UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRES

FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES

CARRERA DE MATEMATICA

PROYECTO DE GRADO

Mención: Licenciatura en Matemática

" ACCION DE CARTAN RELACIONADO CON LA ACCION DE PALAIS "

Postulante: Univ. Martin Mamani Sarzuri .

Tutor: Dr. Efrain Cruz Mullisaca

Proyecto de Grado para optar al grado Académico de Licenciado en Matemática

La Paz-Bolivia

2021

DEDICATORIA

Dedico esta trabajo a las personas quienes ayudaron escribir The story of my life.

Jesusa Sarzuri Mamani y Deyneys L. Chura Casu

AGRADECIMIENTOS

Al profesor Dr. Efrain Cruz Mullisaca mi docente y tutor. Por todas las contribuciones,sugerencias y apoyo durante la elaboración de este trabajo, de la misma forma, agradecer al seminario de DINAMICAS DE CONTROL de la carrera de matemática que esta a cargo del mismo tutor, por darme la oportunidad de poder exponer y desarrollar mi trabajo. Expresar toda mi gratitud al Dr. Victor Patty, M.sc. Miguel Yucra y M.sc. Willy Condori que siempre apoyaron a mí persona en todo este proceso, además contribuyeron en mi formación matemática.

Este trabajo no hubiera sido posible realizar sin el apoyo, confianza y paciencia de mis Padres y la familia Mayta Huanca con las que me encuentro gratamente agradecidos.

INDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

Al observar que los objetos de un conjunto X permanecen invariantes bajo ciertas transformaciones o movimientos, se tiene la definición intuitiva de acción de un grupo G sobre un conjunto X, donde el grupo de transformaciones, es el conjunto de transformaciones que preserva esta estructura.

La definición de acción sobre un conjunto no se queda allí solamente, cuando el grupo y el conjunto son dotados de estructuras topológicas, se puede indagar un poco sobre el comportamiento de la acción y se puede formular ciertos interrogantes y saber de cuando un espacio cociente es un espacio Hausdorff, o mejor aún, bajo qué condiciones el espacio cociente de un espacio topológico por el grupo topológico es siempre Hausdorff. Una condición necesaria y suficiente para que el cociente sea Hausdorff es que la acción sea propia, pero cuando se recurre a diferentes textos para conocer la definición de acción propia, se puede encontrar diferencias entre las definiciones de acciones propias (en el sentido de Bourbaki) y las acciones propias (en el sentido de Palais) en las cuales son tratadas en este trabajo con detalles para llegar a la relación entre ellas. Además, se revisará otras implicaciones de interés en el espacio cociente, por ejemplo, cuando G es un grupo discreto, la noción de acción propia coincide con la definición de acción propiamente discontinua y es posible que esta fuese la que condujo al nombre de propiamente discontinua.

En este trabajo se busca dar herramientas para comprender la literatura existente, poniendo asi, en el Capítulo 1 las propiedades algebraicas más conocidas y manejadas, para G un grupo y X un conjunto. En el Capítulo 2 dotaremos de estructuras topológicas tanto al grupo como al espacio para definir los G-espacios de X, y dentro de ella poder diferenciar y relacionar las funciones propias y perfectas. Por último, en el Capítulo 3 expresar las dos definiciones de Acciones propias la de Bourbaki y Palais. Posteriormente dar las condiciones para que se den la relación entre ellas.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Este capítulo tiene entidad en sí misma con un contenido claramente intuitivo, su inclusión es claramente instrumental y con el fin de seguir este trabajo desarrollaremos algunas ideas necesarias y elementales para poder comprender este trabajo.

1.1. Acción de un Grupo sobre un Conjunto

Empezaremos considerando un grupo algebraico $(G, *)$, cuando escribamos g_1g_2 se usará como la notación de producto para la operación de grupo. Así, podemos definir.

Definición 1 *Sea G un grupo y X un conjunto no vacío.* ***Una Acción de G sobre*** *X (por la izquierda) es una función: $\theta : G \times X \to X$ que a cada par $(g, x) \mapsto \theta(g, x)$ con las siguientes propiedades.*

I) *$\theta(e, x) = x$ para todo x de X; siendo e el neutro de G.*

II) *$\theta(g_1, \theta(g_2, x)) = \theta(g_1g_2, x)$ para todo x de X y $g_1g_2 \in G$.*

De manera equivalente, una acción a derecha de G sobre X es una función $\theta : X \times G \to X$ que satisface

I) $\theta(x, e) = x$ para todo x de X

II) $\theta(\theta(x, g_1), g_2) = \theta(x, g_1g_2)$ para todo x de X y $g_1g_2 \in G$.

Una observación interesante es que una acción a derecha no necesariamente coincide con una acción a izquierda. Por ejemplo, si $\phi : X \times G \to X$ es una acción a derecha y definimos la función $\theta : G \times X \to X$ como $\theta(g, x) = \phi(x, g)$, entonces para $g \in G$ y $x \in X$, tenemos

$$\theta(gh, x) = \theta(g, \theta(h, x)) = \phi(\phi(x, h), g) = \phi(x, hg) = \theta(hg, x)$$

lo que no necesariamente $\theta(hg, x)$ es igual a $\theta(gh, x)$. La manera correcta de relacio-

nar una acción a derecha con una izquierda es la siguiente:
Si ϕ es una acción derecha de G sobre X, entonces la acción $\theta : G \times X \to X$, definida por $\theta(g,x) = \phi(x, g^{-1})$ es un acción a izquierda de G sobre X. En efecto, por un lado tenemos $\theta(e,x) = \phi(x, e^{-1}) = \phi(x,e)$, por el otro

$$\begin{aligned}\theta(gh,x) &= \theta(g,\theta(h,x)) = \theta(g,\phi(x,h^{-1}))\\ &= \phi(\phi(x,h^{-1}),g^{-1}) = \phi(x,h^{-1}g^{-1})\\ &= \phi(x,(gh)^{-1})\end{aligned}$$

Por tanto, esta forma de definir $\theta(g,x) = \phi(x,g^{-1})$ relaciona las acciones por derecha e izquierda.

Observaciones.

- En lo que sigue, a menos que se diga otra cosa, utilizaremos siempre acciones a izquierda, por la ventaja de que se comporta de manera similar con la ley composición de funciones. Por lo tanto, omitiremos la palabra izquierda y hablaremos simplemente de acción.
- A partir de ahora para algunos ejemplos vamos a denotar la acción $\theta(g,x) = g \cdot x$ de forma que las propiedades puedan verse de la manera siguiente
  - I) $e \cdot x = x$ para todo x de X,
  - II) $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x$, para todo x de X y $g_1 g_2 \in G$.
- Dado una acción $\theta : G \times X \to X$, si fijamos un elemento g de G se tiene la función $\theta : \{g\} \times X \to X$, que la podemos reescribir como la aplicación $\theta_g : X \to X$ definida por $\theta_g(x) = \theta(g,x)$, así, podemos reescribir las propiedades de acción como:
  - I) $\theta_e(x) = Id_{(x)}$ para todo x de X, Id es la función identidad sobre X,
  - II) $\theta_{g_1} \circ \theta_{g_2} = \theta_{g_1 g_2}$ para todo g_1, g_2 de G.

  En particular, es inmediato que la aplicación de cualquier $g \in G$ en X es una aplicación biyectiva, en efecto: $(\theta_g)^{-1} = \theta_{g^{-1}}$

veamos

$$\theta_g \circ \theta_{g^{-1}} = \theta_{gg^{-1}} = \theta_e = Id_x$$

$$\theta_{g^{-1}} \circ \theta_g = \theta_{g^{-1}g} = \theta_e = Id_x;$$

$\square$

Para verificar de donde nace la definición de acción, denotemos $End(X)$ el grupo de biyecciones de X en si mismo. Así, poder definir una función

$$\lambda : G \to End(X)$$
$$g \mapsto \lambda(g) = \theta_g$$

Con esto ver que existe un homeomorfismo de grupos $\lambda : G \to End(X)$, definida por $\lambda(g)(x) = \theta_g(x)$ para cualquier $x \in X$ y $g \in G$. En efecto, la inyectividad tomaremos un par de puntos de X, entonces se tiene $\lambda(g)(x_1) = \lambda(g)(x_2)$ donde por definición tenemos $\theta(g, x_1) = \theta(g, x_2)$ de aqui al aplicar la acción de g^{-1} a ambos lados, tenemos que $x_1 = x_2$. La sobreyectividad, para todo $y = \theta(g^{-1}, x) \in X$, así, $\lambda(g)(y) = \theta(g, y) = \theta(e, x) = x$. Por último, $\lambda(gh) = \theta(gh) = \theta(g) \circ \theta(h) = \lambda(g)\lambda(h)$.

Expondremos una serie de ejemplos, de acciones de grupos.

Ejemplo 1 *a) Sea $\mathbb{Z} = G$ con la operación adición, el conjunto $\mathbb{R} = X$ y la acción $\theta : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\theta(n, x) = n + x$, la cual, cumple las propiedades, $\theta(0, x) = x + 0 = x$ siendo 0 el elemento neutro de $\mathbb{Z}$ y para todo x de X, por otro lado $\theta(n, \theta(m, x)) = \theta(n, m + x) = n + m + x = \theta(n + m, x)$.*

b) Cada grupo G actúa sobre si mismo por traslación a Izquierda, es decir, $\theta : G \times G \to G$ definida por $\theta(g, h) = gh$ y esta acción cumple con las propiedades $\theta(e, h) = h$ y $\theta(g_1, \theta(g_2, h)) = \theta(g_1 g_2, h)$.

c) Consideremos las raíces $n-$ésimas $w_0 = e^{oi}$, $w_= e^{i/n}$, $w_2 = e^{2i/n}$,..., $w_{n-1} = e^{(n-1)i/n}$ de la ecuación $z^n = 1$ donde $z \in \mathbb{C}$. Sea $G = \mathbb{Z}_n$ el grupo de los enteros módulo n bajo la adición y $X = \mathbb{C}$. La aplicación $\theta : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$\theta(k, z) = w_k z$ con $0 \leqslant k < n$, define una acción de $\mathbb{Z}_n$ sobre $\mathbb{C}$, la cual rota en sentido horario a z sobre una circunferencia de radio $|z|$ al número z un ángulo $2k\pi/n$.

En Efecto, es una acción, por que

- *Se cumple que el neutro $0 \in \mathbb{Z}_n$ actúa como la identidad, $\theta(0, z) = w_0 z = z$;*
- *Si se rota por $\frac{2\pi k_1}{n}$, y después por $\frac{2\pi k_2}{n}$, es una misma rotación hecha directamente por $\frac{2\pi(k_1+k_2)}{n}$, pues $(k_1 + k_2) \equiv l \mod(n)$. es decir,*
$$\theta(k_1, \theta(k_2, z)) = (w_{k_1} w_{k_2}) \cdot z = e^{\frac{2\pi(k_1+k_2)i}{n}} z = w_{k_1+k_2} z = \theta(k_1 + k_2, z)$$

  .

A partir de ello se puede ver una nueva definición y subconjuntos.

1.1.1. Subgrupo de Isotropía

Si analizamos la propiedad I) en la definición de acción, podemos ver que no solo el elemento neutro puede dejar estable al punto x, entonces coleccionemos a los elementos del grupo que cumplen esta propiedad sobre cualquier elemento de x.

Definición 2 *Sea $x \in X$ y dada un acción $\theta : G \times X \to X$; se define el **estabilizador** como el conjunto*

$$G_x = \{g \in G : \theta_g(x) = x\} = Stab_G(x)$$

*también llamado grupo de **isotropía**.*

Proposición 1 *Para cada $x \in X$, entonces G_x es un subgrupo de G*

Demostración. Notemos que el elemento neutro está en G_x, puesto que $e \cdot x = x$ asi $e \in G_x$. Ahora veamos si el inverso de un elemento de G_x también lo está en G_x. Sea $g \in G_x$, entonces $g \cdot x = x$, aplicando el inverso de g a ambos lados, tenemos $g^{-1} \cdot (g \cdot x) = g^{-1} \cdot x$, entonces $(g^{-1} g) \cdot x = g^{-1} \cdot x$, por lo que, $e \cdot x = x = g^{-1} \cdot x$, por tanto $g^{-1} \in G_x$.

Así, para $g, h \in G_x$, entonces $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x = x$ por lo que G_x es un subgrupo de G para todo $x \in X$ pues $gh \in G_x$.

□

Proposición 2 *Los estabilizadores G_x y $G_{g \cdot x}$ son conjugados entre si, $i.e.$*

$$G_{g \cdot x} = gG_xg^{-1} \text{ para todo } g \text{ de } G \text{ y } x \text{ de } X.$$

Demostración. Por definición tenemos

$$\begin{aligned} G_{g \cdot x} &= \{h \in G : h \cdot (g \cdot x) = g \cdot x\} = \{h \in G : hg \cdot x = g \cdot x\} \\ &= \{h \in G : (g^{-1}hg) \cdot x = x\} = \{gkg^{-1} \in G : k \cdot x = x\} = gG_xg^{-1}, \end{aligned}$$

entonces, G_x y $G_{g \cdot x}$ son conjugados cada uno del otro.

□

Nota.- Algunos estabilizadores desempeñan un papel importante en la Teoría de Grupos Finitos.

Ejemplo 2 *a) Sea $\sigma : G \times G \to G$ una acción para G, definida por $\sigma(g, x) = gxg^{-1}$*

El G_x dado por conjugación es:

$$G_x = \{g \in G : gxg^{-1} = \sigma(g, x) = x\} = C_G(x)$$

llamado centralizador de $x \in G$.

b) Sea $\widetilde{\theta} : G \times X \to X$ una acción para X donde ; $X = \{H \leqslant G\}$ la colección de subgrupos H de G y definimos $\widetilde{\theta}(g, H) = gHg^{-1}$. El G_H dada por conjugación es:

$$G_H = \{g \in G : gHg^{-1} = \widetilde{\theta}(g, H) = H\} = N_G(H)$$

llamada el normalizador H de G,

Lo último esta bien definida, puesto que si $t \in gHg^{-1}$, tenemos que $t = ghg^{-1}$; para un $h \in H$ entonces $t^{-1} = (ghg^{-1})^{-1} = gh^{-1}g^{-1}$ pues $h^{-1} \in H$. Así, para $l = ghg^{-1}, t^{-1} \in H$, tenemos $lt^{-1} = gh_1g^{-1}gh^{-1}g^{-1} = gh_1h^{-1}g^{-1}$ pues $h_1h^{-1} \in H$.

Si para cada x poseemos un estabilizador, entonces podemos coleccionarlas todas y apartir de ellas poder encontrar nuevas propiedades.

1.1.2. Acciones Libres y Efectivas

Definición 3 *Sea G un grupo y $\theta : G \times X \to X$ una acción en X.*

I) ***Una Acción es libre****, si el estabilizador de cada punto de X es el elemento neutro del grupo. Es decir, ningún elemento distinto al neutro estabiliza a todos los elementos de X*

II) ***Una Acción es efectiva****, si la intersección de todos los estabilizadores es el elemento neutro e del grupo. Es decir,*

$$\bigcap_{x\in X} G_x = \{e\}$$

Observaciones.-

- Si en (I) fijamos un punto $x_0 \in X$, entonces $G_{x_0} = \{e\}$ es, la ***acción libre para puntos fijos***.
- Una acción libre implica una acción efectiva, donde para todo los $x \in X$ el $G_x = \{e\}$ implica que $\bigcap_{x\in X} G_x = \{e\}$, pero no al contrario. Consideremos $G = \mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ con la operación multiplicación y $X = \mathbb{R}$, la acción $\theta : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\theta(n, x) = nx$, de aqui notamos que $G_x = \{1\}$ para todo $x \in X - \{0\}$, puesto que $G_0 = \{-1, 1\} = \mathbb{Z}_2$ entonces esta acción es efectiva mas no libre.

Ejemplo 3 *a) Consideremos el Ejemplo 1.c) las raíces $n-$ésimas de la ecuación $z^n = 1$ donde $z \in \mathbb{C}$. La aplicación $\theta : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $\theta(k, z) = w_k z$ con $0 \leqslant k < n$, define una acción de $\mathbb{Z}_n$ sobre $\mathbb{C}$, la cual rota en sentido horario a z sobre una circunferencia de radio $|z|$ al número z un ángulo $2k\pi/n$.*

En Efecto, veamos si es una acción efectiva, por definición debemos mostrar

$$\bigcap_{z\in\mathbb{C}} G_z = \{e\}$$

por un lado vemos que el elemento neutro esta en cada uno de los estabilizadores de z y por el otro tenemos $\bigcap_{z\in\mathbb{C}} G_z \subset \{e\}$, sea $k \in \bigcap_{z\in\mathbb{C}} G_z$ si y sólo si $k \in \mathbb{C}_z$ para todo $z \in \mathbb{C}$ si y sólo si $w_k \cdot z = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Sea $z \in \mathbb{C}$, entonces tendremos $\theta(k,z) = z$ y procedemos $w_k \cdot z = e^{2k\pi i/n}z = z$ implica $e^{2k\pi i/n} = 1$ para $z = 0$ y que por la fórmula de Euler se tiene $\cos(\frac{2k\pi}{n}) = 1$ de ahi $k = ln$ y como estamos en $\mathbb{Z}_n$ deducimos que $k = 0$. Notemos que sucede para $z = 0$, entonces $\theta(k,0) = w_k 0 = e^{2k\pi i/n}0 = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}_n$ esto quiere decir que el estabilizador de $z = 0$ es el propio $\mathbb{Z}_n$. Entonces

$$\bigcap_{z\in\mathbb{C}} G_z = \left(\bigcap_{z\in\mathbb{C}/\{0\}} G_z\right) \cap G_0 = \{0\} \cap \mathbb{Z}_n = \{0\}.$$

lo que implica que θ es una acción efectiva. Veamos si es una acción libre, para ello acudiremos a la observación de acción libre para puntos fijos; por lo anterior se tiene que $G_0 = \mathbb{Z}_n = \{1, 2, ..., (n-1)\}$ lo que implica que θ no es acción libre. Y por ultimo podemos notar que para $z_0 = 0$ de $\mathbb{C}$ el único subgrupo de isotropía es el propio $\mathbb{Z}_n$ entonces 0 de $\mathbb{C}$ es un punto fijo.

b) Consideremos el ejemplo anterior, $X = \mathbb{C}/\{0\}$ y $G = \mathbb{Z}_n$, entonces para cada $z \in \mathbb{C}/\{0\}$, se tiene que el único elemento de $\mathbb{Z}_n$ que deja fijo a z es la identidad de $\mathbb{Z}_n$, luego podemos decir que esta acción es libre, por consiguiente efectiva.

1.1.3. Órbita y Transitividad

Antes de definir, consideremos algunas relaciones en X. Supongamos que un grupo G actúa sobre el conjunto X. En X se define una relación $\sim$ por:

$$x \sim y \text{ si y sólo, si existe } g \in G \text{ tal que } \theta(g,x) = g \cdot x = y$$

donde, podemos ver que $\sim$ es una relación de equivalencia en X, para todo x, y, z de X cumple las propiedades.

I) (reflexividad) $x \sim x$ si y sólo si, $g \cdot x = g$, entonces $g = e$

II) (simetria) $x \sim y$ si y sólo si, existe $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$ si y sólo si existe $g^{-1} \in G$ tal que $x = g^{-1}y$ si sólo si $y \sim x$

III) (transitividad) $x \sim y$ y $y \sim z$ entonces existen $g, h \in G$ tal que $g \cdot x = y$ y $h \cdot y = z$, asi, $h \cdot (g \cdot x) = (hg) \cdot x = z$ por tanto $x \sim z$.

Con esta idea podemos dar paso a las siguientes definiciones.

Definición 4 *Sea G un grupo , $\theta : G \times X \to X$ una acción en X y x un elemento de X, entonces la G-**órbita determinada por** x, es la clase de equivalencia del elemento x y lo denotaremos por:*

$$G \cdot x = \{y \in X : g \cdot x = y, \text{ para todo } g \in G\}$$

Observaciones.-

a) Para S subconjunto en X y un $g \in G$, la G-traslación de S es:

$$g \cdot S = \{x \in X : x = g \cdot s, \text{ para todo } s \in S\}$$

b) Al conjunto de las G-órbitas denotamos por

$$X/G = \{G \cdot x : x \in X\} = X/\sim.$$

Definición 5 *Sea G un grupo y $\theta : G \times X \to X$ una acción en X. Una **Acción Transitiva** es aquella que induce una sola órbita en X. Es decir, $X = X/G$.*

Observaciones.-

a) En particular cualquier acción es transitiva en cada una de sus orbitas, en efecto: Supongamos que $G \cdot x$ y $G \cdot y$ son distintos, entonces

$$G \cdot x = \{z \in X : g \cdot x = z, \text{ para todo } g \in G\}$$
$$G \cdot y = \{z' \in X : g \cdot y = z' \text{ para todo } g \in G\}$$

como es una acción transitiva, existe $h \in G$ tal que $h \cdot x = y$. Así, para $z \in G \cdot x$, entonces $z = g \cdot x$ por tanto $z = g \cdot (h^{-1} \cdot g) = (gh^{-1}) \cdot y$, asi $z \in G \cdot y$. De manera análoga si $z' \in G \cdot y = G \cdot x$ la cual es una contradicción, por tanto es transitiva en cada una de sus orbitas.

b) Dentro de cada órbita se define la ***aplicación de movimiento***

$$\theta^x = \{y \in X : \ y = g \cdot x \text{ para todo } g \in G\}$$

Está aplicación denota que $\theta \mid_{G \times \{x\}} = \theta^x : G \to G \cdot x$, dada por $\theta^x(g) = g \cdot x$.

Proposición 3 *Sea G un grupo que actúa transitivamente sobre un conjunto X. Entonces para todo $x, y \in X$, se tiene que:*

$$G_x \textit{ es isomorfo a } G_y$$

Demostración. Sean dos elementos x, y distintos de X, por definición existe $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$ y definimos $\psi : G_x \to G_y$ dada por $\psi(h) = ghg^{-1}$, veamos si es isomorfismo. Sean $a, b \in G_x$

- $(inyectiva)$ Si $\psi(a) = \psi(b)$, entonces $gag^{-1} = gbg^{-1}$, así $a = b$.
- $(sobreyectiva)$ Sea $b \in G_y$, existe un $a \in G_x$ tal que $\psi(a) = b$, así $gag^{-1} = b$, entonces $a = g^{-1}bg$ puesto que $a \cdot x = (g^{-1}bg) \cdot x = (g^{-1}b) \cdot y = g^{-1} \cdot y = x$, por tanto, $\psi(g^{-1}bg) = b$.
- finalmente preserva la operación $\psi(ab) = gabg^{-1} = gag^{-1}gbg^{-1} = \psi(a) \cdot \psi(b)$.

Observación.- Al construir X/G particiona X por G en el sentido que se identifican dos puntos de X si y solo si, difieren por los homomorfismos $x \mapsto g \cdot x$. La aplicación $\pi : X \to X/G$ que envía $x \in X$ a su G-órbita es llamada la **aplicación cociente**.

Teorema 1 *Sea X un $G-$conjunto.* [1] *Si $x \in X$, entonces el número de óbitas es igual al índice de G_x en G, es decir, $|G \cdot x| = (G : G_x)$.*

Demostración. Definamos una función

$$\begin{aligned} \omega : G \cdot x &\to G/G_x \\ y &\mapsto gG_x \end{aligned}$$

[1] Un grupo G que actua sobre un conjunto X, con $\theta : G \times X \to X$

donde $\theta(g,x) = g \cdot x = y$ y $\omega(\theta(g,x)) = \omega(g \cdot x) = gG_x$, veamos que ω está bien definida. Supongamos que también $\theta(h,x) = h \cdot x = y$ para $h \in G$. Luego $g \cdot x = h \cdot x$, entonces $g^{-1} \cdot (g \cdot x) = g^{-1} \cdot (h \cdot x)$ y $x = (g^{-1}h) \cdot x$. Así, $g^{-1}h \in G_x$, $h \in gG_x = hG_x$. Veamos que ω es inyectiva. Sea $y, z \in G \cdot x$ y sí $\omega(y) = \omega(z)$, entonces existen $h, k \in G$ tal que $\theta(h,x) = h \cdot x = y$ y $\theta(k,x) = k \cdot x = z$, con $k \in hG_x$. Entonces $k = hg$ para algun $g \in G_x$, luego $z = k \cdot x = (hg) \cdot x = h \cdot (g \cdot x) = h \cdot x = y$. Por lo tanto, ω es inyectiva.

Veamos que ω es sobreyectiva, sea hG_x una clase lateral a izquierda, entonces si $h \cdot x = y$ se tiene que $hG : x = \omega(y)$. Luego ω sobreyectiva $hG_x = \omega(y)$.Por tanto $|G \cdot x| = (G : G_x)$

□

1.2. Aplicaciones G-equivariantes

Sean X, Y dos G-conjuntos dotados de acciones por un mismo grupo.

Definición 6 *Una aplicación $f : X \to Y$ es G-**invariante** por izquierda, sí $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ para todo $x \in X$ y $g \in G$.*

Observaciones.-

- Análogamente se tiene aplicaciones G-equivariante por derecha si cumple, $f(x \cdot g) = f(x) \cdot g$, para todo $g \in G$ y todo x de X.
- Equivalentemente. si $\theta : G \times X \to X$ y $\phi : G \times Y \to Y$ dos acciones distintas, f es G-equivariante si $f(\theta(g,x)) = \phi(g, f(x))$, es decir que f entrelaza dos acciones.
- Adicionalmente se tiene que cualquier aplicación G-equivariante $f : X \to Y$ debe llevar la $G-$órbita de $x \in X$ en la G-orbita de $f(x) \in Y$

$$\begin{aligned} f(G \cdot x) &= \{f(g \cdot x) \in Y : \forall g \in G\} \\ &= \{g \cdot f(x) : \forall g \in G\} \\ &= G \cdot f(x). \end{aligned}$$

- Existe una aplicación $\bar{f} : X/G \to Y/G$ bien definida que envía la órbita de x a la órbita de $f(x)$, con $\pi_X : X \to X/G$ y $\pi_Y : Y \to Y/G$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_X} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_Y} \\ X/G & \xrightarrow{\bar{f}} & Y/G \end{array}$$

  en el sentido de $\bar{f} \circ \pi_X = \pi_Y \circ f$ se dice que $\bar{f}$ es la aplicación inducida por f.

Proposición 4 *Supongamos que un grupo G actúa en dos conjuntos X, Y y sea $f : X \to Y$ una aplicación G-equivariante, que es biyectiva, entonces $f^{-1} : Y \to X$ es G-equivariante.*

Demostración. Sea $g \in G$, $y \in Y$ y como f es biyectiva, existe un $f^{-1} : Y \to X$, entonces se tiene que: $f(f^{-1}(g \cdot y)) = g \cdot y$ y también que $f(g \cdot f^{-1}(y)) = g \cdot f(f^{-1}(y)) = g \cdot y$ puesto f es G-equivariante. Además, por la inyectividad de f se cumple que

$$f^{-1}(g \cdot y) = g \cdot f^{-1}(y)$$

. □

Proposición 5 *Supongamos que un grupo G actúa en dos conjuntos X, Y y que $f : X \to Y$ es una aplicación $G-$equivariante, y sea $x \in X$. Entonces $G_x \subseteq G_{f(x)}$.*

Demostración. Supongamos que $h \in G_x$. Entonces $h \cdot f(x) = f(h \cdot x) = f(x)$; Lo que muestra que $h \in G_{f(x)}$.

□

Proposición 6 *Supongamos que un grupo G actúa en dos conjuntos X, Y y que $f : X \to Y$ es una aplicación $G-$equivariante, que es un isomorfismo. Entonces $G_x = G_{f(x)}$*

Demostración. Solo falta probar que $G_{f(x)} \subseteq G_x$. Pero por Proposición 4, f^{-1} es también $G-$equivariante , así $G_{f(x)} \subseteq G_{f^{-1}(f(x))}$. Así $G_x = G_{f(x)}$.

□

CAPÍTULO 2

ACCIÓN DE UN GRUPO TOPOLÓGICO SOBRE UN ESPACIO TOPOLÓGICO.

Más que acciones de un grupo G sobre cualquier conjunto X, nos interesa que estas acciones obren bien con la topología del conjunto X. Inicialmente, tanto el grupo G como el conjunto X son dotados de una estructura topológica, luego detalladamente se ilustra como por medio de la aplicación cociente, se usa una acción de grupo para obtener nuevos espacios topológicos. Consideraremos en ocasiones simples dotar al grupo con la topología discreta y con este último buscar construir fácilmente espacios con mejores propiedades.

2.1. Grupos Topológicos

Definición 7 *Sea G un conjunto no vacío con una operación binaria sobre G. Sea τ una familia de subconjuntos de G, entonces G es un* ***grupo topológico*** *si:*

I) *G es un grupo Algebraico.*

II) *(G,τ) es un espacio topológico.*

III) *Las funciones μ y ι definidas por:*

$$\begin{array}{rcl} \mu : G\times G & \to & G \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} \iota : G & \to & G \\ x & \mapsto & x^{-1} \end{array}$$

resultan continuas, considerando la topología producto en $G\times G$.

Observación.- La continuidad de las operaciones de grupo también se puede traducir en las siguientes condiciones. Dados $x, y\in G$ se cumple lo siguiente:

1. Para cada $U\in \mathbb{U}^{\circ}(xy)$ existen $V\in \mathbb{U}^{\circ}(x)$ y $W\in \mathbb{U}^{\circ}(y)$ tal que $VW\subseteq U$, escribiremos vW y similarmente el otro caso.

2. Para cada $U \in \mathbb{U}^{\circ}(x^{-1})$ existe $V \in \mathbb{U}^{\circ}(x)$ tal que $V^{-1} \subseteq U$.

Nota.

- La notación de $VW = \{vw : \ v \in V, w \in W\}$, en caso de que $V = \{v\}$ tenemos que $vW = \{vw : w \in W\}$.
- $\mathbb{U}^{\circ}(x)$ describe los conjuntos abiertos que contienen a x.

Mostraremos la equivalencia de las definiciones viendo que ambas condiciones son equivalentes. Supongamos que se cumple 1. Sea $(x, y) \in G \times G$ y sea $U \in \mathbb{U}^{\circ}(xy)$ entonces existen $V \in \mathbb{U}^{\circ}(x)$ y $W \in \mathbb{U}^{\circ}(y)$ tal que $VW \subseteq U$; Notemos que $V \times W \in \tau_{G\times G}$ y $\mu(V \times W) = VW \subseteq U$ donde se tiene que μ es continua.

Recíprocamente, si μ es continua, sea $x, y \in G$ y tememos $U \in \mathbb{U}^{\circ}(xy)$ como μ es continua, existe $A \in G \times G$ abierto tal que $(x, y) \in A$ y $\mu(A) \subseteq U$ como esta con la topología producto en $G \times G$ existen $V \in \mathbb{U}^{\circ}(x)$ y $W \in \mathbb{U}^{\circ}(y)$ tales que $V \times W \subseteq A$. Así $\mu(V \times W) = VW$ entonces $VW \subseteq \mu(A)$ y vale 1.

Ahora, supongamos que vale 2. Sea $x^{-1} \in G$ y sea $U \in \mathbb{U}^{\circ}(x^{-1})$, entonces existe $V \in \mathbb{U}^{\circ}(x)$ tal que $V^{-1} \subseteq U$. Ahora tememos $\iota(V) = V^{-1}$ y $V^{-1} \subseteq U$, luego ι es continua. Recíprocamente; si ι es continua, sea $x^{-1} \in G$ y tenemos $U \in \mathbb{U}^{\circ}(x^{-1})$ como ι es continua, existe un abierto $A \subset G$ tal que $x \in A$ y $\iota(A) \subseteq U$.

$\square$

A continuación, presentaremos una definición alternativa de grupo topológico.

Proposición 7 *Para un grupo G con una topologia τ, la continuidad de μ y ι se deduce de la continuidad de la función:*

$$\begin{aligned} \varphi : G \times G &\to G \\ (g, h) &\mapsto gh^{-1} \end{aligned}$$

Es decir, G es grupo topológico si y solo si φ es continua.

Demostración. Supongamos que G es topológico. Considerando las funciones μ y ι.

Tenemos que la función identidad Id_G y ι son continuas, esto es la función diagonal definida por $\triangle_{\{Id,\iota\}} = Id \times \iota$

$$\begin{aligned} \triangle_{\{Id,\iota\}} : G \times G &\rightarrow G \times G \\ (x, y) &\mapsto \triangle_{\{Id,\iota\}}(x, y) = (x, y^{-1}) \end{aligned}$$

que es continua. Ahora, veamos que para cualesquiera $(x, y) \in G \times G$ se cumple

$$\mu \circ \triangle_{\{Id,\iota\}}(x, y) = \mu(x, y^{-1}) = xy^{-1}$$

por ser $\varphi = \mu \circ \triangle_{\{Id,\iota\}}$ y al ser composición de funciones continuas φ es continua. Recíprocamente. Supongamos que φ es continua. Veamos primero si ι es continua, considerando la siguiente función

$$\begin{aligned} f : G &\rightarrow G \times G \\ x &\mapsto (e, x) \end{aligned}$$

que es continua por ser una inclusión. Entonces, para cada $x \in G$ tendremos

$$(\varphi \circ f)_{(x)} = \varphi(e, x) = ex^{-1} = x^{-1} = \iota(x)$$

que por composición de funciones ι es continua y por lo definido $\triangle_{\{Id,\iota\}}$ también es continua.

Ahora para $(x, y) \in G \times G$ se cumple que

$$\varphi \circ \triangle_{\{Id,\iota\}} = \varphi(x, y^{-1}) = x(y^{-1})^{-1} = xy = \mu(x, y)$$

por lo tanto $\mu = \varphi \circ \triangle_{\{Id,\iota\}}$, concluimos que μ es continua.

Así G es un grupo topológico.

$\square$

Nota: Denominaremos que G es un grupo discreto, si G es un grupo topológico que tiene topología discreta, es decir, Todo grupo discreto puede ser convertido en un grupo topológico si es dotado con la topología discreta.

Proposición 8 *Cualquier subgrupo de un grupo topológico es un grupo topológico con la topología relativa.*

Demostración. Sea H subgrupo de un grupo topológico G, la restricción de la multiplicación y la inversión a H , es continua, y H es un subgrupo con la topología relativa, luego es un subgrupo topológico de G.

□

Proposición 9 *Cualquier producto de grupos topológicos es un grupo topológico con la estructura de grupo de productos directo y la topología producto.*

Demostración, Sea $\{G_i : i \in I\}$ una familia de grupos topológicos, Sea $G = \prod_{i\in I} G_i$ con las operaciones multiplicación $\mu = \prod_{i\in I} \mu_i$ e inversión $\iota = \prod_{i\in I} \iota_i$, entonces

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\pi_i"] & G \arrow[d, "\pi_i"] \\ G_i \times G_i \arrow[r, "\mu_i"] & G_i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\pi_i"] & G \arrow[d, "\pi_i"] \\ G_i \arrow[r, "\iota_i"] & G_i \end{tikzcd}$$

donde μ_i y ι_i son las multiplicaciones e inversiones de G_i para cada i respectivamente. Sea $\pi_i : \prod_{i\in I} G_i \to G_i$ las proyecciones continuas sobre el i-ésimo factor. Las operaciones de multiplicación e inversión son continúas puesto que si satisface que $\pi_i \circ \mu = \mu_i(\pi_i \times \pi_i)$ y $\pi_i \circ \iota = \iota_i(\pi_i)$ para cada $i \in I$.

□

Definición 8 *Sea X un espacio topológico y si G es un grupo topológico, Se dice que una **Acción de G en un espacio X es continua** si la acción $\theta : G \times X \to X$ es continua y se cumplen las propiedades:*

I) $\theta(e, x) = e \cdot x = x$; para todo x de X; siendo e el elemento neutro de G.

II) $\theta(g, (\theta(h, x)) = g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x = \theta(gh, x)$; para todo x de X.

Observaciones.

- Esto significa, en particular, si $\theta : G \times X \to X$ es una acción continua. Entonces para cada $g \in G$ se tiene la aplicación $\theta_g : X \to X$ definida por $\theta_g(x) = \theta(g, x)$ que es una aplicación continua de X en si mismo.

  En efecto Observemos que si $\{g\} \times X \subset G \times X$, se tiene que

  $$\begin{array}{rcl} \theta : \{g\} \times X & \to & X \\ (g, x) & \mapsto & \theta(g, x) = \theta_g(x) \text{ es continua.} \end{array}$$

  Además, cada aplicación es un homeomorfismo, recordemos que la acción de grupo sobre un X garantiza que $\theta_{g^{-1}}$ es inversa de θ_g. Así $\theta_g \circ \theta_{g^{-1}} = Id$ es continua.

- Cuando G es un grupo discreto, la acción $\theta : G \times X \to X$ es continua cuando se usa la topología producto en $G \times X$. En otras palabras, cuando G está dotado de la topología discreta, la acción es continua si y solo si para cada $g \in G$, la aplicación $\theta_g(x) = g \cdot x$, es continua.

Ejemplo 4 *Sea G un grupo topológico, para cada $g \in G$.*

Se define la traslación a izquierda como la acción $L_g : G \to G$ dada por $L_g(h) = gh$ para todo $h \in G$. De manera análoga la traslación a derecha como, $R_g : G \to G$ dada por $R_g(h) = hg$, para todo $h \in G$.

Notemos que $L_{g^{-1}}$ y $R_{g^{-1}}$ es el inverso de L_g y R_g respectivamente. Como la multiplicación es continua, L_g y R_g son continuas ya que son restricciones de aplicación a $\{g\} \times G$ son continuas, es más, poseen inversas continuas. Por lo tanto, estas aplicaciones son homeomorfismos.

Como una consecuencia, si U es un subconjunto abierto de G, Entonces se tiene que $gU = L_g(U)$ (respectivamente $Ug = R_g(U)$) es abierto, para todo $g \in G$. Esto nos ayudará ver que, la topología de un grupo es determinada por conocer los subconjuntos abiertos que contienen al neutro e del grupo. Es decir, sea $\mathbb{U}^{\circ}(e) =$

$\{U \subset G : \text{es un abierto de } e\}$, consideremos $L_g = gU$ es un conjunto abierto, porque L_g es función abierta y $g \in gU$ para todo g de G, entonces existe un V tal que $V \subset gU$ luego $g^{-1}V \subset g^{-1}gU = U$ entonces $g^{-1}V \subset U$, así $U \in \mathbb{U} \cap \tau$.

2.2. G-espacios

Definición 9 *Sea X un espacio topológico y G un grupo topológico. Diremos que X* **un $G-$espacio***. Si G actúa sobre X y si las aplicaciones $\theta_g : X \to X$ definidas por $\theta_g(x) = \theta(g, x)$ son continuas para todo $g \in G$.*

Además, si la acción o el espacio posee ciertas propiedades, al $G-$espacio se le agregara dicha propiedad. Por ejemplo,

- Por X un $G-$espacio libre se entenderá que la acción es libre.
- Un X un $G-$espacio Hausdorff, se entendera que el espacio X es Hausdorff.

Esta notación nos simplifica bastante la escritura, ya que en vez de escribir: Sea G un grupo topológico que actúa continuamente sobre un espacio topológico X; Se escribe simplemente : ***Sea X un $G-$espacio.***

Nota: En el Capítulo anterior se puede simplificar denominando por X *un $G-$conjunto* y posteriormente se puede hablar de X *una $G-$variedad* [2].

2.3. Espacio Cociente

En el Capítulo anterior, observamos que un grupo G inducia una partición en X en conjuntos disjuntos por las $G-$órbitas y de esa forma es como identificaremos al espacio cociente.

Sea $\pi : X \to X/G$ la aplicación cociente, definida $\pi(x) = G \cdot x$, la topología para X/G es la topología más grande para la cual π es continua, es decir,

$$V \subset X/G \text{ es abierto si y sólo, si } \pi^{-1}(V) \text{ es un abierto en } X \tag{2.1}$$

[2] X una G-variedad, es una acción de un grupo de Lie sobre un espacio diferenciable.

A la colección de las órbitas con topología cociente la llamaremos ***espacio orbital***, y la proyección $\pi : X \to X/G$ será llamada como la ***aplicación orbital***.

Teorema 2 *Sea X un $G-$espacio. Existe una única topología en X/G tal que la aplicación cociente $\pi : X \to X/G$ es una aplicación continua y sobreyectiva. Además, π es una aplicación abierta.*

Demostración. Primero mostraremos la existencia mediante una construcción. Consideremos el subconjunto $V \subset X/G$ entonces diremos que es un abierto si cumple la condición de la ecuación (2.1), entonces la colección de todos los abiertos

$$\begin{aligned} \tau_{X/G} &= \{V \subset X/G : \pi^{-1}(V) \text{ es un abierto en } X\} \\ &= \{V : \pi^{-1}(V) = U \in \tau_X\} \end{aligned}$$

mostraremos que $\tau_{X/G}$ satisface las condiciones para una topología, los conjuntos $\varnothing$ y X/G son abiertos y están en $\tau_{X/G}$ pues $\pi^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ y $\pi^{-1}(X/G) = X$. Las otras condiciones se deducen de

$$\pi^{-1}(V_1 \cap V_2) = \pi^{-1}(V_1) \cap \pi^{-1}(V_2),$$

$$\pi^{-1}(\bigcup_{j\in J} V_j) = \bigcup_{j\in J} \pi^{-1}(V_j).$$

Para la continuidad, los conjuntos abiertos en X/G tienen preimagen abierta en X. Así se obtiene una tolopología que hace de $\pi : X \to X/G$ una aplicación continua, sobreyectiva por la caracterización dada en ecuación (2.1).

Segundo, mostrando que la aplicación cociente $\pi : X \to X/G$ es una aplicación abierta. Sea U un conjunto abierto en X y consideremos

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\pi(U)) &= \{x \in X :\ \pi(x) \in \pi(U)\} \\ &= \{x \in X :\ G\cdot x = G\cdot y \text{ para algún } y \in U\} \\ &= \{x \in X :\ x = g\cdot y \text{ para algún } y \in U, \text{y algún } g \in G\} \\ &= \{x \in X :\ x \in g\cdot U \text{ para algún } g \in G\} \\ &= \bigcup_{g\in G} g\cdot U \end{aligned}$$

y como la restricción de la acción θ_g es homeomorfismo de X en X para cada $g \in G$; por la continuidad de la Acción de G en X se sigue que todos los subconjuntos $g \cdot U$ son abiertos, de ahí que su unión es abierta.

Tercero y por último probemos la unicidad. Supongamos que la π proyección orbital induce dos topologias τ y $\tau^\star$ en X/G. $\tau_{X/G} = \{V \subset X/G : \pi^{-1}(V) \in \tau_X\}$ y $\tau^\star_{X/G} = \{W \subset X/G : \pi^{-1}(W) \in \tau_X\}$ por demostrar que $\tau^\star_{X/G} \subset \tau_{X/G}$ y $\tau_{X/G} \subset \tau^\star_{X/G}$. Tenemos que π es continua y sobreyectiva, entonces para cualquier abierto $V \subset X/G$ la continuidad de π implica que su preimagen $\pi^{-1}(V) \subset X$ debe ser abierta, así $V \subset W$.
Veamos el recíproco. Si $V \subset X/G$ es un conjunto cuya preimagen $\pi^{-1}(V)$ es abierto en X, entonces V debe ser abierto en X/G, en efecto. Por un lado, la sobreyectividad de π, V es la imagen de su preimagen $\pi(\pi^{-1}(V)) \subset V$. Y por el otro, para cualquier $U \subset X$ abierto su imagen $\pi(U) \subset X/G$ es un abierto, es decir, $\pi^{-1}(\pi(U))$ la preimagen de su imagen sea abierta en X, así $W \subset V$.
Esto muestra la unicidad para la topología en X/G que es inducida por la topología de X.

□

Notemos que una caracterización de los conjuntos abiertos en X/G desde un punto de vista de la topología en X, estos abiertos son los subconjuntos cuya preimagen bajo π en X es abierta.
Gran parte del trabajo se centra en los espacios Hausdorff, así que conviene tener presente que X/G no necesariamente es Hausdorff aunque X y G lo sean. Con el siguiente criterio permitiremos determinar cuándo un espacio es Hausdorff.

Teorema 3 (Criterio de la Diagonal) *Un espacio topológico X es Hausdorff si y solo si la diagonal*

$$\triangle_X = \{(x,x) : x \in X\} \text{ es cerrada en } X \times X$$

donde $\triangle_X = Id_x \times Id_x$

Demostración. Si $\triangle_X$ es cerrada y x, y dos puntos distintos en X, entonces $(x, y) \notin \triangle_X$, luego exiten $U, V \subset X$ tal que $(x, y) \in U \times V$ esto implica que

$$(U \times V) \cap (U \times U) \subset (U \times V) \cap \triangle_X = \varnothing$$

por tanto $U \cap V = \varnothing$. El reciproco procedemos de manera similar.

$\square$

Proposición 10 *Sea G un grupo topológico y $H \leqslant G$ subgrupo topológico de G. Si H actúa sobre G por traslaciones a derecha, entonces la proyección canónica $\pi : G \to G/H$ es continua y abierta. Además G/H es Hausdorff si y solo si H es cerrado.*

Demostración. Pudimos ver que π es continua y abierta. Supongamos que G/H es un espacio Hausdorff, entonces el conjunto unitario $\{gH\}$ es un cerrado en G/H para $g \in G$, ahora $\pi^{-1}(\{gH\}) = gH$ es cerrado en G por ser continua. como la aplicación $L_{g^{-1}}(gH) = H$ es homeomorfo, así H es cerrada en G. Reciprocamente, supongamos que H es cerrado, ahora definamos la función $Id : G/H \to G/H$ esta es continua y de ella obtener la función $Graf(Id) : G/H \to G/H \times G/H$ denominada la grafica de la función identidad, esta tambien es continua. Así, realizar la composición

$$\pi^{-1} \circ Graf^{-1}(\triangle_{G/H}) = \pi^{-1}(\{gH\}) = gH$$

por tanto, $\triangle_{G/H}$ es cerrada y por el criterio de la diagonal el espacio orbital G/H es de Hausdorff.

$\square$

Teorema 4 *Sean X , Y dos $G-$espacios y $f : X \to Y$ una aplicación equivariante. Si f es un homeomorfismo entre X e Y, los espacios orbitales X/G y Y/G son homeomorfos.*

Demostración. Definamos una función $F : X/G \to Y/G$ dada por $F(G \cdot x) = G \cdot f(x)$, donde esta función F se encuentra bien definida. Dados dos órbitas, $G \cdot x = G \cdot y$,

por definición se tiene que $x = g \cdot y$ para cada $g \in G$ así, $f(x) = f(g \cdot y) = g \cdot f(x)$ para cada $g \in G$ si y solo si $G \cdot f(x) = G \cdot f(y)$ y de aqui $F(G \cdot x) = F(G \cdot y)$
de donde $F(G \cdot x) = (F \circ \pi_X)_{(x)} = (\pi_Y \circ f)_{(x)} = G \cdot f(x)$ podemos ver que F es inyectiva, para la sobreyectividad tenemos que ver la continuidad. Como f es continua, $\pi_Y \circ f$ es continua, así $F \circ \pi_X$ es continua y como π_X es continua, F lo es. De ahí se obtiene que F es un homeomorfismo.

$\square$

Si X es un G-espacio, recordemos que para cada x de X la aplicación movimiento $\theta^x(g) = g \cdot x$ es continua y equivariante, puesto que es una restricción de $\theta : G \times \{x\} \to X$ y definida $\theta^x : G \to G \cdot x$.

Proposición 11 *La aplicación movimiento θ^x determina una aplicación continua, biyectiva y equivariante $\overline{\theta^x}$ del espacio G/G_x sobre $G \cdot x$ dada por $\overline{\theta^x}(gG_x) = g \cdot x$*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\theta^x"'] & G/G_x \arrow[d, "\overline{\theta^x}"] \\ & G \cdot x. \end{tikzcd}$$

Demostración. Empecemos por la inyectividad. Sean $\overline{\theta^x}(gG_x) = \overline{\theta^x}(hG_x)$ lo cual implica $g \cdot x = h \cdot x$, entonces, $h^{-1} \cdot (g \cdot x) = x$ por lo cual $h^{-1}g \cdot x = x$ si y solo si $h^{-1}g \in G_x$ entonces $h^{-1}gG_x = G_x$ por último tenemos $gG_x = hG_x$. La sobreyectividad y la continuidad obtendremos de lo siguiente, sea $g \cdot x \in G \cdot x$, entonces existe $gG_x \in G/G_x$ tal que $\overline{\theta^x}(gG_x) = g \cdot x$. Y por otro lado, que $\theta^x = \overline{\theta^x} \circ \pi_{G_x}$, de aquí tenemos, como θ^x es continua entonces $\overline{\theta^x} \circ \pi_{G_x}$ es continua y π_{G_x} es continua, por lo tanto $\overline{\theta^x}$ es continua.
Por último $\overline{\theta^x}$ es equivariante

$$\overline{\theta^x}(g(hG_x)) = \overline{\theta^x}(ghG_x) = (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot \overline{\theta^x}(hG_x)$$

$\square$

Recordemos, que nos interesa las órbitas de un conjunto X cualquiera, mejor si estas órbitas son transitivas o de Hausdorff.

Proposición 12 *Si G es un grupo compacto o conexo, las órbitas de un punto X son compactas o conexas respectivamente.*

Demostración. Tenemos que la aplicación movimiento θ^x es continua, y como $\theta^x(G) = G \cdot x$ es continua por tanto es compacta ó conexa.

$\square$

Proposición 13 *Si X es T_1[3], para todo $x \in X$, el estabilizador G_x es un grupo cerrado.*

Demostración. Como X es T_1, entonces $\{x\} \subseteq X$ es cerrado. Así $\theta^x : G_x \to \{x\}$ dado por $\theta^x(g) = g \cdot x = x$, como $\{x\}$ es cerrado, por continuidad de G_x es cerrado.

$\square$

Proposición 14 *Si G es compacto y X es Hausdorff la aplicación biyectiva equivariante. $\overline{\theta^x} : G/G_x \to G \cdot x$ es homeomorfismo.*

Demostración. Como $\overline{\theta^x}$ es biyectiva y equivariante, entonces existe $(\overline{\theta^x})^{-1}$ que es continua si y solo si $V \subseteq G$ cerrado. Así como G es compacto, entonces $\pi_{G_x}(G) = G/G_x$ es compacta por tanto $\overline{\theta^x} : G/G_x \to G \cdot x$ es continua.

$\square$

2.4. Acción Propiamente Discontinua y Aplicación Recubridora

El estudio de esta herramienta se sale del objetivo propuesto. Pero algunos $G-$espacios dan lugar a espacios recubridores y servirá únicamente para ver algunas aplicaciones de acciones cuando estas son libres.

Definición 10 *Sea X un $G-$espacio, diremos que X es* ***propiamente discontinua*** *si para cada $x \in X$ existe un entorno abierto V de x tal que $g \cdot V \cap g' \cdot V = \varnothing$ para todo $g, g' \in G$ con g distinto de g'.*

[3] T^1 Representa las propiedades de separación.

Observación. Si la acción es propiamente discontinua, entonces $g \cdot x \neq x$ para todo $g \in G$ con $g \neq e$ y todo $x \in X$, ya que, si $x \in V$, $g \cdot x \in g \cdot V$.

Antes de dar algunos ejemplos, el siguiente teorema justifica la acción propiamente discontinua.

Teorema 5 *Sea X un $G-$espacio. Si la acción G sobre X es propiamente discontinua, entonces la aplicación orbital $\pi : X \to X/G$ es un recubridor.*

Demostración. Primero π es una aplicación continua y sobreyectiva. En virtud al *Teorema 3*, aun más π es una aplicación abierta. Sea U un entorno abierto de $x \in X$ que satisfaga la condición de discontinuidad propia. Puesto que π es un aplicación abierta, $\pi(U)$ es un entorno abierto de $G \cdot x = \pi(x)$ y $\pi^{-1}(\pi(U)) = \cup_{g \in G} g \cdot U$ por Teorema 3, donde $\{g \cdot U : g \in G\}$ es una colección de subconjuntos abiertos disjuntos de X. Además, $\pi \mid_{g \cdot U} : g \cdot U \to \pi(U)$ es una aplicación continua abierta biyectiva y por tanto es un homeomorfismo.

$\square$

Ejemplo 5 *a) La Acción de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{R}$ es propiamente discontinua. Para una acción $\theta : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $\theta(n, x) = x + n$. Si para un $x \in \mathbb{R}$ y $\epsilon < 1/2$ entonces $V = (x - \epsilon, x + \epsilon)$ es un entorno abierto de x, así, para dos elementos distintos m, n de $\mathbb{Z}$, $(V + n) \cap (V + m) = \emptyset$. Por tanto, la acción de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{R}$ convierte a $\mathbb{R}$ en un $\mathbb{Z}-$espacio y resulta que $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es una aplicación recubridora.*

Tambien la aplicación $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ dado por $t \mapsto \exp 2\pi i t$ es un aplicación recubridora; por tanto tambien se puede probar que, $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$ son homeomorfos.

b) La aplicación potencia $n-$ésima $P_n : S^1 \to S^1$ definida por $P_n(z) = z^n$, es tambien una aplicación recubridora.

Sea $Z_0 \in S^1$, el conjunto tiene la preimagen igual a $\{z \in S^1 \ : \ z^n \neq -z_0\}$ que tiene n componentes, cada uno de los cuales es un arco abierto aplicado homeomorficamente por P_n sobre U.

c) *La aplicación Natural $S^n \to \mathbb{R}P^n$ es una aplicación recubridora. Consideremos S^n un $\mathbb{Z}_2-$espacio, donde $\mathbb{Z}_2$ actúa como $\theta(\pm 1, x) = \pm x$. Para $x \in S^n$, el conjunto*

$$\{y \in S^n \ : \ \parallel y - x \parallel < \frac{1}{2}\}$$

es un entorno abierto de x que cumple la condición de discontinuidad propia. Alternativamente, puesto que $x \neq -x$ y S^n es de Hausdorff existen entornos abiertos disjuntos V, W de x y $-x$ respectivamente. El entorno $V \cap (-W)$ de x cumple la condición de discontinuidad propia.

Si $\pi : V_i \to U$ es una aplicación recubridora, entonces π es un homeomorfismo local entre V y U. Es decir, cada $x \in V$ tiene un entorno que se aplica por π homeomorficamente sobre un conjunto abierto de U.
Sin embargo, la condición de que π sea homeomorfismo local no es suficiente para asegurar que es π sea una aplicación recubridora.

Ejemplo 6 *La aplicación $\Pi : \mathbb{R}^+ \to S^1$ definida por $\Pi(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ es sobreyectiva y es homeomorfo local. Sin embargo, no es aplicación recubridora.*
Ya que $b_0 = (1, 0)$ en S^1 no tiene un entorno U que este regularmente cubierto por Π. El típico intervalo U de b_0 tiene una imagen inversa consistente en pequeños entornos V_n de cada entorno para $n > 0$ junto con un pequeño intervalo V_n de la forma $(0, \varepsilon)$.
Cada uno de los intervalos V_0, para $n > 0$, se aplica homeomorficamente sobre U por la aplicación Π, pero el intervalo V_0 está únicamente embebido en U mediante Π.

El Ejemplo 5.C), puede generalizarse. Recordemos que un grupo G opera ***libremente sobre*** X (o que la acción de G es libre) si $g \cdot x \neq x$ para todo $x \in X$ y $g \in G$, $g \neq e$.

Teorema 6 *Si G es un grupo finito que opera libremente sobre un espacio Hausdorff X, la acción G sobre X es propiamente discontinua.*

Demostración. Sea $G = \{e = g_0, g_1, ..., g_n\}$, puesto que X es de Hausdorff, existen abiertos $U_0, U_1, ..., U_n$ de $g_0 \cdot x, g_1 \cdot x, ..., g_n \cdot x$ respectivamente tales que $U_0 \cap U_j = \varnothing$

para $j = 1, ..., n$.

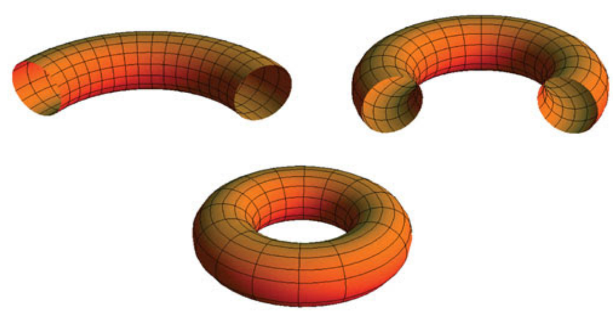
Sea U la intersección $\bigcap_{j=0}^{n}(g_j^{-1} \cdot U_j)$ que es claramente un entorno abierto de x. Ahora bien, $g_i \cdot U = \bigcap_{j=0}^{n} g_i \cdot (g_j^{-1} \cdot U_j) \subseteq U_i$ y

$$\begin{aligned} g_i \cdot U \cap g_j \cdot U &= g_j \cdot ((g_j^{-1} g_i \cdot U) \cap U) \\ &= g_j \cdot (g_k \cdot U \cap U) \\ &= \varnothing \text{ (para algún) } k \neq e \end{aligned}$$

ya que $g_k \cdot U \subseteq U_k$ y $U \subseteq U_0$. Así pues, la acción G sobre X es propiamente discontinua

□

Ejemplo 7 *a) Consideremos el espacio $T = S^1 \times S^1$ conocida como* Toro *la aplicación producto $\Pi \times \Pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$ es un cubrimiento del Toro por el plano $\mathbb{R}^2$, donde Π es la aplicación recubridora. Y en virtud del Teorema 6. Puesto que cada uno de los cuadros $[n, n+1] \times [m, m+1]$ se enrolla completamente alrededor del Toro, por medio $\Pi \times \Pi$. Es esta figura,*



como se ha representado el Toro no como el producto $S^1 \times S^1$ que es una superficie de $\mathbb{R}^4$ y difícil de visualizar, sino como la superficie familiar de un dona $D \in \mathbb{R}^3$. Esto se puede familiarizar en general con en el siguiente ejemplo.

b) Definamos $E : \mathbb{R}^n \to T^n$ por $E(t_1, ..., t_n) = (e^{2\pi i t_1}, ..., e^{2\pi i t_n})$ es propiamente discontinua, puesto que es producto de aplicaciones recubridoras.

2.5. Aplicaciones Propias y Perfectas

Antes de definir una acción propia, comprenderemos cómo se comportan las *aplicaciones propias y las perfectas*.

Definición 11 *Una aplicación $f : X \to Y$ entre espacios topológicos. Se dice que es* ***Propia*** *si, para cada subconjunto compacto K de Y, $f^{-1}(K)$ es un subconjunto compacto de X.*

De esta definición podemos encontrar las siguientes afirmaciones.

Afirmaciones.-

1. La composición de aplicaciones propias es propia.
2. El producto de aplicaciones propias es propia.

En efecto.- Sea $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ dos aplicaciones propias.

1.- Sea K un subconjunto compacto de Z, entonces $g^{-1}(K)$ es un subconjunto compacto en Y. Así

$$f^{-1}(g^{-1}(K)) = (g \circ f)^{-1}(K)$$

que es un subconjunto compacto en Y.

2.- Sea $f : X \to Y$ con $g : X' \to Y'$ dos aplicaciones y K, K' compactos de Y, Y' respectivamente, veamos que $f \times g : X \times X' \to Y \times Y'$ es una aplicación propia. Primero veremos que $K \times K'$ es compacto. Sea un $y_0 \in K$ y la rebanada $\{y_0\} \times K'$ de $K \times K'$. El conjunto $W \times K'$ es un tubo sobre $\{y_0\} \times K'$ y donde W es abierto de K. Como $\{y_0\} \times K'$ es compacto y homeomorfo a K', mediante la aplicación $\pi_2 : \{y_0\} \times K' \to K'$ podemos cubrir a $y_0 \times K'$ con un número finito de elementos básicos $U_1 \times V_1, U_2 \times V_2, ..., U_n \times V_n$ donde V_i es un cubrimiento finito de abiertos de K'.

Así, definimos $W = U_1 \cap .... \cap U_n$ donde U_i son abiertos de K, de esa forma para cada y de K podemos elegir W_y tal que $W_y \times K'$ es un cubrimiento para $K \times K'$. Por otro lado W_y es un cubrimiento para K y por compacidad existe $\{W_1, W_2, ..., W_p\}$ una subcolección finita y la unión de tubos $W_1 \times K', W_2 \times K', ..., W_p \times K'$ es un cubrimiento para $K \times K'$. Por tanto $K \times K'$ es un compacto, así, $f \times g = \varphi : X \times X' \to Y \times Y'$ tiene la preimagen

$$\varphi^{-1}(K \times K') = (f^{-1} \times g^{-1})(K \times K') = (f^{-1}(K) \times g^{-1}(K'))$$

como $f^{-1}(K)$ y $g^{-1}(K')$ son compactos en X y X' respectivamente y por la misma construcción $f^{-1}(K) \times g^{-1}(K')$ es un compacto en $X \times X$. Por lo tanto $f \times g$ es una aplicación propia.

□

Definición 12 *Una aplicación continua $f : X \to Y$ entre espacios topológicos. Se dice que es **Perfecta** si:*

I) *Es cerrada, y su fibra $f^{-1}(y)$ es compacta en X para todo y de Y; ó equivalentemente,*

II) *Para todo Z espacio topológico, la aplicación*

$$f \times Id : X \times Z \to Y \times Z$$

es cerrada.

La relación de ambas definiciones se puede demostrar. Supongamos que, $f \times Id : X \times Z \to Y \times Z$ es cerrada, entonces si restringimos

$$(f \times Id)|_{X \times \{z\}} : X \times \{z\} \to Y \times \{z\}$$

también es cerrado, puesto que, para C un cerrado en $X \times \{z\}$ y un cerrado T en $X \times Z$ entonces $C = T \cap (X \times \{z\})$ aplicando la condición de

$$(f \times Id)_{X \times \{z\}}(C) = (f \times Id)(T) \cap Y \times \{z\}.$$

Así, $(f \times Id)|_{X \times \{z\}}$ es un cerrado, por otro lado

$$\begin{array}{ccc} X \times \{z\} & \xrightarrow{f\times Id} & Y \times \{z\} \\ \Big\downarrow \pi_X & & \Big\downarrow \pi_Y \\ X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y \end{array}$$

donde $\pi_X : X \times \{z\} \to X$ y $\pi_Y : Y \times \{z\} \to Y$ son homeomorfos a X y Y respectivamente, por tanto, definimos f como $f = \pi_Y \circ (f \times Id)_{X\times\{z\}} \circ \pi_X^{-1}$ que es cerrado ya que la composición de cerrados es cerrado.
Ahora, para todo y de Y la función $f|_{\{y\}} : T = f^{-1}(y) \to \{y\}$ es cerrada y además $f\times Id|_{\{y\}\times Z} : T\times Z \to \{y\}\times Z$ es perfecta. Así $T^{\star} = T\cup\{w\}$ donde esta se encuentra asociada ala topología de X y definir $f \times Id : T \times T^{\star} \to \{y\} \times T^{\star}$ que es perfecta, al aplicar $f \times Id(\triangle_T) = \{y\} \times T$, donde $\triangle_T = \{(x, x) : x \in T\} \subset T \times T^{\star}$ y denotar $F = \overline{\triangle_T}$ como la clausura de $\triangle_T$.

Sea $(x, w) \in F$, entonces existen elementos básicos U de x y W de w tal que, $(x, w) \in U \times W$ y que $U \times W \cap \triangle_T \neq \varnothing$ entonces

$$(U \times W) \cap (U \times U) \cap \triangle_T = ((U \cap U) \times (U \cap W)) \cap \triangle_T \neq \varnothing$$

así tenemos, para cualquier W abierto, que $U \cap W \neq \varnothing$, asi T pueda tener los puntos de aculación, asi $T = f^{-1}$ es un cerrado y compacto.

Para la reciproca, Supongamos que f es cerrado y $f^{-1}(y)$ es compacto, para todo y de Y. Sea F un subconjunto cerrado en $X \times Z$, por demostrar que $(f \times Id)(F)$ es cerrado en $Y \times Z$. Sea $(y, z) \in (f \times Id)^c(F)$, entonces la preimagen

$$(f^{-1} \times Id)(y, z) = f^{-1}(y) \times \{z\} \subset F^c$$

como F^c es abierto, existen elementos basicos $W \times V \subset F^c$ tal que, $f^{-1}(y) \times \{z\} \subset W \times V$, por ser $f^{-1}(y)$ compacto W posee un cubrimiento finito de abiertos, asi definir $U = Y - (W^c)$.

Ahora si coleccionamos $(y, z) \in U \times V$ tenemos que, $W \times V \subset F^c$ entonces $F \subset (W \times V)^c = (W^c \times Z) \cup (X \times V^c)$ y aplicando la definición de $(f \times Id)(F) \subset (f(W^c)\times Z)\cup(Y\times V^c)$ donde es una unión finita, asi $(Y-(W^c))\times(Z-V^c) \subset (f\times Id)^c(F)$

de aqui tener $(U \times V) \subset (f \times Id)^c(F)$ por lo cual es un abierto, por tanto $(f \times Id)(F)$ es cerrado.

$\square$

Afirmaciones.

1. La composición de aplicaciones perfectas, es perfecta.

2. El producto de aplicaciones perfectas, es perfecta.

En efecto. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ aplicaciones perfectas.

1.- Sea $K = g^{-1}(z)$ como un subconjunto compacto en Y y la fibra de algún z en Z

$$(g \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}(g^{-1}(z)) = f^{-1}(K).$$

Sea $\mathbb{A}$ una familia de abiertos recubridora de $f^{-1}(K)$ y sea $y \in K$, entonces existe una vecindad W_y abierta tal que $f^{-1}(W_y) \subset \mathbb{A}$. Así $\{W_y\}_{y \in K}$ es un recubridor de abiertos de K, pero como es compacto, hay $\{W_1, ..., W_p\}$ un familia finita de recubridores

$$f^{-1}(K) = f^{-1}(\bigcup_1^p W_i) = \bigcup_{i=1}^p f^{-1}(W_i).$$

Entonces sus preimagenes inversas cubren a $f^{-1}(K)$.

2.- Veamos que $f \times g : X \times X' \to Y \times Y'$ es perfecta. Sea el par (y, y') de $Y \times Y'$, entonces $\varphi^{-1}(y, y') = (f^{-1} \times g^{-1})(y, y')$. Asi, $\varphi^{-1}(y, y') = \{(x, x') \in f^{-1}(y) \times g^{-1}(y')\} = f^{-1}(y) \times g^{-1}(y') \subseteq X \times X$ donde el producto de compactos es compacto.

$\square$

Esta definición preserva algunas propiedades topológicas, por ejemplo, si $f : X \to Y$ es perfecta e Y es un espacio compacto, entonces X es un espacio compacto. Si X es espacio Hausdorff, entonces Y también es un espacio Hausdorff.

Proposición 15 *Sea $f : X \to Y$ una aplicación cerrada.*

a) *Sea $y \in Y$, y U un abierto de X tal que $f^{-1}(y) \subset U$, entonces existe $W \subset Y$ un subconjunto abierto, tal que $f^{-1}(W) \subset U$.*

b) *Sea $V \subset Y$ un subconjunto, y $U \subset X$ abierto tal que $f^{-1}(V) \subset U$, entonces existe $W \subset Y$ que contiene a V y que satisface que $f^{-1}(W) \subset U$.*

Demostración.- a).- Sean $y \in Y$, $U \subset X$ abierto. Como U es abierto, entonces $X - U$ es cerrado, entonces $f(X - U)$ es cerrado y $y \notin f(X - U)$. Así, $y \in f(U)$ por tanto existe un abierto $W \subset Y$ que contiene a y que es disjunto a $f(X - U)$, por tanto $f^{-1}(W) \subset U$.

b).- Sea $v \in V$, entonces existe W_v tal que $f^{-1}(W_v) \subset U$.

$$W = \bigcup_{v \in V} W_v$$

es un abierto que contiene a V y $f^{-1}(W) \subset U$.

$\square$

Ahora para aclarar, daremos la relación entre ambas aplicaciones, propias y perfectas, porque es más coherente la diferencia de ambos nombres dados.

Proposición 16 *Toda aplicación perfecta es propia.*

Demostración.- Supongamos que $f : X \to Y$ es perfecta. Sea $K \subset Y$ compacto y que $\{W_i\}_1^n$ es cubrimiento de K. Por otro lado, sea $y \in K$ y tenemos que $f^{-1}(y)$ es compacta, es decir, $f^{-1}(y)$ puede ser cubierta por $U = \{U_1, U_2, ..., U_n\}$ de abiertos; como f es cerrada, existe W de y que es un abierto, tal que, $f^{-1}(W) \subset U$ puede ser cubierto por la misma cantidad de abiertos $U = \{U_1, U_2, ..., U_n\}$. Por tanto $f^{-1}(K)$ puede ser cubierto por una cantidad finita $\{U_i\}$ de abiertos.

$\square$

Definición 13 *Un espacio X se dice que es **Localmente compacto en** x si existe un subespacio compacto C en X que contiene un entorno de x. Si X es localmente compacto en cada uno de sus puntos. Diremos que X es* **Localmente compacto**.

Definición 14 *Un espacio X se dice que es **compactamente generado** Si satisfase la siguiente condición. Un conjunto A es abierto en X si, $A \cap K$ es abierto en K, para cada subespacio compacto K en X.*

En la Definición 14 es equivalente a manejar A como un conjunto cerrado en X. Con estas últimas definiciones podemos establecer una relación más débil que la localidad compacta, entre las aplicaciones propias y perfectas.

Proposición 17 *Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua. Si Y es un Espacio Hausdorff compactamente generado y f es propia, entonces f es una aplicación cerrada.*

Demostración.- Para mostrar que es cerrado, mostraremos que $f(C) \cap K$ es un cerrado en K, para todo compacto K en Y. Sea C un conjunto cerrado en X, así para K un compacto en Y, $f^{-1}(K)$ es compacta en X por ser propia, entonces $f^{-1}(K) \cap C$ también es un compacto y cerrado, así por ser f continua

$$f(f^{-1}(K) \cap C) = K \cap f(C)$$

$K \cap f(C)$ es compacto y por ser Y un espacio Hausdorff, $f(C)$ es cerrado en Y.

$\square$

Podemos notar, para decir que una aplicación propia es perfecta, necesariamente f debe ser cerrado.

Teorema 7 *Supongamos que $f : X \to Y$ es una aplicación continua entre espacios Haussdorff localmente compacto. Si f es propia, entonces f es una aplicación cerrada.*

Demostración.- Para la demostración haremos que los puntos fronteras se encuentren en un conjunto cerrado
Sea C un conjunto cerrado en X. Sea $y \in Y$ un punto frontera de $f(C)$, como es

localmente compacto existe un compacto K_y, por ser f propia, $f^{-1}(K_y)$ es compacta. Entonces $C \cap f^{-1}(K_y)$ es un compacto, por la continuidad de f tenemos que

$$f(C \cap f^{-1}(K_y)) = f(C) \cap K_y.$$

lo que significa que y esta en $f(C) \cap K_y$, en particular y esta en $f(C)$.

$\square$

Ahora podemos enunciar la relación entre las aplicaciones.

Teorema 8 *1. Si $f : X \to Y$ es una aplicación perfecta, entonces f es propia.*

2. Si $f : X \to Y$ es una aplicación continua propia y el espacio Y es Hausdorff compactamente generado, entonces f es perfecta.

Demostración.- 1.- Se define de la Proposición 16.
2.- f es cerrado, por la Proposición 17. Sea $y \in Y$ y K un compacto en Y, entonces cada $\{y\}$ es cerrado, por ser Hausdorff y como es compactamente generada $\{y\} \cap K$ es un cerrado en K, por tanto un compacto, entonces

$$f^{-1}(\{y\} \cap K) = f^{-1}(\{y\}) \cap f^{-1}(K),$$

$f^{-1}(K)$ es un compacto en X por ser propia. Así $f^{-1}(y)$ es un compacto.

$\square$

Corolario 1 *Sea $f : X \to Y$ una aplicación propia, entonces f es perfecta si y solo si Y es Hausdorff localmente compacto.*

Demostración: Se sigue de los Teoremas 7 y 8 y del hecho que Y es localmente compacto, entonces es compactamente generado.

$\square$

CAPÍTULO 3

La Acción de Cartan y su relación con la Accion de Palais

A continuación las definiciones lo hace N. Bourbaki en su libro [2] y es considerada como la definición de Acción Bourbaki-Propia o Acción Propia en el sentido Bourbaki.

3.1. Acciones Propias y de Cartan

En esta sección veremos una forma geométrica de poder interpretar las acciones Propias y de Cartan, su visualización puede verse de manera intuitiva. Dado X un G-espacio, consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \Phi : G \times X &\rightarrow X \times X \\ (g, x) &\mapsto (\theta(g, x), x) \end{aligned}$$

donde la acción se aplica en la primera cordenada, por lo que, la imagen de esta aplicación es el conjunto

$$P_\pi = \{(x, y) \in X \times X \ : \ y = \theta(g, x) \text{ para todo } g \in G\}$$

$$P_\pi = \{(x, y) \in X \times X \ : \ G \cdot x = G \cdot y\}$$

Y si restringimos la imagen tenemos

$$\Phi' : \Phi^{-1}(P_\pi) \rightarrow P_\pi$$

con esta aplicación Φ podemos definir las siguientes acciones.

Definición 15 *Sea X un G-espacio. Se dirá que una **acción es Propia**, cuando $\Phi : G \times X \rightarrow X \times X$ sea una aplicacción perfecta, es decir, Φ debe ser cerrada con fibras compactas.*

Nota.- Cuando el espacio X cumpla con la definición de acción propia, lo llamaremos como X ***un G-espacio Propio.***

Definición 16 *Sea la Definición 15, diremos que una **acción es de Cartan** cuando la restricción de Φ sobre su imagen $\Phi' : G \times X \to P_\pi$ es perfecta.*

Nota.- Cuando el espacio X cumpla con la definición de acción de Cartan, lo llamaremos como X ***un** G**-espacio de Cartan.***

En orden cronológico la acción de Cartan es la primera en definirse al revisar las referencias y de las definiciones es inmediato ver,

Proposición 18 *Toda acción Propia es de Cartan.*

Demostración.- Tenemos que Φ es perfecta, restringiendo $\Phi' = \Phi|_{\Phi^{-1}(P_\pi)}$ es perfecta, puesto que Φ' es cerrada y además $(\Phi')^{-1}(y)$ es compacto para todo y en $G \cdot x$

□

La recíproca no siempre se cumple. En los siguientes resultados intentaremos establecer las condiciones necesarias para que una acción de Cartan sea Propia.

Teorema 9 *Sea X un G-espacio, entonces X/G es Hausdorff si y solo, sí*

$$P_\pi = \{(x, y); G \cdot x = G \cdot y\} \text{ es cerrado en } X \times X.$$

Demostración.- Consideremos la aplicación órbital $\pi \times \pi$ que es continua, puesto que π es continua. Como X/G es Hausdorff por el criterio de la diagonal $\triangle_{X/G}$ es cerrado en $X/G \times X/G$

$$\begin{aligned}(\pi \times \pi)^{-1}(X/G \times X/G - \triangle_{X/G}) &= X \times X - \{(x, y) : G \cdot x = G \cdot y\} \\ &= X \times X - P_\pi.\end{aligned}$$

Como $X \times X - P_\pi$ es abierto, entonces P_π es cerrado en $X \times X$. La recíproca. Consideremos, P_π un cerrado, por otro lado $\pi \times \pi$ es una aplicación abierta, pues π es abierta. Entonces

$$\pi \times \pi(X \times X - P_\pi) = X/G \times X/G - \triangle_{X/G}$$

que es abierta. De ahí tenemos que $\triangle_{X/G}$ es cerrado. Por tanto, el criterio de la diagonal indica que X/G es cerrado.

□

Corolario 2 *Si X es un $G-$espacio propio, entonces X/G es Hausdorff.*

Demostración.- Para mostrar que el cociente X/G sea Hausdorff es necesario que P_π sea cerrado en $X \times X$, pero, por definición de acción propia lo es.

□

Proposición 19 *Si X es un $G-$espacio de Cartan, entonces*

$$X \text{ es un } G-\text{espacio propio si y solo sí } X/G \text{ es Hausdorff.}$$

Demostración.- Tenemos que X es un G-espacio propio, entonces X/G es un espacio Hausdorff y el Corolario 2, lo es. La recíproca. Supongamos que X/G es Hausdorff, entonces P_π es cerrado en $X \times X$.
Así $\Phi = f \circ \Phi'$ que es cerrada, por ser f una inclusión. Por tanto X es $G-$espacio Propio.

□

Con la Proposición 19, sea ha mostrado la relación entre las acciones Propias y de Cartan. Ahora mencionemos algunas propiedades de las acciones de Cartan.

Teorema 10 *Si X es un $G-$ espacio de Cartan, entonces para cada x de X tenemos que:*

1. *Si X es T_1 entonces $G \cdot x$ es subconjunto cerrado.*
2. *El subgrupo estabilizador de x es compacto.*
3. *La aplicación movimiento $\theta^x : G \to G \cdot x$ es abierta y perfecta.*
4. *La aplicación $\overline{\theta^x} : G/G_x \to G \cdot x$ es un homeomorfismo, donde $\overline{\theta^x}$ es la aplicación inducida por θ^x.*

Antes de proceder con la demostración realizaremos definiciones. Sea X un G-espacio, de ello tenemos la aplicación movimiento $\theta^x(x) = \theta(g, x)$ que es continua. Así definir la acción de Cartan como

$$\Phi' = \theta^x \times Id : \Phi^{-1}(P_\phi) \to P_\pi$$
$$\Phi' = \theta^x \times Id : G \times G \cdot x \to G \cdot x \times G \cdot x$$

donde, Φ' es perfecta y por definición Φ' es cerrada, entonces θ^x es una aplicación cerrada con preimagen $(\theta^x)^{-1}$ compacta para todo y de G , puesto que θ^x hace el papel de f en la Definición 12.

Demostración.- Del Teorema 10.

1. Como X es T^1, entonces cada $\{x\}$ es un cerrado y por continuidad de la aplicación movimiento $(\theta^x)^{-1}(\{x\}) = G_x$ es un cerrado en G, y como Φ' es cerrada, entonces $\Phi'(G_x \times \{x\}) = G \cdot x \times \{x\}$ es cerrada por tanto $G \cdot x$ es cerrado.

2. Como θ^x es cerrada con fibras compactas para todo $y \in G \cdot x$, en particular
$$(\theta^x)^{-1}(x) = \{g \in G : \ g \cdot x = x\} = G_x,$$
entonces G_x es compacta.

3. Tenemos que θ^x es perfecta; para ver si es abierta hacemos lo siguiente. Sea U un abierto de G, entonces
$$\begin{aligned}
(\theta^x)^{-1} \circ (\theta^x)(U) &= \{g \in G : \theta^x(g) \in \theta^x(U)\} \\
&= \{g \in G : g \cdot x = h \cdot x \text{ para algún } h \in U\} \\
&= \{g \in G : g^{-1}h \cdot x = x \text{ para algún } h \in U\} \\
&= \{ht^{-1} \in G : t \cdot x = x \text{ para algún } h \in U\} \\
&= \{Ut^{-1} \in G : t \cdot x = x\} \\
&= \bigcup_{t \in G_x} Ut^{-1}
\end{aligned}$$

$\bigcup_{t\in G_x} Ut^{-1}$ es unión de abiertos.

4. Recordemos que $\overline{\theta^x}$ es biyectiva y equivariante por la Proposición 11, definida por $\overline{\theta^x}(hG_x) = h\cdot x$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\theta^x"] & G/G_x \arrow[d, "\overline{\theta^x}"] \\ & G\cdot x \end{tikzcd}$$

entonces veamos que $\overline{\theta^x} = \theta^x \circ \pi_G^{-1}$ es continua; para mostrar que $(\overline{\theta^x})^{-1}$ sea continua, es equivalente a mostrar que $\overline{\theta^x}$ es abierta. Sea U un abierto en G/G_x

$$\begin{aligned}
(\overline{\theta^x})^{-1}\circ\overline{\theta^x}(U) &= \{hG_x \in G/G_x : \overline{\theta^x})(hG_x) \in \overline{\theta^x})(U)\} \\
&= \{hG_x \in G/G_x : h\cdot x = gG_x \cdot x \text{ para algún } gG_x \in U\} \\
&= \{hG_x \in G/G_x : g^{-1}h\cdot x = x \text{ para algún } gG_x \in U\} \\
&= \{gt \in G/G_x : t\cdot x = x \text{ para algún } gG_x \in U\} \\
&= \bigcup_{t\in G_x} UG_x^{-1}
\end{aligned}$$

es un abierto en , por tanto $\overline{\theta^x}$ es abierta.

□

3.2. Acciones Propias y de Cartan en el sentido de Palais

En esta sección se verá otra forma de ver las acciones propias y de Cartan, su visualización es más algebraica y con ello poder trabajar. En adelante a menos que se diga lo contrario manejaremos X como un $G-$espacio, además que el espacio X sea Tychonoff [4] y G sea un grupo Hausdorff localmente compacto.[5]

Definición 17 *Sean U, V subconjuntos de X, entonces definimos el conjunto $G_{U,V} \subset G$ como*

$$G_{U,V} := \{g \in G : g\cdot U \cap V \neq \varnothing\}.$$

[4]Un espacio Tychonoff es completamente regular y de Hausdorff.
[5]Si G es localmente compacto en cada uno de sus puntos.

y lo denominaremos **transporte de U hacia V**.

Observación 1 .-

- Si $U=V$, entonces $G_{U,U}=G_U$ y lo denominaremos el transporte de U.
- Notemos que, $G_{\{x\},U}=\{g\in G : g\cdot\{x\}\cap U\neq\varnothing\}=\{g\in G : \theta(g,x)=U\}$

Definición 18 *Sea U,V subconjuntos de un G-espacio X. Diremos que U* **es delgado con respecto a** *V, si $G_{U,V}$ tiene clausura compacta, es decir $\overline{G_{U,V}}$ es compacta en G.*

Si tenemos que U es delgado con respecto a V, entonces V es delgado con respecto a U. A esto lo llamaremos U y V son respectivamente delgados. En efecto,

$$g\cdot U\cap V=g\cdot(g^{-1}\cdot V\cap U)\neq\varnothing$$

puesto que $\theta_g(g^{-1}\cdot V\cap U)$ es homoemorfo a $g^{-1}\cdot V\cap U$. Por tanto $\overline{G_{U,V}}=\overline{G_{V,U}}$.
Si tenemos que U,V son respectivamente delgados, entonces las traslaciones de $g_1\cdot U$ y $g_2\cdot V$ son respectivamente delgadas. En efecto,

$$gg_1\cdot U\cap g_2\cdot V=g_2\cdot(g_2^{-1}gg_1\cdot U\cap V)=g_2\cdot(h\cdot U\cap V)\neq\varnothing$$

con $h=g_2^{-1}gg_1$ y de ahi tenemos que $\overline{G_{g_1\cdot U,g_2\cdot V}}=\overline{G_{g_2\cdot V,g_1\cdot U}}$. En particular, todas las traslaciones de U son respectivamente delgadas, es decir $\overline{G_{U,g\cdot U}}$ tiene clausura compacta.
Un último detalle, si U y V son respectivamente delgados y $U'\subset U$ y $V'\subset V$, entonces U' y V' son respectivamente delgados. En efecto,

$$g\cdot U'\cap V'\subset g\cdot U'\cap V=g\cdot(g^{-1}\cdot V\cap U')\subset g\cdot(g^{-1}\cdot V\cap U)\neq\varnothing$$

por tanto $\overline{G_{U',V'}}=\overline{G_{V',U'}}$.

Observación 2.-

- U es delgada si, G_U tiene clausura compacta.

- Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos en X; tenemos

$$G_{\cup_{i\in I}U_i,V} = \{g \in G : g \cdot \bigcup_{i\in I} U_i \cap V\} = \{g \in G : \bigcup_{i\in I}(g \cdot U_i \cap V)\} = \bigcup_{i\in I} G_{U_i,V}$$

Definición 19 *Diremos que X* ***es un espacio de Cartan en el sentido de Palais*** *ó (Palais-Cartan). Si todo punto de X tiene una vecindad delgada.*

Es decir. Sea U_x abierto que contiene a x de X, entonces

$$G_{U_x} = \{g \in G : \ g \cdot U_x \cap U_x \neq \varnothing\}$$

el trasnporte de U_x debe ser compacta, para todo x de X.

Definición 20 *Sea U un sunconjunto de X. U* ***se dice subconjunto pequeño*** *ó simplemente pequeño si todo punto de X tiene una vecindad delgada con respecto a U*

Es decir, la vecindad V_x de x y el transporte de U hacia V_x

$$G_{U,V_x} = \{g \in G : g \cdot U \cap V_x \neq \varnothing\}$$

debe ser compacta, para todo $x \in X$.

Definición 21 *X se denomina un* ***espacio propio en el sentido de Palais*** *(o simplemente Palais-propio), si todo x de X tiene una vecindad pequeña.*

Con estas definiciones es inmediato ver, que toda acción de Palais-Propia es de Palais-Cartan, la recíproca no se cumple. En los siguientes resultados intentaremos establecer las condiciones necesarias para que una acción de Palais-Cartan sea Palais-Propia

Lema 1 *Sea X un $G-$espacio, $\mathbb{V}$ un espacio lineal y f un función continua de X en $\mathbb{V}$ cuyo soporte denotaremos por S. Si S es un subconjunto pequeño de X, entonces*

$$F(x) = \int g^{-1} \cdot f(g \cdot x) d\mu(g)$$

donde μ es la medida de Haar en G, es una función equivariante de X en V. Además, $F(x) = 0$ si $x \notin G \cdot S$.

Demostración.- Sea $x_0 \in X$ y U una vecindad de x_0 que es delgada con respecto a S, luego $W = \overline{G_{U,S}} \in G$ es compacto. Si $x \in U$ y $g \notin W$, entonces $g \notin G_{U,S}$ lo que implica que $g \cdot x \notin S$ y $f(g \cdot x) = 0$; y por tanto

$$F \mid_{U(x)} = \int_W g^{-1} f(g \cdot x) d\mu(g)$$

como $(g, x) \mapsto g^{-1} \cdot f(g \cdot x)$ es una función continua de $U \times W$ en V y por tanto tenemos que $F \mid_U$ es continua en x_0. Además si $x \in G \cdot S$, entonces $f(g \cdot x) = 0$ para todo $g \in G$ y por tanto $F(x) = 0$. Por último F es equivariante, puesto que, sean $g, h \in G$, y $x \in X$ usando la linealidad del G-espacio de $\mathbb{V}$

$$\begin{aligned} F(h \cdot x) &= \int g^{-1} \cdot f(gh \cdot x) d\mu(g) \\ &= \int hg^{-1} \cdot f(g \cdot x) d\mu(g) \\ &= h \int g^{-1} \cdot f(g \cdot x) d\mu(g) = h \cdot F(x). \end{aligned}$$

□

Proposición 20 *Si X es un $G-$espacio Palais-Propio, entonces X es un G-espacio Palais-Cartan*

Demostración.- Sea $x \in X$, S una vecindad pequeña de x y U una vecindad de x tal que es delgada respecto a S, entonces $U \cap S$ es una vecindad delgada de x y por tanto X es un G-espacio Palais-Cartan.

□

Proposición 21 *Si X es un $G-$espacio Palais-propio, entonces X/G es un espacio completamente regular.*

Demostración.- Sean $G \cdot x \in X/G$, $C \subset X/G$ un conjunto que no contiene a $G \cdot x$, S una vecindad pequeña de x tal que $S \cap \pi^{-1}(C) = \varnothing$ y f una función a valor real con soporte en S tal que $f(x) > 0$. Por el Lema 1 tenemos que $F'(x) = \int f(g \cdot x) d\mu(g)$ es una función a valor real, continua y equivariante en X con $F'(x) > 0$ y soporte en $G \cdot S$ y por tanto disjunto a $\pi^{-1}(C)$. Como F' es equivariante, entonces la función F definida mediante

$$\begin{tikzcd} X/G \arrow[r, "\pi^{-1}"] \arrow[dr, "f"] & X \arrow[d, "F'"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

la cual se encuentra bien definida y satiface $f(G \cdot x) = F'(\pi^{-1}(G \cdot x)) = F'(x) > 0$ y $f\mid_C = 0$ y del hecho que f es compuestas por continuas se sigue que es continua.

$\square$

Proposición 22 *Si X es un $G-$espacio Palais-Cartan, entonces*

X es un G-espacio Palais-propio si y solo. si X/G es regular.

Demostración.- Sea x en X y U una vecindad abierta delgada de x, entonces $G \cdot U$ es una vecindad de $G \cdot x$.
Supongamos que X/G es regular, así, poder encontrar una vecindad W de $G \cdot x$ la cual es invariante, es decir $G \cdot W = W$ y está incluida en $G \cdot U$. Ahora, sea $O = W \cap U$ con el cual probarmeos que O es pequeña de x. Consideremos casos,

1. Si $y \in G \cdot U$, entonces y está en $g \cdot U$ que es una vecindad de y, puesto que las traslaciones de U son respectivamente delgadas, tenemos que $g \cdot U$ es delgado con respecto a U, por tanto delgada con respecto a O.

2. Si $y \notin G \cdot U$, entonces $X - W$ es vecindad de y y del hecho que W es invariante tenemos que el transorte de $X - W$ hacia O es vacio, significa que $\overline{G_{X-W,O}} = \varnothing$ y por tanto $X - W$ es delgado con respecto a O.

$\square$

Si tenemos la propiedad de que un espacio X es de Palais Cartan, se tiene los sigiuentes resultados.

Proposición 23 *si X es un $G-$espacio Cartan en el sentido de Palais, entonces*

1. *Cada órbita de X es cerrada en X.*

2. *Cada grupo de isotropias de X es compacta.*

Demostración.- 1. Sea $y \in X$ un punto adherente a la órbita $G \cdot x$ y U una vecindad delgada de y, es decir, $\overline{G_U}$ es compacta. Tomemos una familia $\{g_i \cdot x\}$ en U, que converge a y, si fijamos un i_o tenemos que $g_i \cdot x = (g_i g_{i_0}^{-1}) \cdot (g_{i_0}^{-1} \cdot x)$ por tanto $g_i g_{i_0}^{-1} \in G_U$. Así, podemos suponer que la subfamilia $\{g_i g_{i_0}^{-1}\}$ converge y por tanto g_i converge a un elemento g. Entonces

$$y = \lim g_i \cdot x = g \cdot x \in G \cdot x,$$

Por tanto $G \cdot x$ es cerrada.
2. Por otro lado, sea x de X y V es una vecindad delgada de x, el estabilizador G_x de x, es un cerrado que se encuentra contenido en compacto G_V y por tanto el grupo de isotropia es un compacto.

$\square$

3.3. La Relación de la Accion de Palais y Cartan

Recordemos lo que tenemos hasta ahora,

Acciones Propias, ***implican***, Acciones de Cartan.

Para la reciproca necesitamos que el espacio orbital X/G sea un espacio Hausdorff.

Para las definiciones de Acciones en el sentido de Palais, es necesario que el espacio X sea Tychonoff.

Acciones Palais-Propias, ***implica***, Acciones de Palais-Cartan

Para la reciproca necesitamos que el espacio orbital X/G sea un espacio regular.

Con estas implicaciones y manejando una notación de acción empezaremos a relacionar estas acciones, como sigue

Acciones Propias, implica, ***Acciones de Cartan***

Acciones Palais-Propias, implica, ***Acciones de Palais-Cartan***

Teorema 11 *Sea G un grupo Hausdorff localmente compacto y X un $G-$espacio Hausdorff, entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *X es $G-$espacio de Cartan.*

2. *Para cada x de X existe una vecindad U_x delgada (X es $G-$espacio Palais-Cartan).*

Demostración.-

Supongamos que X es un $G-$espacio de Cartan. *Primero.* Consideremos ∞ que no este G , tal que $G^* = G \cup \{\infty\}$ sea la compactificación de Alexandrof de G por un elemento.[6]

Segundo. Como X es Hausdorff, para θ^x tenemos

$$\begin{aligned} \Gamma' : G &\rightarrow \text{Graf}(\theta^x) \\ g &\mapsto (g, g \cdot x) \end{aligned}$$

es un conjunto cerrado de $G \times X$, pues $G \times G \cdot x$ es cerrado. Por otro lado consideremos $\Gamma = \{(g \cdot x, g) : g \in G, x \in X\} = G \cdot x \times G$ que es homeomorfo a Γ'. *Tercero.* Para la aplicación inclusión $i : G \rightarrow G^*$ tenemos la gráfica $D : G \rightarrow$ Graf(i) definida $g \mapsto (g, g)$ y esta es cerrada en $G \times G^*$. *Cuarto.-* Como $\theta^x : G \rightarrow G \cdot x$ es perfecta entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \theta^x \times Id_{G^*} : G \times G^* &\rightarrow G \cdot x \times G^* \\ (g, h) &\mapsto (g \cdot x, h) \end{aligned}$$

es cerrada. Puesto que si restringimos el dominio

$$\theta^x \times Id_{G^*}(D) = \{(g \cdot x, g) : g \in G, x \in X\} = \Gamma.$$

Quinto.- Para todo $x \in X$, consideremos $(x, \infty) \notin \Gamma \subset G \cdot x \times G^*$, entonces existe U_x

[6] $\tau^* = \tau \cup \{A \subset X^* : X^* - A$ es cerrado y compacto en $X\}$

de x y V de ∞ abiertos tal que $(U_x \times V) \cap \Gamma = \varnothing$
Por definición de G^* podemos elegir $V = G^* - K$ para algún compacto K en G, así, para $g \in G - K$ el conjunto

$$(U_x \times \{\infty\}) \cap \Gamma = (U_x \times \{\infty\}) \cap (g \cdot U_x \times \{g\}) = \varnothing$$

de donde se tiene $g \cdot U_x \times U_x = \varnothing$ para los $g \in G - K$, así tenemos que,
$G_{U_x} = \{g \in G : g \cdot U_x \cap U_x \neq \varnothing\} \subset K$; lo que implica que $\overline{G_{U_x}} \subset K$. Por tanto se tiene la afimación 2.
Reciprocamente. Consideremos una sucesión $\{g_i : i \in I\}$ para el cual $\theta^x(g_i) = g_i \cdot x$ converge $G \cdot x$. Se mostrará si existe puntos de acumulación de está sucesión que pertenezca a $(\theta^x)^{-1}(x)$, entonces, θ^x ser perfecta.
Supongamos que se cumple la afirmación 2, entonces existe U_x una vecindad de x que tiene clausura compacta. Para esta vecindad U_x existe un índice i_0 tal que $\theta^x(g_i) = g_i \cdot x \in U_x$, para todo $i > i_0$, por tanto $x \in g_i^{-1} \cdot U_x$ para todo $i > i_0$. Esto significa que, $g_i^{-1} \in G_{U_x} = \{g \in G : g \cdot U_x \cap U_x \neq \varnothing\}$, así por definición , $g_i^{-1} \in \overline{G_{U_x}}$, entonces $g_i \in (\overline{G_{U_x}})^{-1}$ luego existe una subsucesión $\{g_{i(j)}\}$ de $\{g_i : i > i_0\}$ que converge a $g \in (\overline{G_{U_x}})^{-1}$. Debido a que $g_i \cdot x$ converge a $g \cdot x$, indica que $g \cdot x$ es un punto de acumulación de $(\theta^x)^{-1}(x) = G_x$. para el caso $(\theta^x)^{-1}(y)$ es de manera análoga, notemos que $y = h \cdot x$ para algún $h \in G$.

□

Siguiendo la misma idea buscaremos demostrar la siguiente relación

Acciones Propias, implica, Acciones de Cartan

Acciones Palais-Propias, implica, Acciones de Palais-Cartan

Teorema 12 *Sea G un grupo Hausdorff localmente compacto y X un $G-$espacio Hausdorff, entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *X es $G-$espacio de propio.*

2. *Para cada par de puntos de X existen vecindades U_x y V_y de x, y respectivamente en X tal que*

$$G_{U_x,V_y} = \{g \in G : g \cdot U_x \cap V_y \neq \varnothing\}$$

es relativamente compacto en G. (X es $G-$espacio Palais-propio).

Demostración.- Sea X un $G-$espacio propio, entonces X es $G-$espacio Cartan. Por el Teorema 11 tenemos que, para cada par de puntos x, y existen U_x, U_y vecindades respectivas; tales que G_{U_x} y G_{U_y} son compactos en G. *Primero.* Consideremos x e y están en una misma órbita, luego existe un $h \in G$ tal que $h \cdot x = y$, entonces tenemos $U_y = h \cdot U_x$, así

$$g \cdot U_x \cap U_y = g \cdot U_x \cap h \cdot U_x = h \cdot (h^{-1}g \cdot U_x \cap U_x),$$

de ello tenemos que $g \cdot U_x \cap U_y \neq \varnothing$ sí y solo si $h^{-1}g \in \overline{G_{U_x}}$ de donde $G_{U_x,U_y} \subset h^{-1}g\overline{G_{U_x}}$, lo cual es compacto. Puesto que $G_{U_x,U_y} \subset h^{-1}\overline{G_{U_x}}$ ya que $g\overline{G_{U_x}} = \overline{G_{U_x}}$. *Segundo.* Si x e y no están en la misma órbita, supongamos $y \notin G \cdot x$ (es decir $h \cdot x \neq y$; para todo $h \in G$) entonces como X es $G-$espacio propio, tenemos que X/G es Hausdorff. Así existen vecindades disjuntas de V, W de $G \cdot x$ y $G \cdot y$ respectivamente. Para el cual $U_x = \Pi^{-1}(V)$ y $U_y = \Pi^{-1}(W)$ son disjuntos e invariantes,

$$g \cdot U_x \cap U_y = g \cdot \Pi^{-1}(V) \cap \Pi^{-1}(W) = \Pi^{-1}(g \cdot V \cap W) = \varnothing.$$

Por tanto $\{g \in G : g \cdot U_x \cap U_y \neq \varnothing\} = \varnothing$ lo cual implica que tiene clausura compacta. Así cumple la afirmación 2.

Reciprocamente. Como G_{U_x,V_y} es relativamente compacta, por la Proposición 20 y el Teorema 11, X es un $G-$espacio de Cartan, solo falta probar que P_π es cerrado. Supongamos $(x, y) \in \overline{P_\pi}$, entonces existe una sucesion $(g_i \cdot x_i, x_i) \in P_\pi$ que converge a (x, y) en $X \times X$, entonces para vecindades U_x, V_y de x e y tales que $\overline{G_{U_x,V_y}}$ es compacto en G.

Entonces existe un índice i_0 con la propiedad de todo $i > i_0$ el punto $g_i \cdot y_i \in U_x$ con $y_i \in V_y$, así, $y \in g_i^{-1} \cdot U_x \cap V_y$ y tenemos que los $g_i^{-1} \in \overline{G_{U_x,V_y}}$; por tanto existe una subsucesión que converge a algún punto g de $\overline{G_{U_x,V_y}}^{-1}$, Así $(g_i, x_i) \mapsto (g, x)$. Entonces al aplicar la acción en esta sucesión $\theta(g_i, x_i)$ converge a $\theta(g, x)$ y por hipótesis $g \cdot y = x$. Por tanto $(x, y) = (g \cdot y, y) \in P_\pi$.

□

Ejemplo Consideremos el grupo $G = \mathbb{R}$ (Hausdorff localmente compacto) y el conjunto $X = \mathbb{C}$ ($G-$espacio Hausdorff) con la acción $\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $x \cdot z = e^{2\pi i x} z$, si $z = re^{i\phi}$ entonces $x \cdot z = re^{i(2\pi x + \phi)}$. Notemos que las órbitas; $\mathbb{R} \cdot 0 = \{0\}$ y la $\mathbb{R} \cdot z = \{w \in \mathbb{C} : |w| = r\}$; con esto podemos identificar el espacio cociente $\mathbb{C}/\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ que es un espacio Hausdorff con la topología usual.
Para probar que no es una acción propia, haremos lo siguiente;
Sea $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ y $x \cdot K = \{e^{2\pi i x} k : k \in K\}$; $\forall x \in \mathbb{R}$. Así

$$\mathbb{R}_K = \{x \in \mathbb{R} : x \cdot K \cap K \neq \emptyset\} = \mathbb{R},$$

el cual no es acotado y por tanto no es compacto, es decir la acción no es propia.

Ejemplo.- Consideremos el grupo $G = \mathbb{R}$ (Hausdorff localmente compacto) y el conjunto $X = \mathbb{C}$ ($G-$espacio Hausdorff) con la acción $\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por
$x \cdot z = e^{2\pi i x} z$
si $z = re^{i\phi}$ entonces $x \cdot z = re^{i(2\pi x + \phi)}$;
para vér si la acción es propia, necesitamos ver que θ^x sea cerrada y con fibras $(\theta^x)^{-1}(w)$ compactas para cada w de $\mathbb{C}$. Así, tomemos w de $\mathbb{C}$, con $w = r\prime e^{i\phi\prime}$

$$\begin{aligned}
(\theta^z)^{-1}(w) &= (\theta^z)^{-1}(r\prime e^{i\phi\prime}) \\
&= \{x \in \mathbb{R} : \theta^z(x) = r\prime e^{i\phi\prime}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : re^{i(2\pi x + \phi)} = r\prime e^{i\phi\prime}\}.
\end{aligned}$$

Si $r\prime = r$, entonces $2\pi x + \phi = \phi\prime$, así $(\theta^z)^{-1}(w) = \mathbb{R}$ y no es acotado, por tanto no es una apliación propia.

Teorema 13 *Sea X un $G-$espacio Tichonoff definido mediante la acción de un grupo localmente compacto, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Dados $x, y \in X$ entonces existe dos vecindades U y V, respectivamente delgadas de x, y.*
2. *X es un $G-$espacio Palais-Cartan y X/G es de Hausdorff.*
3. *X es un $G-$espacio Palais propio.*
4. *X es un $G-$espacio de Cartan.*
5. *X es un $G-$espacio propio.*

Demostración.- Para la demostración de la misma, seguiremos $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 1$.

Notemos que $1 \to 2$. En efecto, usando el Teorema 12 tenemos que X/G es de Hausdorff y por definición es Palais - Cartan. La implicación $2 \to 3$ se cumple ya que la aplicación cociente π es abierta y por lo tanto X/G es localmente compacto, en este caso Hausdorff implica regular y de la Proposición 22 se sigue que X es un G - espacio Palais - propio. Para $3 \to 4$, al ser un G - espacio Palais - propio nuevamente por la Proposición 20 se tiene que es un G - espacio Palais - Cartan y X/G es de Hausdorff, del Teorema 11 se tiene que es de Cartan. La Proposiscion 19 garantiza que si la acción es de Cartan y X/G es de Hausdorff, entonces X es un G - espacio propio con lo cual $4 \to 5$ se cumple. Finalmente el Teorema 16 garantiza que $5 \to 1$.

$\square$

Algunos de estos resultados mostrados resultan directas al considera G un grupo compacto, los cuales mostraremos a continuación.

3.4. Acciones por un Grupo Compacto *G*

En particular, si el Grupo topologico G posee la propiedad de ser compacta, se tiene muchas propiedades deseadas.

Teorema 14 *Si X es un $G-$espacio con G compacto, entonces θ es un aplicación cerrada.*

Demostración.- Sea $C \subset G \times X$ un conjunto cerrado y sea y en la clausura de $\theta(C)$. Sea $(g_i, x_i) \in C$ tal que $\theta(g_i, x_i) = g_i \cdot x_i$ converge a y pasando por una subsucesión, asumimos que g_i converge a g puesto que G es compacto. Entonces $x_i = g_i^{-1} g_i \cdot x_i$ converge a $g^{-1} \cdot y$. Así (g_i, x_i) converge a $(g, g^{-1} \cdot y) \in C$ siendo asi C un conjunto cerrado, por tanto $y = \theta(g, g^{-1} \cdot y) \subset \theta(C)$

$\square$

Teorema 15 *Si X es un $G-$espacio con G compacto, entonces*

1. *X/G es de Hausdorff.*

2. *$\pi : X \to X/G$ es cerrada.*

Demostación.- 1. Tomemos $G \cdot x,\ G \cdot y$ dos órbitas diferentes, entonces definamos la función $G \to G \times \{y\} \to G \cdot y$ definida por $f = \theta^y \circ \pi_1^{-1}$ donde esta es continua. Con ello podemos notar que es de Hausdorff, puesto que dos subconjuntos compactos se pueden separar por subconjuntos abiertos. En particular sea U abierto de un x con $\overline{U} \cap G \cdot y = \varnothing$, siendo así que $\pi(y) \notin \pi(\overline{U})$, entonces tenemos que $\pi(U)$ y $X/G - \pi(\overline{U})$ son disjuntos.

2. Tomemos un C cerrado en X, podemos expresar la óbita de un conjunto $G \cdot C = \{y \in X \ : \ y \in g \cdot C \ , \ \forall g \in G\} = \bigcap_{g \in G} g \cdot C$ donde esta $G \cdot C$ es cerrada, pero esto mismo se puede esribir,

$$\begin{aligned}
\pi(\pi^{-1}(C)) &= \{y \in X/G \ : \ \pi^{-1}(y) \in \pi^{-1}(C)\} \\
&= \{y \in X/G \ : \ g \cdot y \in h \cdot C, \ \text{ para todo } \ g, h, \in G\} \\
&= \{y \in X/G \ : \ g \cdot y = h \cdot x, \ \text{para algun } x \in C \ \ , \forall g, h, \in G\} \\
&= \{y \in X/G \ : \ y = g^{-1} h \cdot x, \ \text{para algun } x \in C \ \ , \forall g^{-1} h, \in G\} \\
&= \bigcap_{g^{-1} h \in G} g^{-1} h \cdot C
\end{aligned}$$

es cerrada.

□

Teorema 16 *Si G es compacto ó conexo, las órbitas son compactas ó conexas respectivamente.*

Demostración. Tenemos que θ^x es continua, y como $\theta^x(G) = G \cdot x$ es continua, por tanto es compacta ó conexa.

□

Teorema 17 *Si X es T_1, para todo $x \in X$, el estabilizador G_x es un grupo cerrado.*

Demostración. Como X es T_1, entonces $\{x\} \subseteq X$ es cerrado; Así $\theta^x : G_x \to \{x\}$ dado por $\theta^x(g) = g \cdot x = x$, como $\{x\}$ es cerrado, por continuidad de G_x es cerrado.

□

Ejemplo 8 *Sea $T = S^1 \times S^1$ el toro, donde $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : ||z|| = 1\}$ es vista como un grupo topológico por que herada la topología de $\mathbb{C}$ y su estructura de grupo la proporciana la multiplicación de los numeros complejos*

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times S^1 & \to & S^1 \\ (e^{i\alpha}, e^{i\beta}) & \mapsto & e^{i(\alpha+\beta)} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} S^1 & \to & S^1 \\ e^{i\alpha} & \mapsto & e^{-i\alpha} \end{array}$$

podemos ver que estas funciones son continuas.

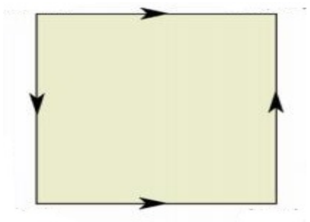
La función $f : T \to T$ definida por $f(z,w) = (\frac{1}{z}, -w)$ la cual toma la primera circunferencia y la refleja por el eje x, toma la segunda y la hace girar 180 grados, además podemos ver que el f es propio inverso, pues, $f(f(z,w)) = f(\frac{1}{z}, -w) = (z,w)$. Así, tenemos una acción de un grupo $G = \mathbb{Z}_2$ sobre el toro T es decir ,

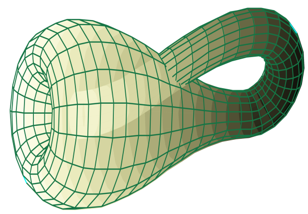
$$\theta : \mathbb{Z}_2 \times T \to T$$

$$(1,(z,w)) \mapsto (z,w)$$

$$(-1,(z,w)) \mapsto (\frac{1}{z}, -w) = (\overline{z}, -w)$$

definida como la aplicación antipodal. Podemos notar que es libre, ya que, $\bigcap_{(z,w)\in T} G_{(z,w)} = \{e\}$ también la acción es propiamente discontinua, por que, una vecindad pequeña de un punto (z_0, w_0) en S^1 se mueve bastante lejos de si, por el unico elemento no trivial de G, puedo que (w_0) gira 180 grados.
Asi, entonces podemos asociar el T bajo $T/\mathbb{Z}_2 = S^1 \times S^1\ /\mathbb{Z}_2$, este cociente es llamado también como la ***Botella de Klein***





Está definición de la botella de Klein está relacionada con la vizualización tradicional, dada como el espacio cociente del rectangulo $[0,1] \times [0,1]$ por la relación de equivalencia que identifica los puntos $(x, 0) \sim (x, 1)$ y $(0, y) \sim (1, 1-y)$, con $0 \leq x$, $y \leq 1$, o un poco mas general como el cociente de $\mathbb{R}^2$ por la relación de equivalencia definida por $(x, y) \sim (x+n, (-1)^n y + m)$ para $n, m \in \mathbb{Z}$.

CAPÍTULO 4

CONCLUSIÓN

En este trabajo se ha presentado una breve introducción del concepto de acción de un grupo sobre conjuntos, ambos sin estructuras matemáticas y se obtienen resultados importantes, que luego sirven de base para algunos Teoremas que se obtiene al dotar el grupo y el conjunto de una estructura topológica.

En uno de los Capítulos introducimos a los grupos topológicos, en este caso la acción de este grupo sobre un espacio topológico debia ser continua. Cuando el grupo topológico es compacto, se obtienen propiedades especiales y aún más si el espacio tambien es Hausdorff. Esto no puede generalizarse para un grupo no compacto, pero algunas de estas ideas se pueden lograr cuando la acción del grupo sobre el espacio topológico es Propia.

Cuando abordamos la sección de acción propia, se puede encontrar diferentes definiciones de la misma, por ejemplo, las acciones de Cartan y las acciones propias (propias en el sentido de Bourbaki) y en las memorias de Palais [9], dice que una acción es (Palais-)Propia (propias en el sentido de Palais) es más restrictiva que la definición dada por Bourbaki [2]. Aunque la tarea de clasificar una acción como propia, de Cartan, Bourbaki-Propia, Palais-Cartan y Palais-Propia es aún complicada de realizar,pero en el Teorema 17 establece las condiciones necesarias para obtener una equivalencia entre los diferentes tipos de acciones Propias. En consecuencia se tiene lo siguiente: Las acciones Palais-propias son (Bourbaki-)propias, y las (Bourbaki-)propias son de Cartan.

Quedan trabajos futuros. Uno, referente al estudio de los $G-$espacios propios determinados bajo la acción de $G = \mathbb{R}$ o $\mathbb{Z}$ los cuales coinciden con los sistemas dinámicos discretos y continuos. Dos, también, cuando al grupo G y al espacio $X = M$ se las da estructuras diferenciables, el hecho que una acción de un G grupo de Lie actúe sobre M, que prerrequisitos se necesita para garantizar que el espacio cociente M/G sea también una variedad diferenciable.

Por último, estas ideas acerca de la acción de grupos se relacionan con muchas áreas de la matemática, por ejemplo, no solo en la teoría de Lie y la teoría de grupos discretos, sino también en la geometría diferencial, álgebra, teoría ergódica, sistemas dinámicos y otros.

APENDICE

ESPACIOS COMPLETAMENTE REGULARES

Podemos definir la noción de espacios regulares, resultados que se han usado para la demostración de la parte tercera en Acciones de Palais. Usando estos hechos, con los siguiente Teorema y Definiciones.

Definición 22 *Supongamos que los conjuntos unipuntaules son cerrados en X. entonces se dice que X es* **regular** *si para cada par formado por un punto x y un conjunto cerrado B que no contiene a x existen abiertos disjutos que contienen a x y a B.*

Proposición 24 *Sea X un espacio topológico donde los conjuntos unipuntuales son cerrados.*

X es regular si, y sólo si, dado un punto x de X y un entorno U de x, existe un entorno V de x tal que $\overline{V} \subset U$.

Definición 23 *Un espacio X es* **Completamente regular** *si los conjuntos unipuntuales son cerrados en X y si para cada punto x_0 y cada conjunto cerrado A que no contenga a x_0, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x_0) = 1$ y $f(A) = \{0\}$.*

Un espacio completamente regular es regular puesto que, dado un f, los conjuntos $f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ y $f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ son conjuntos abiertos y disjuntos que contienen a A y x_0.

Definición 24 *Un espacio topológico X es un espacio Tychonoff o $T_{\frac{3}{2}}$ si es Completamente regular y T_1.*

Ejemplo 9 *Todo espacio metrico es un espacio Tychonoff.*

LA MEDIDA DE HAAR

Teorema 18 (Teorema de Representación de Riesz) *Sea X un espacio localmente compacto y Hausdorff, y sea I un funcional lineal positivo en $K(X)$. Entonces existe una única medida regular de Borel μ en X tal que si $f \in K(X)$, entonces:*

$$I(f) = \int f d\mu$$

Definición 25 *Sea G un grupo localmente compacto y μ una medida de Borel en G. Decimos que μ es invariante por la izquierda si $\mu(gE) = \mu(E)$para todo g de G y E de B_G.*

Si I es un funcional lineal sobre $K(G)$. Decimos que I es invariante por la izquierda si $I(L_g f) = I(f)$ para toda f.

Nota.-

- *Aqui B_G denota al algebra de Borel sobre el grupo G.*
- $K(G) = \{f : G \to \mathbb{R} : Sop(f)$ *es compacta* $\}$ *y* $Sop(f) = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ *denominada el soporte de f.*

Definición 26 *Una medida izquierdade Haar en G es una medida regular de Borel, diferente de cero que es invariante por la izquierda .*

Proposición 25 *Sea G un grupo localmente compacto. Una medida regular de Borel no cero μ en G es una medida izquierda de Haar si y sólo si*

$$\int f d\mu = \int L_g f d\mu$$

para todo $f \in K^+(G)$, $g \in G$.

Teorema 19 *Todo grupo localmente compacto tiene una medida de Haar.*

COMPACTIFICACIÓN DE ALEXANDROFF

Teorema 20 *Sea (X, τ) un espacio topológico no compacto, ∞ un elemento que no pertenece al X. Se define el conjunto $X^* = X \cup \{\infty\}$ y*

$$\tau^* = \tau \cup \{A \subset X^* : X^* - A \text{ es cerrado y compacto en } X\}.$$

entonces $((X^*, \tau^*), i, \iota)$ es una compactificacion de X, donde ι es la aplicación inclusión.

Proposición 26 *Sea (X, τ) es un espacio topológico no compacto y $((X^*, \tau^*), \iota)$ su compactificación Alexandroff entonces $((X^*, \tau^*), \iota)$ es T_1 si y solo, si (X, τ) es T_1.*

APENDICE A

Acción de un Grupo Lie sobre una Variedad Diferencial

De manera similar al Capítulo 2, necesitamos dotar al grupo de una estructura diferencial y esta és conocida como Grupo de Lie. Estableceremos el concepto de diferenciabilidad en una variedad M y el de acciones difenciables en una variedad, en la cual usaremos un lenguaje de cartas coordenadas.

Definición 27 *Diremos que un espacio topológico M es una* **n-variedad** *topológica Haussdorff, con una colección de pares (U_α, ϕ_α) llamadas cartas y que $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ satisface las propiedades siguientes*

1. *Cada ϕ_α es un homeomorfismo de U_α abierto en $\mathbb{R}^n$.*
2. *La unión de todas las cartas es igual al espacio M.*
3. *Para cada α, β tales que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, la función de trancisión $\phi_{\alpha\beta} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ son diferenciables entre abiertos de $\mathbb{R}^n$.*
4. *La familia $\{(U_{\alpha)}, \phi_\alpha)\}$ (tambien llamada atlas) es máxima, respector a 2 y 3.*

Cuando se sobreentiende cual es la estructura suave, por lo general se omite la mención de ellos y solo se dice que M es una variedad suave. Las estructuras suaves, también son llamadas estructuras diferenciables o estructuras clase C^∞.

Definición 28 *Un Grupo de Lie $(G, \cdot)$ es un grupo, que además es una variedad suave, y se cumple lo siguiente:*

1. *La operación del grupo $\mu : G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto g \cdot h$ es una aplicación suave.*
2. *La aplicación $\iota : G \to G$ es suave.*

Ejemplo 10 *En un grupo de Lie, la aplicación de traslación a izquierda L_g (o derecha R_g), donde $g \in G$ es fijo, es suave, puesto que $L_g(h) = gh$ puede escribirse como la composición de las aplicaciones suaves*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "i_g"] \arrow[dr, "L_g"'] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\ & G \end{tikzcd}$$

donde i_g es la aplicación de inclusión dada por $i_g(h) = (g, h)$ y μ es la multiplicación, por lo tanto resulta qie L_g es suave. Además se tiene que es un difeomorfismo de G, puesto que L_g^{-1} es el inverso y también es suave.

Ejemplo 11 *Cualquier grupo finito o contable con la toplogía discreta es un Grupo de Lie cero-dimencional. Nuevamente se llamará este tipo de grupos como grupo de Lie discreto.*

Teorema 21 *Supongamos que G es un grupo de Lie y $H \subset G$ es un subgrupo que es también un sunconjunto cerrado. Entonces H es un subgrupo de Lie encajado.*

Con ello podemos dar paso a la definición de acción de un grupo de Lie sobre una variedad.

Definición 29 *Si G es un grupo de Lie, se dice que una acción de G en una variedad M es suave si la aplicación de $G \times M$ en M es suave, es decir si, $\theta_g(p)$ depende suavemente de (g, p). Si es así, entonces para cada $g \in G$, la aplicación $\theta_g : M \to M$ es un difeomorfismo, cuya inversa es $\theta_{g^{-1}}$.*

La importancia de los grupos de Lie proviene principalmente de sus acciones en variedades.

Ejemplo 12 *Cualquier grupo de Lie G actúa suave, libre, y transitivamente en sí mismo por traslación a izquierda o derecha. Más generalmente, si H es un subgrupo de Lie de G, entonces la restricción de maultiplicación $H \times G \to G$ define una acción a izquierda suave, libre (pero generalmente no transitiva) de H en G, del mismo modo, se puede hablar de una acción a derecha.*

Otros resultados interesantes son los sigientes.

Proposición 27 *Sea G un grupo de Lie que actúa suavemente en una variedad* *suave M. Si $p \in M$ se tiene que el estabilizador de p, G_p, es un subconjunto cerrado y un subgrupo de G. Esto significa que G_p es un subgrupo de Lie.*

Proposición 28 *Si $\theta : G \times M \to M$ es una acción propia, entonces M/G es de Hausdorff.*

Definición 30 *Sea M una $(n + k)$-variedad y G un grupo de Lie de dimensión k. Se dirá qua una carta coordenada (U, ϕ) en M, con funciones coordenadas $(x, y) = (x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_n)$, es $G-$carta adaptada si*

1. *$\phi(U)$ es un conjunto producto abierto $U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$, y*
2. *Si una órbita tiene intersección no vacía con U, entonces tal intersección tiene la forma $\{y^1 = e^1, ..., y^n = e^n\}$ para algunas constantes $e^1, ..., e^k$.*

Teorema 22 *Si $\theta : G \times M \to M$ es un acción libre y propia de un grupo de Lie, entonces para cada $p \in M$ existe una G-carta adaptada centrada en p.*

BIBLIOGRAFIA

Bibliografía

[1] A. Baker. *Matrix Groups: An Introduction to Lie Group Theory*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer London, 2012.

[2] Nicolas Bourbaki. *General Topology: Chapters 1–4*, volume 18. Springer Science & Business Media, 2013.

[3] G.E. Bredon. *Introduction to Compact Transformation Groups*. ISSN. Elsevier Science, 1972.

[4] S. de Neymet Urbina, R.J. B, Sociedad Matemática Mexicana, and Universidad Nacional Autónoma de México. Instituto de Matemáticas. *Introducción a los grupos topológicos de transformaciones*. Aportaciones matemáticas: Textos. Sociedad Matemática Mexicana, 2005.

[5] K.H. Hofmann and S.A. Morris. *The Structure of Compact Groups: A Primer for the Student – A Handbook for the Expert*. De Gruyter Studies in Mathematics. De Gruyter, 2020.

[6] Adriana Juzga Léon. *Acciones propias en grupos topológicos y aplicaciones a espacios cocientes*.

[7] C. Kosniowski. *Topología algebraica*. Reverte, 2021.

[8] James Munkres. *Topology*. Pearson Education, 2014.

[9] R.S. Palais. *The Classification of G-Spaces*. American Mathematical Society: Memoirs. American Mathematical Society, 1960.

[10] Carlos Arturo Escudero Salcedo, Oscar Fernández Sánchez, and Luis Eduardo Osorio Acevedo. *Accion de cartan, un caso especial de accion de grupos en sistemas dinamicos*, volume 15. Universidad Tecnológica de Pereira, 2009.