{g}$*. Considere la siguiente transformación lineal:*

$$\begin{aligned} ad(X) :& \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \\ & Y \mapsto ad(X)Y = [X,Y]. \end{aligned}$$

Entonces, la aplicación

$$\begin{aligned} ad :& \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}l(g) \\ & X \mapsto ad(X), \end{aligned}$$

define una representación de $\mathfrak{g}$ *en* $\mathfrak{g}$*.*

Demostración. Sean $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. Luego, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{K}$:

1. (Lineal) $ad(aX + bY)Z = [aX + bY, Z] = (a(ad(X)) + b(ad(Y))Z$, por la linealidad del corchete.
2. (Homomorfismo) De la Identidad de Jacobi,

$$\begin{aligned} [ad(X), ad(Y)]Z &= (ad(X)ad(Y) - ad(Y)ad(X))Z \\ &= ad(X)(ad(Y)Z) - ad(Y)(ad(X)Z) && \text{(antisimetría)} \\ &= [X,[Y,Z]] + [[X,Z],Y] \\ &= [[X,Y],Z] && \text{(Identidad de Jacobi)} \\ &= ad([X,Y])Z \end{aligned}$$

Por tanto, ad es una representación de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}$. □

Definición 1.10. *El núcleo (o kernel) de la representación adjunta, como en 1.9, denotado por* $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$*, es tal que:*

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} : ad(X)(Y) = [X,Y] = 0, \forall Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Se denomina a $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ ***centro*** *de* $\mathfrak{g}$*.*
De manera más general, para $A \subset \mathfrak{g}$*, se define el* ***centralizador*** *de* A *como sigue:*

$$\mathfrak{z}(A) = \{Y \in \mathfrak{g} : \forall X \in A, [X,Y] = 0\}.$$

Proposición 1.10. *1. Para una representación adjunta de* $\mathfrak{g}$*,* $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ *es un ideal.*

2. *Para cualquier $A \subset \mathfrak{g}$, $\mathfrak{z}(A)$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$. Además*

$$\mathfrak{z}(A) = \bigcap_{X \in A} \mathfrak{z}(\{X\}).$$

Demostración. 1. Ya que $ad : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ es un homomorfismo, entonces por la proposición 1.5, $ker(ad)$ es un ideal de $\mathfrak{g}$. Además, la definición de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ es equivalente a lo siguiente:

$$\{X \in \mathfrak{g} : ad(X)(Y) = 0, \forall Y \in \mathfrak{g}\} = ker(ad).$$

Por tanto, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ es un ideal de $\mathfrak{g}$.

2. Sea $\bigcap_{X \in A} \mathfrak{z}(\{X\}) = B$, luego:

$$\begin{aligned} Y \in B &\Longleftrightarrow \forall X \in A : Y \in \mathfrak{z}(\{X\}) \\ &\Longleftrightarrow \forall X \in A : [X, Y] = 0 \\ &\Longleftrightarrow Y \in \mathfrak{z}(A). \end{aligned}$$

Así, $\bigcap_{X \in A} \mathfrak{z}(\{X\}) = \mathfrak{z}(A)$.

□

Ejemplo 1.3.3. *Sean $\mathfrak{g}$ una álgebra bidimensional no abeliana y $\beta = \{X, Y\}$ una base de $\mathfrak{g}$ tal que $[X, Y] = Y$. Luego*

$$(ad(X))_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (ad(Y))_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, si $Z = aX + bY$, entonces

$$(ad(Z))_\beta = (ad(aX + bY))_\beta = a(ad(X))_\beta + b(ad(Y))_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Notemos además que, el núcleo de esta representación es nulo, pues $ad(Z) = 0$ implica que $Z = 0$. Esto equivale a concluir que el centro de $\mathfrak{g}$ es trivial.

Ejemplo 1.3.4. *Afirmamos que $\mathfrak{z}l(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h}$, donde $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ y $\mathfrak{h} = Span\{I\}$. En efecto, si suponemos que una matriz $A \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, donde para alguna entrada a_{ij} de A con $i \neq j$ (es decir, a_{ij} no está en la diagonal principal de A), tenemos que $a_{ij} \neq 0$, entonces existe $B \in \mathfrak{g}$ tal que*

$$AB = C = (c_{ij}) \qquad y \qquad BA = C' = (c'_{ij})$$

y $C \neq C'$.
Ya que, por definición de producto de matrices:

$$c_{i1} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{k1}$$

y

$$c'_{i1} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{k1},$$

Sea B tal que $b_{j1} = 1$ y $b_{k1} = 0$ para todo $k \neq j$. Observemos también que la i - ésima fila de B tiene solo su primer elemento $b_{i1} = 0$. Asumiendo, sin pérdida de generalidad que $i < j$:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & & \\ b_{i1} = 0 & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \vdots & & & \\ b_{j1} = 1 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Por un lado, tenemos que $c_{i1} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{k1} = a_{ij} \neq 0$ por hipótesis y; por otro lado, tenemos que $c'_{i1} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{k1} = b_{i2} a_{21} + \cdots + b_{in} a_{n1}$. Por lo tanto, podemos elegir b'_{i1} s adecuados de tal modo que $c'_{i1} \neq c_{i1} = a_{ij}$. Así, acabamos de encontrar $B \in \mathfrak{g}$, tal que $AB \neq BA$, lo que contradice la elección de A. Por tanto $a_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$ o equivalentemente $A \in \mathfrak{h}$.

1.3.2. Construcciones con Representaciones

Representaciones Equivalentes

Definición 1.11. *Sean ρ_1 y ρ_2 dos representaciones de una misma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ en los espacios V_1 y V_2 respectivamente; las tres sobre el mismo cuerpo de escalares $\mathbb{K}$. Se dice que ρ_1 y ρ_2 son equivalentes si existe un isomorfismo lineal $P : V_1 \longrightarrow V_2$, tal que*

$$\rho_2(X) \circ P = P \circ \rho_1(X).$$

Proposición 1.11. *Sean ρ_1 una representación de $\mathfrak{g}$ en V_1 y P un isomorfismo lineal de V_1 en V_2. Entonces existe una representación ρ_2 en V_2 que es isomorfa a ρ_1.*

Demostración. Definimos ρ_2 de la siguiente manera. Para cualquier $X \in \mathfrak{g}$:

$$\rho_2(X) = P \circ \rho_1(X) \circ P^{-1}.$$

Entonces, ρ_2 es una representación de $\mathfrak{g}$ en V_2. En efecto, la linealidad viene dada por la composición de homomorfismos. Dado esto, para cualquier $Y, Z \in \mathfrak{g}$ y $v_2 \in V_2$:

$$\begin{aligned}
(\rho_2[Y,Z])v_2 &= (P \circ \rho_1[Y,Z] \circ P^{-1})v_2 \\
&= P\rho_1[Y,Z]P^{-1}v_2 \\
&= P([\rho_1(Y),\rho_1(Z)]P^{-1}v_2) \\
&= P(\rho_1(Y)\rho_1(Z)P^{-1}v_2 - \rho_1(Y)\rho_1(Z)P^{-1}v_2) \\
&= (P \circ \rho_1(Y) \circ \rho_1(Z) \circ P^1 - P \circ \rho_1(Z) \circ \rho_1(Y) \circ P^1)v_2 \\
&= ((P \circ \rho_1(Y) \circ P^{-1}) \circ (P \circ \rho_1(Z) \circ P^1) \\
&- (P \circ \rho_1(Z) \circ P^{-1}) \circ (P \circ \rho_1(Y) \circ P^{-1}))v_2 \\
&= (\rho_2(Y) \circ \rho_2(Z) - \rho_2(Z) \circ \rho_2(Y))v_2 \\
&= [\rho_2(Y), \rho_2(Z)]v_2.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\rho_2([Y,Z]) = [\rho_2(Y), \rho_2(Z)]$ y en consecuencia define una representación en V_2. Además, por como está definido, se tiene que $\rho_2(X) \circ P = P \circ \rho_1(X)$; es decir, ρ_1 y ρ_2 son equivalentes. $\square$

Representaciones Duales

Definición 1.12. *Sea ρ una representación de $\mathfrak{g}$ en V, se define la aplicación $\rho^* : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}l(V^*)$, tal que*

$$\rho^*(X)(\lambda) = -\lambda \circ \rho(X),$$

donde $X \in \mathfrak{g}$ y $\lambda \in V^*$.

Proposición 1.12. *La aplicación definida en 1.12, es una representación de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}l(V^*)$.*

Demostración. Sean $X, Y \in \mathfrak{g}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in V^*$, $v, w \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$:

1. Si $\lambda_1 = \lambda_2$, entonces

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\rho(X)v) = 0$$

de donde,

$$\begin{aligned}\lambda_1(\rho(X)v) &= \lambda_2(\rho(X)v)\\ -\lambda_1 \circ \rho(X)v &= -\lambda_2 \circ \rho(X)v\\ \rho^*(X)(\lambda_1) &= \rho^*(X)(\lambda_2).\end{aligned}$$

Por tanto ρ^* está bien definida.

2. Linealidad:

$$\begin{aligned}\rho^*(X+Y)(\lambda_1) &= -\lambda_1 \circ \rho(X+Y)\\ &= (-\lambda_1 \circ \rho(X)) + (-\lambda \circ \rho(Y))\\ &= \rho^*(X)(\lambda_1) + \rho^*(Y)(\lambda_1),\end{aligned}$$

por tanto, $\rho^*(X+Y) = \rho^*(X) + \rho^*(Y)$. Del mismo modo:

$$\begin{aligned}\rho^*(\alpha X)(\lambda_1) &= -\lambda_1 \circ \rho(\alpha X)\\ &= \alpha(-\lambda_1 \circ \rho(X))\\ &= \alpha(\rho^*)(\lambda_1)).\end{aligned}$$

Por tanto, ρ^* es lineal.

3. Ahora:

$$\begin{aligned}[\rho^*(X), \rho^*(Y)])(\lambda_1) &= \rho^*(X) \circ \rho^*(Y)(\lambda_1) - \rho^*(Y) \circ \rho^*(X)(\lambda_1)\\ &= \rho^*(X)(-\lambda_1 \circ \rho(Y)) - \rho^*(Y)(-\lambda_1 \circ \rho(X))\\ &= -(-\lambda_1 \circ \rho(Y)) \circ \rho(X) - \lambda_1 \circ \rho(X)) \circ \rho(Y)\\ &= \lambda_1 \circ \rho(Y)) \circ \rho(X) - \lambda_1 \circ \rho(X)) \circ \rho(Y)\\ &= -\lambda_1 \circ (-\rho(Y) \circ \rho(X)) + \rho(X) \circ \rho(Y))\\ &= -\lambda_1 \circ ([\rho(X), \rho(Y)])\\ &= -\lambda_1 \circ \rho([X,Y])\\ &= \rho^*([X,Y])(\lambda_1).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\rho^*([X,Y]) = [\rho^*(X), \rho^*(Y)]$; es decir, un homomorfismo.

Finalmente, de 1, 2 y 3, ρ^* es una representación de $\mathfrak{g}$ en V^*, el dual de V. □

Restricción de Representaciones

Definición 1.13. *Sea ρ una representación de $\mathfrak{g}$ en V. Dado W, subespacio de V, decimos que W es un* ***subespacio invariante*** *por ρ, o ρ -* ***invariante****, si*

$$\forall X \in \mathfrak{g}, \rho(X)W \subset W.$$

Proposición 1.13. *Dada una representación ρ de $\mathfrak{g}$ en V y $W \subset V$ un subespacio ρ - invariante, entonces la aplicación $\rho_{|W} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(W)$ tal que,*

$$\rho_{|W}(X) = \rho(X)_{|W},$$

es una representación de $\mathfrak{g}$ en W.

Demostración. Sean $X, Y \in \mathfrak{g}$, $w, w' \in W$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces:

1. Si $X = Y$, entonces por la buena definición de ρ tenemos que $\rho(X) = \rho(Y)$, donde para cualquier $w \in W$, $\rho(X)w = \rho(Y)w \in W$. Por tanto $\rho(X)|_W w = \rho(Y)|_W w$; es decir, $\rho|_W(X) = \rho|_W(Y)$. Así $\rho|_W$ está bien definida.

2. Ahora,

$$\begin{aligned} \rho|_W(X+Y) &= \rho(X+Y)|_W \\ &= \rho(X)|_W + \rho(Y)|_W \\ &= \rho|_W(X) + \rho|_W(Y). \end{aligned}$$

   Además, $\rho|_W(\alpha X) = \rho(\alpha X)|_W = \alpha\rho(X)|_W = a\rho|_W(X)$. Por tanto, $\rho|_W$ es lineal.

3.

$$\begin{aligned} \rho|_W([X,Y]) &= \rho([X,Y])|_W \\ &= [\rho(X), \rho(Y)]|_W \\ &= (\rho(X)\rho(Y) - \rho(Y), \rho(X))|_W \\ &= \rho(X)|_W\rho(Y)|_W - \rho(Y)|_W\rho(X)|_W \\ &= [\rho(X)|_W, \rho(Y)|_W] \\ &= [\rho|_W(X), \rho|_W(Y)]. \end{aligned}$$

   Así, $\rho|_W$ es un homomorfismo.

Finalmente, de 1, 2 y 3, $\rho|_W$ es una representación de $\mathfrak{g}$ en W. $\square$

Cociente de Representaciones

Proposición 1.14. *Sea ρ una representación de $\mathfrak{g}$ en V y $W \subset V$ un subespacio ρ - invariante. La aplicación $\overline{\rho}_W : \mathfrak{g} \longrightarrow gl(V/W)$ tal que*

$$\overline{\rho}_W(X) = \overline{\rho(X)},$$

define una representación de $\mathfrak{g}$ en V/W.

Demostración. 1. $\overline{\rho}$ está bien definida, pues sean $X, Y \in \mathfrak{g}$. Definimos $\overline{\rho(X)}\overline{Y} = \overline{\rho(X)Y}$ En efecto, para $\overline{W}, \overline{W'} \in V/W$ tal que $\overline{W} = \overline{W'}$, tenemos que

$$\begin{aligned} w - w' &\in W \text{por igualdad de clases} \\ \rho(w - w') &= \rho(X)w - \rho(X)w' \in W \\ \overline{\rho(X)w} &= \overline{\rho(X)w'} && \text{(W es } \rho \text{ - invariante)} \\ \overline{\rho(X)}\overline{w} &= \overline{\rho(X)}\overline{w'}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que $\overline{\rho(X)}$ está bien definida, para todo $X \in \mathfrak{g}$.
Ahora, si $Z = Z'$, entonces

$$\begin{aligned} \rho(Z) &= \rho(Z') \\ \rho(Z)v &= \rho(Z')v && \text{(por la buena definición de } \rho) \\ \overline{\rho(Z)v} &= \overline{\rho(Z')v} && \text{(para todo } v \in V) \\ \overline{\rho(Z)}\overline{v} &= \overline{\rho(Z')}\overline{v}. && \text{(para todo } \overline{v} \in V/W) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\overline{\rho(Z)} = \overline{\rho(Z')}$ y por ende tenemos que $\overline{\rho_W(Z)} = \overline{\rho_W(Z')}$, esto es, $\overline{\rho_W}$ está bien definida.

2. Para $Z, Z' \in \mathfrak{g}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \overline{\rho_W(Z+Z')\overline{v}} &= \overline{\rho(Z+Z')v} \\ &= \overline{\rho(Z+Z')}\overline{v} \\ &= \overline{\rho(Z+Z')v} \\ &= \overline{\rho(Z)v + \rho(Z')v} \\ &= \overline{\rho(Z)v} + \overline{\rho(Z')v} \\ &= \overline{\rho(Z)}\overline{v} + \overline{\rho(Z')}\overline{v} \\ &= (\overline{\rho_W(Z)} + \overline{\rho_W(Z')})\overline{v}, \end{aligned}$$

para todo $\overline{v} \in V/W$.
Por lo tanto, $\overline{\rho_W(Z+Z')} = \overline{\rho_W(Z)} + \overline{\rho_W(Z')}$.
Sea ahora $a \in \mathbb{K}$, entonces

$$\begin{aligned} \overline{\rho_W(aZ)}\overline{v} &= \overline{\rho(aZ)v} \\ &= a\overline{\rho(Z)v} \\ &= a\overline{\rho(Z)}\overline{v} \\ &= a\overline{\rho_W(Z)}. \end{aligned}$$

Por tanto, $\overline{\rho_W}$ es lineal.

3. Finalmente,

$$\begin{aligned}
\overline{\rho_W([Z,Z'])\overline{v}} &= \overline{\rho([Z,Z'])v} \\
&= \overline{[\rho(Z),\rho(Z')]v} \\
&= [\overline{\rho(Z)v},\overline{\rho(Z')v}] \\
&= [\overline{\rho(Z)},\overline{\rho(Z')}]\overline{v} \\
&= [\overline{\rho_W}(Z),\overline{\rho_W}(Z')]\overline{v}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\overline{\rho_W([Z,Z'])} = [\overline{\rho_W}(Z),\overline{\rho_W}(Z')]$; es decir, $\overline{\rho_W}$ es un homomorfismo.

Así, de 1, 2 y 3 $\overline{\rho_W}$ es una representación de $\mathfrak{g}$ en V/W. □

Ejemplo 1.3.5. *Sea $\mathfrak{g}$ la álgebra de Heisenberg, mostrada en el ejemplo 1.2.5. Considerando*

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{K}^3)$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \rho(\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = \rho(X) : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3,$$

tal que $\rho(X)(x,y,z) = (ay+bz, cz, 0)$, con $x,y,z \in \mathbb{K}$.
Sea $\{e_1,e_2,e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{K}^3$, entonces los subespacios $W_1 = Span\{e_1\}$ y $W_2 = Span\{e_1,e_2\}$ de $\mathbb{K}^3$ son invariantes por ρ. En efecto, para cualquier $X \in \mathfrak{g}$, tenemos que $\rho(X)(1,0,0) = (0,0,0) \in W_1$. Por otra parte, sea $(x',y',0) \in W_2$, entonces $\rho(X)(x',y',0) = (ay',0,0) = ay'e_1 \in W_2$, por lo tanto W_2 también es ρ - invariante.

Ahora, por la proposición 1.13, es posible considerar las restricciones de ρ tanto para W_1, como para W_2. En efecto, para cualquier $X \in \mathfrak{g}$, tenemos que $\rho|_{W_1}(X) = \rho(X)|_{W_1} = 0$, pues $\rho(X)|_{W_1}(1,0,0) = (0,0,0)$. En cambio, $\rho(X)|_{W_2}(x,y,0) = (ax,0,0)$, entonces

$$(\rho(X)|_{W_2})_{\{e_1,e_2\}} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora, al evaluar $\rho(X)$ en los elementos de la base canónica de $\mathbb{K}^3$, aplicando la proyección canónica obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\rho(X)e_1 = 0 &\Rightarrow \overline{\rho(X)e_1} = \overline{\rho(X)}\,\overline{e_1} = \overline{0} \\
\rho(X)e_2 = ae_1 &\Rightarrow \overline{\rho(X)e_2} = \overline{\rho(X)}\,\overline{e_2} = a\overline{e_1} \\
\rho(X)e_3 = be_1 + ce_2 &\Rightarrow \overline{\rho(X)e_3} = \overline{\rho(X)}\,\overline{e_3} = b\overline{e_1} + c\overline{e_2}.
\end{aligned}$$

Considerando la álgebra $\mathfrak{g}/W_1$*,* $\{\overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ *es una base de* $\mathfrak{g}/W_1$*, entonces*

$$(\rho(X)|_{W_1}) = (\overline{\rho(X)})_{\{\overline{e_2},\overline{e_3}\}} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De forma análoga, $\rho(X)|_{W_2} = 0$*.*

1.4. Derivaciones

Definición 1.14. *Sea* $D : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ *una aplicación lineal. Entonces* D *es una* ***derivación*** *de la álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$*, si se cumple lo siguiente:*

$$D[X,Y] = [DX,Y] + [X,DY] \text{ para todo } X,Y \in \mathfrak{g}.$$

Denotamos al conjunto de todas las derivaciones de $\mathfrak{g}$*, siendo* $\partial\mathfrak{g}$

Ejemplo 1.4.1. *Para* $X \in \mathfrak{g}$*, tenemos que* $ad(X)$ *es una derivación, pues por la identidad de Jacobi:*

$$[X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] = 0,$$

por tanto:

$$[X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]]$$

es decir,

$$ad(X)[Y,Z] = [ad(X)Y,Z] + [Y,ad(X)Z].$$

A cualquier aplicación lineal A *de* $\mathfrak{g}$*, tal que* $A = ad(X)$*, para algún* X *en* $\mathfrak{g}$*, la denominamos* ***derivación interna****. Denotamos a tal conjunto como* $ad(\mathfrak{g})$*.*

Ejemplo 1.4.2. *Afirmamos que* $\partial\mathfrak{g}$ *es una subálgebra de* $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$*. En efecto, sean* D, E *derivaciones de* $\mathfrak{g}$*:*

$$\begin{aligned}
[D,E][X,Y] &= (DE - ED)[X,Y] \\
&= DE[X,Y] - ED[X,Y] \\
&= D[EX,Y] + D[X,EY] - E[DX,Y] - E[X,DY]) \\
&= [DEX,Y] + [EX,DY] + [DX,EY] + [X,DEY] \\
&\quad - [EDX,Y] - [DX,EY] - [EX,DY] - [X,EDY] \\
&= [(DE-ED)X,Y] + [X,(DE-ED)Y] \\
&= [[D,E]X,Y] + [X,[D,E]Y],
\end{aligned}$$

donde $X,Y \in \mathfrak{g}$ *son cualesquiera. Por lo tanto el subespacio de derivaciones de* $\mathfrak{g}$*, es una subálgebra de* $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$*.*

Proposición 1.15. *Sean $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie y $X \in \mathfrak{g}$:*

1. *Una transformación lineal $D : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ es una derivación, si y solo sí, $ad(DX) = [D, ad(X)]$.*

2. *$\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ es un automorfismo, si y solo sí, $ad(\phi X) = \phi \circ ad(X) \circ \phi^{-1}$.*

Demostración. 1. Si D es una derivación, sea $Y \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}
[D, ad(X)]Y &= (D \cdot ad(X))Y - (ad(X) \cdot D)Y, && \text{(pues } ad(X), D \in gl(\mathfrak{g})\text{)}\\
&= D(ad(X)Y) - ad(X)(DY)\\
&= D[X, Y] - [X, DY]\\
&= [DX, Y] + [X, DY] - [X, DY] && \text{(por ser } D \text{ derivación,)}\\
&= [DX, Y]\\
&= ad(DX)Y.
\end{aligned}$$

Como $Y \in \mathfrak{g}$ es cualquiera, $[D, ad(X)] = ad(DX)$. Ahora, para $X, Y \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}
[DX, Y] + [X, DY] &= ad(DX)Y + ad(X)DY\\
&= [D, ad(X)]Y + ad(X)DY && \text{(por hipótesis,)}\\
&= D(ad(X)Y) - ad(X)DY + ad(X)DY\\
& && (ad(X), D \in gl(\mathfrak{g}))\\
&= D[X, Y].
\end{aligned}$$

Por tanto, D es una derivación.

2. Supongamos que $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ es un automorfismo. Sea $Y \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}
(\phi \circ ad(X) \circ \phi^{-1})Y &= \phi(ad(X)\phi^{-1}Y)\\
&= \phi([X, \phi^{-1}Y])\\
&= [\phi(X), \phi(\phi^{-1}Y)]\\
&= [\phi(X), Y] && \text{(por hipótesis,)}\\
&= ad(\phi X)Y. && (\phi \text{ es invertible,})
\end{aligned}$$

Como $Y \in \mathfrak{g}$ es cualquiera, $ad(\phi X) = \phi \circ ad(X) \circ \phi^{-1}$.
Ahora, supongamos que $ad(\phi X) = \phi \circ ad(X) \circ \phi^{-1}$. Asumimos, por hipótesis que ϕ es biyectiva, entonces, para $Y, Z \in \mathfrak{g}$, cualesquiera:

$$\begin{aligned}
\phi[Y, Z] &= \phi[Y, \phi^{-1}(\phi Z)]\\
&= (\phi \circ ad(Y) \circ \phi^{-1})\phi Z\\
&= ad(\phi X)\phi Z && \text{(por hipótesis,)}\\
&= [\phi Y, \phi Z].
\end{aligned}$$

Por tanto, ϕ es automorfismo de $\mathfrak{g}$.

$\square$

Como consecuencia de esta proposición, $ad(\mathfrak{g})$ es un ideal de $\partial\mathfrak{g}$.

Proposición 1.16. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita y $D : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ una transformación lineal. Entonces, D es una derivación si y solo sí, para todo $t \in \mathbb{R}$, e^{tD} es un automorfismo de $\mathfrak{g}$.*

Demostración. $\Leftarrow$ Sea e^{tD} un automorfismo de $\mathfrak{g}$, para todo $t \in \mathbb{R}$. También para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{g}$ se cumple que:

$$e^{tD}[X,Y] = [e^{tD}X, e^{tD}Y] \text{ para todo } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Derivando la igualdad anterior respecto de t, obtenemos

$$De^{tD}[X,Y] = [De^{tD}X, e^{tD}Y] + [e^{tD}X, De^{tD}Y].$$

Haciendo $t = 1$ tenemos que $D[X,Y] = [DX,Y] + [X,DY]$; es decir, D es una derivación.

$\Rightarrow$ Supongamos que D es una derivación. Sean las siguientes curvas:

$$\alpha(t) = e^{tD}[X,Y] \qquad \text{y} \qquad \beta(t) = [e^{tD}X, e^{tD}Y].$$

Cuando $t = 0$, tenemos que $\alpha(0) = [X,Y] = \beta(0)$; es decir, ambas tienen las mismas condiciones iniciales. Luego derivando ambas respecto de t:

$$\alpha'(t) = De^{tD}[X,Y] = D\alpha(t)$$

y

$$\begin{aligned}\beta'(t) &= [De^{tD}X, e^{tD}Y] + [e^{tD}X, De^{tD}Y] \\ &= D[e^{tD}X, e^{tD}Y] \\ &= D\beta(t).\end{aligned}$$

Por tanto, α y β satisfacen la ecuación diferencial $X'(t) = DX(t)$.
En conclusión, por la unicidad de la solución, tenemos que $\alpha(t) = \beta(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

$\square$

Ejemplo 1.4.3. *Sea $\mathfrak{g}$ la álgebra bidimensional no abeliana y $\{X,Y\}$ una base de $\mathfrak{g}$ tal que $[X,Y] = Y$. Sea D una derivación de $\mathfrak{g}$ tal que*

$$D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Ahora, tenemos que $D[X,Y] = DY = [DX,Y] + [X,DY]$*. Como* X,Y *son elementos de la base de* $\mathfrak{g}$*, la anterior igualdad queda como sigue:*

$$bX + dY = [aX + cY, Y] + [X, bX + dY] = a[X,Y] + d[X,Y] = (a+d)Y.$$

Por lo tanto, $a = b = 0$*. Reemplazando esto último en la matriz de* D*, tenemos:*

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Esto último, junto a lo concluido del ejemplo 1.3.3, muestran que toda derivación de $\mathfrak{g}$ *es una derivación interna.*

Capítulo 2

Álgebras Nilpotentes y Solubles

2.1. Serie Central Descendente

Definición 2.1. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$. La* ***serie central descendente*** *se define como sigue:*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}^1 &= \mathfrak{g}\\
\mathfrak{g}^2 &= [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}'\\
\mathfrak{g}^3 &= [\mathfrak{g},\mathfrak{g}^2]\\
&\vdots\\
\mathfrak{g}^k &= [\mathfrak{g},\mathfrak{g}^{k-1}].
\end{aligned}$$

Proposición 2.1. *1. $[\mathfrak{g}^i,\mathfrak{g}^j] \subset \mathfrak{g}^{i+j}$.*

2. $\mathfrak{g}^k$ es el subespacio generado por todos los posibles productos que involucran k elementos de $\mathfrak{g}$: $[X_1,\dots[X_{k-1},X_k]\dots]$.

Demostración. 1. Para probar 1 se procederá vía inducción sobre j. Sea entonces $j=1$, sabemos que $\mathfrak{g}^{1+i} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}^i]$, por tanto:

$$[\mathfrak{g}^i,\mathfrak{g}^1] = -[\mathfrak{g},\mathfrak{g}^i] = -\mathfrak{g}^{i+1},$$

de modo que $[\mathfrak{g}^i,\mathfrak{g}^1] \subset \mathfrak{g}^{i+1}$. Ahora supongamos el resultado válido para $j \geq 1$,

$$\begin{aligned}
[\mathfrak{g}^i,\mathfrak{g}^{j+1}] &= [\mathfrak{g}^i,[\mathfrak{g},\mathfrak{g}^j]]\\
&\subset [[\mathfrak{g}^i,\mathfrak{g}^j],\mathfrak{g}] + [\mathfrak{g}^j,[\mathfrak{g}^i,\mathfrak{g}]]\\
&\subset [\mathfrak{g}^{i+j},\mathfrak{g}] + [\mathfrak{g}^j,\mathfrak{g}^{i+1}] && \text{(Identidad de Jacobi)}\\
&\subset \mathfrak{g}^{i+j+1} + \mathfrak{g}^{j+i+1}\\
&= \mathfrak{g}^{i+(j+1)}.
\end{aligned}$$

2. Sea A_k el subespacio de $\mathfrak{g}$ generado por todos los posibles productos de k elementos de $\mathfrak{g}$.
   Vía inducción sobre k, si $k = 2$:

$$\mathfrak{g}^2 = A_2 = Span\{[X,Y] : X, Y \in \mathfrak{g}\}. = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1].$$

   Ahora supongamos que $A_{k-1} = \mathfrak{g}^{k-1}$, con $k \geq 2$.
   Ya que $\mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}] = [\mathfrak{g}, A_{k-1}]$, tenemos que el lado derecho de la anterior igualdad, es un subespacio de $\mathfrak{g}$ cuyos elementos son productos de k elementos de $\mathfrak{g}$. Por tanto $\mathfrak{g}^k \subset A_k$. Sea ahora $Z \in A_k$; es decir:

$$Z = \sum_i Z_i,$$

   donde para cada i, Z_i es un producto de k elementos de $\mathfrak{g}$. Entonces por la identidad de Jacobi y la antisimetría del corchete:

$$Z = \sum_i [X_i, Y_i],$$

   con $X_i \in \mathfrak{g}$ y $Y_i \in A_{k-1} = \mathfrak{g}_{k-1}$.
   Por lo tanto, $Z \in \mathfrak{g}_k$ y en consecuencia $A_k \subset \mathfrak{g}^k$. Luego $\mathfrak{g}_k = A_k$, con $k \geq 2$.

□

Proposición 2.2. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie, entonces*

1. $\mathfrak{g}^{k+1} \subset \mathfrak{g}^k$*; es decir, la serie central descendente es de hecho, descendente.*

2. $\mathfrak{g}^k$ *es un ideal para todo* $k \geq 1$.

Demostración. 1. De 2 en la proposición anterior, tenemos que $\mathfrak{g}^{k+1} = A_{k+1}$, donde $k \geq 1$. Entonces los elementos de $\mathfrak{g}^{k+1}$ son combinaciones lineales de productos de $k+1$ elementos de $\mathfrak{g}$. Ahora, por la clausura del corchete de Lie, es posible seleccionar de cada miembro de la combinación lineal, un corchete de modo que, se lo pueda considerar como un solo elemento de $\mathfrak{g}$. Por lo tanto, los elementos de $\mathfrak{g}^{k+1}$, se pueden escribir como combinaciones lineales de productos de k elementos; es decir, $\mathfrak{g}^{k+1} \subset A_k = \mathfrak{g}^k$.

2. Ya que $\mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k]$, del item anterior sabemos que $\mathfrak{g}^{k+1} \subset \mathfrak{g}^k$, entonces

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k] \subset \mathfrak{g}^k.$$

   Por tanto, $\mathfrak{g}^k$ es un ideal de $\mathfrak{g}$, para todo $k \geq 1$.

□

Proposición 2.3. *Para $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie, $\mathfrak{g}^k/\mathfrak{g}^{k+1}$ es una álgebra abeliana.*

Demostración. Sean $\overline{X}$, $\overline{Y}$ en $\mathfrak{g}^k/\mathfrak{g}^{k+1}$. Entonces para dos representantes de clase X e Y, tenemos que $[X,Y] \in \mathfrak{g}^{k+1} \subset \mathfrak{g}^k$, por el item 1, de la proposición anterior. Esto último es equivalente a concluir que

$$\overline{[X,Y]} = [\overline{X},\overline{Y}] = \overline{0} = 0.$$

Por tanto, $\mathfrak{g}^k/\mathfrak{g}^{k+1}$ es una álgebra abeliana. □

Proposición 2.4. *Sea $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ el homomorfismo canónico. Entonces*

$$\pi(\mathfrak{g}^k) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^k.$$

Demostración. Vía inducción sobre k, tenemos que si $k = 1$, $\pi(\mathfrak{g}^1) = \pi(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ por la sobreyectividad de π.
Ahora, sea el resultado válido para $k \geq 1$, entonces

$$\begin{aligned}\pi(\mathfrak{g}^{k+1}) &= \pi([\mathfrak{g},\mathfrak{g}^k]) \\ &= [\pi(\mathfrak{g}),\pi(\mathfrak{g}^k)] \\ &= [\mathfrak{g}/\mathfrak{h},(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^k] \text{por hipótesis de inducción} \\ &= (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{k+1}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\pi(\mathfrak{g}^k) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^k$, para todo $k \geq 1$. □

Ejemplo 2.1.1. *1. Sea* $\mathfrak{g} = \{\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\} \subset \mathfrak{g}l(3,\mathbb{K})$. *Entonces* $\mathfrak{g}^2 = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

y $\mathfrak{g}^3 = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$. *Por lo tanto* $\mathfrak{g}^k = 0$ *para* $k \geq 3$.

2. *Sea* $\mathfrak{g} = \{\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}\} \leq \mathfrak{g}l(3,\mathbb{K})$; *es decir, la subálgebra de matrices triangulares superiores de* 3. *Entonces* $\mathfrak{g}^2 = \{\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Por lo tanto* $\mathfrak{g}^k = \mathfrak{g}^2$ *para* $k \geq 3$.

3. *Sea $\mathfrak{g}$ la álgebra de dimensión dos no abeliana, donde existe una base $\{X,Y\}$ tal que $[X,Y] = Y$. Luego $\mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = Span\{Y\}$.*
Ahora $\mathfrak{g}^3 = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}^2] = [\mathfrak{g}, Span\{Y\}] = Span\{Y\}$, de modo que siguiendo el proceso de la serie central descendente, tenemos que $\mathfrak{g}^k = Span\{Y\}$, con $k \geq 2$.

2.2. Álgebras Nilpotentes

Definición 2.2. *Una álgebra de Lie se denomina* ***nilpotente****, si* $\mathfrak{g}^{k_0} = \{0\}$, *para algún* $k_0 > 0$*.(por tanto,* $\mathfrak{g}^k = 0$ *para todo* $k \geq k_0$*).*

Proposición 2.5. *Sea* $\mathfrak{g}$ *una álgebra de Lie nilpotente, entonces* $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq 0$*.*

Demostración. Ya que $\mathfrak{g}$ es nilpotente, entonces $\mathfrak{g}^k = 0$ para algún $k \geq 1$. Sea $k_0 = max\{k : \mathfrak{g}^k \neq 0\}$. De esto último, observamos que $\mathfrak{g}^{k_0+1} = 0$ o equivalentemente $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k_0}] = 0$. Por tanto $\mathfrak{g}^{k_0} \subset \mathfrak{z}$ y en consecuencia, $\mathfrak{z}$ es no trivial. □

Proposición 2.6. *Sea* $\mathfrak{g}$ *una álgebra de Lie nilpotente:*

1. *Si* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ *es un subálgebra, entonces* $\mathfrak{h}$ *es nilpotente.*
2. *Si* $\mathfrak{h}$ *es un ideal de* $\mathfrak{g}$*, entonces* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ *es nilpotente.*
3. *Si* $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ *es nilpotente, entonces* $\mathfrak{g}$ *es nilpotente.*

Demostración.

1. Sea $\mathfrak{h}$ una subálgebra de $\mathfrak{g}$, entonces por ser $\mathfrak{h}$ nilpotente, afirmamos que $\mathfrak{h}^k \subset \mathfrak{g}^k$, para todo $k \geq 1$. En efecto, vía inducción sobre k, el primer paso de inducción es evidente.
   Sea entonces el resultado válido para k,
   $$\begin{aligned}\mathfrak{h}^{k+1} &= [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^k] \\ &\subset [\mathfrak{h}, \mathfrak{g}^k]\text{por hipótesis de inducción} \\ &\subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k].\text{primer paso de inducción} \\ &= \mathfrak{g}^{k+1}\end{aligned}$$
   Ahora, sea $k_0 \geq 1$, de modo que $\mathfrak{g}^{k_0} = 0$, por ser $\mathfrak{h}$ nilpotente, entonces del anterior paso, concluimos que:
   $$\mathfrak{h}^{k_0} \subset \mathfrak{g}^{k_0} = 0.$$
   Por tanto, $\mathfrak{h}^{k_0} = 0$; es decir, $\mathfrak{h}$ también es nilpotente.
2. Sea ahora $\mathfrak{h}$ un ideal de $\mathfrak{g}$, la nilpotencia del cociente, se deduce fácilmente de la siguiente afirmación. Dado π un homomorfismo de $\mathfrak{g}$:
   $$\pi(\mathfrak{g}^k) = (\pi(\mathfrak{g}))^k.$$

En efecto, vía inducción sobre k, el primer paso de inducción es trivial. Sea ahora el resultado válido para $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} \pi(\mathfrak{g}^{k+1}) &= \pi([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k]) \\ &= [\pi(\mathfrak{g}), \pi(\mathfrak{g}^k)] \\ &= [\pi(\mathfrak{g}), (\pi(\mathfrak{g}))^k] \\ &= (\pi(\mathfrak{g}))^{k+1}. && \text{(hipótesis de inducción)} \end{aligned}$$

Por tanto, $\pi(\mathfrak{g}^k) = (\pi(\mathfrak{g}))^k$, para todo $k \geq 1$.
Ahora sean π el homomorfismo canónico y $k_0 \geq 1$, de modo que $\mathfrak{g}^{k_0} = 0$. Luego, por la proposición 2.4:

$$\pi(\mathfrak{g}^{k_0}) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{k_0} = 0.$$

Así $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ es nilpotente.

3. Ya que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ es un ideal de $\mathfrak{g}$, el espacio cociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ es una álgebra de Lie. Ahora para el homomorfismo canónico, tenemos que:

$$\pi(\mathfrak{g}^k) = (\pi(\mathfrak{g}))^k,$$

para todo $k \geq 1$ entero. También tenemos que $\pi(\mathfrak{g}^k) = \mathfrak{g}^k/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ y $(\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))^k = (\pi(\mathfrak{g}))^k$. Por tanto:

$$(\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))^k = \mathfrak{g}^k/\mathfrak{z}(\mathfrak{g}).$$

Ahora, si para algún $m \geq 1$, $(\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))^m = \overline{0}$, entonces $\mathfrak{g}^m/\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \overline{0}$. Por lo tanto $\mathfrak{g}^m \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$; es decir,

$$\mathfrak{g}^{m+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^m] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{z}(\mathfrak{g})] = 0.$$

Por lo tanto, $\mathfrak{g}$ es nilpotente.

$\square$

Proposición 2.7. *Sean $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie nilpotente, sobre $\mathbb{K}$ y $\overline{\mathbb{K}}$ una extensión de $\mathbb{K}$:*

1. $(\mathfrak{g}^n)_{\overline{\mathbb{K}}} = (\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}})^n$, $n \geq 1$.

2. $\mathfrak{g}$ *es nilpotente, sí y solo si,* $\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}$ *es nilpotente.*

Demostración. 1. Sea $X \in \mathfrak{g}^n_{\mathbb{K}}$, entonces $X = [X_1, \ldots, [X_{n-1}, X_n] \ldots]$ donde $X_i \in \mathfrak{g}_{\mathbb{K}}, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.
Ahora para $Y \in (\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}})^n$ del mismo modo, $Y = [Y_1, \ldots, [Y_{n-1}, Y_n]$ donde $Y_i \in \mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

De lo anterior, $Y_i = \sum_{r_i} a^i_{r_i} Z^i_{r_i}$ con $a^i_{r_i} \in \overline{\mathbb{K}}$ y $Z^i_{r_i} \in \mathfrak{g}$ para todo i.

Por la bilinealidad del corchete en $\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}$, deducimos que $Y \in (\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}})^n$ si y solo sí $Y \in (\mathfrak{g}^n)_{\overline{\mathbb{K}}}$; es decir,

$$(\mathfrak{g}^n)_{\overline{\mathbb{K}}} = (\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}})^n, n \geq 1.$$

2. Sea $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}} = \mathfrak{g}$ nilpotente, entonces dado $k \geq 1$ tal que $\mathfrak{g}^k = 0$, entonces

$$(\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}})^k = (\mathfrak{g}^k)_{\overline{\mathbb{K}}} = 0$$

si y solo sí, $\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}$ es nilpotente.

□

Proposición 2.8. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie nilpotente y $X \in \mathfrak{g}$, entonces el operador $ad(X)$ es nilpotente.*

Demostración. Sea $k \geq 1$, de modo que $\mathfrak{g}^k = 0$. Del item 1, de la proposición 2.1, se tiene que en particular, se tiene un producto de k elementos de $\mathfrak{g}$, de modo que:

$$[X, \ldots, [X, Y] \ldots] = 0,$$

donde X aparece $k-1$ veces. Esto último, traducido en lenguaje de operadores, es equivalente a:

$$ad(X)^{k-1} Y = 0;$$

es decir, las adjuntas son operadores nilpotentes, para todo $X \in \mathfrak{g}$. □

2.3. El Teorema de Engel

Lema 2.1. *Sea V un espacio de dimensión finita y $A \in \mathfrak{gl}(V)$. Si A es nilpotente, entonces $ad(A)$ es nilpotente.*

Demostración. Afirmamos que para cualesquiera $A, B \in \mathfrak{g}$, se tiene $ad(A)^n B = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} A^{n-j} B A^j$, para todo $n \geq 0$.

En efecto, vía inducción sobre n tenemos que si $n = 1$, $ad(A)B = AB - BA$ por definición del corchete en $\mathfrak{gl}(V)$.

Sea ahora el resultado válido para n, entonces

$$\begin{aligned}
&ad(A)^{n+1}B = ad(ad^n(A)B)\\
&= Aad^n(A)B - ad^n(A)BA\\
&= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}A^{(n+1)-j}BA^j + \sum_{j=0}^{n}(-1)^{j+1}\binom{n}{j}A^{n-j}BA^{j+1}\\
&= A^{n+1}B + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}A^{n-j}BA^j \qquad\qquad \text{(hipótesis de inducción)}\\
&+ \sum_{j=1}^{n+1}(-1)^j\binom{n}{j-1}A^{n-(j-1)}BA^j\\
&= A^{n+1}B + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}A^{n-j}BA^j\\
&+ \sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{n}{j-1}A^{n-j)}BA^j + (-1)^{n+1}BA^{n+1}\\
&= A^{n+1}B + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j(\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1})A^{n-j)}BA^j + (-1)^{n+1}BA^{n+1}\\
&= A^{n+1}B + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{n+1}{j}A^{n-j}BA^j + (-1)^{n+1}BA^{n+1}\\
&= \sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j\binom{n+1}{j}A^{((n+1)-j)}BA^j.
\end{aligned}$$

Por tanto, para todo $n \geq 0$, $ad^n(A)B = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}A^{n-j}BA^j$.

Ahora si $r \geq 0$ es tal que $A^k = 0$, entonces para

$ad(A)^{2k}B = \sum_{j=0}^{2k}(-1)^j\binom{2k}{j}A^{2k-j}BA^j$, sea $t + j = 2k$.

Si $t \geq k$, entonces $A^tBA^j = 0$.

Si $t < k$, $2k - j < k$; de modo que, $k < j$ y también $A^tBA^j = 0$.

Entonces, por lo anterior, $ad(A)^{2k}B = \sum_{j=0}^{2k}(-1)^j\binom{2k}{j}A^{2k-j}BA^j = 0$, lo cual implica que $ad(A)$ es nilpotente. $\square$

Teorema 2.1. *(Lema de Engel) Sea $V \neq 0$ un espacio vectorial de dimensión finita y $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ una subálgebra. Supongamos que todo $X \in \mathfrak{g}$ es nilpotente. Entonces, existe $v \in V$, con $v \neq 0$ tal que $Xv = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.*

Demostración. Se demostrará el resultado vía inducción sobre la dimensión de $\mathfrak{g}$. Para el primer paso de inducción, sean $dim(\mathfrak{g}) = 1$ y $X \in \mathfrak{g}$ no nulo (en realidad $\mathfrak{g} = Span\{X\}$), entonces existe $k \geq 1$ tal que $X^k = 0$ y $X^k \neq 0$. De esto último, tenemos que existe $w \in V$, de modo que $X^{k-1}w \neq 0$. Sea $v = X^{k-1}w \neq 0$, de modo que

$$Xv = X(X^{k-1}w) = X^k w = 0.$$

De este modo, queda verificado el primer paso de inducción.
Ahora, supongamos que el resultado es válido para álgebras de Lie, cuya dimensión es estrictamente menor que la dimensión de $\mathfrak{g}$, donde $dim(\mathfrak{g}) > 1$.
Afirmamos que $\mathfrak{g}$ contiene subálgebras propias, pues para $X \neq 0$, $Span\{X\}$ es una subálgebra propia de $\mathfrak{g}$.
Ahora, sea $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$; de modo que $dim(\mathfrak{h}) = min\{dim(\mathfrak{h}') : \mathfrak{h}' \leq \mathfrak{g}\}$. Se mostrará ahora que $\mathfrak{h}$, es un ideal de codimensión 1.
En efecto, para $X \in \mathfrak{h}$ es evidente que $ad(X)\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}$. Al considerar la representación adjunta de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}$, por la proposición 1.14, obtenemos una representación ρ, de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, tal que

$$\begin{aligned} \rho : \mathfrak{h} &\longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \\ X &\mapsto \rho(X) = \overline{ad(X)}. \end{aligned}$$

Del lema 2.1, $ad(X)$ es nilpotente, para todo elemento de $\mathfrak{g}l(V) \supset \mathfrak{h}$, por tanto $ad(X)$ es nilpotente, para todo elemento de $\mathfrak{g}$ y, en consecuencia $\rho(X)$ es nilpotente, para todo $X \in \mathfrak{h}$. Al considerar la subálgebra $\rho(\mathfrak{h})$, hallamos que también es una subálgebra de transformaciones nilpotentes, tal que $\dim(\rho(\mathfrak{h})) < dim(\mathfrak{g})$.
Por hipótesis de inducción, existe $w \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, con $w \neq 0$ de modo que

$$\rho(X)w = \overline{ad(X)w} = 0, X \in \mathfrak{h}.$$

Sea $W \in \mathfrak{g} - \mathfrak{h}$ un representante de clase de w, entonces de la anterior igualdad, $[W, X] \in \mathfrak{h}$, para todo $X \in \mathfrak{h}$. Ahora consideremos $\mathfrak{h}' = Span\{W, \mathfrak{h}\}$, entonces $\mathfrak{h}' \leq \mathfrak{g}$ y $dim(\mathfrak{h}') = dim(\mathfrak{h}) + 1$. Esto último no es posible debido a la elección de $\mathfrak{h}$, por tanto $dim(\mathfrak{h}) = dim(\mathfrak{g}) - 1$; es decir, $\mathfrak{h}$ es de codimensión uno. En realidad, al tener $[W, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$, concluimos que $\mathfrak{h}$ es un ideal de codimensión uno.
Por otra parte, la hipótesis de inducción se puede aplicar a $\mathfrak{h}$, entonces:

$$V' = \{v \in V : Xv = 0, \forall X \in \mathfrak{h}\}$$

es tal que $V' \neq 0$. Además V' es invariante por W, pues sea $X \in \mathfrak{h}$ y $v' \in V'$,

$$\begin{aligned} XWv' &= [X, W]v' + WXv' \\ &= 0 \qquad \text{(pues } [X, W] \in \mathfrak{h}.) \end{aligned}$$

Por tanto, $Wv' \in V'$; es decir V' es invariante por W.
Tomando en cuenta que la restricción $W|_{V'}$ también es nilpotente y $Span\{W\}$ siendo una subálgebra de dimensión uno, por el primer paso de inducción tenemos que

$$\exists v \in V', v \neq 0 : W|_{V'}v = Wv = 0.$$

En conclusión, ya que existe $v \in V$, de modo que para todo $X \in \mathfrak{h}$, $Xv = 0$ y $Wv = 0$, al ser $\mathfrak{g} = Span\{W, \mathfrak{h}\}$, entonces

$$\exists v \in V, v \neq 0 : Xv = 0, \forall X \in \mathfrak{g}.$$

$\square$

Teorema 2.2. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n y $\mathfrak{g}$ un subálgebra de $\mathfrak{g}l(V)$ de modo que todo elemento de $\mathfrak{g}$ es nilpotente. Entonces existe una base de V en la cual todo elemento de $\mathfrak{g}$, está representado por matrices estrictamente triangulares superiores.*

Demostración. Procedemos vía inducción sobre $dim(V)$. Si $V = \{0\}$ el resultado es trivial. Sea válido el resultado para $dim(V) \geq 1$. Entonces para cualquier $X \in \mathfrak{g}$, por el teorema anterior existe $v \neq 0 \in V$ tal que $Xv = 0$.
Podemos considerar $U = Span(v)$, para aplicar la proposición 1.14. En efecto, considerando la representación canónica:

$$I : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}l(V) \qquad \text{tal que} \qquad I(X) = X.$$

Observemos que U es I - invariante, pues $I(X)v = Xv = 0 \in U$. Entonces de 1.14:

$$\overline{\rho}_U : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}l(V/W) \qquad \text{tal que} \qquad \overline{\rho}_U(X) = \overline{I(X)} = \overline{X},$$

es una representación de $\mathfrak{g}$ en V/U.
Ahora, consideremos el conjunto $\{\overline{\rho}_U(X) : X \in \mathfrak{g}\}$, que es una subálgebra de $\mathfrak{g}l(V/U)$. Además todo elemento de esa subálgebra es nilpotente, pues todo elemento de $\mathfrak{g}$ también es nilpotente.
Así, $\{\overline{\rho}_U(X) : X \in \mathfrak{g}\}$ está en las condiciones del teorema anterior y como $dim(V/U) = n - 1$ por hipótesis de inducción, existe una base $\beta = \{\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_{n-1}}\}$de V/U, de modo que para todo $\overline{X} \in V/U$:

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} 0 & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

De esta representación, se podrá obtener el resultado. En efecto, observemos que:

$$\overline{X}\overline{v_1} = \overline{Xv_1} = \overline{0}.$$

Entonces para un representante de clase $v_1 \neq 0$ de $\overline{v_1}$ tal que $v_1 \notin Span\{v\}$, tenemos que $Xv_1 \in U$; es decir,

$$Xv_1 = a_{12}v.$$

Ahora,

$$\overline{X}\overline{v_2} = \overline{Xv_2} = a_{23}\overline{v_1}.$$

Entonces para un representante de clase $v_2 \neq 0$ de $\overline{Xv_2 - a_{23}v_1}$ tal que $v_2 \notin Span\{v, v_1\}$, tenemos que $Xv_2 \in U$; es decir,

$$Xv_2 - a_{23}v_1 = a_{13}v$$

o

$$Xv_2 = a_{13}v + a_{23}v_1.$$

Continuamos hasta llegar a $\overline{v_n}$, del cual obtenemos:

$$\overline{X}\overline{v_{n-1}} = \overline{Xv_{n-1} - a_{n-1n}v_{n-2} - \cdots - a_{2n}v_1} = a_{1n}\overline{v}.$$

Entonces, para un representante de clase $v_{n-1} \neq 0$ de $\overline{Xv_{n-1} - a_{n-1n}v_{n-2} - \cdots - a_{2n}v_1 - a_{1n}v}$, tal que $v_{n-1} \notin Span\{v, v_1, v_2, \ldots, v_{n-2}\}$ tenemos que:

$$Xv_{n-1} = a_{1n}v + a_{2n}v_1 + \cdots + a_{n-1n}v_{n-2}.$$

Por lo tanto, $\gamma = \{v, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ constituyen una base de V, donde para cualquier $X \in \mathfrak{g}$:

$$[X]_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

es decir, todo elemento de $\mathfrak{g}$ es representado por matrices estrictamente triangulares superiores. □

Corolario 2.1 (Teorema de Engel)**.** *Una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es nilpotente, sí y solo si $ad(X)$ es nilpotente para cualquier $X \in \mathfrak{g}$.*

Demostración. Sea $X \in \mathfrak{g}$ y suponga que $ad(X)$ es nilpotente. De acuerdo a la representación adjunta de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}$, tenemos que $ad(\mathfrak{g})$ es un subálgebra de $\mathfrak{g}$, constituida de elementos nilpotentes, entonces por el lema de Engel:

$$\exists Y \neq 0 \in \mathfrak{g} : ad(X)Y = 0, \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Esto último es equivalente a concluir que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ es no nulo; es mas, recordemos que este mismo es el núcleo de la representación adjunta; es decir, $ker(ad) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, por la proposición 1.10. Por el teorema 1.1 entonces:

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cong im(ad) = ad(\mathfrak{g}).$$

Del teorema anterior, existe una base de $\mathfrak{g}$ de modo que todo elemento de $ad(\mathfrak{g})$ es representado por matrices estrictamente triangulares superiores y, al ser tal conjunto un subálgebra nilpotente de $\mathfrak{g}l(\mathfrak{g})$, entonces $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ es nilpotente.
Por tanto, por (3) de la proposición 2.6, tenemos que $\mathfrak{g}$ es nilpotente. □

2.4. Álgebras Solubles y el Teorema de Lie

Definición 2.3. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie. Definimos vía inducción, los siguientes subespacios de $\mathfrak{g}$:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{(0)} &= \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}^{(1)} &= \mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \\ \mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}] &= [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] \\ &\vdots \\ \mathfrak{g}^{(k)} &= [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}]. \end{aligned}$$

Entonces $\mathfrak{g}^{(k)}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$, para todo $k \geq 0$. En particular $\mathfrak{g}^{(k)}$ es un subálgebra y, por tanto, la secuencia es decreciente; es decir :

$$\mathfrak{g}^{(k+1)} \subset \mathfrak{g}^{(k)}.$$

*Esta secuencia de ideales de $\mathfrak{g}$ se denomina la **serie derivada** de $\mathfrak{g}$ y cada una de sus componentes, son las **álgebras derivadas** de $\mathfrak{g}$.*
*Se dice que $\mathfrak{g}$ es **soluble**, si alguna de sus álgebras derivadas se anula, esto es:*

$$\mathfrak{g}^{(k_0)} = \{0\}$$

para algún $k_0 \geq 1$ (y por tanto, $\mathfrak{g}^{(k_0)} = 0$, para todo $k \geq k_0$.

Proposición 2.9. *Sea A una álgebra asociativa y tome $x, y \in A$,*

1. *Sea $ad_l(x)y = xy - yx$, se tiene que para todo $n \geq 1$, la fórmula de conmutación izquierda:*

$$x^n y = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (ad_l(x)^{n-p} y) x^p.$$

2. *La fórmula de conmutación por la derecha, viene dada por:*

$$yx^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p (ad_r(x)^{n-p} y),$$

donde $ad_r(x)y = yx - xy$.

Demostración. 1. Vía inducción sobre n, para $n = 1$ tenemos que $xy = yx + [x, y]$ por hipótesis. Asumiendo válido el resultado para n, entonces

$$\begin{aligned}
&x^{n+1}y = x(x^n y) \\
&= (x^n y)x + [x, x^n y] \\
&= (\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (ad_l(x)^{n-p} y) x^p) x + [x, \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (ad_l(x)^{n-p} y) x^p] \\
&= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (ad_l(x)^{n-p} y) x^{p+1} + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (ad_l(x)^{n-p+1} y) x^p \\
&= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (ad_l(x)^{n-p} y) x^{p+1} + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (ad_l(x)^{n-p+1} y) x^p \\
&= \sum_{p=1}^{n+1} \binom{n}{p-1} (ad_l(x)^{n+1-p} y) x^p + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (ad_l(x)^{n+1-p} y) x^p \\
&= yx^{n+1} + \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p-1} (ad_l(x)^{n+1-p} y) x^p \\
&+ \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} (ad_l(x)^{n+1-p} y) x^p + ad_l(x)^{n+1} y \\
&= yx^{n+1} + ad_l(x)^{n+1} y + \sum_{p=1}^{n} (\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p}) (ad_l(x)^{n+1-p} y) x^p \\
&= yx^{n+1} + ad_l(x)^{n+1} y + \sum_{p=1}^{n} \binom{n+1}{p} (ad_l(x)^{n+1-p} y) x^p \\
&= \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} (ad_l(x)^{(n+1)-p} y) x^p.
\end{aligned}$$

Por tanto, para todo $n \geq 0$, se verifica la fórmula de conmutación por la derecha.

La fórmula de conmutación derecha se obtiene de manera análoga al de la izquierda. □

Lema 2.2. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ algebraicamente cerrado de característica cero, $\mathfrak{g}$ una subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$ y $\mathfrak{h}$ un ideal de $\mathfrak{g}$. Sea $\lambda : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathbb{K}$ es un funcional lineal y*

$$K = \{v \in V : Av = \phi(A)v, \forall A \in \mathfrak{h}\},$$

entonces K es un subespacio invariante de $\mathfrak{g}$.

Demostración. Sea $X \in \mathfrak{g}$, entonces debemos mostrar que $XK \subset K$; es decir, para cualquier $v \in K$ y $Y \in \mathfrak{h}$, $YXv = \lambda(Y)Xv$. Para esto, recordemos que $[X, Y] = XY - YX$, entonces

$$YX = XY - [X, Y],$$

de donde para $v \in K$,

$$YXv = XYv - [X, Y]v = \lambda(Y)Xv - \lambda([X, Y])Xv, \tag{$*$}$$

pues $[X, Y] \in \mathfrak{h}$, al ser $\mathfrak{h}$ un ideal. Afirmamos que de la ecuación anterior, $\lambda([X, Y]) = 0$.

En efecto, es posible tomar $v \neq 0 \in K$. Sean $v_0 = v, v_1 = Xv, \ldots, v_k = X^k v, \ldots$. Denominando $U_s = Span\{v_s, s \geq 0\}$, al ser V de dimensión finita tenemos que los U_s son subespacios de dimensión finita. Sea $m \geq 0$ el menor número, tal que $\{v_0, \ldots, v_m\}$ sea linealmente dependiente. De este modo $dim(U_m) = m$, pues $\{v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}\}$ es linealmente independiente.

Ahora sea $Z \in \mathfrak{h}$, por la proposición 2.9:

$$\begin{aligned}
Zv_r &= ZX^r v \\
&= \sum_{p=0}^{r} \binom{r}{p} X^p((ad(X)^{r-p}Z)v) \\
&= \sum_{p=0}^{r} \binom{r}{p} X^p \lambda(ad(X)^{r-p}Z)v \\
. &= \sum_{p=0}^{r} \binom{r}{p} \lambda(ad(X)^{r-p}Z)X^p v && (\mathfrak{h} \text{ es ideal}) \\
&= \sum_{p=0}^{r} \binom{r-1}{p} \lambda(ad(X)^{r-p}Z)X^p v + \lambda(Z)X^r v.
\end{aligned}$$

Esto último muestra que $ZU_m \subset U_m$. De la relación
$Zv_r = \sum_{p=0}^{r} \binom{r-1}{p} \lambda(ad(X)^{r-p}Z)X^p v + \lambda(Z)v_r$, $Z|_{U_m}$ se representa, en la base $\beta = \{v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}\}$:

$$(Z|_{U_m})_\beta = \begin{pmatrix} \lambda(Z) & * & \ldots & * \\ 0 & \lambda(Z) & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda(Z) \end{pmatrix}$$

Ahora, $tr(Z|_{U_m}) = m\lambda(Z)$, donde $Z \in \mathfrak{h}$ es cualquiera. En particular, se verifica que, para $Z = [X, Y] \in \mathfrak{h}$:

$$tr([X, Y]|_{U_m} = tr(XY|_{U_m}) - tr(YX|_{U_m})) = 0 = m\lambda([X, Y]).$$

Al ser $\mathbb{K}$ de característica cero, de la anterior ecuación se concluye que $\lambda([X, Y]) = 0$, por lo tanto, reemplazando esto último en la ecuación $(*)$:

$$YXv = \lambda(Y)Xv, \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Así $XK \subset K$ o K es $\mathfrak{g}$ invariante. □

Teorema 2.3. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$, un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero y $\mathfrak{g}$ una subálgebra soluble de $\mathfrak{g}l(V)$, entonces existe un vector no nulo $x \in V$ y un funcional lineal λ tal que $Xx = \lambda(X)x$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.*

Demostración. La prueba es vía inducción sobre la dimensión de $\mathfrak{g}$. Supongamos que $dim(\mathfrak{g}) = 1$, entonces $\mathfrak{g} = Span\{X\}$, con $X \neq 0 \in \mathfrak{g}$. Como $\mathbb{K}$ es algebraicamente cerrado, el polinomio característico de X, tiene todas sus raíces en $\mathbb{K}$ y en consecuencia, X tiene autovectores. Sea $\alpha \in \mathbb{K}$ un autovalor de X y $x \neq 0 \in V$ un autovector asociado a X; es decir, $Xx = \alpha x$. Por otra parte, para cualquier $Y \in \mathfrak{g}$, tenemos que $Y = aX$. Sea $\lambda : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$ una aplicación, tal que $\lambda(Y) = a\alpha$. Es evidente que λ es un funcional lineal y, además verifica lo siguiente:

$$Yx = (aX)x = a(Xx) = a(\alpha x) = (a\alpha)x = \lambda(Y)x, \forall Y \in \mathfrak{g}.$$

Por tanto, el primer paso de inducción esta verificado. Sea ahora el resultado válido para álgebras de Lie solubles, cuya dimensión es menor que $dim(\mathfrak{g})$.
Afirmamos que $\mathfrak{g}$ contiene un ideal de codimensión uno, pues al considerar $\mathfrak{g}'$, si ocurriese que $\mathfrak{g}' = 0$, entonces $\mathfrak{g}$ sería abeliana y por tanto

unidimensional, lo cual contradice que $dim(\mathfrak{g}) > 1$. Así, es posible encontrar un ideal $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, tal que $dim(\mathfrak{h}) = dim(\mathfrak{g}) - 1$; además, soluble pues $\mathfrak{g}$ es soluble.
Por hipótesis de inducción:

$$\exists x' \neq 0 \in V : Xx' = \lambda'(X)x', \forall X \in \mathfrak{h},$$

donde $\lambda' : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathbb{K}$.
Sea $W = \{w \in V : Xw = \lambda'(X)w, \forall X \in \mathfrak{h}\}$. Luego por el lema 2.2, $YW \subset W$ para todo $Y \in \mathfrak{g}$.
Ahora, para $X_0 \neq 0 \in \mathfrak{g} - \mathfrak{h}$, consideremos $Span\{X_0\}$, entonces $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus Span\{X_0\}$. Ya que en particular $X_0 W \subset W$, se puede considerar la restricción $X_0|_W$, de modo que este tenga un autovector en W; es decir,

$$\exists x \neq 0 \in W : X_0 x = \sigma x, \sigma \in \mathbb{K}.$$

Por otra parte, sea $Y \in \mathfrak{g}$, entonces $Y = H + bX_0$. Definimos la correspondencia $\lambda : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$, de modo que:

$$\lambda(Y) = \lambda(H + bX_0) = \lambda'(H) + b\sigma. \tag{$*$}$$

Concluimos que λ está bien definida, pues $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus Span\{X_0\}$ y además es lineal, pues $\sigma \in \mathbb{K}$ y $\lambda' \in \mathfrak{h}^*$.
El funcional lineal λ es tal que:

$$Yx = (H + bX_0)x = (\lambda'(H) + b\sigma)x = \lambda(Y)x,$$

por $(*)$ y para todo $Y \in \mathfrak{g}$. □

Corolario 2.2. *(Teorema de Lie) Sea $\mathfrak{g}$ una subálgebra soluble de $\mathfrak{g}l(V)$, entonces existe una base de V, de modo que todo elemento de $\mathfrak{g}$, se representa con matrices triangulares superiores.*

Demostración. Por el teorema 2.3, existe $v_1 \neq 0 \in V$ y un funcional lineal $\lambda_1 : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$, de modo que

$$Xv_1 = \lambda_X v_1, \forall X \in \mathfrak{g}. \tag{1}$$

Ahora, al considerar la representación canónica i, de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}l(V)$, $V_1 = Span\{v_1\}$ resulte ser invariante por i.Luego por la proposición 1.14 obtenemos una representación $\rho_1 = i_{V_1}$, de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}l(V)$, dada por $\rho_1(X) = \overline{i(X)} = \overline{X} : V/V_1 \longrightarrow V/V_1$.
Ahora, observemos que $\rho_1(\mathfrak{g}) = \{\rho_1(X) : X \in \mathfrak{g}\}$ es soluble, pues ρ_1 es un homomorfismo, entonces por el teorema de Lie, existe $\overline{w_1} \in V/V_1$ y $\tau_1 : \rho(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathbb{K}$ un funcional lineal, tal que

$$\rho_1(X)\overline{w_1} = \tau(\rho_1(X))\overline{w_1},$$

con $X \in \mathfrak{g}$. Sea $\lambda_2 = \tau_1 \circ \rho_1 : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$. Notemos que λ_2 es un funcional lineal, entonces en la anterior ecuación:

$$\rho_1(X)\overline{w_1} = \overline{Xw_1} = \overline{\lambda_2(X)w_1};$$

es decir,

$$\overline{Xw_1 - \lambda_2(X)w_1} = \overline{0}.$$

Por tanto, para un representante de clase $v_2 \neq 0 \in V - V_1$ de $\overline{w_1}$, $Xv_2 - \lambda_2(X)v_2 \in V_1$, y por ende, existe $z_1 \in V_1$, tal que:

$$Xv_2 = \lambda_2(X)v_2 + z_1; \tag{2}$$

donde $\{v_1, v_2\}$ es linealmente independiente y $X \in \mathfrak{g}$ cualquiera. Ahora, sea $V_2 = Span\{v_1, v_2\}$, de nuevo V_2 es I - invariante por (2). Así, $\rho_2 = I_{V_2} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}l(V/V_2)$ es una representación.
Tenemos también que $\rho_2(\mathfrak{g})$ es soluble, así por el teorema de Lie, existe $w_2 \neq \overline{0} \in V/V_2$ y $\tau_2 : \rho_2(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathbb{K}$ funcional lineal, de modo que:

$$\rho_2(X)\overline{w_2} = \tau_2(\rho_2(X))\overline{w_2},$$

con $X \in \mathfrak{g}$. Haciendo $\lambda_3 = \tau_2 \circ \rho_2 : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$, similar al paso anterior, para un representante de clase $v_3 \neq 0 \in V - V_2$,

$$Xv_3 = \lambda_3(X)v_3 + z_2, z_2 \in V_2, \tag{3}$$

de modo que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es linealmente independiente y $X \in \mathfrak{g}$ es cualquiera.
Este proceso, puede ser repetido $n = dim(V) < \infty$. Por lo tanto, se encontrarán $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ funcionales lineales, de modo que:

$$\begin{aligned} &Xv_1 = \lambda_1(X)v_1 \\ &Xv_j = \lambda_j(X)v_j + z_{j-1}, j = \{2, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

Además, por construcción $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de V y para cualquier $X \in \mathfrak{g}$,

$$[X]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1(X) & * & \ldots & * \\ 0 & \lambda_2(X) & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n(X). \end{pmatrix}$$

□

Corolario 2.3. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie, entonces $\mathfrak{g}$ es soluble, sí y solo si, $\mathfrak{g}'$ es nilpotente.*

Demostración. Supongamos que $\mathbb{K}$ es algebraicamente cerrado.

$\Longleftarrow$ Si $\mathfrak{g}'$ es nilpotente, entonces $\mathfrak{g}'$ es soluble, de modo que al considerar el cociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ es abeliana, por tanto soluble y también $\mathfrak{g}$ es soluble.

$\Longrightarrow$ Si $\mathfrak{g}$ es soluble, consideremos la representación adjunta de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}$; es decir $ad : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}l(\mathfrak{g})$.
Luego, $ad(\mathfrak{g})$ es un subálgebra soluble de $\mathfrak{g}l(\mathfrak{g})$. Por el corolario de Lie, para cualquier $X \in \mathfrak{g}$, tenemos que:

$$[ad(X)]_\beta = \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & * \end{pmatrix}$$

donde β es una base de $\mathfrak{g}$.
Ahora, sea $Y \in \mathfrak{g}$, entonces

$$\begin{aligned} [ad([X,Y])]_\beta &= [[ad(X), ad(Y)]]_\beta \\ &= [ad(X)ad(Y) - ad(Y)ad(X)]_\beta \\ &= [ad(X)]_\beta[ad(Y)]_\beta - [ad(Y)]_\beta[ad(X)]_\beta \\ &= \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0, \end{pmatrix} \end{aligned}$$

pues el corchete de matrices triangulares superiores, tiene todos los elementos de su diagonal principal iguales a cero. Esto quiere decir que para cualquier $Y' \in \mathfrak{g}'$,

$$[ad(Y')]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0; \end{pmatrix}$$

es decir, $ad(Y') \in \mathfrak{g}l(\mathfrak{g})$ es nilpotente, para todo $Y' \in \mathfrak{g}'$.
Ya que $\mathfrak{g}'$ es ideal de $\mathfrak{g}$, entonces $ad(X)\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}'$, entonces al considerar la restricción, tenemos que $ad(Y')|_{\mathfrak{g}'} : \mathfrak{g}' \longrightarrow \mathfrak{g}'$, es nilpotente, para todo $Y' \in \mathfrak{g}'$.
Finalmente, como $ad(Y')|_{\mathfrak{g}'} = ad|_{\mathfrak{g}'}(Y')$, entonces por el corolario de Engel, $\mathfrak{g}'$ es nilpotente.

$\square$

2.5. Representaciones de Álgebras Nilpotentes

Proposición 2.10. *Sea D una derivación de $\mathfrak{g}$, donde $\mathfrak{g}$ es de dimensión finita y $\mathbb{K}$ algebraicamente cerrado. Considerando la descomposición primaria de $\mathfrak{g}$, respecto a D:*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_s}$$

donde $\mathfrak{g}_{\lambda_i} = \{X \in \mathfrak{g} : (D - \lambda_i)^n X = 0, n \geq 1\}$ es el auto-espacio generalizado asociado al autovalor λ_i. Entonces

$$[\mathfrak{g}_{\lambda_i}, \mathfrak{g}_{\lambda_j}] \subset \mathfrak{g}_{\lambda_i + \lambda_j}.$$

$(\mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_j} = 0)$ *si $\lambda_i + \lambda_j$ no es autovalor de D.*

Demostración. Sean $X, Y \in \mathfrak{g}_{\lambda_i}, \mathfrak{g}_{\lambda_j}$, entonces para algunos $k, s \geq 1$ tenemos que $(D - \lambda_i)^k X = 0$ y $(D - \lambda_j)^s Y = 0$. Observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}(D - (\lambda_i + \lambda_j))[X, Y] &= D[X, Y] - (\lambda_i + \lambda_j)[X, Y] \\ &= [DX, Y] + [X, DY] - \lambda_i[X, Y] - \lambda_j[X, Y] \\ &= [(D - \lambda_i)X, Y] + [X, (D - \lambda_j)Y],\end{aligned}$$

pues $D \in \partial\mathfrak{g}$. Después:

$$\begin{aligned}&(D - (\lambda_i + \lambda_j))^2[X, Y] = (D - (\lambda_i + \lambda_j))([(D - \lambda_i)X, Y] + [X, (D - \lambda_j)Y]) \\ &= [(D - \lambda_i)^2 X, Y] + 2[(D - \lambda_i)X, (D - \lambda_j)Y] + [X, (D - \lambda_j)^2 Y]).\end{aligned}$$

Vía inducción, vamos a obtener que:

$$(D - (\lambda_i + \lambda_j))^n[X, Y] = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} [(D - \lambda_i)^r X, (D - \lambda_j)^{n-r} Y]$$

para todo $n \geq 1$. En efecto, asumiendo el resultado para $n-1$:

$$
\begin{aligned}
&(D-(\lambda_i+\lambda_j))^n[X,Y] = (D-(\lambda_i+\lambda_j))(D-(\lambda_i+\lambda_j))^{n-1}[X,Y] \\
&= (D-(\lambda_i+\lambda_j))(\sum_{r=0}^{n-1}\binom{n-1}{r}[(D-\lambda_i)^r X,(D-\lambda_j)^{n-1-r}Y]) \\
&= \sum_{r=0}^{n-1}(D-(\lambda_i+\lambda_j))\binom{n-1}{r}[(D-\lambda_i)^r X,(D-\lambda_j)^{n-1-r}Y] \\
&= \sum_{r=0}^{n-1}\binom{n-1}{r}[(D-\lambda_i)^{r+1} X,(D-\lambda_j)^{n-1-r}Y] \\
&+ \sum_{r=0}^{n-1}\binom{n-1}{r}[(D-\lambda_i)^r X,(D-\lambda_j)^{n-r}Y] \\
&= \sum_{r=1}^{n}\binom{n-1}{r-1}[(D-\lambda_i)^r X,(D-\lambda_j)^{n-r}Y] \\
&+ \sum_{r=0}^{n-1}\binom{n-1}{r}[(D-\lambda_i)^r X,(D-\lambda_j)^{n-r}Y] \\
&= \sum_{r=1}^{n-1}\binom{n-1}{r-1}[(D-\lambda_i)^r X,(D-\lambda_j)^{n-r}Y] + [(D-\lambda_i)^n X,Y]+ \\
&+ [X,(D-\lambda_j)^n Y] + \sum_{r=1}^{n-1}\binom{n-1}{r}[(D-\lambda_i)^r X,(D-\lambda_j)^{n-r}Y] \\
&= [X,(D-\lambda_j)^n Y] + \sum_{r=1}^{n}\binom{n-1}{r}[(D-\lambda_i)^r X,(D-\lambda_j)^{n-r}Y] + [(D-\lambda_i)^n X,Y] \\
&= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}[(D-\lambda_i)^r X,(D-\lambda_j)^{n-r}Y].
\end{aligned}
$$

Ahora si hacemos que $n = k+s$, para $0 \leq r \leq n$ si $n-r \geq s$ entonces $(D-\lambda_j)^{n-r}Z = 0$ y si $n-r < s$ entonces $k < r$ y por ende $(D-\lambda_i)^r Z = 0$.

Así $(D-(\lambda_i+\lambda_j))^n[X,Y] = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}[(D-\lambda_i)^r X,(D-\lambda_j)^{n-r}Y] = 0$ y por tanto $[X,Y] \in \mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_j}$, con $i,j \in \{1,\ldots,s\}$. □

Proposición 2.11. *Supongamos que el cuerpo de escalares es algebraicamente cerrado. Sean A y B en $\mathfrak{gl}(V)$ y V_{λ_i}, los autoespacios generalizados de A. Entonces $BV_{\lambda_i} \subset V_{\lambda_i}$ para todo i, si y solo sí $ad(A)^q B = 0$, para algún $q \geq 1$.*

Demostración. $\Longrightarrow$ Sea $A_i = A - \lambda_i I = A - \lambda_i$. Afirmamos que $ad(A)^q B = 0$ sí y solamente si $ad(A_i)^q B = 0$, para algún $q \geq 1$. En efecto, si suponemos que $ad(A)^q B = 0$, entonces

$$\begin{aligned} ad(A_i)^q B &= ad(A_i)(ad(A_i)^{q-1}B) \\ &= A_i(ad(A_i)^{q-1}B) - (ad(A_i)^{q-1}B)A_i \\ &= (A-\lambda_i)ad(A_i)^{q-1}B - ad(A_i)^{q-1}B(A-\lambda_i) \\ &= Aad(A_i)^{q-1}B - ad(A_i)^{q-1}BA \\ &= ad(A)ad(A_i)^{q-1}B. \end{aligned} \tag{1}$$

Ahora, vemos que

$$\begin{aligned} ad(A_i)^{q-1}B &= ad(A_i)ad(A_i)^{q-2}B \\ &= ad(A)ad(A_i)^{q-2}B. \end{aligned} \tag{2}$$

De (1) y (2) tenemos lo siguiente: $ad(A_i) = ad(A)^2 ad(A_{q-2})B$.
Entonces podemos repetir el proceso anterior q veces, de modo que

$$ad(A_i)^q = ad(A)^q ad(A_i)^0 B = ad(A)^q B = 0.$$

Recíprocamente, si $ad(A_i)^q B = 0$:

$$\begin{aligned} ad(A)^q B &= ad(A)ad(A)^{q-1}B \\ &= Aad(A)^{q-1}B - ad(A)^{q-1}BA \\ &= (A_i+\lambda_i)ad(A)^{q-1}B - ad(A)^{q-1}B(A_i+\lambda_i) \\ &= ad(A_i)ad(A)^{q-1}B. \qquad \text{(pues } A_i = A-\lambda_i\text{)} \end{aligned}$$

De la misma forma, es posible repetir el proceso anterior q veces, de modo que

$$ad(A)^q B = ad(A_i)^q ad(A)^0 B = ad(A_i)^q B = 0, \forall i = 1, \ldots, s.$$

Ahora sea $v \in V_{\lambda_i}$, de modo que existe $k \geq 1$ tal que $(A_i)^k = 0$. Entonces por la fórmula de conmutación izquierda de la proposición 2.9, tenemos que

$$(A_i)^n B = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (ad(A_i)^{n-p}B)A_i^p. \tag{3}$$

Elijamos n, de modo que $n > q + k$, donde q y k son fijos. Ya que $0 \leq p \leq n$ y $n > k$, puede darse que $p > k$. En ese caso, $(A_i)^n B = 0$,
Por otra parte, para $k > p$, $-k \leq -p$; sumamos n y tenemos $n - k \leq n - p$. Como $n - k > q$, entonces $n - p > q$ y otra vez, $(A_i)^n B = 0$. Por lo tanto, para $n > k$, $(A_i)^n Bv = 0$; es decir, $Bv \in V_{\lambda_i}$ para todo $i = 1, \ldots, s$.

$\Longleftarrow$ Supongamos ahora que $BV_{\lambda_i} \subset V_{\lambda_i}, i = 1\ldots, s$. Por la definición de $V_{\lambda i}$, $A_i|_{V_{\lambda i}}$ es un operador nilpotente, para todo i. Por hipótesis $B_i = B|_{V_{\lambda i}}$ es un operador lineal. Del lema 2.1, $ad(A_i|_{V_{\lambda i}})$ también es nilpotente, de modo que para algún q_i:

$$ad(A_i|_{V_{\lambda i}})^{q_i} B_i = 0$$

para algún q_i. Tomando $q = max\{q_1, \ldots, s\}$ entonces

$$ad(A)^q B = ad(A)^q B_1 + \cdots + ad(A)^q B_s, \forall i.$$

y como en $V_{\lambda_i}, ad(A)^q = ad(A)^q|V_{\lambda_i} = ad(A_i)^q$:

$$= ad(A_1)^q B_1 + \cdots + ad(A_s)^q B_s = 0,$$

lo cual prueba la recíproca del teorema.

$\square$

Teorema 2.4. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie nilpotente sobre $\mathbb{K}$, un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero. Sea ρ una representación de $\mathfrak{g}$ en V, donde $dim(V) < \infty$. Entonces existen funcionales lineales $\lambda_1 \ldots \lambda_s$ tal que si:*

$$V_{\lambda_i} = \{v \in V : \forall X \in \mathfrak{g}, \exists n \geq 1, (\rho(X) - \lambda_i(X))^n v = 0\},$$

entonces V_{λ_i} es $\mathfrak{g}$ - invariante, con $i = 1, \ldots, s$ y

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}.$$

Demostración. Sean $X, Y \in \mathfrak{g}$, como $\mathfrak{g}$ es nilpotente, $ad(X)^q Y = 0$ para algún $q \geq 1$. Al ser ρ un homorfismo, entonces:

$$\rho(ad(X)^q Y) = ad(\rho(X))^q \rho(Y) = 0.$$

Fijando $X \in \mathfrak{g}$, consideramos la descomposición primaria de V:

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus, \ldots, \oplus V_s,$$

dada por $\rho(X)$. Entonces por la proposición 2.11, $\rho(Y)V_i \subset V_i$, para todo $i = 1, \ldots, s$ y como $Y \in \mathfrak{g}$ es cualquiera, entonces V_i es ρ - invariante.
Entonces por la proposición 1.13,

$$\begin{aligned} \rho_{V_i} : &\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}l(V_i) \\ &Y \mapsto \rho_{V_i}(Y) = \rho(Y)|_{V_i}, \end{aligned}$$

es una representación, para todo $i = 1, \ldots, s$.
Ahora considerando la descomposición primaria de V_i, dada por $\rho(Y)|_{V_i}$:

1. En el caso de que para todo i, la descomposición primaria de $\rho(Y)|_{V_i}$, tenga un único elemento, entonces $V_i \subset W_i$, donde

$$W_i = \{v \in V_i : (\rho(Y)|_{V_i} - \lambda_i(Y))^k v = (\rho(Y) - \lambda_i(Y))^k v = 0, k \geq 1\},$$

, para todo $i = 1, \ldots, s$.

2. Supongamos que la descomposición primaria de V_i, vía $\rho(Y)|_{V_i}$ presenta mas de un elemento; es decir:

$$V_i = W_1^i \oplus, \ldots, \oplus W_t^i,$$

donde $W_j^i = \{v \in V_i : (\rho(Y)|_{V_i} - \lambda_j^i)^{k_i} v = 0, k_{i \geq 1}\}, \forall j = 1, \ldots, t$. Por tanto, V quedará como sigue:

$$V = W_1 \oplus, \ldots, \oplus (W_1^i \oplus, \ldots, \oplus W_t^i) \oplus, \ldots, \oplus W_s.$$

Ahora, con esta nueva descomposición de V es posible repetir el argumento anterior. En efecto, sea ahora $Y \in \mathfrak{g}$ fijo y para cualquier $Z \in \mathfrak{g}$, tenemos que $ad(Y)^r Z = 0$. aplicando $\rho|_{V_i}$ a la anterior igualdad entonces $ad(\rho|_{V_i}(Y))^r (\rho|_{V_i})(Z) = 0$. Por la proposición 1.13, todos los miembros de V son invariantes por $\rho|_{V_i}(Z)$, en particular para W_j^i para todo $j = 1, \ldots, t$. Entonces:

$$\begin{aligned} \rho_{W_j^i} :& \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}l(W_j^i) \\ & Z \mapsto \rho_{W_j^i}(Z) = \rho_{V_i}(Z)|_{W_j^i}, \end{aligned}$$

es una representación de $\mathfrak{g}$ es W_i^j, con $j = 1, \ldots, t$.
Considerando la descomposición primaria de W_j^i, vía $\rho_{W_j^i}(Z)$, esta puede tener; como en el proceso anterior, dos posibilidades. De darse el segundo caso, es posible obtener una nueva descomposición de V, fijando ahora Z y considerando la representación $\rho_{W_j^i}$.
Como $dim(V) < \infty$, este proceso se detiene en algún momento, pues las dimensiones de los subespacios van disminuyendo, conforme se aplica la descomposición primaria. Por lo tanto, obtenemos una descomposición en subespacios $\mathfrak{g}$-invariantes:

$$V = W_1 \oplus, \ldots, \oplus W_p,$$

de modo que $W_i = \{v \in V : \forall Y \in \mathfrak{g}, (\rho(Y) - \lambda_i(Y))^k v = 0, k \geq 1\}$.
Por como están definidos los λ_i, estos pueden ser considerados como aplicaciones de $\mathfrak{g}$ en $\mathbb{K}$; es decir, $\lambda_i : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}, \forall i$. Podemos suponer que al realizar el proceso anterior, encontramos una descomposición de V, tal

que $V = W_1, \oplus, \ldots, \oplus W_s$, de modo que $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$.
Notemos que bajo las condiciones anteriores, $W_i \subset V_{\lambda_i}$.
Primero, se mostrará la linealidad de λ_i. En efecto, sea ρ_i la restricción de ρ a V_{λ_i}, por como está definida V_{λ_i}, deducimos que $\rho(X) - \lambda_i(X)$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. Así, $tr(\rho(X) - \lambda_i(X))) = 0$ o

$$\lambda_i(X) = \frac{tr(\rho_i(X))}{dim(V_{\lambda_i})}.$$

Por lo tanto, λ_i es lineal, para todo $i = 1 \ldots s$ por la linealidad de la traza.
Al considerar los λ_i' s distintos, es posible encontrar $X \in \mathfrak{g}$ tal que $\lambda_i(X) \neq \lambda_j(X)$, si $i \neq j$. Luego con X de esa forma notemos que $\lambda_i(X)$ es un autovalor de $\rho(X)$. Considerando entonces el autoespacio generalizado asociado $V_{\lambda_i(X)}$, para todo $i = 1 \ldots s$. Así tenemos que su suma:

$$V_{\lambda_1(X)} + \cdots + V_{\lambda_s(X)}$$

es directa, pues los autovalores son distintos dos a dos. También $W_i \subset V_{\lambda_i}$ lo que hace que la suma coincida con V; es decir:

$$V = V_{\lambda_1(X)} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s(X)},$$

lo cual implica que $W_i = V_{\lambda_i(X)}$, para todo $i = 1, \ldots, s$; aparte, $V_{\lambda_i} \subset V_{\lambda_i(X)}$ por como está definido $V_{\lambda_i(X)}$.
Así $V_{\lambda_i} \subset V_{\lambda_i(X)} = W_i$, lo que concluye la prueba del teorema. $\square$

Definición 2.4. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie y ρ una representación de $\mathfrak{g}$ en V. Un **peso** de ρ es un funcional lineal $\lambda : \mathfrak{g} \longmapsto \mathbb{K}$ tal que el subespacio V_λ de V definido por:*

$$V_\lambda = \{v \in V : \forall X \in \mathfrak{g}, \exists n \geq 1, (\rho(X) - \lambda(X))^n v = 0\},$$

*cumple la condición de ser no nulo; es decir, $V_\lambda \neq 0$. El subespacio V_λ es denominado **subespacio de pesos asociado a** λ. La dimensión de V_λ se denomina la **multiplicidad** de λ.*

Ejemplo 2.5.1. *Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ y la base $\beta = \{X, H, Y\}$ la base canónica de $\mathfrak{g}$. Sea $\mathfrak{h} = Span\{H\}$. Considerando la representación adjunta de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}$, el teorema anterior concluye que $\mathfrak{g}$ se descompone en espacio de pesos. En efecto:*
Sea $Z \in \mathfrak{h}$, entonces $Z = \alpha H$ con $\alpha \neq 0 \in \mathbb{C}$. Ahora

$$ad(Z) = \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha \end{pmatrix}.$$

Ahora calculando los autovalores de $[ad(Z)]_\beta$*:*

$$det(\lambda - [ad(Z)]_\beta) = \begin{pmatrix} \lambda - 2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 2\alpha \end{pmatrix} = (\lambda - 2\alpha)(\lambda + 2\alpha)\lambda = 0,$$

Calculamos primero $\mathfrak{g}_{\lambda_1}$*. Para* $n = 1$*,* $Ker((ad(Z) - \lambda_1)^n = Ker(ad(Z)^n)$*:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha & 0 \end{array}\right)$$

cuya solución es H*. Ya que* $Ker(ad(Z))^k = Ker(ad(Z))$ *para todo* $k \geq 1$*, tenemos que* $\mathfrak{g}_{\lambda_1} = Span\{H\} = \mathfrak{h}$*.*
Ahora para λ_2*,* $Ker((ad(Z) - \lambda_2))$*:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4\alpha & 0 \end{array}\right)$$

cuya solución es X*. Ya que* $Ker(ad(Z) - \lambda_2)^k = Ker(ad(Z) - \lambda_2)$ *para todo* $k \geq 1$*, entonces* $\mathfrak{g}_{\lambda_2} = Span\{X\}$*. De forma análoga, finalmente* $\mathfrak{g}_{\lambda_3} = Span\{Y\}$*. Los funcionales lineales* $\lambda_1(\alpha) = 0, \lambda_2(\alpha) = 2\alpha, \lambda_3(\alpha) = -2\alpha$ *son tal que:*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_1} \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_2}$$

es la descomposición de $\mathfrak{g}$ *en espacio de pesos, respecto a la representación adjunta de* $\mathfrak{h}$ *en* $\mathfrak{g}$*.*

Sea ahora $\mathfrak{h}_1 = Span\{H_1\}$ *donde* $H_1 = X - Y$*. Esta subálgebra es abeliana y por tanto nilpotente. Por tanto es posible aplicar el procedimiento anterior, para obtener una descomposición de pesos de* $\mathfrak{g}$*:*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{g}_{\lambda'_2} \oplus \mathfrak{g}_{\lambda'_3},$$

donde $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{g}_{\lambda_1} = Span\{H_1\}$*,* $\mathfrak{g}_{\lambda'_2} = Span\{X_1\}$ *y* $\mathfrak{g}_{\lambda'_3} = Span\{Y_1\}$ *con:*

$$\lambda'_1(Z_1) = 0 \qquad \lambda'_2(Z_1) = 2i\alpha \qquad \lambda'_3(Z_3) = -2i\alpha$$

funcionales lineales de

$$X_1 = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}, H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, Y_1 = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

los cuales conforman una base de $\mathfrak{g}$*.*

Corolario 2.4. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$, un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero. Sea $\mathfrak{h}$ una subálgebra nilpotente de $\mathfrak{g}$ de modo que:*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_s}$$

que es la descomposición en espacio de pesos de la representación adjunta de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}$. Entonces para todo $i, j \in \{0, \ldots s\}$:

$$[\mathfrak{g}_{\lambda_i}, \mathfrak{g}_{\lambda_j}] \subset \mathfrak{g}_{\lambda_i + \lambda_j}.$$

(Cuando $\lambda_i + \lambda_j$ no sea peso de la representación, $[\mathfrak{g}_{\lambda_i}, \mathfrak{g}_{\lambda_j}] = 0$).

Demostración. Sean $X, Y \in \mathfrak{g}_{\lambda_i}, \mathfrak{g}_{\lambda_j}$ respectivamente. Entonces de la proposición 2.10, ya que $ad(H)$ es una derivación, $[X, Y] \in \mathfrak{g}_{\lambda_i(H)+\lambda_j(H)}$, para todo $H \in \mathfrak{h}$; es decir,

$$[X, Y] \in \bigcap_{H \in \mathfrak{h}} \mathfrak{g}_{\lambda_i(H)+\lambda_j(H)} = \mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_j}$$

Por lo tanto, $[\mathfrak{g}_{\lambda_i}, \mathfrak{g}_{\lambda_j}] \subset \mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_j}, \forall i, j = \{0, \ldots s\}$. $\square$

Capítulo 3

Subálgebras de Cartan

3.1. Definición y propiedades

Definición 3.1. *Sea* $\mathfrak{h}$ *una subálgebra de una álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$*. Entonces el siguiente conjunto*

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{g} : [X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\}$$

es denominado el ***normalizador*** *de* $\mathfrak{h}$ *en* $\mathfrak{g}$*.*

Observación 3.1.1. *1. Sea* $S \subset \mathfrak{g}$*, entonces denotamos al* ***normalizador*** *de* $\mathfrak{h}$ *en* S*,*

$$\mathfrak{n}_S(\mathfrak{h}) = \{X \in S : [X, \mathfrak{h}] \subset\}.$$

2. $\mathfrak{n}(\mathfrak{h})$ *denota a* $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$*.*

Sobre el normalizador, tenemos las siguientes propiedades:

Proposición 3.1. *Sea* $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$*, una subálgebra de* $\mathfrak{g}$*:*

1. $\mathfrak{n}(\mathfrak{h}) \leq \mathfrak{g}$ *y* $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{n}(\mathfrak{h})$

2. $\mathfrak{n}(\mathfrak{h})$ *es la subálgebra de* $\mathfrak{g}$ *más grande, que contiene a* $\mathfrak{h}$ *como un ideal.*

Demostración. 1. Sean X y $X' \in \mathfrak{n}(\mathfrak{h})$, entonces para todo $H \in \mathfrak{h}$, $[X, H] \in \mathfrak{h}$ y $[X', H] \in \mathfrak{h}$.

Por la identidad de Jacobi, la antisimetría y la bilinealidad del corchete:

$$\begin{aligned}[][[X, X'], H] &= -([H, [X, X']]) \\ &= -([[H, X], X'] + [X, [H, X']]) \\ &= [X', [H, X]] + [X, [X', H]].\end{aligned}$$

Observemos que, $[X', [H, X]]$ y $[X, [X', H]]$ son elementos de $\mathfrak{h}$.
Por tanto, $[X, X'] \in \mathfrak{n}(\mathfrak{h})$ y por ende, $\mathfrak{n}(\mathfrak{h}) \leq \mathfrak{g}$; ademas, todo elemento de $\mathfrak{h}$ es un elemento del $\mathfrak{n}(\mathfrak{h})$, pues $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$. Así, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{n}(\mathfrak{h})$.

2. Sean $H \in \mathfrak{n}(\mathfrak{h})$ y $X \in \mathfrak{h}$. Entonces $[X, H] \in \mathfrak{h}$ pues $[H, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$, por lo tanto $\mathfrak{h}$ es un ideal de $\mathfrak{n}(\mathfrak{g})$.
   Por otra parte, si $\mathfrak{h}' \leq \mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{n}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$, donde $\mathfrak{h}$ es un ideal de $\mathfrak{h}'$, entonces $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'] \subset \mathfrak{h}$; es decir, $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{n}(\mathfrak{g})$. Por tanto $\mathfrak{n}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}'$ o equivalentemente $\mathfrak{n}(\mathfrak{h})$ es maximal.

□

Definición 3.2. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie y $\mathfrak{h}$ una subálgebra de $\mathfrak{g}$, decimos que $\mathfrak{h}$ es una* ***subálgebra de Cartan****(abreviado como* **CSA** *en sus siglas en inglés), si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *$\mathfrak{h}$ es nilpotente.*
2. *$\mathfrak{h} = \mathfrak{n}(\mathfrak{h})$*

Observación 3.1.2. *La condición 2 de la definición anterior es equivalente a:*

$$\text{Si } [X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}, \text{ entonces } X \in \mathfrak{h}.$$

Proposición 3.2.
1. *Si $\mathfrak{g}$ es una álgebra de Lie nilpotente, la única subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$, es $\mathfrak{g}$.*
2. *Cualquier subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$, es maximal y nilpotente; es decir, no está contenida en ninguna subálgebra nilpotente de $\mathfrak{g}$.*

Demostración.
1. Sea $\mathfrak{g}$ es nilpotente y $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ una subálgebra propia. Primero observemos que para cualquier $H \in \mathfrak{h}$, $ad(H)H' \in \mathfrak{h}$ con $H' \in \mathfrak{h}$.Podemos considerar entonces la representación adjunta de $\mathfrak{h}$, en $\mathfrak{g}$:

$$ad : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}l(\mathfrak{g}).$$

Observemos que $\mathfrak{h}$ es invariante por ad. Por la proposición 1.14,

$$\rho : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}l(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$$

tal que $\rho(H) = \overline{ad(H)}$ define una representación.
La representación de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}$ es nilpotente, pues existe un entero $n \geq 1$ tal que $ad(H)^n Y = 0$ para todo $H \in \mathfrak{h}$ y $Y \in \mathfrak{g}$. Por otra parte, recordemos que:

$$\rho(H)Y = \overline{ad(H)} = [\overline{H}, \overline{Y}] = \overline{[H, Y]} = \overline{ad(H)Y}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\rho(H)^2 Y &= \overline{ad(H)}(\overline{ad(H)}\overline{Y}) \\
&= \overline{ad(H)}(\overline{[H, Y]}) \\
&= \overline{[H, [H, Y]]} \\
&= \overline{ad(H)^2 Y}.
\end{aligned}$$

Hasta en n-ésimo paso entonces,tendremos:

$$\rho(H)^n Y = \overline{ad(H)^n Y} = \overline{0}.$$

Tanto $H \in \mathfrak{h}$ y $Y \in \mathfrak{g}$ son elementos cualesquiera.Por lo tanto la representación ρ de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ inducida por la adjunta, es también nilpotente. Por el lema de Engel, existe $\overline{Z} \neq \overline{0}$ en $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, tal que $\rho(H)\overline{Z} = \overline{[H,Z]} = \overline{0}$ para todo $H \in \mathfrak{h}$.
Sea $Z \in \mathfrak{g} - \mathfrak{h}$, un representante de clase de $\overline{Z} \neq \overline{0}$, entonces deducimos de la última igualdad, que $[H,Z] \in \mathfrak{h}$ y $Z \notin \mathfrak{h}$. Pero esto contradice el hecho de que $\mathfrak{h}$ sea una subálgebra de Cartan. Por lo tanto $\mathfrak{g}$ no contiene subálgebras de Cartan no triviales.

2. Afirmamos primero que para $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan y $\mathfrak{h}' \leq \mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}'$, $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{h}'$. Es claro que $\mathfrak{h}$ es nilpotente en $\mathfrak{h}'$.
Sea ahora $X \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{h}'}(\mathfrak{h})$, luego $[X,\mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$. Al ser $\mathfrak{h}' \leq \mathfrak{g}$, tenemos que X, visto como elemento de $\mathfrak{g}$ es tal que $[X,\mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$. Por lo tanto $X \in \mathfrak{n}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$; es decir, $\mathfrak{n}_{\mathfrak{h}'}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$.
Por otro lado, para cualquier $X \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}'$, $[X,\mathfrak{h}'] \subset \mathfrak{h}'$; es decir, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{n}_{\mathfrak{h}'}(\mathfrak{h})$. Así, $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{h}'$. Ahora sea $\mathfrak{h}' \leq \mathfrak{g}$ nilpotente, tal que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}'$. Observemos primero que $\mathfrak{h}'$ es nilpotente, luego por la afirmación anterior, $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{h}'$. Del item anterior deducimos de inmediato que $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}$. Así $\mathfrak{h}$ es maximal nilpotente.

□

Ejemplo 3.1.1. *Sea* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ *y* $\mathfrak{h}_1 = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}\}$, *entonces* $\mathfrak{h}$ *es una subálgebra de Cartan. En efecto, de entrada vemos que* $\mathfrak{h}_1$ *es abeliana y por tanto nilpotente. Ahora, sea* $\beta = \{X,H,Y\}$ *una base ordenada de* $\mathfrak{g}$, *donde*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Ahora, los corchetes de estos elementos vienen dados por $[H,X] = 2X$, $[H,Y] = -2Y$ *y* $[X,Y] = H$. *Sea* $Z = aX + bH + cY \in \mathfrak{n}(\mathfrak{h}_1)$, *luego, al ser* $\mathfrak{h}_1 = Span\{H\}$:

$$[H,Z] = [H, aX + bH + cY] = 2aX - 2cY. \qquad (*)$$

De $(*)$, *ya que* $[H,Z] \in \mathfrak{h}_1$, *entonces* $a = c = 0$; *es decir,* $Z \in span\{H\} = \mathfrak{h}_1$. *Por tanto,* $\mathfrak{n}(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_1$ *o sea, una subálgebra de Cartan de* $\mathfrak{g}$. *Ahora, sea*

$\mathfrak{h}_2 = \{\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}\}$. *Considerando otra base ordenada de* $\mathfrak{g}$*: siendo*

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

deducimos que $\mathfrak{h}_2 = Span\{A\}$ *y los corchetes entre ellos satisfacen*

$$[H, A] = -2S, \qquad [H, S] = -2A, \qquad [S, A] = 2H.$$

Entonces para cualquier $Z = aS + bH + cA \in \mathfrak{n}(\mathfrak{h}_2)$*:*

$$[A, Z] = [A, aS + bH + cA] = -2bS - 2aH. \tag{$**$}$$

Por $(**)$*, el corchete es un elemento de* $\mathfrak{h}_2$*, lo cual ocurre cuando* $a = b = 0$*. Esto último implica que* $Z \in Span\{A\} = \mathfrak{h}_2$*. Además, no olvidemos que* $\mathfrak{h}_2$ *es abeliana, por lo tanto nilpotente. Por lo tanto,* $\mathfrak{h}_2$ *es una subálgebra de Cartan de* $\mathfrak{g}$*.*

Ejemplo 3.1.2 (Maximal Nilpotente que no es de Cartan). *Bajo las mismas condiciones del ejemplo anterior, sea* $\mathfrak{h} = Span\{X\}$*. Entonces* $\mathfrak{h}$ *es una subálgebra maximal nilpotente pero no es una subálgebra de Cartan. En efecto supongamos que* $\mathfrak{h}_1 \leq \mathfrak{g}$ *es propia y nilpotente, tal que* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}_1$*. Por lo tanto* $dim(\mathfrak{h}_1) \leq 2$*. Si* $dim(\mathfrak{h}_1) = 2$*, entonces* $\mathfrak{h}_1$ *es abeliana o existe una base* $\{X, Y\}$ *de* $\mathfrak{h}_1$*, tal que* $[X, Y] = Y$*. Sin embargo,* $\mathfrak{h}_1$ *no puede ser del segundo tipo, pues dejaría de ser nilpotente. Así* $\mathfrak{h}_1$ *es abeliana.*
Ahora si $g \in \mathfrak{h}_1$*, entonces para* $g = \alpha X + \beta H + \gamma Y$*, pues* $Span\{X, H, Y\} = \mathfrak{g}$*. Luego*

$$0 = [X, g] = \beta H - 2\gamma X.$$

Por tanto $\beta = \gamma = 0$*; es decir,* $g \in \mathfrak{h}$ *y por tanto* $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$*.*
Si tomamos $h = \alpha X + \beta H + \gamma Y$ *un elemento de* $\mathfrak{n}(\mathfrak{h})$*, tenemos:*

$$[X, h] = \begin{pmatrix} \beta & -2\gamma \\ 0 & -\beta \end{pmatrix},$$

es decir, las matrices triangulares superiores de $\mathfrak{g}$*, normalizan* $\mathfrak{h}$*, por lo tanto* $\mathfrak{h}$ *no es una subálgebra de Cartan.*

Proposición 3.3. *Sea* $\mathfrak{g}$ *una álgebra de Lie y* $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$ *la álgebra de Lie obtenida de* $\mathfrak{g}$ *vía extensión de* $\mathbb{K}$*. Sea* $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ *y* $\mathfrak{h}_{\mathbb{K}} \leq \mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$ *generada por* $\mathfrak{h}$*, sobre* $\mathbb{K}$*. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\mathfrak{h}$ *es una subálgebra de Cartan de* $\mathfrak{g}$*,*

2. $\mathfrak{h}_{\mathbb{K}}$ *es una subálgebra de Cartan de* $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$*.*

Demostración. $\Longrightarrow$ Al ser $\mathfrak{h}$ nilpotente, $\mathfrak{h}_{\mathbb{K}}$ también lo es, por la proposición 2.7.
Ahora sea $Y \in \mathfrak{n}(\mathfrak{h}_{\mathbb{K}})$, entonces:

$$\forall H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{K}}, [Y, H] \in \mathfrak{h}_{\mathbb{K}}.$$

Como $\mathfrak{h}_{\mathbb{K}} \supset \mathfrak{h}$:

$$\forall H \in \mathfrak{h}, [Y, H] \in \mathfrak{h}.$$

Por tanto, $Y \in \mathfrak{n}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{K}}$. Así $\mathfrak{n}(\mathfrak{h}_{\mathbb{K}}) \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{K}}$; es decir, $\mathfrak{h}_{\mathbb{K}} \leq \mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$ es una subálgebra de Cartan.

- $\Longleftarrow$ Ahora, si $\mathfrak{h}_{\mathbb{K}}$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$ tenemos primero que $\mathfrak{h}$ es una subálgebra nilpotente de $\mathfrak{g}$.
  Para cualquier $X \in \mathfrak{n}(\mathfrak{h})$, afirmamos que $X \in \mathfrak{n}(\mathfrak{h}_{\mathbb{K}})$. En efecto para cualquier $H = \sum_j b_j h_j \in \mathfrak{h}_{\mathbb{K}}$, tenemos que:

$$[X, H] = \sum_j [X, h_j]$$

  y como $X \in \mathfrak{g}$ es tal que $[X, h_j] \in \mathfrak{h}$ para todo j, $[X, \mathfrak{h}_{\mathbb{K}}] \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{K}}$. Esto último implica que $X \in \mathfrak{n}(\mathfrak{h}_{\mathbb{K}})$ y, como $\mathfrak{n}(\mathfrak{h}_{\mathbb{K}}) = \mathfrak{h}_{\mathbb{K}}$, por lo tanto $X \in \mathfrak{h}_{\mathbb{K}}$. Ya que $X \in \mathfrak{g}$; es decir, definido sobre $\mathbb{K}$, $X \in \mathfrak{h}$. En resumen $\mathfrak{n}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ y por lo tanto $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$.

$\square$

3.2. Subálgebras de Cartan y elementos regulares

Definición 3.3. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie de dimensión finita n. Para $X \in \mathfrak{g}$, el polinomio carácteristico de $ad(X)$ denotado por p_X tiene la siguiente forma:*

$$p_X(\lambda) = det(\lambda I - ad(X)) = \lambda^n + p_{n-1}(X)\lambda^{n-1} + \cdots + p_1(X)\lambda + det(ad(X)).$$

*Denominamos a $p_X(\lambda)$ el **polinomio de Killing** de $\mathfrak{g}$. El **rango** de una álgebra de Lie de dimensión finita es el menor índice para el cual, p_i no es idénticamente nulo. Un elemento $X \in \mathfrak{g}$ es llamado **regular**, si $p_i(X) \neq 0$, donde i es el rango de $\mathfrak{g}$*

Observación 3.2.1. *1. Ya que $ad(X)X = 0 = 0 \cdot X$, entonces 0 siempre es un autovalor de $ad(X)$, para todo $X \in \mathfrak{g}$. En consecuencia, $p_X(0) = p_0(X) = det(ad(X)) = 0$.*

2. *La frase "p_i son polinomios en $\mathfrak{g}$", significa que al fijar una base $\beta = \{X_1, \ldots, X_n\}$ de $\mathfrak{g}$ y escribir un elemento $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$, los coeficientes del polinomio de Killing p_i, son polinomios en los a_i.*

3. *Denotando $rank(\mathfrak{g}) = i$, entonces de la definición anterior, se observa lo siguiente:*
$$0 < rank(\mathfrak{g}) \leq n.$$

4. *Los elementos regulares son aquellos para los cuales, la dimensión del autoespacio generalizado asociado al autovalor 0, es mínima; es decir:*
$$dim(\mathfrak{g}_0(X)) \geq rank(\mathfrak{g}),$$
donde la igualdad produce cuando $X \in \mathfrak{g}$ es regular. En efecto, sea $i = rank(\mathfrak{g})$ donde el polinomio de Killing de $\mathfrak{g}$ es dado por el siguiente:
$$p_X(\lambda) = det(\lambda I - ad(X)) = \lambda^n + p_{n-1}(X)\lambda^{n-1} + \cdots + p_i(X)\lambda^i.$$
Al ser 0 un autovalor de $ad(X)$,
$$p_X(\lambda) = \lambda^k q_X(\lambda),$$
donde $deg(q_X(\lambda)) + k = n$. Si $X \in \mathfrak{g}$ es regular, entonces el término independiente de q es $p_i(X)$, por tanto $k = i$ o equivalentemente $dim(\mathfrak{g}_0(X)) = rank(\mathfrak{g})$. Si X no fuese regular, entonces $p_i(X) = 0$ y por tanto $i < k \leq n$ tal que $p_j(X) \neq 0$ o equivalentemente $dim(\mathfrak{g}_0(X)) \geq i$.

5. *Sea $\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}$, donde $\overline{\mathbb{K}}$ una extensión del cuerpo de escalares $\mathbb{K}$. Para $X' \in \mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}$, su polinomio de Killing viene dado por:*
$$p_{X'}(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} p'(X')\lambda^i,$$
donde p'_i son polinomios cuyas variables pertenecen a $\overline{\mathbb{K}}$. Por tanto $p'_i|_{\mathfrak{g}} = p_i$, donde p_i son los coeficientes del polinomio de Killing de $ad(X)$. Así para $X \in \mathfrak{g}$ regular, tomando i el rango de $\mathfrak{g}$, entonces $p_i(X) \neq 0$. Por el paso anterior, $p'_i(X)|_{\mathfrak{g}} = p_i(X) \neq 0$. Es posible reconocer a X como un elemento de $\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}$ lo cual implica que $p'_i(X) \neq 0$.
Recíprocamente, para $X \in \mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}$ regular con j el rango de $\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}$, considerando ahora a X como elemento de $\mathfrak{g}$, entonces $p'_j(X) = p'_j|_{\mathfrak{g}}(X) = p_j(X) \neq 0$. Por tanto X es regular en $\mathfrak{g}$; es decir, $rank(\mathfrak{g}) = rank(\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}})$ y:
Un elemento $X \in \mathfrak{g}$ es regular si y solo sí X es regular en $\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}$.

Ejemplo 3.2.1. *1. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{s}l(2, \mathbb{K})$, donde*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

constituyen una base de $\mathfrak{g}$. Calculando los corchetes de estas matrices, tenemos que:

$$[X, H] = -2X, \qquad [X, Y] = H, \qquad [Y, H] = 2Y.$$

Sea $Z = aX + bH + cY$ un elemento cualquiera de $\mathfrak{g}$, escrito en la base ordenada $\beta = \{X, H, Y\}$. Entonces:

$$[ad(Z)]_\beta = \begin{pmatrix} 2b & -2a & 0 \\ -c & 0 & a \\ 0 & 2c & -2b \end{pmatrix},$$

donde $p_Z(\lambda) = det(\lambda - ad(Z)) = \lambda^3 - 4(b^2 + ac)\lambda$. Observemos que $rank(\mathfrak{g}) = 1$, de modo que $Z = \begin{pmatrix} b & a \\ c & -b \end{pmatrix}$ es regular sí y solo si $b^2 + ac \neq 0$. Así, H es regular en $\mathfrak{g}$, mientras que tanto X como Y no son regulares.

2. Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie, de modo que $dim(\mathfrak{g}) = 2$ y $\{X, Y\}$ constituya una base de $\mathfrak{g}$ tal que $[X, Y] = Y$. Luego para $Z = aX + bY \in \mathfrak{g}$, tenemos que

$$ad(Z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

El polinomio de Killing es $p_Z(\lambda) = \lambda^2 - a\lambda$. Por tanto $rank(\mathfrak{g}) = 1$ y Z es regular en $\mathfrak{g}$ si y solo sí $a \neq 0$. Por tanto, para Z no regular, $Z = bY = [X, Y]$; es decir, $Z \in g'$.

Teorema 3.1. *Sea $X \in \mathfrak{g}$ y denote por $\mathfrak{g}_0(X)$ el autoespacio generalizado asociado al autovalor nulo, en la descomposición primaria*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0(X) \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_k}$$

de $ad(X)$, con $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ autovalores no nulos. Entonces, $\mathfrak{g}_0(X)$ es una subálgebra de Cartan, si X es regular.

Demostración. Asumimos, sin pérdida de generalidad, que el cuerpo de escalares $\mathbb{K}$ es algebraicamente cerrado.
Primero $\mathfrak{g}_0(X) \leq \mathfrak{g}$; en efecto, ya que $ad(X)$ es una derivación de $\mathfrak{g}$ y 0 es un autovalor de $ad(X)$, entonces por la proposición 2.10 :

$$[\mathfrak{g}_0(X), \mathfrak{g}_0(X)] \subset \mathfrak{g}_{0+0}(X) = \mathfrak{g}_0(X),$$

por tanto $\mathfrak{g}_0(X)$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$. Segundo, Sea $Y \notin \mathfrak{g}_0(X)$, por la descomposición de $\mathfrak{g}$,

$$Y = Y_0 + Y_1 + \cdots + Y_k, \text{ donde } Y_0 \in \mathfrak{g}_0(X) \text{ y } Y_i \in \mathfrak{g}_{\lambda_i},$$

por linealidad,

$$ad(X)Y = ad(X)Y_0 + ad(X)Y_1 + \cdots + ad(X)Y_k.$$

Sean ahora las restricciones de $ad(X)$, a los autoespacios no nulos; es decir,

$$ad(X) \mid_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}} : \mathfrak{g}_{\lambda_i} \longrightarrow \mathfrak{g}_{\lambda_i}; i = 1, \ldots, k.$$

Tales restricciones son invertibles, en efecto $Z \in ker(ad(X)) \mid \mathfrak{g}_{\lambda_i})$, por tanto $ad(X) \mid_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}} Z = 0$.
Como $Z \in \mathfrak{g}_{\lambda_i}$, existe $m_i \geq 1$ tal que

$$(ad(X) \mid_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}} -\lambda_i I \mid_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}})^{m_i} Z = 0.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
(ad(X) \mid_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}} -\lambda_i I \mid_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}})^{m_i} Z &= (ad(X) \mid_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}} -\lambda_i I \mid_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}})^{m_i - 1}(ad(X) \mid_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}} -\lambda_i I \mid_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}})Z \\
&= (ad(X) \mid_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}} -\lambda_i I \mid_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}})^{m_i - 1}(ad(X) \mid_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}} Z - \lambda_i I \mid_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}} Z) \\
&= (ad(X) \mid_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}} -\lambda_i I \mid_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}})^{m_i - 1})(-\lambda_i Z) \\
&= (-\lambda_i)(ad(X) \mid_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}} -\lambda_i I \mid_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}})^{m_i - 1} Z \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pues $Z \in \mathfrak{g}_{\lambda_i}$. Ya que los λ_i son no nulos, entonces $(ad(X) \mid_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}} -\lambda_i I \mid_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}})^{m_i - 1} Z = 0$.

Reiterando el proceso anterior $m_i - 1$ veces, tenemos:

$$(ad(X) \mid_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}} -\lambda_i I \mid_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}})Z = ad(X) \mid_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}} Z - \lambda_i I \mid_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}} Z = -\lambda_i I \mid_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}} Z = -\lambda_i Z = 0.$$

Así, $Z = 0$ y por tanto, $ad(X) \mid_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}}$, es invertible, para todo $i = 1, \ldots, k$.
En consecuencia, si para todo $i = 1, \ldots, k$, ocurre que $[X, Y_i] = ad(X) \mid_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}} Y_i = 0$, entonces $Y_i = 0$ y por tanto $Y = Y_0 \in \mathfrak{g}_0$ lo que es una contradicción.
Así, para algún $i = 1, \ldots, k$; $ad(X) \mid_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}} Y_i = [X, Y_i] \neq 0$ y como $X \in \mathfrak{g}_0(X)$, $Y \notin \mathfrak{n}(\mathfrak{g}_0(X))$.
Acabamos de mostrar que no hay elementos fuera de $\mathfrak{g}_0(X)$ que normalicen tal subálgebra, entonces $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}_0(X)) = \mathfrak{g}_0(X)$.
Tercero, para la nilpotencia de $\mathfrak{g}_0(X)$, consideremos lo siguiente:

Sea $Y \in \mathfrak{g}_0(X)$. Sea $\pi_0 = \lambda^r + \cdots + q_{r-i}(X)\lambda^{r-i}$ el polinomio característico de la restricción de $ad(Y)$ a $\mathfrak{g}_0(X)$; es decir, $ad(Y) \mid_{\mathfrak{g}_0(X)}: \mathfrak{g}_0(X) \longrightarrow \mathfrak{g}_0(X)$, tal que $i > 0$ y $q_{r-i}(Y) \neq 0$.
Resulta que los $\mathfrak{g}_i$'s son invariantes por $ad(Y)$, ya que para todo $i = 0, \ldots, k$, $ad(Y)\mathfrak{g}_{\lambda_i} \subset \mathfrak{g}_{\lambda_i}$, pues $[\mathfrak{g}_0(X), \mathfrak{g}_{\lambda_i}] \subset \mathfrak{g}_{\lambda_i}$.
Por tanto, $p_Y(\lambda) = \pi_0\pi_1 \cdots \pi_k$, donde π_i es el polinomio característico de las restricciones de $ad(Y)$ a $\mathfrak{g}_{\lambda_i}$.
Notemos que $det(ad(Y) \mid_{\mathfrak{g}_{\lambda i}})$ son los términos constantes de π_i con $i = 1, \ldots, k$. Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} d_i : \mathfrak{g}_0(X) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ Z \mapsto & d_i(Z) = det(ad(Z) \mid_{\mathfrak{g}_{\lambda i}}), \end{aligned}$$

para todo $i = 1, \ldots, k$.
Ya que cada una de las restricciones de $ad(Y)$ a los $\mathfrak{g}_{\lambda_i}$, son invertibles, entonces d_i es un polinomio no nulo, en $\mathfrak{g}_0(X)$.
Ya que $\pi_0(\lambda) = \pi_0\pi_1 \cdots \pi_k$, al hacer tal producto, se tiene que su término de menor grado, tiene como coeficiente al polinomio

$$q_{r-i}(Y)d_1(Y) \cdots d_k(Y),$$

que no es idénticamente nulo en Y.
Por otro lado, tenemos que $X \in \mathfrak{g}_0(X)$ y $ad(X) \mid_{\mathfrak{g}_0}$ es nilpotente, por como está definido ese subespacio. Por tanto, su respectivo polinomio característico, será:

$$p_X(\lambda) = \lambda^r.$$

Esto último implica que $q_{r-i}(X)d_1(X) \cdots d_k(X) = 0$ y en consecuencia X no es regular lo cual contradice el hecho de que X es regular. Así, para todo $i > 0$, $q_{r-i} = 0$, entonces $\pi_0(\lambda) = \lambda^r$.
Por el teorema de Cayley-Hamilton, $ad(Y) \mid_{\mathfrak{g}_0}$ es nilpotente $\forall Y \in \mathfrak{g}_0(X)$, y por el teorema de Engel, $\mathfrak{g}_0(X)$ es nilpotente. □

Corolario 3.1. *Existen subálgebras de Cartan en álgebras de Lie de dimensión finita.*

Demostración. Si $\mathfrak{g}$ una álgebra nilpotente, entonces por la proposición 3.1, $\mathfrak{g}$ no tiene mas subálgebras de Cartan que ella misma.
Si $\mathfrak{g}$ no es nilpotente, entonces $\mathfrak{g}$ contiene al menos un elemento regular X, y por el teorema 3.1, $\mathfrak{g}_0(X)$ es una subálgebra de Cartan. □

Corolario 3.2. *Sea $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ una subálgebra de Cartan y supongamos que $X \in \mathfrak{h}$ es regular, entonces $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(X)$.*

Demostración. Al ser $\mathfrak{h}$ nilpotente, entonces $ad(X)\mid_{\mathfrak{h}}$ es nilpotente, por tanto $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0(X)$.
Ahora, por la proposición 3.2, $\mathfrak{h}$ es maximal nilpotente, y como $\mathfrak{g}_0(X)$ es tambien es una subálgebra nilpotente de $\mathfrak{g}$, por el teorema 3.1, entonces $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{g}_0(X)$. Así $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(X)$. □

Demostrar el recíproco del teorema 3.1 es uno de los objetivos principales de este trabajo.

Lema 3.1. *Sea $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan y ρ una representación de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ inducida por la representación adjunta de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}$. Entonces para $X \in \mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}_0(X) = \mathfrak{h}$ si y solo sí $\rho(X)$ es invertible.*

Demostración. Inducida por la adjunta significa, según la proposición 1.14:

$$\begin{aligned} \rho : \mathfrak{h} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \\ \rho(X)\overline{Y} &= \overline{ad(X)}\,\overline{Y} = [\overline{X}, \overline{Y}] = \overline{[X,Y]}. \end{aligned}$$

Ahora, para cualquier $X \in \mathfrak{h}$ afirmamos que:

$$\begin{aligned} \rho(X) \text{ es inversible} &\Longleftrightarrow ker(\rho(X)) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \mathfrak{g}_0(X) \subset \mathfrak{h}. \end{aligned}$$

En efecto, supongamos que $ker(\rho(X)) = 0$, sea $Z \in \mathfrak{g}_0(X)$, entonces para algún $m \geq 1$, $ad(X)^m(Z) = 0$.
Por un paso inductivo, de lo anterior, también obtenemos que:

$$\overline{ad(X)^m Z} = \overline{ad(X)}^m \overline{Z} = \overline{ad(X)}(\overline{ad(X)}^{m-1}\overline{Z}) = \overline{0}.$$

Ya que $ker(\rho(X)) = 0$, $\overline{ad(X)^{m-1}Z} = \overline{0}$.
Luego,

$$\overline{ad(X)^{m-1} Z} = \overline{ad(X)}^{m-1} \overline{Z} = \overline{ad(X)}(\overline{ad(X)}^{m-2}\overline{Z}) = \overline{0}.$$

Ya que $ker(\rho(X)) = 0$, $\overline{ad(X)^{m-2}Z} = \overline{0}$.
Repetimos el proceso, hasta tener lo siguiente:

$$\overline{ad(X)^1 Z} = \overline{ad(X)}\overline{Z} = \overline{0}.$$

Ya que $ker(\rho(X)) = 0$, $\overline{Z} = \overline{0}$, o equivalentemente, $Z \in \mathfrak{h}$.
Ahora, supongamos que $\mathfrak{g}_0(X) \subset \mathfrak{h}$.
La restricción $ad(X)\mid_{\mathfrak{g}_0(X)}$, es nilpotente, entonces por el teorema de Engel, existe $Z \in \mathfrak{g}_0(X)$, con $Z \neq 0$, tal que:

$$ad(X)\mid_{\mathfrak{g}_0(X)} Z = ad(X)Z = 0.$$

Aplicando la proyección canónica a la anterior igualdad, tenemos:

$$\overline{ad(X)Z} = \overline{ad(X)}\overline{Z} = \overline{0},$$

entonces, $\overline{Z} \in ker(\rho(X))$.
Como hemos supuesto que $\mathfrak{g}_0(X) \subset \mathfrak{h}$, entonces $Z \in \mathfrak{h}$; es decir:

$$\overline{Z} = 0,$$

por lo tanto, $ker(\rho(X)) = 0$ y en consecuencia $\rho(X)$ es invertible, para todo $X \in \mathfrak{h}$.
Finalmente observemos que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0(X)$ por como está definido $\mathfrak{g}_0(X)$. Así $\mathfrak{g}_0(X) = \mathfrak{h}$ y en consecuencia tenemos la equivalencia. □

Lema 3.2. *Sea $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan. Entonces, existe $X \in \mathfrak{h}$ tal que $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(X)$.*

Demostración. Consideremos la representación, $\rho : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}l(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$, tal que $\rho(X) = \overline{ad(X)}$, con $X \in \mathfrak{h}$.
Por el teorema 2.4, tenemos la siguiente descomposición de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$:

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{h} = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s},$$

donde $V_{\lambda_i} = \{\overline{Y} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h} : \exists n \geq 1, (\overline{ad(X)} - \lambda_i(X))^n\overline{Y} = \overline{0}\}$, para todo $i = 1, \ldots, s$.
Supongamos que, para algún $i = 1, \ldots, s$, $\lambda_i(X) = 0$.
Luego, tenemos que las restricciones de $\rho(X)$ a $V_0 = \{v \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h} : \exists n \geq 1, \overline{ad(X)}^n\overline{Y} = \overline{0}\}$ son nilpotentes, entonces por el lema de Engel,

$$\exists \overline{W} \in V_0, \overline{W} \neq \overline{0}, \text{ tal que } \overline{ad(X)}\overline{W} = \overline{0}.$$

A su vez, sea Z, un representante de clase de $\overline{W}$, entonces $Z \in \mathfrak{g} - \mathfrak{h}$ y $[X, Y] \in \mathfrak{h}, \forall X \in \mathfrak{h}$. Esto contradice el hecho de que $\mathfrak{h}$ sea una subálgebra de Cartan, por tanto, ninguno de los pesos se anula y, en consecuencia, existe $X \in \mathfrak{h}$, tal que $\lambda_i(X) \neq 0$, para todo $i \in \{1, \ldots, s\}$.
Por tanto, $\rho(X) = \overline{ad(X)}$ es inversible $\forall X \in \mathfrak{h}$ y por el lema 3.1, $\mathfrak{g}_0(X) = \mathfrak{h}$. □

Proposición 3.4. *Sean ϕ un automorfismo de $\mathfrak{g}$ y $X \in \mathfrak{g}$, entonces $ad(X)$ y $ad(\phi X)$ tienen el mismo polinomio característico. En consecuencia, X es regular, si y solo sí $\phi(X)$ es regular.*

Demostración. Tenemos:

$$\begin{aligned}
det(ad(\phi X) - \lambda I) &= det(\phi \circ ad(X) \circ \phi^{-1} - \lambda I) \\
&= det(\phi \circ ad(X) \circ \phi^{-1} - \phi \circ \phi^{-1} \circ (\lambda I)) \\
&= det(\phi \circ (ad(X) \circ \phi^{-1} - \phi^{-1} \circ (\lambda I))) \\
&= det(\phi \circ (ad(X) \circ \phi^{-1} - \lambda \phi^{-1} \circ I)) \\
&= det(\phi \circ (ad(X) \circ \phi^{-1} - \lambda I \circ \phi^{-1})) \\
&= det(\phi \circ (ad(X) - \lambda I) \circ \phi^{-1}) \\
&= det(\phi) det((ad(X) - \lambda I)) det(\phi^{-1})) \\
&= det(\phi) det(\phi^{-1})) det((ad(X) - \lambda I)) \\
&= det((ad(X) - \lambda I)).
\end{aligned}$$

Por tanto, $ad(X)$ y $ad(\phi X)$ tiene el mismo polinomio característico. □

Con estos resultados, ya es posible dar una demostración del recíproco del teorema 3.1 cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

3.2.1. Caso Real

Teorema 3.2. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie de dimensión finita, sobre $\mathbb{R}$ y $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan, entonces existe un elemento regular $X \in \mathfrak{h}$.*

Demostración. Consideremos la aplicación:

$$\begin{aligned}
\psi : &\mathfrak{g} \times \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g} \\
&(Y, X) \mapsto \psi(Y, X) = e^{ad(Y)} X.
\end{aligned}$$

Por la proposición 1.4.1, como $ad(Y)$ es una derivación, $e^{ad(Y)}$ es un automorfismo de $\mathfrak{g}$.
La aplicación ψ es diferenciable, así procedemos ahora a calcular la diferencial de ψ, en el punto $(0, X)$. En efecto, para $Z \in \mathfrak{g}$ y $W \in \mathfrak{h}$, tenemos que:

$$d\psi_{(0,X)}(Z, W) = (\psi \circ \lambda)'(0),$$

donde para $\delta > 0$, $\lambda : (-\delta, \delta) \longrightarrow \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ es un camino rectilineo, tal que

$\lambda(t) = (0, X) + t(Z, W) = (tZ, X + tW)$. Luego:

$$\begin{aligned}
d\psi_{(0,X)}(Z, W) &= \frac{d}{dt}\psi(tZ, X + tW)(0) \\
&= \frac{d}{dt}e^{ad(tZ)}(X + tW)\mid_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}e^{t\cdot ad(Z)}(X + tW)\mid_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(e^{t\cdot ad(Z)}X)\mid_{t=0} + \frac{d}{dt}(t\cdot e^{t\cdot ad(Z)}W)\mid_{t=0} \\
&= ad(Z)(e^{t\cdot ad(Z)}X)\mid_{t=0} + e^{t\cdot ad(Z)}W\mid_{t=0} + (t\cdot ad(Z)(e^{t\cdot ad(Z)}W))\mid_{t=0} \\
&= -ad(X)Z + W.
\end{aligned}$$

Sea ahora $X \in \mathfrak{h}$, por el lema 3.2, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(X)$, entonces por el lema 3.1, $\rho(X)$ es inversible, donde ρ es la representación de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ inducida por la representación adjunta de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}$. Esto último implica que:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + ad(X)\mathfrak{g}.$$

En efecto, para cualquier $S \in \mathfrak{g}$, por la buena definición de la proyección canónica, tenemos que $\overline{S} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, por tanto, existe un único $\overline{B} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ tal que

$$\rho(X)\overline{B} = \overline{ad(X)B} = \overline{S},$$

es decir; $\overline{[X, B]} = \overline{S}$ o equivalentemente $[X, B] - S \in \mathfrak{h}$.
Entonces, para algún $H \in \mathfrak{h}$, tenemos que $[X, B] - S = H$; o

$$S = -H + [X, B] = \underbrace{-H}_{\in\mathfrak{h}} + \underbrace{ad(X)B}_{\in ad(X)\mathfrak{h}}.$$

Por lo anterior, podemos concluir que $d\psi_{(0,X)}$ es sobreyectiva.
Ahora por el Teorema de la Función Implícita, para el punto $(0, X) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$, existen abiertos V y Z, donde $0 \in V \subset \mathfrak{g}$ y $(0, X) \in Z \subset \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$, de modo que existe $\epsilon : V \longrightarrow \mathfrak{h}$ y; para cada $Y \in V$,

$$(Y, \epsilon(Y)) \in Z \qquad \text{y} \qquad \psi(Y, \epsilon(Y)) = X = \psi(0, X);$$

es decir, hay un abierto $W \subset \mathfrak{h}$ tal que $X = \psi(0, X) \in W$ y cualquier elemento de W es de la forma $\psi(Y_1, Y_2)$, donde $Y_1 \in V$ y $Y_2 \in \mathfrak{h}$.
Como $\mathfrak{g}_r$, el conjunto de elementos regulares es denso en $\mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{g}_r \cap W \neq \emptyset$. Por lo tanto, existen $(Y_1, Y_2) \in V \times \mathfrak{h}$, de modo que $\psi(Y_1, Y_2) = e^{ad(Y_1)}Y_2$ es regular y, por la proposición 3.4, $Y_2 \in \mathfrak{h}$ es regular. $\square$

3.2.2. Caso Complejo

Proposición 3.5. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie compleja y $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ el realificado de $\mathfrak{g}$. Entonces $rank(\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}) = 2 * rank(\mathfrak{g})$ y por tanto $X \in \mathfrak{g}$ es regular si y solo si $X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ es regular.*

Demostración. Sea $T : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ un operador lineal, entonces:

$$P(\lambda) = det(\lambda - T) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s}$$

donde los autovalores λ_j de T son complejos.
Ahora, si $T_{\mathbb{R}} : \mathfrak{g}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ denota al operador T como transformación lineal real, entonces:

$$Q(\lambda) = det(\lambda - T_{\mathbb{R}}) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \overline{\lambda_1})^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s}(\lambda - \overline{\lambda_s})^{k_s}.$$

Notemos que $deg(Q) = 2 * deg(P)$ y también que la multiplicidad de λ_j como raíz de Q es el doble de su multiplicidad como raíz de P. En particular para los polinomios de Killing de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$, la multiplicidad del autovalor nulo satisface lo afirmado anteriormente y, como los elementos regulares tanto de $\mathfrak{g}$ como de $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ son aquellos en los cuales la multiplicidad algebraica del autovalor 0 coincide con el rango, entonces $rank(\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}) = 2rank(\mathfrak{g})$.
De esta última igualdad $X \in \mathfrak{g}$ es regular sí y solo si $X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ es regular. □

Corolario 3.3. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie compleja de dimensión finita y $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$, entonces existe un elemento regular $X \in \mathfrak{h}$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$. Si $dim(\mathfrak{g}) = n$ entonces la dimensión de $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}} = 2n$. Por tanto $dim(\mathfrak{h})$ se duplica, cuando se la considera una subálgebra de $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$.
Por el teorema 3.2, existe un elemento regular $X \in \mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ y por la proposición anterior, $X \in \mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ es regular. □

3.2.3. Sobre la conjugación cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Proposición 3.6. *Sea $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ un automorfismo y $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ una subálgebra de Cartan, entonces $\phi(\mathfrak{h})$ es una subalgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$.*

Demostración.

1. Claramente, $\phi(\mathfrak{h})$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$.
2. Ya que $\mathfrak{h}$ es nilpotente, existe $k_0 \geq 1$, tal que $\mathfrak{h}^{k_0} = 0$.
   Como ϕ es automorfismo, $\phi(\mathfrak{h})^t = \phi(\mathfrak{h}^t)$; en efecto, vía inducción, sobre

k_0, para $k_0 = 1$, $\phi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, es cierto.
Ahora, supongamos que $\phi(\mathfrak{h})^{t-1} = \phi(\mathfrak{h}^{t-1})$, luego

$$\begin{aligned}\phi(\mathfrak{h})^t &= [\phi(\mathfrak{h}), \phi(\mathfrak{h})^{t-1}] \\ &= [\phi(\mathfrak{h}), \phi(\mathfrak{h}^{t-1})] \\ &= \phi[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^{t-1}] \\ &= \phi(\mathfrak{h}^t).\end{aligned}$$

Por tanto, por 5.2, $\phi(\mathfrak{h})^{k_0} = \phi(\mathfrak{h}^{k_0}) = \phi(0) = 0$. Luego $\phi(\mathfrak{h})$ es nilpotente.

3. Sea $Y \in \mathfrak{n}(\phi(\mathfrak{h}))$, entonces $[X, Y] \in \phi(\mathfrak{h})$, $\forall X \in \phi(\mathfrak{h})$.
   Como ϕ^{-1} también es un automorfismo, tenemos que $\phi^{-1}(X) \in \mathfrak{h}$, entonces $\phi^{-1}[X, Y] = [\phi^{-1}(X), \phi^{-1}(Y)] \in \mathfrak{h}$, esto último implica que, $\phi^{-1}(Y) \in \mathfrak{n}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, sí y solo sí $Y \in \phi(\mathfrak{h})$.
   Por tanto, $\mathfrak{n}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

Finalmente, por 1), 2) y 3), $\phi(\mathfrak{h})$ es una subálgebra de Cartan. □

Proposición 3.7. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie y $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$ subálgebras de Cartan de $\mathfrak{g}$. Definimos la relación "$\triangle$", tal que*

$\mathfrak{h}_1 \triangle \mathfrak{h}_2$ *sí y solo si, existe un automorfismo,* $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ *tal que* $\mathfrak{h}_1 = \phi(\mathfrak{h}_2)$.

Entonces, "$\triangle$" es una relación de equivalencia.

Demostración. Sean $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_3$ subálgebras de Cartan de $\mathfrak{g}$:

1. La relación $\triangle$ es **reflexiva**, pues $\mathfrak{h}_1 = I(\mathfrak{h}_1)$, donde I es el operador identidad, que es un automorfismo de $\mathfrak{g}$.

2. La relación "$\triangle$" es **simétrica**, pues si $\mathfrak{h}_1 \triangle \mathfrak{h}_2$, entonces existe un automorfismo $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, tal que $\mathfrak{h}_1 = \phi(\mathfrak{h}_2)$.
   Por lo tanto, podemos considerar el automorfismo ϕ^{-1}, ya que $\mathfrak{h}_2 = \phi^{-1}(\mathfrak{h}_1)$; por lo que, $\mathfrak{h}_2 \triangle \mathfrak{h}_1$.

3. La relación "$\triangle$" es **transitiva**, pues si $\mathfrak{h}_1 \triangle \mathfrak{h}_2$ y $\mathfrak{h}_2 \triangle \mathfrak{h}_3$, sean los automorfismos de $\mathfrak{g}$, ϕ y γ, tales que $\mathfrak{h}_1 = \phi(\mathfrak{h}_2)$ y $\mathfrak{h}_2 = \gamma(\mathfrak{h}_3)$.
   Entonces, tomando la composición $\gamma \circ \phi$, tenemos un automorfismo de $\mathfrak{g}$, tal que $\mathfrak{h}_1 = (\phi \circ \gamma)(\mathfrak{h}_3)$; es decir, $\mathfrak{h}_1 \triangle \mathfrak{h}_3$.

Por tanto, de 1),2) y 3), $\triangle$ es una relación de equivalencia. □

Vamos a denotar al conjunto de todos los elementos regulares en $\mathfrak{g}$ por $\mathfrak{g}_r$.

Observación 3.2.2. *1. Si $X \in \mathfrak{g}_r$, $\mathfrak{g}_0(X)$ es una subálgebra de Cartan por el Teorema 3.1, entonces en $\mathfrak{g}_r$ definimos la siguiente relación de equivalencia:*

$X \sim Y$ sí y solo si, existe un automorfismo, $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g}_0(X) = \phi(\mathfrak{g}_0(Y))$

y denotamos por $[X] = \{Y \in \mathfrak{g}_r : X \sim Y\}$ las clases de equivalencia de $\mathfrak{g}_r$.

2. Sea ϕ un automorfismo de $\mathfrak{g}$ y $X \in \mathfrak{g}_r$, luego $\phi(X) \in \mathfrak{g}_r$ y $ad(\phi(X)) = \phi \circ ad(X) \circ \phi^{-1}$. Un paso inductivo muestra que $ad(\phi(X))^n = \phi \circ ad(X)^n \circ \phi^{-1}$, entonces

$$\begin{aligned} Z \in \mathfrak{g}_0(\phi(X)) &\Leftrightarrow ad(\phi(X))^n = 0, n \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \phi \circ (ad(X)^n \circ^{-1} (Z) = 0 \\ &\Leftrightarrow \phi(ad(X)^n(\phi^{-1}(Z))) = 0 \\ &\Leftrightarrow ad(X)^n(\phi^{-1}(Z)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \phi^{-1}(Z) \in \mathfrak{g}_0(X) \\ &\Leftrightarrow Z \in \phi(\mathfrak{g}_0(X)). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathfrak{g}_0(\phi(X)) = \phi(\mathfrak{g}_0(X))$ o equivalentemente $X \sim \phi(X)$. Esto quiere decir que las clases de equivalencia de $\sim$ son invariantes por automorfismos de $\mathfrak{g}$.

Teorema 3.3. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie real. Las componentes conexas de $\mathfrak{g}_r$, son abiertos en $\mathfrak{g}$. Tome X e Y en una misma componente conexa, entonces $X \sim Y$.*

Demostración. Sea $X \in \mathfrak{g}_r$. Consideremos la aplicación,

$$\begin{aligned} \psi : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}_0(X) &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ \psi(Y_1, Y_2) &= e^{ad(Y_1)} Y_2. \end{aligned}$$

En el desarrollo de la demostración del Teorema 3.2, mostramos que $d\psi_{(0,X)}$ es sobreyectiva, pues $\mathfrak{g}_0$ es una subálgebra de Cartan. Entonces es posible aplicar el Teorema de la Función Implícita, por tanto existe un entorno U de $X = \psi(0, X)$ en $\mathfrak{g}_r$, tal que para todo $Z \in U$, existen $Y_1 \in U_1$, $Y_2 \in U_2$, tal que $Z = \psi(Y_1, Y_2)$, donde $U_1 \subset \mathfrak{g}$ es un entorno del origen y $U_2 \subset \mathfrak{g}_0(X)$, es un entorno de X en $\mathfrak{g}_0(X)$.
Por el teorema 3.2, $\mathfrak{g}_0(X)$ contiene elementos regulares, entonces es posible restringir U_2 y asumir que $U_2 \subset \mathfrak{g}_r$.
Ya que $Y_2 \in U_2$, entonces $\mathfrak{g}_0(Y_2) = \mathfrak{g}_0(X)$, pues por el corolario 3.2, se tiene

que $\mathfrak{g}_0(X) = \mathfrak{g}_0(Y_2)$.
Así,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_0(Z) &= \mathfrak{g}_0(\psi(Y_1, Y_2)) \\
&= \mathfrak{g}_0(e^{ad(Y_1)}Y_2) \\
&= e^{ad(Y_1)}\mathfrak{g}_0(Y_2) && \text{(por (2) de 3.2.2)} \\
&= e^{ad(Y_1)}\mathfrak{g}_0(X).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo $Z \in U$, $Z \sim X$, o equivale concluir que $U \subset [X]$, y como $\mathfrak{g}_r$ es abierto de $\mathfrak{g}$, $[X]$ también es abierto de $\mathfrak{g}$. Finalmente al ser $\mathfrak{g}_r = \bigcup_{X \in \mathfrak{g}_r} [X]$, entonces cada $[X]$ es cerrado en $\mathfrak{g}$, pues $[X]^c$ es unión de abiertos y por tanto abierto de $\mathfrak{g}_r$. Así, cada clase de equivalencia $[X]$ de $\mathfrak{g}$ es abierto y cerrado en g_r, de modo que $[X]$ es unión de componentes conexas de $\mathfrak{g}$.
Sea $i = rank(\mathfrak{g})$, entonces $p_i \neq 0$ en el polinomio de Killing de $\mathfrak{g}$. Como $\mathfrak{g}_r = \{X \in \mathfrak{g} : p_i(X) \neq 0\}$ tiene una cantidad finita de componentes conexas. Por tanto las componentes conexas de $\mathfrak{g}_r$ son abiertos de $\mathfrak{g}$, pues cada componente conexa de $\mathfrak{g}_r$ es un subconjunto cerrado de $\mathfrak{g}_r$ y como su complemento en $[X]$ es cerrado, cada componente conexa es un abierto de $\mathfrak{g}_r$ y luego un abierto de $\mathfrak{g}$, por la topología del subespacio.
Sean Y_1, Z_1 en alguna componente conexa de $\mathfrak{g}_r$, luego existe $X_1 \in \mathfrak{g}_r$ tal que $[X_1]$ contiene a la componente conexa de Y_1 y Z_1. Por lo tanto $Y_1 \sim X_1$ y $X_1 \sim Z_1$ y debido a la transitividad de $\sim$, $Y_1 \sim Z_1$. □

Proposición 3.8. *Sea $p : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ un polinomio que no es idénticamente nulo, entonces $C = \{v \in \mathbb{C}^n : p(v) \neq 0\}$ es conexo.*

Demostración. La prueba será vía inducción sobre n: Si $n = 1$, tenemos que mostrar que el conjunto $C = \{v \in \mathbb{C} : p(v) \neq 0\} \subset \mathbb{C}$ es conexo.
Consideremos la colección $\mathbb{C} - C = \{w \in \mathbb{C}^n : p(w) = 0\}$; es decir, las raíces del polinomio p. Por el Teorema fundamental del Álgebra, se tiene que $\mathbb{C} - C$ es un conjunto finito y por tanto es discreto, cuyo complemento C es conexo.
Ahora, supongamos válido el resultado válido, hasta $n-1$, con $n \geq 1$.
Sean entonces, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ y $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ dos elementos en $\mathbb{C}$, talque $p(z) \neq 0$ y $p(w) \neq 0$. Esto es posible, al ser p un polinomio no idénticamente nulo. Ahora, es posible, obtener, a partir de p, dos polinomios q_1, q_2 de la siguiente manera:
Fijando las coordenadas z_n y w_n, de z y w respectivamente,

$$q_1 : \mathbb{C}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{C}, \text{ con } q_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = p(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, z_n),$$
$$q_2 : \mathbb{C}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{C}, \text{ con } q_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = p(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, w_n).$$

Observemos que q_1 y q_2, por como están, definidos, no son identicamente nulos.
Por otra parte, afirmamos que, de manera general, para un polinomio no identicamente nulo cualquiera $q : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, con $n \geq 1$, tenemos que $C_q : \{r \in \mathbb{C}^n : q(r) \leq 0\}$, es abierto y denso en $\mathbb{C}^n$, pues al ser $\mathbb{C}$ un espacio de Hausdorff, además de la continuidad de q y la aplicación nula, entonces $\mathbb{C}^n - C$ es cerrado; es decir, C es abierto.
Ahora, supongamos que $int(\mathbb{C}^n - C)$ es no vacío, esto implica que q es idénticamente nulo, pues q sería analítica en un abierto de $\mathbb{C}^n - C$, lo cual contradice la elección de q. Por lo tanto, C también es denso.
Regresando a nuestro problema, por lo anterior, tenemos que

$$C_{q_1} = \{r \in \mathbb{C}^{n-1} : q_1(r) \neq 0\} \cap C_{q_2} = \{s \in \mathbb{C}^{n-1} : q_2(s) \neq 0\} \neq \emptyset;$$

es decir, existe $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0) \in \mathbb{C}^{n-1}$, tal que $q_1(x^0) \neq 0 \neq q_2(x^0)$.
Ahora, por lo anterior:

$$\begin{aligned} q_1(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0) &= p(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0, z_n) \neq 0 \\ q_1(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}) &= p(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n) \neq 0. \end{aligned}$$

Entonces, por hipótesis de inducción, C_{q_1} es conexo. Por lo anterior deducimos que C_{q_1} es un conexo de C, que contiene a $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0, z_n)$ y a z.
Por tanto, $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0, z_n)$ y z pertenecen a una misma componente conexa de C.
Un argumento similar, muestra que $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0, w_n)$ y a w pertenecen a una misma componente conexa de C.
Por otra parte, consideremos el siguiente polinomio:

$$r(u) = p(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0, u).$$

Vemos que por como está definido r, es un polinomio no nulo.
Luego,

$$\begin{aligned} r(z_n) &= p(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0, z_n) = q_1(x^0) \neq 0 \\ r(w_n) &= p(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0, w_n) = q_2(x^0) \neq 0. \end{aligned}$$

Por el primer paso de inducción, C_r es conexo; es mas, C_r es un conexo de C, que contiene a los puntos $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0, z_n)$ y
$(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0, w_n)$, por lo tanto, estos pertenecen a una misma componente conexa de C.
Luego, z y w están en una misma componente conexa de C, así C tiene que ser conexo. $\square$

Teorema 3.4. *En álgebras de Lie complejas, las subálgebras de Cartan son conjugadas entre sí.*

Demostración. Como consecuencia del teorema 3.3, la cantidad de clases de equivalencia de $\sim$, no supera a la cantidad de componentes conexas de $\mathfrak{g}$. Por otro lado, consideremos el realificado $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$. El teorema anterior muestra que si X, Y están en una misma componente conexa de $\mathfrak{g}_r^{\mathbb{R}}$, entonces $X \sim Y$. Así, $X \sim Y$, donde X, Y están en una misma componente conexa de $\mathfrak{g}_r$. Ahora, siendo $i = rank(\mathfrak{g})$, tenemos por la proposición 3.8 que

$$\mathfrak{g}_r = \{X \in \mathfrak{g} : p_i(X) \neq 0\}$$

es conexo, por lo tanto la única componente conexa de $\mathfrak{g}_r$ es ella misma; es decir, existe solo una clase de equivalencia de $\sim$.
Sea $X \in \mathfrak{g}_r$, entonces $[X] = \mathfrak{g}_r$. Además, por el corolario 3.3 para cualesquiera $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ subálgebras de Cartan de $\mathfrak{g}$, existen $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}_r$ tal que $X_1 \in \mathfrak{h}_1$ y $X_2 \in \mathfrak{h}_2$.
Por lo tanto al tener $X_1 \sim X_2$, existe un automorfismo ϕ de $\mathfrak{g}$, tal que:

$$\mathfrak{g}_0(X_1) = \phi(\mathfrak{g}_0(X_2))$$

y, por el teorema 3.1, $\mathfrak{h}_1 = \phi(\mathfrak{h}_2)$ lo cual muestra que $\mathfrak{h}_1$ y $\mathfrak{h}_2$ son conjugadas. $\square$

Ejemplo 3.2.2. *1. Sea $\mathfrak{h}_\beta = \{[X]_\beta = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\} \leq \mathfrak{g}$, donde $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ y β es una base de $\mathbb{C}^n$. Afirmamos que $\mathfrak{h}_\beta$ es una subálgebra de Cartan. En efecto, $\mathfrak{h}_\beta$ es abeliana y por tanto nilpotente. Ahora si $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{n}(\mathfrak{h}_\beta)$ entonces $ad(H)A = (\lambda_i - \lambda_j)a_{ij} = 0$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$. Si ocurre que $\lambda_i \neq \lambda_j$ cuando $i \neq j$, entonces $a_{ij} = 0$ para las entradas de A fuera de la diagonal principal. Así $ad(H)A$ es diagonal sí y solo si A es diagonal y por tanto $\mathfrak{n}(\mathfrak{h}_\beta) = \mathfrak{h}_\beta$; es decir, $\mathfrak{h}_\beta$ es una subálgebra de Cartan. Del teorema anterior, deducimos que $rank(\mathfrak{g}) = dim(\mathfrak{h}_\beta) = n - 1$.*
Las subálgebras de Cartan $\mathfrak{h}_{\beta_1}$ y $\mathfrak{h}_{\beta_2}$ de $\mathfrak{g}$ son conjugadas el siguiente automorfismo:

$$\begin{aligned} \phi : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ A &\longmapsto \phi(A) = PAP^{-1}, \end{aligned}$$

donde P es la matriz de cambio de la base β_1 a la base β_2. Este automorfismo es tal que $\phi(\mathfrak{h}_{\beta_1}) = \mathfrak{h}_{\beta_2}$. La recíproca de nuestra afirmación también es cierta; es decir, cualquier subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ es de la forma $\mathfrak{h}_\beta$ para alguna base β de $\mathbb{C}^n$. Para eso consideremos $A \in \mathfrak{g}$ en su respectiva forma canónica de Jordan. Entonces

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}$$

donde

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{jj} & 1 & \dots & & 0 \\ & a_{jj} & 1\dots & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & a_{jj} & 1 \\ 0 & & & & a_{jj} \end{pmatrix}_{n_j \times n_j} = a_{jj} I_{n_j} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & & 0 \\ & 0 & 1\dots & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}_{n_j \times n_j}.$$

Si $B = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_k \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}$ *de modo que* B_p *son bloques triangulares superiores del mismo tamaño de los bloques de* A*, entonces* $B \in \mathfrak{g}_0(A)$*, en particular cuando* B *es una matriz diagonal. Es así que la dimensión de* $\mathfrak{g}_0(A) \geq dim(\mathfrak{h}_\beta)$*, donde la igualdad se da cuando los bloques de Jordan son de* 1×1*; es decir, con todos sus autovalores distintos.*
Como consecuencia del teorema anterior, las subálgebras de Cartan tienen la misma dimensión, de modo que cuando A *es regular tenemos que* $dim(\mathfrak{g}_0(A)) = dim(\mathfrak{h}_\beta)$*.*
Así, los autovalores de A *son todos distintos si* A *es regular en* $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$*.*
En conclusión, las subálgebras de Cartan son de la forma $\mathfrak{h}_\beta$*, con* β *base de* $\mathbb{C}^n$ *y sus elementos regulares son aquellos cuyos autovalores son distintos dos a dos.*

2. *Observemos que el complexificado de* $\mathfrak{g}$ *es* $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$*. Luego* $\mathfrak{h}$ *es una subálgebra de Cartan de* $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ *sí y solo si* $\mathfrak{h}$ *es una subálgebra de Cartan de* $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$*. Por lo tanto* $rank(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})) = rank(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}))$ *y en consecuencia* $X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ *es regular sí y solo si* $X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ *es regular. De lo anterior existe una base* β *de* $\mathbb{C}^n$ *tal que* $X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ *regular, es una matriz diagonal cuyos autovalores son distintos dos a dos y como los coeficientes de* p_X *son números reales, las raíces de* p_X *sobre* $\mathbb{C}$ *tienen la siguiente forma:*

$$\lambda_1, \overline{\lambda_1}, \lambda_2, \overline{\lambda_2}, \dots, \lambda_k, \overline{\lambda_k}, \mu_1, \dots, \mu_s.$$

donde para todo $j = 1, \dots, k$*,* $\lambda_j, \overline{\lambda_j} \in \mathbb{C}$ *y para todo* $k' = 1, \dots, s$*,* $\mu_{k'} \in \mathbb{R}$ *de modo que* $n = 2k + s$*. Los autovectores asociados a estos autovalores, constituyen una base*

$$\beta = \{w_1, \overline{w_1}, \dots, w_k, \overline{w_k}, v_1, \dots, v_s\}$$

de $\mathbb{C}^n$*, donde* $v_j \in \mathbb{R}^n$*. Ya que los vectores* $w_j, \overline{w_j} \in \mathbb{C}^n$*, entonces* $w_j = A_j + iB_j$ *y* $\overline{w_j} = A_j - iB_j$*, donde* $A_j, B_j \in \mathbb{R}^n$ *para todo* $j = 1, \dots, k$*. Luego* *la colección $\gamma = \{Re\, w_1, Im\, w_1, \ldots, Re\, w_k, Im\, w_k, v_1, \ldots, v_s\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ de modo que:*

$$[X]_\gamma = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & & & & & & \\ b_1 & a_1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & a_k & -b_k & & & \\ & & & b_k & a_k & & & \\ & & & & & \mu_1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \mu_s \end{pmatrix} \qquad (*)$$

con $\lambda_j = a_j + ib_j$. Ahora sea $\mathfrak{h}$ la subálgebra de Cartan asociada a X(o sea $\mathfrak{g}_0(X)$) y denotamos por $\mathfrak{h}_\mathbb{C}$ su complexificada.
Por tanto $\mathfrak{h}_\mathbb{C} = \mathfrak{h}_\beta$ en $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, pero los elementos de $\mathfrak{h}$ tienen sus entradas reales y son diagonales en la base β, por tanto estos se representan en la base γ de la misma forma que X en $(*)$, con k bloques de 2×2 y una cantidad $s = n - 2k$ de elementos diagonales.
Por tanto, para cada $0 \leq k \leq n/2$, entonces cada k determina una familia de subálgebras de Cartan que son aquellas en las cuales, para una base de $\mathbb{R}^n$, sus elementos se escriben como en $(*)$. Ya que el rango de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ es $n-1$, para un valor arbitrario de k, la dimensión de las subálgebras de Cartan de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ es siempre $n-1$.
Así en $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$, dos subálgebras de Cartan dados por un mismo k, son conjugadas entre sí, ya que una se obtiene de otra por un cambio de base. En cambio dos subálgebras con valores de k distintos no son conjugadas, pues la cantidad de autovalores complejos de las adjuntas de sus elementos depende de k.
Finalmente, es posible contar la cantidad de clases de conjugación de las subálgebras de Cartan de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$:
Cuando n es par, contando la ausencia de autovalores complejos, existen $n/2+1$ clases de conjugación.
Si n es impar existen $(n+1)/2$ clases de conjugación, por la presencia de un autovalor real.

3. *Para $n = 2$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ por lo anterior, presenta dos clases de conjugación para sus subálgebras de Cartan; es decir, k es tal que $0 \leq k \leq 1$, de modo que $k = 0$ o $k = 1$.*
Sean $\mathfrak{h}_1 = Span\{H\}$ y $\mathfrak{h}_2 = Span\{X - Y\}$. Al ser H y $X - Y$ regulares, tenemos que $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{g}_0(H)$ y $\mathfrak{h}_2 = \mathfrak{g}_0(X-Y)$. Notemos que los autovalores de H son 2 y -2, mientras que los autovalores de $X - Y$ son $i, -i$.
De este modo, $\mathfrak{h}_1$ pertenece a la clase de conjugación de $k = 0$ y h_2

pertenece a la clase de conjugación de $k = 1$, de modo que $\mathfrak{h}_1$ y $\mathfrak{h}_2$ no son conjugadas en $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.
Recordemos el polinomio de Killing de $\mathfrak{g}$ es $P_Z(\lambda) = \lambda^3 - 4(b^2 + ac)\lambda$, donde $Z = aX + bH + cY \in \mathfrak{g}$ y, este será regular sí y solo si $P(a, b, c) = b^2 + ac \neq 0$.
Entonces $\mathfrak{g}_r = \{Z \in \mathfrak{g} : P(Z) \neq 0\} \subset \mathbb{R}^3$ tiene tres componentes conexas. De acuerdo a la proposición 3.8, $\mathfrak{g}_r$ es conexo cuando $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, de modo que solo hay una componente conexa, lo que implica que debe existir una sola clase de conjugación, pues $\mathbb{C}$ es la clausura algebraica de $\mathbb{R}$.

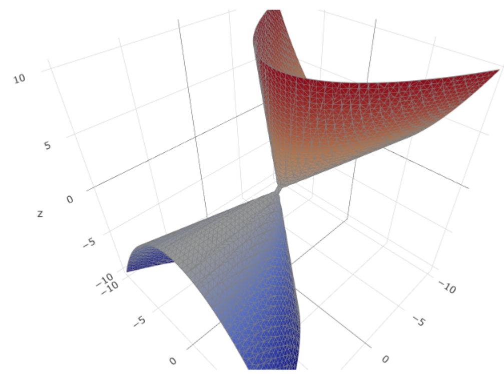

Figura 3.1: Los elementos de $\mathfrak{g}_r \subset \mathfrak{g}$ real son aquellos que están fuera de la superficie coloreada.

3.3. Un Enfoque Algebraico

En esta sección, $\mathbb{K}$ denotará un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero y los espacios vectoriales en cuestión, serán de dimensión finita.

Definición 3.4. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ y $\beta = \{v_1, \ldots, v_m\}$ una base de V. Sea $X \in V$, entonces $X = \sum_{i=1}^{m} x_i v_i$, donde el vector de coordenadas de X en la base β es el vector $[X]_\beta = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{K}^n$. Sea $f(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{K}[\lambda_1, \ldots, \lambda_m]$, el anillo de polinomios en las m - indeterminadas λ_i, con coeficientes en $\mathbb{K}$. Entonces $f(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ y la base $\beta \subset V$ definen una aplicación*

$$\begin{aligned} f : V &\longrightarrow \mathbb{K} \\ X &\longmapsto f(X) = f(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

*Se denomina a f **función polinomial** o polinomio en V.*

Observación 3.3.1. *1. Sea $\beta' = \{v'_1, \ldots, v'_m\}$ otra base de V, entonces f y β' definen una función polinomial que puede ser distinta a la función polinomial, definida a partir de f y β. En todo caso, f y β' no dejan de definir una función polinomial en V. En este sentido la noción de función polinomial es independiente respecto a la elección de alguna base para V.*

2. Una función polinomial f se puede entender como una combinación lineal de monomios del tipo

$$x_1^{r_1} \cdots x_m^{r_m} \tag{$*$}$$

donde $[X]_\beta = (x_1, \ldots, x_m)$. El grado *de un monomio $x_1^{r_1} \cdots x_m^{r_m}$ es igual a $r_1 + \cdots + r_m$.*
Por tanto el grado de una función polinomial $f = \sum C_{i_1,\ldots,i_m} x_1^{i_1} \cdots x_m^{i_m}$ es igual al mayor grado de los monomios que lo componen.
Los funcionales lineales $\pi_i \in V^*$ tal que $\pi_i(v_j) = \delta_{ij}$ forman una base del dual de V. Así f se escribe como suma de productos finitos de funcionales lineales:

$$\pi_1^{r_1} \cdots \pi_m^{r_m}.$$

Proposición 3.9. *Denotamos por $\mathbb{K}[V]$, al conjunto de funciones polinomiales en V sobre $\mathbb{K}$. Sean $f, g \in \mathbb{K}[V]$ y $X \in V$, definimos*

$$(f+g)(X) = f(X) + g(X)$$
$$(fg)(X) = f(X)g(X)$$

y para $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$(\alpha f)(X) = \alpha f(X).$$

Entonces $\mathbb{K}[V]$ junto estas operaciones, es una álgebra asociativa.

Demostración. Esto se desprende del hecho de que el conjunto de funciones de A en $\mathbb{K}$, donde A es un conjunto cualquiera, define una estructura de álgebra asociativa. $\square$

Proposición 3.10. *1. Sea $v \in V$ y $\beta = \{v_1, \ldots, v_m\}$ de modo que $[v]_\beta = (x_1, \ldots, x_m)$. Entonces si para todo $v \in V$ se cumple que $f(x_1, \ldots, x_m) = 0$, entonces $f = 0 \in \mathbb{K}[\lambda_1, \ldots, \lambda_m]$.*

2. Sea $\gamma : \mathbb{K}[\lambda_1, \ldots, \lambda_m] \longrightarrow \mathbb{K}[V]$ una correspondencia tal que

$$\gamma(f(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)) = f \in \mathbb{K}[V],$$

entonces γ es un homomorfismo inyectivo de álgebras.

Demostración. 1. En efecto vía inducción sobre m. El caso $m = 1$, significa que $f(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{K}$ y como $\mathbb{K}$ es de característica cero, es infinito y por tanto $f = 0$.
Ahora asumamos válido el resultado para $m \geq 1$, entonces:

$$f(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \sum_{r=1}^{q} f_r(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1})\lambda_m^q,$$

donde $f_r(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}) \in \mathbb{K}[\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}]$. Fijando $x_1, \ldots, x_{m-1} \in \mathbb{K}$, tenemos que por el primer paso de inducción:

$$\sum_{r=1}^{q} f_r(x_1, \ldots, x_{m-1})x_m^q = f(x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m) = 0,$$

para todo $\lambda_n \in \mathbb{K}$.
Ya que $x_1, \ldots, x_{m-1} \in \mathbb{K}$ son arbitrarios entonces $f_r(x_1, \ldots, x_{m-1}) = 0$ donde $0 \leq r \leq q$ y por hipótesis de inducción $f_r(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}) = 0$. Por lo tanto
$f(x_1, \ldots, x_{m-1}, \lambda_m) = 0$. Por tanto, si $g \in Ker(\gamma)$ entonces $g = 0$ por la afirmación anterior. Así γ es inyectiva.

2. Sean $f(\lambda_1, \ldots, \lambda_m), g(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{K}[\lambda_1, \ldots, \lambda_m]$ y $X \in V$, entonces

$$\begin{aligned}
&(\gamma(f(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)) + \gamma(g(\lambda_1, \ldots, \lambda_m))(X) \\
&= \gamma(f(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)(X) + \gamma(g(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)(X)) \\
&= f(X) + g(X) \\
&= (f + g)(X) \\
&= \gamma((f + g)(\lambda_1, \ldots, \lambda_m))(X).
\end{aligned} \tag{1}$$

También tenemos:

$$\begin{aligned}
&\gamma(f(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)\gamma(g(\lambda_1, \ldots, \lambda_m))(X) \\
&= \gamma(f(\lambda_1, \ldots, \lambda_m))(X)\gamma(g(\lambda_1, \ldots, \lambda_m))(X) \\
&= f(X)g(X) \\
&= (fg)(X) \\
&= (\gamma(fg(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)))(X).
\end{aligned} \tag{2}$$

Finalmente, para $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}
(\alpha\gamma(f(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)))(X) &= \alpha\gamma(f(\lambda_1, \ldots, \lambda_m))(X) \\
&= \alpha(f(X)) \\
&= (\alpha f)(X) \\
&= \gamma(\alpha f(\lambda_1, \ldots, \lambda_m))(X).
\end{aligned} \tag{3}$$

Por tanto, de (1), (2) y (3), γ es un homomorfismo de álgebras. La inyectividad de γ es consecuencia de la afirmación anterior.

$\square$

Definición 3.5. *Sea W, otro espacio vectorial, de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ y, $\rho = \{w_1, \ldots, w_n\}$ una base de W. Una aplicación P de V en W, se dice que es* ***polinomial****, cuando las coordenadas de los elementos de la imagen de P, son funciones polinomiales de V; es decir:*

$$X = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i \longrightarrow P(X) = Y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j w_j,$$

donde para todo j, $\beta_j = p_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, con $p_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{K}[\lambda_1, \ldots, \lambda_m]$.

Proposición 3.11. *Sean V, W y U, espacios vectoriales de dimensión finita.*

1. *El conjunto de aplicaciones polinomiales de V en W, forma un espacio vectorial bajo la suma y multiplicación escalar de funciones.*

2. *Sea P una aplicación polinomial de V en W y, Q otra aplicación polinomial, de W en U. Entonces la composición $Q \circ P$ es una aplicación polinomial, de V en U.*

3. *Si $f \in \mathbb{K}[W]$, entonces $f \circ P \in \mathbb{K}[V]$. Además, la correspondencia $\sigma_P : \mathbb{K}[W] \longrightarrow \mathbb{K}[V]$, tal que, $\sigma_P(f) = f \circ P$, es un homomorfismo de álgebras. Recíprocamente, dado un homomorfismo $\sigma : \mathbb{K}[W] \longrightarrow \mathbb{K}[V]$, existe una aplicación polinomial P, de V en W, tal que $\sigma = \sigma_P$.*

4. *Si $\sigma_P = \sigma_Q$, entonces $P = Q$.*

Demostración. 1. En tal conjunto, definimos las operaciones de la siguiente forma:

$$(P + Q)(X) = P(X) + Q(X)$$

y para $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$(\alpha P)(X) = \alpha P(X).$$

para cualquier $X \in V$.
Por tanto el conjunto de aplicaciones polinomiales con estas operaciones, constituye un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

2. Sean $\beta_V = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$, $\beta_W = \{w_1, w_2, \ldots, v_n\}$, $\beta_U = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ bases de V, W y U, respectivamente.

Sean también $X \in V$, donde $X = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$, entonces $P(X) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) w_j$, donde $\gamma_j \in \mathbb{K}[\lambda_1, \ldots, \lambda_m]$, pues P es una aplicación polinomial.
Ya que Q también es una aplicación polinomial, tenemos:

$$Q(P(X)) = \sum_{k=1}^{p} \epsilon_k(\gamma_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_m), \gamma_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_m), \ldots, \gamma_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)) u_k,$$

donde, $\epsilon_k \in \mathbb{K}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$, con $k = 1, 2, \ldots, p$.
Por lo tanto deducimos que $\psi_k = \epsilon_k(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{K}[\lambda_1, \ldots, \lambda_m]$, por tanto $Q \circ P$ es una aplicación polinomial.

3. Notemos que toda función polinomial, es una aplicación polinomial, pues el elemento identidad en $\mathbb{K}$ visto como un espacio vectorial, se constituye en una base de $\mathbb{K}$. Entonces por (2), tenemos que $f \circ P \in \mathbb{K}[V]$.
Ahora, para f y g en $\mathbb{K}[W]$ y $X \in V$:

$$\begin{aligned}
\sigma_P(f+g)(X) &= ((f+g) \circ P)(X) \\
&= (f+g)(P(X)) \\
&= f(P(X)) + g(P(X)) \\
&= \sigma_P(f)(X) + \sigma_P(g)(X) \\
&= (\sigma_P(f) + \sigma_P(g))(X).
\end{aligned}$$

Como X es arbitrario, entonces

$$\sigma_P(f+g) = \sigma_P(f) + \sigma_P(g). \tag{$*$}$$

Para el producto,

$$\begin{aligned}
\sigma_P(fg)(X) &= ((fg) \circ P)(X) \\
&= (fg)(P(X)) \\
&= f(P(X))g(P(X)) \\
&= \sigma_P(f)(X)\sigma_P(g)(X) \\
&= (\sigma_P(f)\sigma_P(g))(X).
\end{aligned}$$

Así:

$$\sigma_P(fg) = \sigma_P(f)\sigma_P(g). \tag{$**$}$$

Ahora, para $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
\sigma_P(\alpha f)(X) &= ((\alpha f) \circ P)(X) \\
&= (\alpha f)(P(X)) \\
&= \alpha(f(P(X)) \\
&= (\alpha \sigma_P(f))(X).
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\sigma_P(\alpha f) = \alpha\sigma_P(f). \qquad (***)$$

Finalmente, por $(*), (**)$ y $(***)$, σ_P define un homomorfismo entre $\mathbb{K}[W]$ y $\mathbb{K}[V]$.
Recíprocamente, sea $\sigma : \mathbb{K}[W] \longrightarrow \mathbb{K}[V]$ un homomorfismo. Consideremos los funcionales lineales

$$\begin{aligned} l_j :& W \longrightarrow \mathbb{K} \\ & Y \mapsto l_j(Y) = l_j(\sum_{s=1}^{n} y_s w_s) = y_j \text{ donde } j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Observemos que $l_j \in \mathbb{K}[W], \forall j = 1, 2, \ldots, n$, luego las imágenes bajo sigma de los l_j, son funciones polinomiales de V, entonces para $X = \sum_{i=1}^{m} x_i v_i \in V$:

$$\sigma(l_j)(X) = \sigma(l_j)(\sum_{i=1}^{m} x_i v_i) = f_j(x_1, \ldots, x_m),$$

donde $f_j \in \mathbb{K}[\lambda_1, \ldots, \lambda_m]$.
De la igualdad anterior, podemos definir la siguiente aplicación:

$$P : V \longrightarrow W \text{ tal que } X = \sum_{i=1}^{m} x_i w_j \longrightarrow P(X) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_1, \ldots, x_m) w_j.$$

Es claro que P es una aplicación polinomial; además:

$$\begin{aligned} \sigma_P(l_j)(X) &= (l_j \circ P)(X) \\ &= l_j(P(X)) \\ &= f_j(x_1, \ldots, x_m) \\ &= \sigma(l_j)(X). \end{aligned}$$

Por tanto, $\sigma_P(l_j) = \sigma(l_j),$ con $j = 1, \ldots, n$.
Ya que los l_j, generan $\mathbb{K}[W]$ y σ es un homomorfismo, entonces $\sigma = \sigma_P$.

4. Sea $f \in \mathbb{K}[W]$, de modo que $\sigma_P(f) = \sigma_Q(f)$; es decir

$$f \circ P = f \circ Q, \forall q \in \mathbb{K}[W].$$

Sea $X = \sum_{i=1}^{m} x_i v_i$, entonces $P(X) = \sum_{i=1}^{m} f_i v_i$, con $f_i \in \mathbb{K}[V]$. Por tanto $l_j(P(X)) = f_j$, para todo $j = 1, \ldots, m$. De la misma forma $l_j(Q(X)) = g_j$ donde $j = 1, \ldots, m$. Donde Q es una aplicación polinomial de V en W. Así, por la igualdad, tenemos que $l_j(P(X)) = l_j(Q(X))$; es decir, $P(X) = Q(X)$ y como $X \in V$ es cualquiera, tenemos que $P = Q$.

□

Proposición 3.12. *Sea $\tau : \mathbb{K}[W] \longrightarrow \mathbb{K}$ un homomorfismo, entonces existe $Y \in W$ tal que $\tau(q) = q(Y)$, con $q \in \mathbb{K}[W]$.*

Demostración. Sea $V = 0$, luego si $p \in \mathbb{K}[V]$ entonces $p(0) \in \mathbb{K}$. Por otra parte, para cualquier aplicación polinomial $P : V \longrightarrow W$, $P(0) = y \in W$. Ya que τ es un homomorfismo, por (3) de la proposición 3.11 tenemos que $\tau = \sigma_P$, donde para $q \in \mathbb{K}[W]$, tenemos

$$\tau(q) = \sigma_P(q) = q \circ P = q \circ P(0) = q(y).$$

□

Ahora, sea $X = \sum_{i=1}^{m} x_i v_i \in V$ donde los $\{v_1, \ldots, v_m\}$ es una base de V. Por otra parte, $f \in \mathbb{K}[V]$ entonces $f(X)$ es una combinación lineal de monomios en x_i; es decir, las coordenadas de X. Sea $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_m^{r_m}$ uno de esos monomios, entonces la **derivada parcial** de un monomio, se define como sigue:

$$(\frac{\partial}{\partial \lambda_i})_{\lambda_l = x_l}(x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_m^{r_m}) = r_i x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_i^{r_i - 1} \cdots x_m^{r_m}.$$

Por lo tanto, la derivada parcial de f, respecto a x_i por linealidad; se extiende sumando las derivadas de todos los monomios que contienen a x_i en f. En caso de que $f = C$, donde $C \in \mathbb{K}$ es una constante, entonces

$$(\frac{\partial f}{\partial \lambda_i})_{\lambda_l = x_l} = 0, \forall i = 1, \ldots, m.$$

Definición 3.6. *Sea $f \in \mathbb{K}[V]$ y sea $X = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$ en V, la aplicación $d_X f : V \longrightarrow \mathbb{K}$, de modo que para $Y = \sum_{i=1}^{m} \eta_i v_i$ en V,*

$$d_X f(Y) = (d_X f)(\sum_{i=1}^{m} \eta_i v_i) = \sum_{k=1}^{m} (\frac{\partial f}{\partial \lambda_k})_{\lambda_l = \alpha_l} \eta_k$$

*se denomina la **diferencial de** f en X.*

Por tanto, podemos deducir los siguientes hechos:

Proposición 3.13. *Sean* $f, g \in \mathbb{K}[V]$ *y* $X \in V$,

1. $d_X(f+g) = d_X f + d_X g$.
2. $d_X(\alpha f) = \alpha(d_X f)$; *con* $\alpha \in \mathbb{K}$.
3. $d_X(fg) = f(X)(d_X g) + g(X)(d_X f)$

Demostración. Sean $\{v_1, \ldots, v_m\}$ una base de V y $X = \sum_{i=1}^{m} x_i v_i$. Entonces para cualquier $Y = \sum_{j=1}^{m} y_i v_i$ por definición:

1.

$$\begin{aligned} d_X(f+g)Y &= \sum_{k=1}^{m} (\frac{\partial(f+g)}{\partial\lambda_k})_{\lambda_l = x_l} y_k \\ &= \sum_{k=1}^{m} (\frac{\partial f}{\partial\lambda_k})_{\lambda_l = x_l} y_k + \sum_{k=1}^{m} (\frac{\partial g}{\partial\lambda_k})_{\lambda_l = x_l} y_k \\ &= d_X f(Y) + d_X g(Y) \end{aligned}$$

Como $Y \in V$ es cualquiera, entonces $d_X(f+g) = d_X f + d_X g$.

2.

$$\begin{aligned} d_X(\alpha f)Y &= \sum_{k=1}^{m} (\frac{\partial(\alpha f)}{\partial\lambda_k})_{\lambda_l = x_l} y_k \\ &= \alpha \sum_{k=1}^{m} (\frac{\partial f}{\partial\lambda_k})_{\lambda_l = x_l} y_k \\ &= \alpha d_X f(Y). \end{aligned}$$

Así, $d_X(\alpha f) = \alpha d_X f$.

3.

$$\begin{aligned} d_X(fg)Y &= \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial(fg)}{\partial\lambda_k}\right)_{\lambda_l = x_l} y_k \\ &= \sum_{k=1}^{m} \left((\frac{\partial f}{\partial\lambda_k})_{\lambda_l = x_l} g(X) + f(X)(\frac{\partial g}{\partial\lambda_k})_{\lambda_l = x_l} \right) y_k \\ &= g(X) \sum_{k=1}^{m} (\frac{\partial f}{\partial\lambda_k})_{\lambda_l = x_l} y_k + f(X) \sum_{k=1}^{m} (\frac{\partial g}{\partial\lambda_k})_{\lambda_l = x_l} y_k \\ &= f(X) d_X g(Y) + g(X) d_X f(Y), \forall Y \in V. \end{aligned}$$

Así $d_X(fg) = f(X)(d_X g) + g(X)(d_X f)$.

$\square$

Observación 3.3.2. *La proposición anterior, muestra que la diferencial es un funcional lineal de V. Por tanto la diferencial se representa en la base $\{v_1, \ldots, v_m\}$ como sigue:*

$$(d_X f) = \left((\frac{\partial f}{\partial \lambda_k})_{\lambda_1=\alpha_1}, \ldots, (\frac{\partial f}{\partial \lambda_m})_{\lambda_m=\alpha_m} \right)_{1\times m}.$$

Definición 3.7. *Sea ahora P, una aplicación polinomial, de V en W, donde para $Y = \sum_{i=1}^{m} \eta_i v_i \longrightarrow P(Y) = \sum_{j=1}^{n} p_j(\eta_1, \ldots, \eta_n) w_j$, entonces la diferencial de P en $X = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$, se define como:*

$$d_X P(Y) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} (\frac{\partial p_j}{\partial \lambda_k})_{\lambda_l=\alpha_l} \eta_k \right) v_j.$$

Observación 3.3.3. *De la definición anterior la diferencial de P en $X = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$ es lineal, por lo tanto:*

$$(d_X P)_{\{v_1,\ldots,v_m\}} = \begin{pmatrix} (\frac{\partial p_1}{\partial \lambda_k})_{\lambda_1=\alpha_1} & (\frac{\partial p_1}{\partial \lambda_2})_{\lambda_2=\alpha_2} & \cdots & (\frac{\partial p_1}{\partial \lambda_m})_{\lambda_m=\alpha_m} \\ (\frac{\partial p_2}{\partial \lambda_1})_{\lambda_1=\alpha_1} & (\frac{\partial p_2}{\partial \lambda_2})_{\lambda_2=\alpha_2} & \cdots & (\frac{\partial p_2}{\partial \lambda_m})_{\lambda_m=\alpha_m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (\frac{\partial p_n}{\partial \lambda_1})_{\lambda_1=\alpha_1} & (\frac{\partial p_n}{\partial \lambda_2})_{\lambda_2=\alpha_2} & \cdots & (\frac{\partial p_n}{\partial \lambda_m})_{\lambda_m=\alpha_m} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.3.1. *Sea V un espacio vectorial real de dimensión dos, con una base $\beta = \{v_1, v_2\}$. La siguiente aplicación:*

$$\begin{aligned} p : & V \longrightarrow V \\ & \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \longmapsto (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2)v_1 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)v_2 \end{aligned}$$

es una aplicación polinomial. Haciendo $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ y $w = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2$, podemos calcular su diferencial:

$$d_v p(w) = (\lambda_2\mu_1 + (\lambda_1 + 2\lambda_2)\mu_2)v_1 + (2\lambda_1\mu_1 + 2\lambda_2\mu_2)v_2.$$

Proposición 3.14. *(Regla de la Cadena) Sean $P : V \longrightarrow W, Q : W \longrightarrow U$, aplicaciones polinomiales, entonces*

$$d_X(Q \circ P) = d_{P(X)}Q \circ d_X P.$$

Demostración. Sea $\beta_V = \{v_1, \dots, v_m\}, \beta_W = \{w_1, \dots, w_n\}, \beta_U = \{u_1, \dots, u_p\}$ bases de V, W y U respectivamente. Para $X = \sum_{i=1}^{m} x_i v_i$ e $Y = \sum_{i=1}^{m} y_i v_i$ tenemos que:

$$d_X P(Y) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{r=1}^{m} (\frac{\partial p_j}{\partial \lambda_r})_{\lambda_t = x_t} y_r \right) w_j.$$

También:

$$\begin{aligned} d_{P(X)}Q(d_X P(Y)) &= \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{s=1}^{n} (\frac{\partial q_k}{\partial \lambda_s})_{\lambda_t = p_t(x_1, \dots, x_m)} \sum_{r=1}^{m} (\frac{\partial p_k}{\partial \lambda_r})_{\lambda_t = x_t} y_r \right) u_k. \\ &= \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{r=1}^{m} \left(\sum_{s=1}^{n} (\frac{\partial q_k}{\partial \lambda_s})_{\lambda_t = p_t(x_1, \dots, x_m)} (\frac{\partial p_k}{\partial \lambda_r})_{\lambda_t = x_t} y_r \right) \right) u_k. \qquad (*) \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos lo siguiente:

$$d_X(Q \circ P)(Y) = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{r=1}^{m} \left(\frac{\partial q_k(p_1, \dots, p_n)}{\partial \lambda_r} \right)_{\lambda_t = x_t} y_r \right) u_k. \qquad (**)$$

Ya que $\left(\frac{\partial q_k(p_1, \dots, p_n)}{\partial \lambda_r} \right)_{\lambda_t = x_t} = \sum_{s=1}^{n} (\frac{\partial q_k}{\partial \lambda_s})_{\lambda_t = p_t(x_1, \dots, x_m)} (\frac{\partial p_k}{\partial \lambda_r})_{\lambda_t = x_t}$ para cada $k = \{1, \dots, p\}$ y $r = \{1, \dots, m\}$, por lo tanto

$$d_{P(X)}(d_X P(Y)) = d_X(Q \circ P)(Y), \forall Y \in V.$$

Así

$$d_{P(X)}Q \circ d_X P = d_X(Q \circ P).$$

□

Lema 3.3. *Sea $P : V \longrightarrow W$ una aplicación polinomial y suponga que para algún $a \in V$, $d_a P$ es sobreyectiva. Entonces la transpuesta $\sigma_P : \mathbb{K}[W] \longrightarrow \mathbb{K}[V]$ es inyectiva.*

Demostración. Se procederá por reducción al absurdo.
Sea $q \in ker(\sigma_P)$, con $q \neq 0$ y de grado mínimo; es decir:

$$\sigma_P(q) = q \circ P = 0.$$

Notemos que, al ser $\sigma_P(q) \in \mathbb{K}[V]$, donde $dim(V) = m$, entonces, por la regla de la cadena:

$$d_X(q \circ P) = d_{P(X)}q \circ d_X P = 0. \qquad (*)$$

Donde $X = \sum_{j=1}^{m} x_j u_j$ es cualquiera, en V y $\{u_1, \ldots, u_m\}$ es una base de V.

Sea $a = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i$ en V.Ya que P es una aplicación polinomial,

$$P(X) = p_1(x_1, \ldots, x_m)w_1 + p_2(x_1, \ldots, x_m)w_2 + \cdots + p_n(x_1, \ldots, x_m)w_n,$$

donde $p_t \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_m]$, para todo $t \in \{1, \ldots, n\}$ De $(*)$, por un lado, obtenemos que:

$$\begin{aligned} d_a P(X) = & \left((\frac{\partial p_1}{\partial \lambda_1})_{\lambda_1 = a_1} x_1 + (\frac{\partial p_1}{\partial \lambda_1})_{\lambda_2 = a_2} x_2 + \cdots + (\frac{\partial p_1}{\partial \lambda_m})_{\lambda_m = a_m} x_m \right) w_1 \\ & + \left((\frac{\partial p_2}{\partial \lambda_1})_{\lambda_1 = a_1} x_1 + (\frac{\partial p_2}{\partial \lambda_2})_{\lambda_2 = a_2} x_2 + \cdots + (\frac{\partial p_2}{\partial \lambda_m})_{\lambda_m = a_m} x_m \right) w_2 \\ & + \\ & \vdots \\ & + \left((\frac{\partial p_n}{\partial \lambda_1})_{\lambda_1 = a_1} x_1 + (\frac{\partial p_n}{\partial \lambda_2})_{\lambda_2 = a_2} x_2 + \cdots + (\frac{\partial p_n}{\partial \lambda_m})_{\lambda_m = a_m} x_m \right) w_n. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} (dq_{P(a)} \circ d_a P)(X) = & \, dq_{P(a)}(d_a P(X)) \\ = & \, (\frac{\partial q}{\partial \rho_1})_{\rho_1 = p_1(x)} \left((\frac{\partial p_1}{\partial \lambda_1})_{\lambda_1 = a_1} x_1 + \cdots + (\frac{\partial p_1}{\partial \lambda_m})_{\lambda_m = a_m} x_m \right) \\ & + \\ & \vdots \\ & + (\frac{\partial q}{\partial \rho_n})_{\rho_1 = p_n(x)} \left((\frac{\partial p_n}{\partial \lambda_1})_{\lambda_1 = a_1} x_1 + \cdots + (\frac{\partial p_n}{\partial \lambda_m})_{\lambda_m = a_m} x_m \right). \end{aligned}$$

Ahora, para todo $s \in \{1, \ldots, m\}$:

$$\begin{aligned} (dq_{P(a)} \circ d_a P)(u_s) & = (\frac{\partial q}{\partial \rho_1})_{\rho_1 = p_1(x)} (\frac{\partial p_1}{\partial \lambda_s})_{\lambda_s = a_s} + \cdots + (\frac{\partial q}{\partial \rho_n})_{\rho_n = p_n(x)} (\frac{\partial p_n}{\partial \lambda_s})_{\lambda_s = a_s} \\ & = (\frac{\partial q}{\partial \rho_1})_{\rho_1 = p_1(x)} \frac{\partial p_1}{\partial a_s} + \cdots + (\frac{\partial q}{\partial \rho_1})_{\rho_n = p_n(x)} \frac{\partial p_n}{\partial a_s}. \end{aligned}$$

Entonces, por $(*)$, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
(\frac{\partial q}{\partial \rho_1})_{\rho_1=p_1(x)}\frac{\partial p_1}{\partial a_1}+\cdots+(\frac{\partial q}{\partial \rho_n})_{\rho_n=p_n(x)}\frac{\partial p_n}{\partial a_1}&=0\\
(\frac{\partial q}{\partial \rho_1})_{\rho_1=p_1(x)}\frac{\partial p_1}{\partial a_2}+\cdots+(\frac{\partial q}{\partial \rho_n})_{\rho_n=p_n(x)}\frac{\partial p_n}{\partial a_2}&=0\\
&\vdots\\
(\frac{\partial q}{\partial \rho_1})_{\rho_1=p_1(x)}\frac{\partial p_1}{\partial a_m}+\cdots+(\frac{\partial q}{\partial \rho_n})_{\rho_n=p_n(x)}\frac{\partial p_n}{\partial a_m}&=0.
\end{aligned}$$

O equivalentemente:

$$\begin{pmatrix}
\frac{\partial p_1}{\partial a_1} & \frac{\partial p_2}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial p_n}{\partial a_1}\\
\frac{\partial p_1}{\partial a_2} & \frac{\partial p_2}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial p_n}{\partial a_2}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\frac{\partial p_1}{\partial a_m} & \frac{\partial p_2}{\partial a_m} & \cdots & \frac{\partial p_n}{\partial a_m}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
(\frac{\partial q}{\partial \rho_1})_{\rho_1=p_1(x)}\\
(\frac{\partial q}{\partial \rho_2})_{\rho_2=p_2(x)}\\
\vdots\\
(\frac{\partial q}{\partial \rho_n})_{\rho_n=p_n(x)}
\end{pmatrix}
=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

Por hipótesis, d_aP es sobreyectiva, entonces, alguno de sus menores de $n\times n$ es no nulo. Por este hecho, tenemos que

$$(\frac{\partial q}{\partial \rho_k})_{\rho_k=p_k(x)}=0, \qquad (**)$$

para todo $k\in\{1,\ldots,n\}$, donde $x=(x_1,x_2,\ldots,x_m)$.
Observemos que los polinomios de $(**)$, son de menor grado que q y están en el núcleo de σ. Por tanto

$$\frac{\partial q}{\partial p_k}=0, k=1,\ldots,n.$$

Por tanto, q es una función polinomial constante, y como $q\in Ker(\sigma)$, entonces $q=0$, lo cúal contradice la elección inicial de q, por lo tanto σ es inyectiva. □

Definición 3.8. *Sea B una álgebra asociativa sobre $\mathbb{K}$ y $A\subset B$ una subálgebra de B. Entonces*

$$A[x_1,\ldots,x_r]$$

denota la subálgebra de B generada por A y $\{x_1,\ldots,x_r\}\subset B$.

Teorema 3.5. *Sea $\overline{\mathbb{K}}$ una extensión de $\mathbb{K}$. Sean también A y $B=A[x_1,\ldots,x_r]$ subálgebras de $\overline{\mathbb{K}}$. Sea $p\in B$, con $p\neq 0$. Entonces existe $q\in A$, tal que si $\sigma:A\longrightarrow\mathbb{K}$ es un homomorfismo con $\sigma(q)\neq 0$, entonces σ se extiende a un homomorfismo $\tau:B\longrightarrow\mathbb{K}$ con $\tau(p)\neq 0$.*

Demostración. Se probará el resultado, vía inducción sobre r:
Si $r = 1$ entonces $B = A[x]$. Consideremos C, el subcuerpo de $\overline{\mathbb{K}}$ generado por A, entonces tenemos dos posibilidades para $x \in B$:

1. (Caso I: x es trascendente sobre C.)
   Dado este hecho, para $b \in B$:
   $$b = b_0 + b_1x + \cdots + b_sx^s \; b_i \in A, s \geq 0.$$
   Al tener supuesto que $p \neq 0$ en B, entonces
   $$p = p_1 + p_2x + \cdots + p_tx^t,$$
   donde $p_t \neq 0$. Haciendo $q = p_t$, es posible extender el homomorfismo $\sigma : A \longrightarrow \mathbb{K}$:
   En efecto, asumiendo que $\sigma(q) \neq 0$, consideremos el siguiente polinomio:
   $$P(\lambda) = \sigma(p_0) + \sigma(p_1)\lambda + \cdots + \sigma(p_t)\lambda^t.$$
   Observemos que $P \in \mathbb{K}[\lambda]$ y que tiene exactamente t raíces en $\mathbb{K}$. Además, por ser de característica 0, $\mathbb{K}$ es infinito, por lo tanto, existe $c \in \mathbb{K}$ tal que $P(c) \neq 0$.
   Ahora estamos en condiciones de proponer la extensión de σ:
   Consideremos:
   $$\begin{aligned} \tau : B = A[x] &\longrightarrow \mathbb{K} \\ b = b_0 + b_1x + \cdots + b_sx^s &\mapsto \tau(b) = \sigma(b_0) + \sigma(b_1)c + \cdots + \sigma(b_s)c^s. \end{aligned}$$
   La aplicación τ está bien definida es un homomorfismo. En efecto:
   Sean $b = b_0 + b_1x + \cdots + b_sx^s$ y $b' = b'_0 + b'_1x + \cdots + b'_{s'}x^{s'}$ en B, tal que $b = b'$. Entonces $s = s'$ y luego,
   $$\begin{aligned} b - b' &= (b_0 - b'_0) + (b_1 - b'_1)x + \cdots + (b_s - b'_s)x^s \\ &= 0. \end{aligned}$$
   Por esto último, habríamos encontrado un polinomio, con coeficientes no nulos en C, que tiene a x como raíz, lo cual contradice la trascendencia de x. Por tanto $(b_s - b'_s) = 0$, con $s \geq 0$.
   Entonces,
   $$\begin{aligned} \sigma(b_s - b'_s) &= \sigma(b_s) - \sigma(b'_s) \\ &= \sigma(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\tau(b)-\tau(b')=(\sigma(b_0)-\sigma(b'_0))+(\sigma(b_1)-\sigma(b'_1))c+\cdots+(\sigma(b_s)-\sigma(b'_s))c^s$$

de donde, por $*$

$$=0.$$

Así, τ está bien definida, pues:

$$\tau(b)=\tau(b'). \tag{1}$$

Por otra parte, asumiendo sin pérdida de generalidad, que $s' \geq s$:

$$\begin{aligned}\tau(b)+\tau(b') &= (\sigma(b_0)+\sigma(b_1)c+\cdots+\sigma(b_s)c^s)+\\ &+(\sigma(b'_0)+\sigma(b'_1)c+\cdots+\sigma(b'_{s'})c^{s'})\\ &=(\sigma(b_0)+\sigma(b'_0))+(\sigma(b_1)+\sigma(b'_1))c+\cdots+(\sigma(b_s)+\\ &+\sigma(b'_s))c^s+\sigma(b_{s+1})c^{s+1}+\cdots+\sigma(b_{s'})c^{s'}\\ &=(\sigma(b_0)+b'_0))+(\sigma(b_1)+b'_1))c+\cdots+(\sigma(b_s)+b'_s))c^s+\\ &+\sigma(b'_{s+1})c^{s+1}+\cdots+\sigma(b'_{s'})c^{s'}\\ &=\tau(b+b').\end{aligned} \tag{2}$$

Además,

$$\begin{aligned}\tau(bb') &= \sum_{k=0}^{s+s'}(\sum_{p=0}^{k}\sigma(b_p)\sigma(b'_{k-p}))c^k\\ &=\sum_{i=0}^{s}\sum_{j=0}^{s'}\sigma(b_i)\sigma(b'_j)c^{i+j}\\ &=\tau(b)\tau(b').\end{aligned} \tag{3}$$

Por tanto, por (1), (2) y (3), τ es un homomorfismo que extiende σ a B y; que también verifica:

$$\begin{aligned}\tau(p) &= \sigma(p_0)+\sigma(p_1)c+\cdots+\sigma(p_t)c^t\\ &=P(c)\neq 0.\end{aligned}$$

2. (Caso I: x es algebraico sobre C.) Sea

$$P(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m,$$

un polinomio, tal que $a_i \in C$, con $i=1,2,\ldots,m$, de modo que

$$P(x)=0. \tag{4}$$

Vamos a considerar a P, con el menor grado posible, de aquellos polinomios que tienen como raíz a x. Bajo estas condiciones, P es irreducible en el anillo de polinomios $C[\lambda]$.
Consideremos la siguiente aplicación:

$$\pi : C[\lambda] \longrightarrow A[x] \text{ tal que } \pi(R) = R(x).$$

Esta aplicación es un homomorfismo sobreyectivo de álgebras, entonces por el teorema de isomorfismo:

$$A[x] \cong C[\lambda]/ker\pi. \tag{5}$$

Ahora sea $\sigma : A \longrightarrow \mathbb{K}$ un homomorfismo, tal que $\sigma(a_m) \neq 0$, consideremos el siguiente polinomio:

$$P^\sigma(\lambda) = \sigma(a_0) + \sigma(a_1)\lambda + \cdots + \sigma(a_m)\lambda^m.$$

Notemos que $P^\sigma \in \mathbb{K}[\lambda]$, entonces tiene raíces en $\mathbb{K}$, al ser este algebraicamente cerrado.
Sea $c \in \mathbb{K}$ tal que, $P^\sigma(c) = 0$, definimos:

$$\tau' : C[\lambda] \longrightarrow \mathbb{K} \text{ tal que } \tau'(\sum a_i\lambda^i) = \sum \sigma(a_i)c^i.$$

Esta aplicación, extiende σ a $C[\lambda]$, cuando se considera a $A \subset C[\lambda]$ siendo el conjunto de polinomios constantes, con coeficientes en A.
Ahora, sea $R \in C[\lambda]$, tal que $R \in ker(\pi)$. Entonces

$$\pi(R) = R(x) = 0.$$

Por la elección de P, al ser $a_m \neq 0$, $a_m^{-1}P$ es minimal, y por tanto es un divisor de R, entonces $R = a_m^{-1}PS$, o equivalentemente:

$$a_m^k R = PS, \tag{6}$$

donde S es algún polinomio y k algún exponente. Evaluando τ' en (6), tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\tau'(a_m R) &= \tau'(PS)\\
\sigma(a_m^k)\tau'(R) &= \tau'(P)\tau'(S)\\
&= (\sigma(a_0) + \sigma(a_1)c + \cdots + \sigma(a_m)c^m)\tau'(S)
\end{aligned}$$

ya que c es raíz de P:

$$\begin{aligned}
&= 0\tau'(S)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como $\sigma(a_m^k) = \sigma(a_m)^k$ es no nulo, por tanto $\tau'(R) = 0$. En resumen, $\tau'(ker\pi) = 0$, esto es, la imagen bajo τ', de cualquier polinomio en C, que contiene a x como raíz, es siempre cero. Luego, consideremos la siguiente aplicación:

$$\tau : C[\lambda] \longrightarrow \mathbb{K}, \text{ tal que } \tau([R]) = \tau'(R).$$

Por $*$ y (5), τ es un homomorfismo bien definido, que extiende σ a $A[x]$. Ahora, sea $p \neq 0$ en $A[x]$, entonces p es algebraico sobre C y por tanto, se puede considerar un polinomio $Q = c_0 + c_1\lambda + \cdots + c_n\lambda^n \in A[\lambda]$, de grado mínimo tal que $Q(p) = 0$.
Observemos que $Q(0) \neq 0$; es decir, 0 no puede ser raíz de Q, por ser Q irreducible.
Sea $q = Q(0)a_m = c_0a_m \in A$. Dado un homomorfismo $\sigma : A \longrightarrow \mathbb{K}$, tal que $\sigma(q) \neq 0$ y ya que $\sigma(q) = \sigma(c_0)\sigma(a_m)$, entonces $\sigma(c_0) \neq 0$ y $\sigma(a_m) \neq 0$. Esto último permite extender σ a un homomorfismo $\tau : A[x] \longrightarrow \mathbb{K}$, por lo hecho anteriormente.
Finalmente, $\tau(p) \neq 0$. En efecto, considere el polinomio:

$$Q^\sigma(\lambda) = \sigma(c_0) + \sigma(c_1)\lambda + \cdots + \sigma(c_n)\lambda^n.$$

Entonces, ya que $Q(p) = 0$,

$$\begin{aligned} \tau(Q(p)) &= \tau(0) \\ \tau(c_0 + c_1p + \cdots + c_np^n) &= 0 \\ \tau(c_0) + \tau(c_1)\tau(p) + \cdots + \tau(c_n)\tau(p)^n &= 0 \\ \sigma(c_0) + \sigma(c_1)\tau(p) + \cdots + \sigma(c_n)\tau(p)^n &= 0 \\ Q^\sigma(\tau(p)) &= 0. \end{aligned}$$

Ya que $Q^\sigma(0) = \sigma(c_0) \neq 0$; es decir 0 no es raíz de Q^σ, por tanto $\tau(p) \neq 0$ como se quería demostrar.

Ahora, suponiendo el resultado válido hasta $r-1$, sean $B = A[x_r]$ de modo que $A' = B[x_1, \ldots, x_{r-1}]$.
Por hipótesis de inducción, para algún $a' \in A'$, con $a' \neq 0$, existe $b \in B$ tal que si $\rho : B \longrightarrow \mathbb{K}$ es un homomorfismo, donde $\rho(b) \neq 0$ se extiende a un homomorfismo $\rho' : A' \longrightarrow \mathbb{K}$, tal que $\rho'(a') \neq 0$.
Por el primer paso de inducción, para $h \in B$, existe $g \in A$ tal que $\sigma : A \longrightarrow \mathbb{K}$ es un homomorfismo con $\sigma(g) \neq 0$, se extiende a un homomorfismo $\rho : B \longrightarrow \mathbb{K}$, tal que $\rho(h) \neq 0$. En resumen, para $a' \neq 0$ en A' , σ puede extenderse a ρ y a su vez ρ puede extenderse a ρ', entonces σ puede extenderse a $\rho' : A' \longrightarrow \mathbb{K}$ y; como $A' = B[x_1, \ldots, x_{r-1}] = A[x_r][x_1, \ldots, x_{r-1}] = A[x_1, \ldots, x_{r-1}, x_r]$, se tiene el resultado. $\square$

Teorema 3.6. *Sea $P : V \longrightarrow W$ una aplicación polinomial y supongamos que $d_{X_0}P$ es sobreyectiva para algún $X_0 \in V$. Sea $p \neq 0 \in \mathbb{K}[V]$, entonces existe $q \in \mathbb{K}[W]$ tal que para todo $Y \in W$ tal que $q(Y) \neq 0$, existe $X \in V$, con $p(X) \neq 0$ y tal que $P(X) = Y$.*

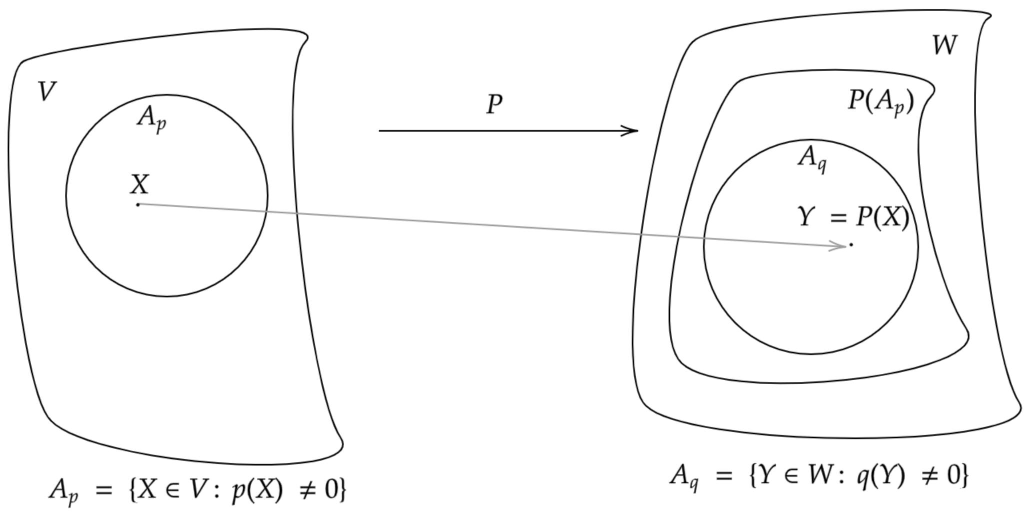

Figura 3.2: El teorema anterior se refiere a que $A_q \subset P(A_p)$; es decir, la imagen del "abierto" $A_p = \{p(X) \neq 0\}$ contiene al "abierto" $A_q = \{q(Y) \neq 0\}$.

Demostración. Como P es polinomial, la transpuesta $\sigma_P : \mathbb{K}[W] \longrightarrow \mathbb{K}[V]$ es inyectiva.
Por el lema 3.3, ya que $d_{X_0}P$ es sobreyectiva, σ es inyectiva.
Ahora, al ser $\mathbb{K}[V]$ un dominio integral, está embebido en $\overline{\mathbb{K}}$, su cuerpo de fracciones racionales. Notemos que $\mathbb{K} \subset \overline{\mathbb{K}}$, entonces $\overline{\mathbb{K}}$ es una extensión de $\mathbb{K}$.
Sean $A = \sigma_P(\mathbb{K}[W])$ y $B = \mathbb{K}[V]$. Podemos ver tanto A como B, subálgebras de $\overline{\mathbb{K}}$. Consideremos el siguiente conjunto:

$$\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m\} \subset \mathbb{K}[V],$$

donde $\theta_i \in V^*, \forall i = 1, 2, \ldots, m$. Ya que $Span(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m) = \mathbb{K}[V]$, entonces $B = A[\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m]$.
Por lo tanto, por el teorema 3.5; para $p \in B$, con $p \neq 0$, existe $q' = \sigma_P(q) \in A$, con $q \in \mathbb{K}[W]$. El siguiente paso será buscar un homomorfismo, cuya imagen en q' sea no nula.
Previo a eso, por la inyectividad de σ_P, obtenemos $\mathbb{K}[W] \cong \sigma_P(\mathbb{K}[W]) = A$.

Ahora, dada la existencia de q, del enunciado, sea $y \in W$, tal que $q(y) \neq 0$, a partir de ese elemento, podemos definir el siguiente homomorfismo:

$$\sigma : \mathbb{K}[W] \cong A \longrightarrow \mathbb{K} \text{ tal que } \sigma(q) = q(y)$$

Este es el homomorfismo buscado, pues se cumple que

$$\begin{aligned} \sigma(\sigma_P(q)) &= \sigma(q)(y) \\ &= q(y) \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Entonces, σ se extiende a un homomorfismo $\tau : B = \mathbb{K}[V] \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $\tau(p) \neq 0$.
Por la proposición 3.12, $\tau(p) = p(x)$, para algún $x \in V$, entonces $p(x) \neq 0$.
Finalmente, sea cualquier $r \in \mathbb{K}[W]$, luego

$$\begin{aligned} r(P(x)) &= \sigma_P(r)(x) \\ &= \tau(\sigma_P(r)) && \text{(por 3.12)} \\ &= \sigma(\sigma_P(r)) && (\tau \text{ extiende a } \sigma) \\ &= \sigma(r) && (A \cong \mathbb{K}[W]) \\ &= r(y) \end{aligned}$$

Como r es cualquiera, entonces $P(x) = y$. □

3.3.1. Conjugación de Subálgebras de Cartan

Lema 3.4. *Sea D una derivación nilpotente de $\mathfrak{g}$. Entonces $e^D = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D^m}{m!}$ es un automorfismo de $\mathfrak{g}$, (notemos que la suma es de una cantidad finita de términos).*

Demostración. La linealidad de e^D es consecuencia de la linealidad de D. Sea ahora $Y \in ker(e^D)$, si el índice de D es n, entonces $e^D Y = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{D^i}{i!} Y = 0$, o equivalentemente:

$$e^D Y = Y + DY + \frac{D^2}{2!} Y + \cdots + \frac{D^{n-1}}{(n-1)!} Y = 0. \tag{1}$$

Es conocido de los resultados del álgebra lineal, que el conjunto $\{Y, DY \ldots D^{n-1}Y\}$ es linealmente independiente, por tanto (1) es imposible, a menos que $Y = 0$.

Por tanto, e^D es una biyección.
Mostrar que e^D es un automorfismo, requiere el siguiente resultado:

$$D^m[Y, Z] = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} [D^k Y, D^{m-k} Z]. \tag{2}$$

Para verificar este hecho, utilizaremos inducción sobre m:
Para $m = 1$,

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} [D^k Y, D^{1-k} Z] = [Y, DZ] + [DY, Z] = D[Y, Z],$$

pues $D \in \partial\mathfrak{g}$.
Supongamos el resultado válido, para m, entonces

$$\begin{aligned}
&D^{m+1}[Y, Z] = D(D^m[Y, Z]) \\
&= D\left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} [D^k Y, D^{m-k} Z]\right) && \text{(hip. de inducción)} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} D[D^k Y, D^{m-k} Z] \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} [D^{k+1} Y, D^{m-k} Z] + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} [D^k Y, D^{m-k+1} Z] \\
&= \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m}{k-1} [D^k Y, D^{m-k+1} Z] + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} [D^k Y, D^{m-k+1} Z] \\
&= [D^{m+1} Y, Z] + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k-1} [D^k Y, D^{m-k+1} Z] \\
&+ \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} [D^k Y, D^{m-k+1} Z] + [Y, D^{m+1} Z] \\
&= [D^{m+1} Y, Z] + \sum_{k=1}^{m} \left(\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k}\right) [D^k Y, D^{m-k+1} Z] + [Y, D^{m+1} Z] \\
&= [D^{m+1} Y, Z] + \sum_{k=1}^{m} \binom{m+1}{k} [D^k Y, D^{m-k+1} Z] + [Y, D^{m+1} Z] \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} [D^k Y, D^{m+1-k} Z].
\end{aligned}$$

Por tanto, se verifica para todo m entero no negativo.

Finalmente, para cualesquiera Y y Z en $\mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}
e^D[Y,Z] &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{D^i}{i!}[Y,Z] \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} D^i[Y,Z] \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^{i} \frac{i!}{j!(i-j)!}[D^jY, D^{i-j}Z] && \text{(por (2))} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!k!}[D^jY, D^kZ] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} [\frac{1}{j!} D^jY, D^kZ] \\
&= [\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} D^jY, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^kZ] \\
&= [e^DY, e^DZ]
\end{aligned}$$

Esto implica que e^D es un automorfismo de $\mathfrak{g}$. □

Ya que $ad(X)$ es una derivación de $\mathfrak{g}$, con $X \in \mathfrak{g}$, el lema anterior implica que si $ad(X)$ es nilpotente, $e^{ad(X)}$ es un automorfismo de $\mathfrak{g}$. Tal automorfismo es denominado **propio** y la colección de todos los automorfismos propios de $\mathfrak{g}$, denotado como $Int(\mathfrak{g})$, constituye un subgrupo con la composición de funciones, del grupo de automorfismos de $\mathfrak{g}$.

Ahora estamos en condiciones de probar lo siguiente:

Teorema 3.7. *En una álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero, las subálgebras de Cartan son dos a dos conjugadas entre sí.*

***Demostración*.** Sea $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. Ya que $\mathfrak{h}$ es nilpotente, por el teorema 2.4, $\mathfrak{g}$ se descompone en subespacio de pesos:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_1} \oplus \dots \mathfrak{g}_{\lambda_s}.$$

donde $\mathfrak{g}_{\lambda_j} = \{X \in \mathfrak{g} : \forall H \in \mathfrak{h}, \exists n_j \geq 1, (ad(H) - \lambda_j(H)I)^{n_j} X = 0\}$, con $j = 1, \dots, n$.

Sea $X' \in \mathfrak{g}_{\lambda_j}$ y $H \in \mathfrak{h}$, entonces existe $n_j \geq 1$ tal que

$$(ad(H) - \lambda_j(H)I)^{n_j} X' = 0,$$

Considerando la restricción de $ad(H)$ a $\mathfrak{g}_{\lambda_j}$ es claro que $\lambda_j(H)$ es su único autovalor. Recordemos que los λ_j son funcionales lineales de $\mathfrak{h}$.
Sea $Y \in \mathfrak{g}_{\lambda_k}$, entonces $[X', Y] \in \mathfrak{g}_{\lambda_k+\lambda_j}$,a siempre y cuando $\lambda_k + \lambda_j$ sea un peso de $\mathfrak{h}$.
Por otra parte, $[X', [X', Y]] = ad(X')^2 Y \in \mathfrak{g}_{2\lambda_k+\lambda_j}$, siempre y cuando $2\lambda_k + \lambda_j$ sea un peso de $\mathfrak{h}$.
Entonces, por un paso de inducción, se sigue que:

$$ad(X')^r Y \in \mathfrak{g}_{r\lambda_k+\lambda_j},$$

siempre y cuando $r\lambda_k + \lambda_j$ sea un peso de $\mathfrak{h}$.
Por otra parte, observemos que el conjunto $\{r\lambda_k + \lambda_j, r \geq 1\}$ es infinito y, como solo hay una cantidad finita de pesos de $\mathfrak{h}$, entonces, para algún r' apropiado, $r\lambda_k + \lambda_j$ ya no es peso de $\mathfrak{h}$, y por tanto $ad(X')^{r'} Y = 0$; esto es, $ad(X')$ es nilpotente, sobre cada uno de los subespacios de pesos, relacionados a $\mathfrak{h}$.
Sean $X_{\lambda_1}, \ldots, X_{\lambda_s} \in \mathfrak{g}_{\lambda_1}, \ldots, \mathfrak{g}_{\lambda_s}$, entonces el siguiente operador:

$$e^{ad(X_{\lambda_1})} e^{ad(X_{\lambda_2})} \cdots e^{ad(X_{\lambda_s})}, \tag{$*$}$$

es un automorfismo de $\mathfrak{g}$ por el lema 3.4.
Sea $\{h_1, \ldots, h_l, e_{l+1}, \ldots, e_n\}$ una base de $\mathfrak{g}$ tal que $\{h_1, \ldots, h_l\}$ es una base de $\mathfrak{h}$ y $\{e_{l+1}, \ldots, e_n\}$ base de $\sum_k \mathfrak{g}_{\lambda_k}$, formada por la unión de bases de los $\mathfrak{g}_{\lambda_i}$, con $i = \{1, \ldots, s\}$.
Consideremos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned}
&\phi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathfrak{g}, \\
&\phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = e^{ad(\lambda_{l+1} e_{l+1})} e^{ad(\lambda_{l+2} e_{l+2})} \cdots e^{ad(\lambda_n e_n)} (\sum_{i=1}^{l} \lambda_i h_i) \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{l} p_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) h_i + \sum_{j=l+1}^{n} p_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) e_j
\end{aligned} \tag{$**$}$$

Notemos que, por como está definida ϕ, es una aplicación polinomial, pues los automorfismos son aplicaciones polinomiales, es por esto que los p_i's y p_j's son polinomios en los λ's.
Esto último, nos permite definir la siguiente aplicación polinomial, de $\mathfrak{g}$:

$$P : \sum_{i=1}^{l} \alpha_i h_i + \sum_{j=l+1}^{n} \alpha_j e_j \longrightarrow \sum_{i=1}^{l} p_i(\alpha_1, \ldots \alpha_n) h_i + \sum_{j=l+1}^{n} p_j(\alpha_1, \ldots \alpha_n) e_j = \phi(\alpha_1, \ldots \alpha_n).$$

Por otro lado recordemos que los pesos λ_k's son no nulos y, como $\mathbb{K}$ es de característica cero, tenemos que:

$$\prod_{k\neq 0} \lambda_k \neq 0.$$

Ese producto a su vez, es una función polinomial, y por tanto existe $X_0 = \sum_{i=1}^{l} \mu_i h_i$ en $\mathfrak{h}$ tal que:

$$\prod_{k\neq 0} \lambda_k(X_0) \neq 0.$$

Así que en X_0 tenemos que $\lambda_1(X_0), \lambda_1(X_0), \ldots, \lambda_s(X_0) \neq 0$, luego la restricción de $ad(X_0)$ a $\mathfrak{g}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_s}$ es no singular.
Ahora, vamos a calcular la diferencial de P en X_0, para esto sean $X = h+e$ donde $h = \sum_{i=1}^{l} \xi_i h_i, e = \sum_{j=l+1}^{n} \xi_j h_j$ y t una indeterminada:

$$\begin{aligned}
&P(X_0 + tX) = P(X_0 + t(h+e))\\
&= e^{ad(t\xi_{l+1}e_{l+1})} e^{ad(t\xi_{l+2}e_{l+2})} \cdots e^{ad(t\xi_n e_n)} (X_0 + th)\\
&\equiv e^{ad(t\xi_{l+1}e_{l+1})} e^{ad(t\xi_{l+2}e_{l+2})} \cdots e^{ad(t\xi_{n-1} e_{n-1})} (X_0 + th + ad(t\xi_n e_n))X_0 && \text{(mod } t^2)\\
&\equiv e^{ad(t\xi_{l+1}e_{l+1})} e^{ad(t\xi_{l+2}e_{l+2})} \cdots e^{ad(t\xi_{n-2} e_{n-2})} (X_0 + th + ad(t\xi_{n-1} e_{n-1})X_0\\
&+ ad(t\xi_n e_n)X_0) && \text{(mod } t^2)\\
&\vdots\\
&\equiv X_0 + th + ad(t\xi_{l+1}e_{l+1})X_0 + \cdots + ad(t\xi_n e_n)X_0 && \text{(mod } t^2)\\
&\equiv X_0 + th + t\xi_{l+1}[e_{l+1}, X_0] + \cdots + t\xi_n[e_n, X_0] && \text{(mod } t^2)\\
&= X_0 + th + t[\xi_{l+1}e_{l+1} + \cdots + \xi_n e_n, X_0] && \text{(mod } t^2)\\
&= X_0 + th + t[e, X_0] && \text{(mod } t^2)\\
&= X_0 + t(h + [e, X_0]) && \text{(mod } t^2)\\
&= X_0 + t(h - ad(X_0, e)). && \text{(mod } t^2)
\end{aligned}$$

Comparando, la diferencial $d_{X_0}P$ viene dada por la siguiente correspondencia :

$$d_{X_0}P : h + e \longrightarrow h - ad(X_0)e.$$

Ya que $ad(X_0)$ es no singular sobre $\mathfrak{g}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_s}$, entonces $d_{X_0}P$ es sobreyectiva.
Ahora, sea i el rango de $\mathfrak{g}$ y el polinomio de Killing de $\mathfrak{g}$, esto es

$$det(\lambda I - ad(X)) = \lambda^n + p_1(X)\lambda^{n-1} + \cdots + p_{n-i}(X)\lambda^{n-i},$$

donde $p_i(X) \neq 0$.
Observemos que $p_i \in \mathbb{K}[\mathfrak{g}]$. Por el lema 3.3, σ_P es inyectiva y por tanto

$$p = \sigma_P(p_i) \neq 0.$$

Por el teorema 3.6, existe $q \in \mathbb{K}[\mathfrak{g}]$, tal que para todo $Y \in \mathfrak{g}$ con $q(Y) \neq 0$, existe $Z \in \mathfrak{g}$ donde $p(Z) \neq 0$ y $P(Z) = Y$.

Ahora,

$$\begin{aligned} p(Z) &= \sigma_P(p_i)Z \\ &= p_i(P(Z)) \\ &= p_i(Y) \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Esto implica que cualquier $Y \in \mathfrak{g}$ tal que $q(Y) \neq 0$, es regular.
Sea $Z = \sum_{i=1}^{l} z_i h_i + \sum_{j=l+1}^{n} z_j e_j$, entonces

$$\begin{aligned} Y &= P(Z) \\ &= e^{ad(z_{l+1}e_{l+1})} \cdots e^{ad(z_n e_n)}(\sum_{i=1}^{l} z_i h_i) \\ &= \theta(h'). \end{aligned}$$

Esto último quiere decir que Y es la imagen de un elemento $h' \in \mathfrak{h}$, donde $\theta = e^{ad(z_{l+1}e_{l+1})} \cdots e^{ad(z_n e_n)}$ es un automorfismo de $\mathfrak{g}$.
Luego $h' = \theta^{-1}(Y)$ y por la proposición 3.4, $\theta^{-1}(Y)$ es regular implica que $\mathfrak{h}$ contenga elementos regulares.
Sean ahora $\mathfrak{h}_1$ y $\mathfrak{h}_2$ subálgebras de Cartan de $\mathfrak{g}$. Al contener $\mathfrak{h}_1$ elementos regulares, existe $q_1 \in \mathbb{K}[\mathfrak{g}]$, con $q_1 \neq 0$ tal que el conjunto $A_{q_1} = \{Y_1 \in \mathfrak{g} : q_1(Y_1) \neq 0\}$ está constituido por elementos regulares y si $Y_1 \in A_{q_1}$, existe un automorfismo ϕ_1 de $\mathfrak{g}$, tal que $\phi_1(Y_1) \in \mathfrak{h}_1$.
De un modo similar, para $\mathfrak{h}_2$, existe un polinomio $q_2 \neq 0 \in \mathbb{K}[\mathfrak{g}]$ tal que el conjunto A_{q_2} esta constituido por elementos regulares y para $Y_2 \in A_{q_2}$, existe un automorfismo ϕ_2 de $\mathfrak{g}$ tal que $\phi_2(Y_2) \in \mathfrak{h}_2$.
Ya que $q_1 q_2 \neq 0$, entonces existe $Y \in \mathfrak{g}$ tal que $q_1(Y) \neq 0$ y $q_2(Y) \neq 0$; es decir, $Y \in A_{q_1} \cap A_{q_2}$.

Entonces, por el corolario 3.2, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h}_2 &= \mathfrak{g}_0(\phi_2(Y)) \\
&= \mathfrak{g}_0(\phi_2(\phi_1^{-1}(\phi_1(Y)))) \\
&= \phi_2\phi_1^{-1}(\mathfrak{g}_0(\phi_1(Y))) \\
&= \phi_2\phi_1^{-1}(\mathfrak{h}_1) && \text{(pues } \phi_1(Y_1) \in \mathfrak{h}_1 \text{ y es regular)} \\
&= \phi(\mathfrak{h}_1);
\end{aligned}$$

donde $\phi = \phi_2 \circ \phi_1$ es un automorfismo de $\mathfrak{g}$. Por tanto $\mathfrak{h}_1$ y $\mathfrak{h}_2$ son conjugadas entre sí. $\square$

Observación 3.3.4. *1. El teorema anterior en realidad muestra que las subálgebras de Cartan son conjugadas entre sí, vía elementos de* $Int(\mathfrak{g})$.

2. En caso de que $\mathbb{K}$ *no sea algebraicamente cerrado, es posible que existan subálgebras de Cartan, que no son conjugadas. Considerando la clausura algebraica* $\overline{\mathbb{K}}$*, las subálgebras de Cartan* $\mathfrak{h}$ *se extienden a subálgebras de Cartan* $\mathfrak{h}_{\overline{\mathbb{K}}}$ *y si* p_i *es el polinomio que determina los elementos que son regulares, entonces* p_i *no se anula en* $\mathfrak{h}_{\overline{\mathbb{K}}}$ *y por tanto,* p_i *no se anula en* $\mathfrak{h}$*, pues* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}_{\overline{\mathbb{K}}}$*. Así* $\mathfrak{h}$ *contiene elementos regulares.*

Ejemplo 3.3.2. *Sea* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ *y* $\beta = \{X, H, Y\}$ *una base ordenada de* $\mathfrak{g}$*, donde los corchetes entre los elementos de* β *son los siguientes:*

$$[H, X] = 2X \qquad , [H, Y] = -2Y \qquad , [X, Y] = H$$

donde $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *y* $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$*. Vimos del ejemplo 3.1.1 que* $\mathfrak{h} = Span\{H\}$ *es una subálgebra de Cartan. Por otra parte, los operadores* $ad(X), ad(Y)$ *son tal que* $ad(X)^3 = ad(Y)^3 = 0$*, entonces siguiendo el desarrollo del teorema anterior:*

$$\begin{aligned}
&P(\alpha X + \beta H + \gamma Y) = \phi(\beta, \alpha, \gamma) \\
&= e^{\alpha ad(X)} e^{\gamma ad(Y)}(\beta H) \\
&= \beta(1 + \alpha ad(X) + \frac{1}{2}\alpha^2(ad(X))^2)(1 + \gamma ad(Y) + \frac{1}{2}\gamma^2(ad(Y))^2)H \\
&= -\gamma(2\alpha^2\beta + 2\alpha)X + 2\gamma\beta Y + \gamma(1 + 2\alpha\beta)H \qquad (*)
\end{aligned}$$

Ahora, note que para cualquier $S = aX + bH + cY \in \mathfrak{g}$, $p_S(\lambda) = \lambda^3 + 4(b^2 + ac)\lambda$ *y por tanto* $S \in \mathfrak{g}$ *es regular si y solo sí* $b^2 + ac \neq 0$*. Como* $X - Y$ *es regular entonces* $\mathfrak{g}_0(X + Y) = \mathfrak{h}_1$ *es una subálgebra de Cartan. Considerando la* *descomposición en espacio de pesos de $\mathfrak{g}$, relacionado a la representación adjunta $ad : \mathfrak{h}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}l(\mathfrak{g})$ tenemos:*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h}' \oplus Span\{X'\} \oplus Span\{Y'\}$$

donde $\mathfrak{h}_1 = Span\{H_1\}$, $X_1 = X + iH + Y, Y_1 = X - iY + H$ y $H_1 = X - Y$. Entonces:

$$[X_1, H_1] = 2iX_1, \qquad [X_1, Y_1] = 4iH_1, \qquad [H_1, Y_1] = 2iY_1,$$

de modo que:

$$\begin{aligned}
&P(\alpha_1 X_1 + \beta_1 Y_1 + \gamma_1 H_1) = \phi(\gamma_1, \alpha_1, \beta_1)\\
&= e^{\alpha_1 ad(X_1)} e^{\beta_1 ad(Y_1)}(\gamma_1 H_1)\\
&= \gamma_1(1 + \alpha_1 ad(X_1) + \frac{1}{2}\alpha_1^2(ad(X_1))^2)(1 + \beta_1 ad(Y_1) + \frac{1}{2}\beta_1^2(ad(Y_1))^2)H_1\\
&= \gamma_1(2\alpha_1 i + 8\alpha_1^2\beta_1 i)X_1 + \gamma_1(1 - 8\alpha_1\beta_1 i)H_1 - 2\gamma_1\beta_1 iY_1.
\end{aligned}$$

Haciendo $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ y $\gamma_1 = 1$, se encontrarán α, β y γ en $\mathbb{C}$, tal que $P(\alpha X + \beta Y + \gamma H) = H_1 = X - Y$. Por tanto:

$$-\gamma(2\alpha\beta + 2\alpha) = 1, \qquad 2\gamma\beta = -1 \qquad \text{y} \qquad \gamma(1 + 2\alpha\beta) = 0.$$

Las soluciones de este sistema, son para $\alpha = i$:

$$\beta = \frac{i}{2}, \qquad \gamma = i$$

y para $\alpha = -i$:

$$\beta = -\frac{i}{2}, \qquad \gamma = -i.$$

Así para el primer caso:

$$e^{iad(X)} e^{\frac{i}{2}ad(Y)}(iH) = H_1$$

y por lo tanto:

$$e^{iad(X)} e^{\frac{i}{2}ad(Y)}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}_1.$$

Además, para el segundo conjunto de soluciones tenemos:

$$e^{-iad(X)} e^{-\frac{i}{2}ad(Y)}(-iH) = H_1$$

que también cumple:

$$e^{-iad(X)} e^{-\frac{i}{2}ad(Y)}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}_1.$$

Conclusiones

Las subálgebras de Cartan en realidad, existen para álgebras de Lie de dimensión finita siempre que el cuerpo de escalares sea infinito(en nuestro caso es así, pues consideramos cuerpos de característica cero), pues las mismas están estrechamente relacionadas con los elementos regulares, cuya presencia en las subálgebras de Cartan es independiente de si el cuerpo de escalares es algebraicamente cerrado o no.
La principal consecuencia del teorema 3.7 es que todas las subálgebras de Cartan tienen la misma dimensión, la cual es determinada por el rango de la álgebra. Si bien el resultado es muy fuerte para la teoría, en la práctica puede resultar bastante complicado encontrar los automorfismos adecuados que realizan la conjugación, en especial si las álgebra de Lie son de dimensiones grandes.
El estudio de las subálgebras de Cartan en este trabajo, hace uso de conceptos y resultados del Álgebra Lineal, Álgebra Abstracta, Análisis y Topología, a fin de mostrar lugares comunes que pueden motivar a acercarse a la teoría de Lie.

Apéndice A

Álgebra Lineal

A.1. Descomposición Primaria y formas de Jordan

Teorema A.1. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \longrightarrow V$ un operador lineal. El polinomio minimal de T es dado por:*

$$p = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$$

donde los p_i son polinomios mónicos irreducibles distintos sobre $\mathbb{K}$ y los r_i enteros positivos. Sean V_{λ_i} subespacios de V tal que:

$$V_{\lambda_i} = \{v \in V : p_i(T)^{r_i} v = 0, \text{ para algún } r_i \geq 1\}.$$

para todo $i \in \{a, \ldots, k\}$. Entonces

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$$

con V_{λ_i} T - invariante, para todo i.

El hecho de que los V_{λ_i} sean T - invariantes, permite considerar el operador T_i, restricto a V_{λ_i} cuyo polinomio minimal es $p_i^{r_i}$. Además, cuando $\mathbb{K}$ es algebraicamente cerrado, $p_i = T - \lambda_i$ con λ_i autovalor de T, entonces

$$V_{\lambda_i} = \{v \in V : (T - \lambda_i I)^{r_i} v = 0, \text{ para algún } r_i \geq 1\}$$

para todo i.

Ahora, cada uno de los operadores $(T - \lambda_i I)|_{V_i}$ son nilpotentes, entonces existen conjuntos linealmente independientes

$\{N^i w, \ldots, w, i \geq 0, w \in V\}$ con $N^{i+1} = 0$ y $N = (T - \lambda_i I)|_{V_{\lambda_i}}$ de modo que:

$$N = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & \ldots & & 0 \\ & \lambda_j & 1 \ldots & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_j & 1 \\ 0 & & & & \lambda_j \end{pmatrix}$$

Estos son los **bloques de Jordan** del operador T, donde la matriz representante de T representa a T es su **forma canónica de Jordan**.

A.2. Realificación

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y $V^{\mathbb{R}}$ el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, obtenido por la restricción de los escalares a $\mathbb{R}$. Sea $dim(V) = n$ y $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Entonces cualquier $X \in V$ se escribe:

$$X = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$$

con $x_i \in \mathbb{C}$. Dado que $x_i = a_i + b_i i$ donde $a_i, b_i \in \mathbb{R}, \forall i$. Entonces

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i + \sum_{i=1}^{n} b_i (i v_i)$$

y luego, la colección $\gamma = \{v_1, iv_1, \ldots, v_n, iv_n\}$ constituye una base de $V^{\mathbb{R}}$, por tanto $dim(V^{\mathbb{R}}) = 2dim(V)$.

Teorema A.2. *Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal y $\{v_1, \ldots, v_n\}, \{w_1, \ldots, w_m\}$ bases sobre $\mathbb{C}$ de V y W respectivamente. Sea también $A = B + iC$ la matriz representante de T, donde B, C son matrices reales. Denotemos por $T^{\mathbb{R}}$ al realificado de T, que va de $V^{\mathbb{R}}$ a $W^{\mathbb{R}}$. Entonces la matriz representante de $T^{\mathbb{R}}$ en las bases $\{v_1, \ldots, v_n, iv_1, \ldots, v_n\}, \{w_1, \ldots, w_m, iw_1, \ldots, iw_m\}$ de $V^{\mathbb{R}}$ y $W^{\mathbb{R}}$ respectivamente es de la forma*

$$\begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}.$$

Demostración. Tenemos que:

$$f(v_l) = \sum_{k=1}^{m} A_{kl} w_k = \sum_{k=1}^{m} B_{kl} w_k + \sum_{k=1}^{m} C_{kl} (i w_k).$$

y

$$f(iv_l) = i\sum_{k=1}^{m} A_{kl}w_k = \sum_{k=1}^{m} -C_{kl}(iw_k) + \sum_{k=1}^{m} B_{kl}iw_k$$

para todo $l = \{1, \ldots, n\}$. Así:

$$[T^{\mathbb{R}}]_{\{v_1,\ldots,v_n,iv_1,\ldots,v_n\}}^{\{w_1,\ldots,w_m,iw_1,\ldots,iw_m\}} = \begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}.$$

□

El siguiente corolario establece la relación entre los determinantes de un operador complejo y su realificación:

Corolario A.1. *Sea $T : V \longrightarrow V$ un operador lineal complejo donde V es de dimensión finita. Entonces $det(T_{\mathbb{R}}) = |detT|^2$*

Demostración. Tenemos que T se representa como $B + iC$ en alguna base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V. Aplicando el teorema anterior, tenemos que $T^{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}$, de modo que vía operaciones elementales de fila y columna, obtenemos:

$$\begin{aligned} det(T^{\mathbb{R}}) &= det(\begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}) = det(\begin{pmatrix} B+iC & -C+iB \\ C & B \end{pmatrix}) \\ &= det(\begin{pmatrix} B+iC+iC & 0 \\ C & B-iC \end{pmatrix}) \\ &= det(B+iC)det(B-iC) = det([T])det(\overline{[T]}) = det([T])\overline{det([T])} = |det(T)|^2 \end{aligned}$$

□

Ahora sea T un operador en V, escribimos su polinomio característico de la siguiente forma:

$$p_T(\lambda) = (\lambda - a_1)^{k_1} \cdots (\lambda - a_r)^{k_r}.$$

Por otra parte, la descomposición en bloques de Jordan de T, es dada por conjuntos linealmente independientes $\{w_1, \ldots, w_k\}$ tal que:

$$Tw_l = a_j w_l + w_{l-1}.$$

Sea ahora $U = Span\{w_1, \ldots, w_k\}$, donde U es invariante por T. Del mismo modo, es posible obtener una base $w_1 iw_1, \ldots, w_k, iw_k$ de U como subespacio real de $V^{\mathbb{R}}$ que también será invariante por T como transformación de $V^{\mathbb{R}}$. Sea $a_j = \alpha_j + i\beta_j$, de modo que:

$$Tw_l = \alpha_j w_l + \beta_j(iw_l) + w_{l-1} \qquad \text{y} \qquad T(iw_l) = -\beta_j w_l + \alpha_j(iw_l) + iw_{l-1}.$$

Así, estas expresiones determinan la *forma canónica de Jordan real* de T como transformación de $V^{\mathbb{R}}$, cuya diagonal está conformada por bloques de tipo:

$$\begin{pmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$$

Por tanto, en cada bloque, al calcular el polinomio característico $q(\lambda)$ del realificado de T, tendremos que:

$$det(\begin{pmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}) = (\lambda - \alpha_j)^2 + \beta_j^2 = (\lambda - a_j)(\lambda - \overline{a_j}).$$

Así:

$$q(\lambda) = (\lambda - a_1)^{k_1}(\lambda - \overline{a_1})^{k_1} \cdots (\lambda - a_r)^{k_r}(\lambda - \overline{a_r})^{k_r}.$$

A.3. Complexificación

Presentamos los siguientes resultados relacionados a la complexificación de un espacio vectorial real.
Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, la **complexificación** de V ,denotado por $V_{\mathbb{C}}$, es el producto cartesiano $V \times V$, cuyos elementos son los pares ordenados (u, v) con $u, v \in V$ los cuales denotaremos como $u + iv$.

- La suma en $V_{\mathbb{C}}$ está definida como

  $$(u_1 + iv_1) + (u_1 + iv_1) = (u_1 + u_2) + i(v_1 + v_2)$$

  para todo $u_1, v_1, u_2, v_2 \in V$.

- La multiplicación por un escalar complejo sobre $V^{\mathbb{C}}$ está definida por

  $$(a + ib)(u + iv) = (au - bv) + i(av + bu)$$

  para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y $u, v \in V$.

Si $z = u + iv$, la **parte real** de z es $u \in V$ y es denotado por $Re(z)$ y la **parte imaginaria** de z es v, que es denotada por $im(z)$. Así $z = Re(z) + iIm(z)$, para todo $z \in V_{\mathbb{C}}$.

Proposición A.1. *Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita n:*

1. *Si $v_1, \ldots, v_n$ es una base de V(como espacio vectorial real), entonces $v_1, \ldots, v_n$ es una base de $V_{\mathbb{C}}$(como espacio vectorial complejo).*

2. *La dimensión de $V_{\mathbb{C}}$(como espacio vectorial complejo) es igual a la dimensión de V (como espacio vectorial real).*

Ahora supongamos que T es un operador del espacio vectorial real V. La **complexificación** de T, denotado por $T_{\mathbb{C}}$, es definido:

$$\begin{aligned} T_{\mathbb{C}} :& V_{\mathbb{C}} \longrightarrow V_{\mathbb{C}} \\ & u + iv \longmapsto Tu + iTv \end{aligned}$$

para $u, v \in V$.

Proposición A.2. *Sea V un espacio vectorial real y $\beta\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Entonces para un operador lineal $T : V \longrightarrow V$:*

$$[T]_\beta = [T_{\mathbb{C}}]_\beta.$$

Proposición A.3. *Sea V un espacio vectorial real y T un operador de V. Entonces el polinomio minimal de $T_{\mathbb{C}}$ es igual al polinomio minimal de T.*

Los siguientes resultados responden a cuestiones respecto a los autovalores de una complexificación:

Proposición A.4. *Sea V un espacio vectorial real y T un operador de V y $T_{\mathbb{C}}$ definido sobre $V_{\mathbb{C}}$:*

1. *Para $\lambda \in \mathbb{R}$, λ es un autovalor de $T_{\mathbb{C}}$ sí y solo si λ es un autovalor de T.*

2. *Sean $u, v \in V$ y j un entero no negativo, entonces:*

$$(T_{\mathbb{C}} - \lambda I)^j (u + iv) = 0 \qquad \textit{sí y solo si} \qquad (T_{\mathbb{C}} - \lambda I)^j (u - iv) = 0$$

Por tanto, cuando $j = 1$, tenemos que $\overline{\lambda}$ también es un autovalor de $T_{\mathbb{C}}$.

3. *Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalor de $T_{\mathbb{C}}$ entonces su multiplicidad algebraica coincide con la multiplicidad de $\overline{\lambda}$ como autovalor de $T_{\mathbb{C}}$.*

4. *Todo operador sobre un espacio vectorial real, cuya dimensión es impar tiene un autovalor.*

Ya que la definición de elemento regular, surge a partir del polinomio carácterístico de ciertos operadores:

Proposición A.5. *Sea V un espacio vectorial real y T un operador de V y $T_{\mathbb{C}}$ definido sobre $V^{\mathbb{C}}$ su complexificado:*

1. *Los coeficientes del polinomio característico de $T_{\mathbb{C}}$ son todos reales. En consecuencia los polinomios característicos de T y $T_{\mathbb{C}}$ coinciden.*

A.4. Polinomios

A.4.1. Diferenciación

Sean R un anillo conmutativo y $f(x) = \sum a_i x^i$ un polinomio con coeficientes en $R[x]$. Para una indeterminada t, consideremos el dominio de polinomios $R[x,t]$ y el polinomio:

$$f(x+t) = \sum a_i (x+h)^i.$$

Desarrollando las potencias en t, obtenemos:

$$f(x+t) = f(x) + tf_1(x) + t^2 f_2(x) + \dots$$

o

$$f(x+t) \equiv f(x) + tf_1(x) \qquad (mod(t^2))$$

El coeficiente f_1 de la primera potencia de t, que está unívocamente determinado se denomina la *derivada* de $f(x)$ y es denotado por $f'(x)$. Esta tiene las siguientes propiedades:

Proposición A.6. *1.* $(f+g)' = f' + g'$

2. $(fg)' = f'g + fg'$.

Demostración. 1.

$$f(x+t) + g(x+t) \equiv f(x) + tf'(x) + g(x) + tg'(x). \qquad (mod(t^2))$$

2.

$$\begin{aligned} f(x+t)g(x+t) &\equiv (f(x) + tf'(x))(g(x) + tg'(x)) \\ &\equiv f(x)g(x) + t(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)). \qquad (mod(t^2)) \end{aligned}$$

□

En general, de manera inductiva se cumple:

$$\begin{aligned} &(f_1 + \dots + f_n)' = f_1' + \dots + f_n' \\ &(f_1 f_2 \cdots f_n) = f_1' f_2 \cdots f_n + f_1 f_2' \cdots f_n + \dots + f_1 f_2 \cdots f_n' \end{aligned}$$

de modo que para $f(x) = ax^n$ se cumple:

$$(ax^n) = na^{n-1}$$

y si $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_k x^k$, combinando los resultados anteriores podemos deducir:

$$(\sum_{i=0}^{n} a_k x^k)' = \sum_{i=0}^{n} k a_k x^{k-1}.$$

Apéndice B

Topología y Espacios Normados

Esta sección presenta resultados los cuales permiten introducir conceptos topológicos y del cálculo diferencial en varias variables a las álgebras de Lie, en especial a aquellas de dimensión finita sobre los reales.

B.1. Topología

Proposición B.1. *Sea X un espacio topológico y $S \subset V$ que es abierto y cerrado(clopen). Entonces S es unión de componentes conexas de X.*

Demostración. Sea $s \in S$ de modo que S_s es la componente conexa de X, que contiene a s. Afirmamos que $S = \cup_{s\in S} S_s$; en efecto, notemos que $S \subset \cup_{s\in S} S_s$, pues $s \in \S_s$.
Ahora tomemos $A = S \cap S_s$ y $B = S^c \cap S_s$. Notemos que A y B son abiertos de S_s pues C es abierto y cerrado. Además son disjuntos, de modo que constituyen una separación de S_s y al ser este conexo:

$$A = \emptyset \qquad \text{o} \qquad B = \emptyset.$$

Asumir que A es vacío conduce a una contradicción, ya que $s \in S$. Por lo tanto $B = \emptyset$ lo cual implica que $S_s \subset S$ y así $\cup_{s\in S} S_s \subset S$.
En resumen $S = \cup_{s\in S} S_s$. □

Proposición B.2. *Sea $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ un polinomio con coeficientes reales, que no es idénticamente nulo, definido sobre $\mathbb{R}^n$. Entonces $A = \{(x_1, \dots, x_n) : f(x_1, \dots, x_n) \neq 0\}$ es abierto y denso en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Afirmamos que A es abierto en $\mathbb{R}^n$, ya que f y el polinomio nulo son aplicaciones continuas y $\mathbb{R}$ es un espacio de Hausdorff, entonces el siguiente conjunto:

$$\{(x_1, \dots, x_n) : f((x_1, \dots, x_n)) = 0\} \subset \mathbb{R}^n$$

es cerrado, por tanto A es abierto en $\mathbb{R}^n$. Ahora A es denso en $\mathbb{R}^n$ pues para $x \in \mathbb{R}^n$ y $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(y) \in A$, el polinomio $\phi(t) = f(x + t(y - x))$ es un polinomio en la variable real t que no es idénticamente nulo. A medida de que t tiende a cero, tenemos que $\phi(t) \neq 0$; es decir, x está en la clausura de A y por tanto A es denso en $\mathbb{R}^n$. □

El siguiente resultado se presenta sin demostración, el cual es el nexo entre funciones polinomiales y conceptos topológicos como son las componentes conexas, los cuales están estrechamente relacionados al concepto de elemento regular:

Proposición B.3. *Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita n y F un polinomio en V de grado d. Sea $S = \{v \in V : F(v) \neq 0\}$, entonces el número de componentes conexas de S es finito y está acotado por una constante que depende solamente de n y d.*

B.2. Espacios Normados

El siguiente resultado se refiere a las normas en espacios vectoriales de dimensión finita, donde el cuerpo de escalares $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Teorema B.1 (Tychonoff)**.** *Dos normas en un espacio vectorial V de dimensión finita n son siempre equivalentes.*

Demostración. El resultado es evidente para $n = 0$, pues la única norma sobre V es la norma cero. Supongamos que $n \geq 1$ y sea $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ una base. Luego esta base define el siguiente isomorfismo:

$$\begin{aligned} t : \mathbb{K}^n &\longrightarrow V \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) &\mapsto t(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n. \end{aligned}$$

Sea $\| \cdot \| : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ una norma fija en V y

$$\begin{aligned} \| \cdot \|_\infty : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) &\mapsto \|(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\|_\infty = sup\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|\} \end{aligned}$$

una norma de $\mathbb{K}^n$. Afirmamos que V y $\mathbb{K}^n$ son homeomorfos bajo t. En efecto, vía inducción sobre n; si $n = 1$, t y t^{-1} son tal que:

$$t : \lambda_1 \mapsto \lambda_1 v_1 \qquad \text{y} \qquad t : \lambda_1 v_1 \mapsto \lambda_1.$$

Ahora, como se cumple:

$$\|\lambda_1 v_1\| = |\lambda_1| \|v_1\| \qquad \text{y} \qquad |\lambda_1| = \frac{1}{\|v_1\|} \|\lambda_1 v_1\|,$$

tanto t como t^{-1} son continuas.
Sea $n \geq 2$ y el resultado válido para $n-1$. Primero t es continua pues por la desigualdad triangular:

$$\|\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n\| \leq |\lambda_1|\|v_1\| + \cdots + |\lambda_n|\|v_n\|,$$

es decir;

$$\|t(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\| \leq C \cdot \|(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\|_\infty$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ son cualesquiera y $C = \|v_1\| + \ldots \|v_n\|$. Entonces t es un operador acotado y por tanto continuo.
Para la continuidad de t^{-1} las funciones componentes:

$$f_1 : \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_1 v_n \longmapsto \lambda_1 \in \mathbb{K}$$

son tal que $t^{-1}(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ donde $x = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \in V$.
Luego t^{-1} es continua sí y solo si $f_1, \ldots, f_n$ son continuas. Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$, notemos que f_i es un funcional lineal de V y que $H = ker(f_n)$ es un subespacio de V de dimensión $n-1$ de modo que, al fijar una base de H, el isomorfismo entre $\mathbb{K}^{n-1} \longmapsto H$ definido de la misma forma que t, es un homeomorfismo por hipótesis de inducción. Así H es un espacio de Banach pues $\mathbb{K}^{n-1}$ es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_\infty$, luego H es cerrado. Esto último implica la continuidad de f_i, para todo i y por ende la continuidad de t^{-1}. Así t es un homeomorfismo entre V y $\mathbb{K}^n$.
Ahora sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ dos normas en V y V_1 y V_2 sus espacios normados correspondientes. Considerando la aplicación identidad $I : V_1 \longrightarrow V_2$ tenemos que $t = I \circ t$ y como t es un homeomorfismo entonces I también es un homeomorfismo, de modo que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ definen la misma topología en V, es decir; son equivalentes. $\square$

En realidad el siguiente corolario resume lo desarrollado en la primera parte del teorema anterior:

Corolario B.1. *Todo isomorfismo entre dos espacios vectoriales normados de la misma dimensión, es necesariamente un homeomorfismo.*

Definimos la *Topología Natural* de un espacio vectorial V de dimensión finita n siendo la topología definida en V por cualquier norma sobre V, la cual es independiente de la elección de la norma. Si $n \geq 1$, esa topología natural es la única topología en V que convierte en un homeomorfismo cualquier isomorfismo entre $\mathbb{K}^n$ y V, donde $\mathbb{K}^n$ tiene la topología del producto.

Observación B.2.1. *De manera general, el teorema de Tychonoff concluye que en todo espacio vectorial de dimensión finita V, existe una y sólo una topología que hace la suma y el producto por escalares operadores continuos.*

Ahora, sea V un espacio vectorial de dimensión finita, sobre $\mathbb{C}$. Debido a que $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n$ donde $i^2 = -1$, $\mathbb{C}^n$ junto con el producto interior Euclidiano:

$$z \cdot w = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w_j}$$

del cual podemos inducir la norma Euclidiana:

$$\|z\|_2 = \sqrt{z \cdot z}$$

para cualesquiera $w, z \in \mathbb{C}^n$. Así este espacio es un espacio de Hilbert complejo y la aplicación:

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n \qquad \text{tal que} \qquad (x, y) \mapsto x + iy$$

es una isometría. Debido a esta isometría entre $\mathbb{C}^n$ y $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ las nociones topológicas de estos espacios coinciden.

Bibliografía

[1] Akivis, M. A., and Rosenfeld, B. A. Elie Cartan (1869 - 1951), vol. 123. American Mathematical Society, 1993. Translations of Mathematical Monographs.

[2] Axler, S. (1997). Linear algebra done right. Springer Science & Business Media.

[3] Bourbaki, N. (2008). Lie groups and Lie algebras: chapters 7-9 (Vol. 3). Springer Science & Business Media.

[4] Chevalley, C. (1941). An Algebraic Proof of a Property of Lie Groups. American Journal of Mathematics, 63(4), 785–793. https://doi.org/10.2307/2371622

[5] Course Website. (s/f). Mit.edu. Recuperado el 9 de marzo de 2022, de http://math.mit.edu/classes/18.745/classnotes.html

[6] de Graaf, W. A. Lie Álgebras: Theory and Algorithms. North - Holland, 2000.

[7] Denton, B. (1990). General topology (chapters 5–10), by N. Bourbaki. Pp 363. DM 98. 1989. ISBN 3-540-19372-3 (Springer). The Mathematical Gazette, 74(467), 98-99. doi:10.2307/3618901

[8] Erdmann, K., and Wildon, M. J. Introduction to Lie Algebras. Springer, 2006.

[9] Farias Almeida, A. G. A forma canônica de Jordan e algumas aplicações. Tech. rep., Universidad Esttadual da Paraíba, 2011. Academic Press, 2000.

[10] Fulton, W. (2008). Algebraic curves. An Introduction to Algebraic Geom, 54.

[11] Hoffman, K., and Kunze, R. Álgebra Lineal. Prentice Hall Inc., 1973.

[12] Humphreys, J. E. Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. Springer - Verlag, 1980.

[13] Jacobson, N. Lie Algebras. Dover Puplications Inc. New York, 1979.

[14] Knapp, A. W., Knapp, A. W. (1996). Lie groups beyond an introduction (Vol. 140). Boston: Birkhäuser.

[15] Kostrikin, A. I., & Manin, Y. I. Linear algebra and geometry (1989).

[16] Lages Lima, E. Álgebra Lineal. Impa, 1998.

[17] Miličić, D. Lectures on lie groups. 2008-2009.

[18] Nachbin, L. (1976). Introdução à análise funcional, espaços de banach e cálculo diferencial. Oea.

[19] Roman, S., Axler, S., & Gehring, F. W. (2005). Advanced linear algebra (Vol. 3). New York: Springer.

[20] San Martin, L. A. B. Álgebras de Lie. Unicamp, 2010.

[21] Serre, J. P. (2000). Complex semisimple Lie algebras. Springer Science & Business Media.

[22] Sonsa, P. Lie Algebras - Lecture Notes.

[23] Treil, S. (2016). Linear algebra done wrong.

[24] Thompson, M. C. (2010). On the Conjugacy Theorems of Cartan and Borel Subalgebras.

[25] Van der Waerden, B. L. (2003). Algebra (Vol. 2). Springer Science & Business Media.

[26] Wan, Z. X. Lie Algebras. Pergamon Press, 1975.

[27] Xu, X. Representations of Lie Algebras and Partial Differential Equations. Springer, 2010.

[28] Yujra Mamani, A. J. (2018). Criterios de Cartan para la clasificación de Álgebras de Lie solubles y semisimples.