Tesis Aprobada con Maxima Distin.
2-12-98

UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRES

FACULTAD DE HUMANIDADES Y CIENCIAS DE LA EDUCACION

CARRERA DE FILOSOFIA

LA DISYUNCION EXCLUSIVA MULTIPLE

Descripción Semántico Sintáctica

POR:

IVAN ALFREDO OROZA HENNERS

PROFESOR GUIA:

Lic. BLITHZ LOZADA PEREIRA

TESIS DE GRADO PRESENTADA A LA CARRERA DE FILOSOFIA COMO REQUISITO PARA LA OBTENCION DEL TITULO DE LICENCIADO EN FILOSOFIA

La Paz -Bolivia-, noviembre de 1998

INTRODUCCION

Esta es una tesis sobre la disyunción exclusiva múltiple. Las conectivas múltiples no han sido estudiadas por la lógica matemática -esta tesis, pertenece, pues, a la lógica matemática-, de un modo sistemático, lo que equivale a decir que no han sido estudiadas. Bien que nada nuevo bajo el sol, dice el adagio, pero entonces nos referimos a la lógica matemática standard o a la que pretendemos aquí penetrar (alguna referencia y hasta algún trato de las conectivas múltiples, claro, siempre se encuentra, en algún autor, pero esto no es sistema y estandarización). Las conectivas múltiples, en lógica matemática, lo que quisiéramos sea lógica a secas, son la conjunción, la disyunción inclusiva, y la disyunción exclusiva. Su carácter de múltiple viene dado porque pueden conectar a un número n de proposiciones. Más, como veremos, sólo la disyunción exclusiva múltiple merece un estudio al modo como la lógica matemática trata a una conectiva, y en este caso debemos hablar del alcance de una conectiva, pues la lógica matemática ya ha estudiado a la disyunción bimembre, o disyunción exclusiva que conecta siempre dos proposiciones. La lógica matemática, pues, hasta aquí, ha tratado siempre a las conectivas como bimembres o unimembres (el caso de la negación). Más, veamos que la disyunción exclusiva múltiple es una conectiva de lo más común, cual las otras, y en un dominio ordinario como científico: "En su vida civil un hombre es casado, soltero, o viudo, o divorciado", "Un americano es o norteamericano, o centroamericano, o sudamericano" (y de allí una disyunción más amplia todavía), "no 2 es o 1 o 0 o 3 o 4, etc." (en un contexto de análisis lógico de la aritmética), "Un cálculo de probabilidades se basa en n posibilidades mutuamente excluyentes", "Una partícula atómica es o un protón o un electrón o un neutrón o un quark, etc.", "Un sistema axiomático sintáctico de lógica matemática puede operar con una conectiva primitiva, o con dos, o con tres, o con cuatro, o etc." (la inventiva técnica fabricando conectivas). Vemos, pues, que no podemos desatender a la disyunción exclusiva múltiple en atención a su yuxtaposición a las otras. Esto en un primer momento intuitivo cual los ejemplos, pero veremos en su estudio formal que goza de todas las otras características de una conectiva lógica, como ser una tabla de verdad, una naturaleza sintáctica, poseer tesis o fórmulas propias, entrar en las relaciones de interdefinición, etc., y muy en particular, poseer una exigencia pragmática que da positivo a su estudio, cual es el "a priori" en al que se basa este libro (una partícula lógica no puede ser ignorada por la lógica, pero sí puede estudiarse más bien otra partícula que la defina).

En cuanto al modo en que estudiaremos a la disyunción exclusiva múltiple, y de pasada a las otras conectivas múltiples, útiles para estudiar a la primera, no será otro que el de una semántica para la conectiva en cuestión, y luego una sintaxis de la misma, que es el trato que da la lógica matemática a las conectivas. La **semántica** procederá por los conocidos métodos de las tablas de verdad, como alternativa elegida y más standard. La **sintaxis** procederá a la deducción de las leyes de la conectiva en cuestión, a partir de un sistema axiomático dado -también standard-, al que se incorpora una definición de la conectiva a estudiar. El criterio pragmático, que es otra de las dimensiones del lenguaje que considera la lógica matemática, estará siempre presente en nuestro estudio, precisamente para recortarlo, en lo posible, dada la complicación o extensión de lo múltiple que vincula a **n** proposiciones. Un capítulo conclusivo pretenderá despejar la sorpresa creada respecto de la incorporación de nuevos teoremas a la lógica matemática, o la descripción de la disyunción exclusiva múltiple, que es el objetivo de esta tesis, a la par que redondear los últimos detalles de la misma en cuanto conectiva.

Esta tesis nació de la continua práctica de articular discursos -o tratar de hacerlo- en materia filosófica, usando el simbolismo y la lógica matemáticos, a la vez que meditar sobre la propia lógica y el simbolismo estos, a fin de dar o pretender dar una base más firme al razonar filosófico, cual la lógica matemática se jacta de ser perfecta. Como la conectiva Vn o disyunción exclusiva múltiple aparecía de continuo, era natural dedicarle un estudio formal, y en virtud de su ausencia en la lógica matemática hasta aquí.

Agradecemos a quienes han hecho sugerencias al texto, en particular al Licenciado B. Lozada, a la vez que ofrecido literatura lógica, y pedimos disculpas al lector por ciertas repeticiones que quizá hubieran podido evitarse (a menudo, en lógica, no se escribe sucesivamente).

I SEMANTICA

1. Las conectivas de la lógica matemática y las conectivas múltiples

La lógica matemática ha definido las siguientes conectivas y la negación:

La negación,

$\neg$	(A)
f	v
v	f

La conjunción,

A	$\wedge$	B
v	v	v
v	f	f
f	f	v
f	f	f

La implicación,

A	$\rightarrow$	B
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	v	f

La disyunción inclusiva,

A	$\vee$	B
v	v	v
v	v	f
f	v	v
f	f	f

La coimplicación,

A	$\leftrightarrow$	B
v	v	v

v	f	f
f	f	v
f	v	f

La disyunción exclusiva,

A	$\veebar$	B
v	f	v
v	v	f
f	v	v
f	f	f

El procedimiento de construcción de estas definiciones, por medio de tablas de verdad, es el siguiente: se atribuye verdad o falsedad, v $\veebar$ f, a cada una de las proposiciones simples (que son las que no llevan conectivas o negación), simbolizadas por una letra; este es el principio de una lógica bivalente, que es la que seguimos aquí; luego, se buscan las combinaciones posibles de estos dos valores de verdad (verdad o falsedad), para las n proposiciones en cuestión (2, en nuestro caso, o arriba), y según el algoritmo matemático de 2 a la n, que da el número de combinaciones; finalmente, se utilizan los tenores intuitivos de las definiciones para cada conectiva y la negación, lo que las convierte en funciones de verdad (verdaderas y falsas, y proposiciones complejas), según los valores de verdad de sus proposiciones simples componentes (es de destacar que la función de verdad o conectiva o negación también es función analítica de su propia definición o tenor). Los tenores de estas definiciones pueden ser los siguientes: la negación tiene el valor de verdad contrario al de la letra negada; la conjunción es verdadera si y sólo si las dos letras o proposiciones simples son verdaderas; la implicación es falsa si y sólo si la letra o proposición simple antecedente es verdadera, y la letra o proposición simple consecuente es falsa; la disyunción inclusiva es falsa si y sólo si ambas proposiciones simples son falsas; la coimplicación es verdadera a similares valores de verdad de las componentes; la disyunción exclusiva es el caso opuesto a la coimplicación; luego haremos alguna observación sobre estos tenores, destacando aquí que supónese transcriben el orden intuitivo de la lógica (razonamiento científico con polémica hacia lo filosófico, y vida ordinaria), aunque mejor sería decir que transcriben en parte el orden intuitivo o al menos en parte (la polémica es suficientemente conocida por los lógicos); las definiciones de las conectivas y la negación sirven para indagar el valor de verdad de cualquier fórmula, ya que una proposición compleja es a su vez verdadera o falsa, y puede conectarse a otras o negarse. Apartándonos, ahora, por un momento, de las definiciones dadas, que propusimos para modelo de tablas heurísticas abajo, preguntémonos cuántas proposiciones -por ahora simples- conecta una conectiva, y cuál conectiva. La negación afecta, evidentemente, a una sola proposición. La implicación y la coimplicación, igualmente que la anterior, afecta a un número constante de proposiciones, pero esta vez dos, y sólo dos. La conjunción, la disyunción inclusiva, y la disyunción exclusiva, conectan un número variable de proposiciones, siempre que este número sea mayor que uno; diremos que estas tres últimas conectivas, que llamaremos conectivas múltiples, conectan un número n de proposiciones, para n igual o mayor que dos. Los lógicos matemáticos, hasta aquí, han solido hablar de conectivas u operadores monoargumentales -la negación-, y conectivas biargumentales -el resto de las propiamente conectivas-, entendiendo que las proposiciones son "argumentos"; pero he aquí que la lógica matemática, hasta aquí, siempre ha tratado a las conectivas lógicas como afectando a una proposición, o a dos proposiciones, en exclusiva, descartando el carácter múltiple de las conectivas que arriba señalamos como múltiples; es preciso, pues, echar un vistazo a este carácter múltiple de las conectivas tales, a fin de indagar si no tienen con ello un momento heurístico para la lógica matemática, nuevas leyes lógicas, por ejemplo; nuestra intuición de las conectivas múltiples, de su existencia, es una intuición elemental, de modo que podremos prescindir de ejemplos concretos; siendo así, propongamos el siguiente sencillo ejemplo, que distinguimos claramente de su asociación por pares, y que indagamos mediante las tablas de verdad, a modelo de las de arriba, cual si fuera la tabla de la definición de la conjunción de tres miembros, conjunción trimembre. Sea

A	∧	B	∧	C
v	v	v	v	v
v	f	v	f	f
v	f	f	f	v
v	f	f	f	f
f	f	v	f	v
f	f	v	f	f
f	f	f	f	v
f	f	f	f	f

Esta tabla se ha construido a la manera lógica de las tablas bimembres, sólo que para una conexión trimembre o conectiva n ahora 3; las letras son v o f, están sus 8 combinaciones posibles, y el tenor de la definición es ahora (cambiamos a): la conjunción (tríadica) es verdadera si y sólo si sus tres miembros son verdaderos; como la conectiva o negación es la que da el nombre a la proposición compleja, en cualquier caso, es decir, una proposición compleja es una negación, una implicación, una conjunción, una disyunción, etc., entonces el valor de verdad de la proposición compleja se anota debajo de la conectiva correspondiente; como en nuestro caso tenemos una conjunción que requiere de dos signos "∧" para su expresión, anotamos el valor de verdad de la conjunción debajo de cada uno de ellos, valor de verdad que siempre debe de ser el mismo, porque se trata de una sola proposición, y no de dos, que es lo que permitiría valores diferentes; queda, pues, obvio, el lugar del valor de verdad de una conectiva múltiple, así como que debe ser o verdadero o falso. Es el momento de comparar nuestro resultado, con la tabla de verdad propuesta por la lógica matemática hasta aquí para el mismo ejemplo, asociándolo en pares.

(A	∧	B)	∧	C
v	v	v	v	v
v	v	v	f	f
v	f	f	f	v
v	f	f	f	f
f	f	v	f	v
f	f	v	f	f
f	f	f	f	v
f	f	f	f	f

Desde luego que distinguimos claramente, intuitivamente, entre "A ∧ B ∧ C", y "(A ∧ B) ∧ C", o el equivalente lógico de este último, por ley de asociación de la conjunción bimembre, "A ∧ (B ∧ C)"; no es lo mismo, intuitiva y lógicamente, la conjunción de tres proposiciones, que la conjunción de una proposición y la conjunción de dos proposiciones; pero más allá de esta diferencia lógica, e intuitiva, en la que se advierte con la misma claridad la equivalencia entre las dos expresiones, las tablas de verdad respectivas nos muestran de un modo formal y mecánico -su modo propio-, que no se trata de la equivalencia del principio de identidad. Lo primero que descuella en la cotejación de las tablas respectivas, es que se trata de una equivalencia (las proposiciones complejas tienen el mismo valor de verdad siempre); pero la tabla en sí, toda, completa, es diferente, lo que nos habla de una equivalencia que no es el principio de identidad "A ↔ A" para equivalencia: la segunda línea de las tablas es diferente, y ello sólo puede ser porque las fórmulas son diferentes, registrando una equivalencia en su valor de verdad central; en efecto, sólo si se trata de "A ↔ A" las tablas pueden ser en sí iguales, y viceversa; en nuestro caso, la diferencia es sutil, sólo la segunda línea, pero basta para establecer la diferencia. Contra esta prueba formal por tablas de verdad, de la no identidad de una equivalencia, podría argumentarse lo siguiente: si escribimos la implicación, por ejemplo, al revés, "B ← A", la equivalencia "A → B ↔ B ← A" podría ser considerada como no reducible al principio de identidad, al construir sus tablas de verdad, porque éstas serían diferentes; a esto se objeta lo siguiente: si "A ← B", se considera como una conexión lógica para uso técnico (ya que difícilmente tendría cabida en el orden intuitivo), la implicación inversa, con diferente definición, entonces la equivalencia propuesta es una equivalencia diferente de la identidad (tablas en sí diferentes); pero si sólo se trata del capricho de escribir la implicación al revés, entonces cabe leer también la tabla de verdad al revés, con lo que tenemos meramente la equivalencia del principio de identidad. En lógica consideramos leyes lógicas a expresiones tan sutiles o triviales como "$A \leftrightarrow B \leftrightarrow B \leftrightarrow A$", o "$A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$", al modo como el matemático considera una ley la conmutación en la suma o en el producto; todo lo dicho anteriormente nos sirve para afirmar, tras el análisis de las tablas de "$A \wedge B \wedge C \leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$", que se trata de una auténtica ley lógica diferente de la identidad, y, en adelante, cada vez que tengamos una tabla de verdad en sí diferente, por muy trivial que sea la fórmula, afirmaremos igualmente una heurística ley lógica.

2. La conjunción y la disyunción inclusiva múltiples

Oteemos ahora, para colofón en cuanto a la conjunción, conjunción n versus asociación cualquiera, y asociación por pares. Sea

$$A \wedge B \wedge C.....\wedge n \leftrightarrow A \wedge B \wedge C....\{[()]\}..\wedge n$$

El símbolo o expresión, o notación, ".....n", es metateorético, y denota una cantidad finita (por definición de fórmula lógica, las proposiciones complejas se forman a partir de simples), pero potencialmente infinita de letras proposición, y donde n es igual o mayor a dos. Lo de metateoría, aún en semántica, necesario aquí, se debe al uso usual de definición de metateoría: la fórmula -o metafórmula, en realidad-, el término izquierdo, habla acerca de una pluralidad de fórmulas del lenguaje objeto, que son precisamente todos los números posibles de sustitución de n, o números posibles de proposiciones. El término derecho, igualmente, es una metafórmula, merced a la convención -tal vez un tanto poco elegante- usada de anotar los signos de puntuación lógicos -paréntesis, corchetes, llaves y más llaves-, para indicar la libre asociación de las letras del término izquierdo (la libre asociación puede crear conjunción de conjunciones de conjunciones, etc., pudiendo tener cada conjunción cualquier número de términos, siempre que n lo permita, y pudiendo ser estas conjunciones simples letras proposición, obviamente no todas). La demostración de la equivalencia es trivial, pero la escribiremos por protocolo: si el término izquierdo es verdadero, todas las letras proposición son verdaderas (nuevo tenor para la definición de conjunción, esta vez la general, y para n proposiciones, n igual o mayor que dos), entonces los términos de las conjunciones básicas del lado derecho son verdaderos, y estas conjunciones básicas verdaderas, con lo cual, las conjunciones de conjunciones, etc., resultan siempre verdaderas, hasta la final. Si el término izquierdo de la equivalencia es falso, al menos una de sus letras es falsa; entonces, una conjunción básica es falsa, y la conjunción de conjunciones, etc., resulta falsa, hasta la final. Anotaremos este resultado, la equivalencia demostrada como tautología, abreviadamente como "$\wedge n \leftrightarrow \wedge n()$", siempre para $n \geq 2$, y sacaremos algunas consecuencias de interés. Sea

$$\wedge n() \leftrightarrow \wedge n()$$

En esta metafórmula convenimos que los paréntesis pueden ser iguales a cero. Ha sido obtenida por la ley de transitividad de la equivalencia, a partir de "$\wedge n \leftrightarrow \wedge n()$", y de la identidad "$\wedge n \leftrightarrow \wedge n$". Expresa en su forma más general y final, o directa, la más completa libertad de asociación dentro de la conjunción múltiple (recordemos que la deducción de esta metafórmula establece que la libre asociación de cada término es independiente).

$\wedge 3()2 \leftrightarrow \wedge 3()2$

En esta metafórmula -lo sigue siendo, y no ya una fórmula, a pesar de haber sustituido **n** por 3-, se ha convenido escribir "()2" como convención para indicar asociación por pares. Es decir, que "$\wedge$" se comportará como "$\wedge \leftrightarrow \neg(\rightarrow\neg)$", notación que alude a la conocida equivalencia o definición "$A \wedge B \leftrightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)$", que garantiza la biargumentalidad exclusiva de "$\wedge$", gracias a la biargumentalidad exclusiva de "$\rightarrow$". La metafórmula expresa la conocida ley de asociación para la conjunción biargumental "$A \wedge (B \wedge C) \leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$", de la lógica matemática hasta aquí (nuestra fórmula es una metafórmula porque expresa la anterior fórmula en su al revés o conmutación simultáneamente).

$\wedge n \leftrightarrow \wedge n()2$

Esta metafórmula ha sido obtenida por sustitución de "()2" en "$\wedge n \leftrightarrow \wedge n()$". Establece que la conjunción múltiple "$\wedge n$" es equivalente a su asociación por pares, con lo cual, todas las leyes de la conjunción biargumental de la lógica matemática hasta aquí, son por equivalencia leyes de la conjunción múltiple, y viceversa (la lógica matemática hasta aquí ha hecho un estudio completo de la conjunción biargumental). Esto quiere decir, que salvo "$\wedge n \leftrightarrow \wedge n()$" y "$\wedge n() \leftrightarrow \wedge n()$" en las que intervenga algún **n** o **()** mayor que dos, el estudio de la lógica matemática hasta aquí es equivalente al de la conjunción múltiple.

Expongamos, ahora, un ejemplo de deducción con conjunción múltiple, y ejemplo de eficacia para las tablas de verdad múltiples, y para remate de esta investigación sobre la conjunción múltiple. Un razonamiento típico con negación de conjunción, o "silogismo conjuntivo". Sea

$[\neg(A \wedge B \wedge C) \wedge A]$	$\rightarrow$	$(\neg B \vee \neg C)$
f v v v v v f v	v	f v f f v
v v f v f f v v	v	f v v v f
v v f f f v v v	v	v f v f v
v v f f f f v v	v	v f v v f
v f f v f v f f	v	f v f f v
v f f v f f f f	v	f v v v f
v f f f f v f f	v	v f v f v
v f f f f f f f	v	v f v v f

Corresponde, ahora, estudiar la disyunción inclusiva múltiple, con todo el arsenal de notación y modo expuesto para la conjunción múltiple; el caso de la disyunción inclusiva múltiple es menos trivial, deja de ser "protocolo". Sea

$$A \vee B \vee C.....\vee..n \leftrightarrow A \vee B \vee C....\{[()]\}..\vee n$$

La definición para la disyunción inclusiva para **n** proposiciones es (cambiamos el tenor a): "Vn" es verdadera si y sólo si no se da el caso de que todas sus letras proposición (ulteriormente éstas pueden cambiarse por proposiciones complejas) sean falsas. Si el término izquierdo es verdadero, al menos una de sus letras proposición es verdadera, en consecuencia, al menos una de las disyunciones básicas del término de la derecha es verdadera, con lo cual, la disyunción de disyunciones correspondiente es verdadera, y la disyunción de disyunciones de disyunciones, etc., es verdadera, hasta la final. Si el término de la izquierda es falso, todas sus letras proposición son falsas, con lo cual, todas las disyunciones básicas son falsas, y la disyunción de disyunciones, etc., falsa, hasta la final. Tenemos, pues, demostrada, la metafórmula "$\vee n \leftrightarrow \vee n()$, para $n \geq 2$", según nuestra notación abreviada. Escribamos sus consecuencias, deducciones, según lo hecho para "$\wedge$n".

$$Vn() \leftrightarrow Vn(), \quad \text{para } () = o \neq 0$$

$$V3()2 \leftrightarrow V3()2, \quad \text{donde } ()2 = [V \leftrightarrow (\neg\to)]$$

$$Vn \leftrightarrow Vn()2$$

Podríamos añadir

$$Vn()2 \leftrightarrow Vn()2$$

La cual es la aplicación recursiva de "$V3()2 \leftrightarrow V3()2$" a un conjunto n de proposiciones disyuncionadas por pares, o "$Vn()2$", lo cual representa una propiedad conocida de la ley de asociación de la disyunción inclusiva bimembre, de la lógica matemática hasta aquí.

Añadamos, a guisa de ejemplos, algunas tesis de la disyunción inclusiva múltiple, ya que, aunque equivalentes a tesis de la disyunción bimembre -suficientemente conocidas por la lógica matemática hasta aquí-, nosotros emplearemos la disyunción inclusiva -y la conjunción- en sentido múltiple. Sean

$$A \vee B \vee C\ldots\ldots\vee n \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C\ldots\ldots\wedge \neg n)$$

$$\neg A \vee \neg B \vee \neg C\ldots\ldots\vee \neg n \leftrightarrow \neg(A \wedge B \wedge C\ldots\ldots\wedge n)$$

Son las leyes de Morgan para disyunción -y conjunción- múltiple.

$$[A \vee B \vee C\ldots\ldots\vee n] \leftrightarrow [\neg A \to (B \vee C \vee D\ldots\vee n)]$$

Una definición de disyunción múltiple, la misma que es recursiva[1]; es decir, que debe volverse a aplicar tantas veces como sea necesario, para acabar con el signo "V" en el consecuente del término derecho.

$$A \wedge B \wedge C\ldots\ldots\wedge n \to A \vee B \vee C\ldots\ldots\vee n$$

Una tesis "paradójica" de la disyunción inclusiva múltiple; del mero hecho de darse una serie n de proposiciones, se sigue que se excluyen inclusivamente mutuamente.

---

[1] Véase el glosario para Recursión o Recursiva.

$$[(A \vee B \vee C.....\vee n) \wedge (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)] \rightarrow (D \vee E...\vee n)$$

Un silogismo típico para la disyunción inclusiva múltiple, paralelo al silogismo disyuntivo biargumental, que es el mismo múltiple para n igual a 2.

Para remate de la disyunción inclusiva múltiple, de su indagación, y esto vale también para la conjunción múltiple, advertiremos como una nota extra que no debe confundirse a una conectiva múltiple con la convención de no usar paréntesis al escribir las fórmulas, de quienes trabajan con las conectivas en sentido biargumental; la convención da una multiplicidad sólo aparente, cuando en realidad las letras están asociadas en pares, y las proposiciones complejas resultantes también asociadas en pares; sin embargo, puede facilitarse la lectura para quien lea convención por multiplicidad.

Con esto terminamos nuestro trabajo en torno a la conjunción y disyunción inclusiva múltiples; por resultado, anotaremos las metafórmulas "$\wedge n \leftrightarrow \wedge n()$" y "$\vee n \leftrightarrow \vee n()$", siempre para $n \geq 2$, que nos dicen no sólo que una conectiva múltiple es equivalente a otra asociación cualquiera de ella -lo cual, sí, es una metaley, diremos-, sino que es equivalente a su asociación por pares, o "$\wedge n \leftrightarrow \wedge n()2$" y "$\vee n \leftrightarrow \vee()2$", con lo cual ha sido ya plenamente estudiada por equivalencia. No tiene sentido, pues, estudiar las leyes de "$\wedge n$" y "$\vee n$", diferentes a "$\wedge n \leftrightarrow \wedge n()$" y "$\vee n \leftrightarrow \vee n()$"; por otra parte, estas dos últimas metafórmulas, que nos hablan de la diferencia entre "$\vee n$" y "$\vee 2$", entre "$\vee n$" y "$\vee n()$", entre "$\vee n()$" y otra asociación libre "$\vee n()$" -para hablar con el ejemplo de la disyunción inclusiva-, y que en estas diferencias se verifican genuinas leyes lógicas (pensad en las diferencias en la tabla de verdad completa, aún desarrollada en forma abreviada), estas metafórmulas no tienen el poder de convertirse en una tesis heurística para la lógica matemática hasta aquí. Si bien necesarias -son la sanción de la lógica matemática hasta aquí en cuanto a conjunción y disyunción inclusiva, pero faltaba esta sanción- son tan triviales como estudiar otra vez la lógica matemática hasta aquí, en cuanto a conjunción y disyunción inclusiva, pero esta vez en sentido múltiple. Estamos, pues, de acuerdo, en que la lógica no puede tomar **todos** los aspectos del lenguaje ordinario y científico, y, sí, más bien, un sistema suficiente y no excesivamente avaro, más bien cómodo, para encarar todo el mundo lógico. La metafórmula "$Vn \leftrightarrow Vn()$", y su par en conjunción, nos sirve -además de para despachar el estudio de la conjunción y disyunción inclusiva- para introducirnos al estudio de la disyunción exclusiva, que es donde no se verifica la metafórmula "$\underline{V}n \leftrightarrow \underline{V}n()$". Como ganancia del trabajo con tablas para conjunción y disyunción inclusiva, sin embargo, podría anotarse que abrevian la construcción de tablas (menos columnas y cálculos), y que, por supuesto, por la trivialidad de la equivalencia con sus asociaciones -por pares, por ejemplo-, si escribimos lo múltiple como múltiple, daremos en pleno con el mundo real. Además de que al haber descubierto "$<n \leftrightarrow <n()$", hemos contado una anécdota en lógica matemática.

3. La disyunción exclusiva múltiple

Empezamos, como al principio con la conjunción, con "$\veebar 3$" versus "$\veebar 3()2$" para la disyunción exclusiva. Sea

A	$\veebar$	B	$\veebar$	C	$\leftrightarrow$	(A	$\veebar$	B)	$\veebar$	C
v	f	v	f	v	f	v	f	v	v	v
v	f	v	f	f	v	v	f	v	f	f
v	f	f	f	v	v	v	v	f	f	v
v	v	f	v	f	v	v	v	f	v	f
f	f	v	f	v	v	f	v	v	f	v
f	v	v	v	f	v	f	v	v	v	f
f	v	f	v	v	v	f	f	f	v	v
f	f	f	f	f	v	f	f	f	f	f

La definición, el tenor, para disyunción exclusiva tríadica es, ahora (cambiamos de la biádica a): es verdadera si y sólo si una de las letras proposición es verdadera, y las otras falsas. Apreciamos, de inmediato, que no se registra la equivalencia (como tautología, es, más bien, una contingencia), y que, obviamente, no se trata de la identidad (que exige equivalencia), con lo cual las tablas son en sí diferentes. Tenemos, si por lógica matemática hasta aquí sabemos que "$(A \veebar B) \veebar C \leftrightarrow A \veebar (B \veebar C)$", que no se registra la metafórmula "$\veebar 3 \leftrightarrow \veebar 3()2$" (mucho cuidado con entender que esto no significa que se registre "$\neg(\veebar 3 \leftrightarrow \veebar 3()2)$", o "$\veebar 3 \veebar \veebar 3()2$"); si pretendiéramos extender este resultado a que no se registra "$\veebar n \leftrightarrow \veebar n()$" a la manera como procedimos con las conectivas anteriores (pero para probar que se registra en ellas la equivalencia), nos toparíamos con un largo proceso demostrativo. Sin embargo, en lógica se demuestra lo que es tautología, y lo que es negación de tautología es contradicción (no se verá en nuestros estudios que sea tautología "$\neg(\veebar n \leftrightarrow \veebar())$"), quedando las contingencias fuera de estos aspectos, o sin demostración de que no son tautologías; esto nos libera de la larga demostración de que no se verifica "$\veebar n \leftrightarrow \veebar n()$", ejercicio que queda para el lector insatisfecho, mediante las tablas de verdad abreviadas. Sacaremos las conclusiones -aún para la no verificación- de "$\veebar n \leftrightarrow \veebar n()$" como hicimos para las anteriores conectivas.

No se verifica $\veebar n() \leftrightarrow \veebar n()$, para $() \neq ()$, y $() = o \neq 0$

Con la cláusula "$() \neq ()$" excluimos la identidad, o que la libre asociación izquierda debe ser siempre diferente a la derecha. La demostración de esta tesis, o metatesis, es aún más complicada que la de "$\veebar n \leftrightarrow \veebar n()$", ya que no procede de ésta, ya que no hay transitividad de la no equivalencia: dos tesis no equivalentes a una tercera pueden ser equivalentes entre sí. $\neg(\veebar n() \leftrightarrow \veebar n())$, tampoco es tautología.

Se verifica $\veebar n()2 \leftrightarrow \veebar n()2$, donde $()2 = [\veebar \leftrightarrow (\leftrightarrow\neg)]$

El comportamiento de "$\veebar$" como "$\leftrightarrow\neg$", en alusión a la tautología o definición "$(A \veebar B) \leftrightarrow (A \leftrightarrow \neg B)$", garantiza su biargumentalidad. Esta tesis es demostrable por la aplicación recursiva de la metatesis siguiente.

Se verifica $\veebar 3()2 \leftrightarrow \veebar 3()2$

Esta metafórmula contiene la conocida ley de asociación para la disyunción exclusiva "$A \veebar (B \veebar C) \leftrightarrow (A \veebar B) \veebar C$", y su conmutación. Por recursión, esta ley organiza en una otra asociación cualquiera por pares, una serie n de letras disyuncionadas exclusivamente. Y, en realidad, esta es la única ley de asociación para la disyunción; este es, pues, nuestro único resultado positivo para la disyunción exclusiva, y pertenece sobradamente al acervo de la lógica matemática hasta aquí.

Pongamos un ejemplo, antes de seguir con la semántica de la disyunción exclusiva múltiple. Si confundimos "$A \veebar B \veebar C$", con "$(A \veebar B) \veebar C$", es decir vemos allí una equivalencia, si nos dan a elegir entre tres objetos (uno de entre los tres), podríamos elegir los tres (primera línea de la tabla expuesta arriba). Puede haber la tendencia a organizar los objetos para la elección, por ejemplo, si dos de éstos pertenecen a un mismo género, preferencia o interés, entonces se propondría "$(A \veebar B) \veebar C$", por ejemplo, para elegir; la lógica aconseja escribir, para estos casos de organización de la elección, "$[(A \veebar B) \wedge \neg C] \veebar [C \wedge (\neg A \wedge \neg B)]$, para una elección saludable. Otro modo de salirse con la suya de elegir los tres objetos a la vez podría ser, ya que la tabla arriba propone como tautología "$A \veebar B \veebar C \rightarrow (A \veebar B) \veebar C$", y si es cierto que tenemos que elegir entre los tres objetos uno, entonces tenemos por modus ponens "$(A \veebar B) \veebar C$", con lo cual, podríamos elegir la primera línea de la tabla; la lógica recomienda no olvidar, en este caso, que, a pesar de tener, en efecto "$(A \veebar B) \veebar C$", tenemos también "$A \veebar B \veebar C$", y que su conjunción elimina la primera línea conflictiva, y que nos vemos obligados siempre a elegir uno y sólo uno de los objetos, según las leyes de la disyunción exclusiva múltiple. Estos ejemplos, tal vez un tanto burdos -malos sofismas-, pueden hacer a su vez un tanto de publicidad gratuita a la popularidad de la disyunción exclusiva múltiple como conectiva lógica.

Como conclusión, pues, para la disyunción exclusiva múltiple, tras el remate del ejemplo, en este preliminar, diremos que la no verificación de "$\veebar n \leftrightarrow \veebar n()$", nos autoriza a estudiar esta conectiva lógica, más allá de esta ya no trivial no verificación; hácese necesario indagar todas sus leyes, cual la negación, la implicación, conjunción, disyunción inclusiva, etc.; menester es, sin embargo, aclarar que no hablaremos del descubrimiento de una nueva conectiva, en sí, sino del alcance de una conectiva, a partir de dos, lo que genera la disyunción exclusiva múltiple, en la cual, a su vez, se subsume la disyunción biargumental (**n** igual o mayor a dos siempre es la cláusula).

4. La definición de la disyunción exclusiva múltiple

Lo que corresponde en semántica, para una conectiva, aprovechando el momento intuitivo, o de significado, es buscarle una definición a la conectiva múltiple en cuestión, ya que, en lógica, el estudio sistemático de las leyes de una conectiva se realiza más bien en la sintaxis de la misma, o sintaxis lógica. Sintaxis que, precisamente, parte de una definición. En lo sucesivo, tras la definición o para la definición, podremos hablar de una disyunción exclusiva sin más, en lugar de una disyunción exclusiva múltiple. Sean

$$(A \veebar B) \leftrightarrow [(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)]$$

$$(A \veebar B) \leftrightarrow \neg(A \leftrightarrow B)$$

$$(A \veebar B) \leftrightarrow [(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)]$$

$$(A \veebar B) \leftrightarrow [\neg(A \wedge B) \wedge \neg(\neg A \wedge \neg B)]$$

Son las definiciones -tautologías suficientemente conocidas por la lógica matemática hasta aquí- propuestas para la disyunción exclusiva biargumental; a partir de ella, y comenzando con "$\veebar 3$", para ganar el momento intuitivo (aunque, desde luego, fuerza una comprobación formal por tablas de verdad), extenderemos las definiciones. Insistimos en que el momento intuitivo es de primera mano, salvo tal vez la tercera definición. Sean

$$A \veebar B \veebar C \leftrightarrow (A \vee B \vee C) \wedge \neg(A \wedge B \wedge C) \wedge \neg(A \wedge B \wedge \neg C) \wedge \neg(A \wedge \neg B \wedge C) \wedge \neg(\neg A \wedge B \wedge C)$$

Para la segunda definición, escribiremos más bien "$A \leftrightarrow \neg B$", y aun la descompondremos a "$(A \rightarrow \neg B) \wedge (\neg A \rightarrow B)$".

$$A \veebar B \veebar C \leftrightarrow [A \rightarrow (\neg B \wedge \neg C)] \wedge [\neg A \rightarrow (B \veebar C)]$$

Tercera y cuarta definiciones

$$A \veebar B \veebar C \leftrightarrow (A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$$

$$A \veebar B \veebar C \leftrightarrow \neg(A \wedge B \wedge C) \wedge \neg(A \wedge B \wedge \neg C) \wedge (A \wedge \neg B \wedge C) \wedge \neg(\neg A \wedge B \wedge C) \wedge \neg(A \vee B \vee C)$$

En esta versión de las definiciones arriba para "$\veebar 3$" hemos prescindido de los paréntesis para cada lado de la equivalencia. Son definiciones -para "$\veebar 3$"- que son intuitivas de primera mano y hasta triviales (esta trivialidad podría reemplazar a la rápida demostración por tablas abreviada, es decir, ser la misma demostración), de suerte que prescindimos de la demostración por tablas, tanto abreviada como la morosa en detalle; salvo, en torno a la segunda, que podría parecer no tan trivial. Y, precisamente, es la segunda definición la elegida, debido a su descollante manejabilidad; aunque su manejabilidad, es más bien su recursividad, dado que debe emplearse otra vez -el criterio intuitivo empleado- para despejar la disyunción exclusiva que resta en el definiendo; pero aún así, escribiendo la recursión, resulta más manejable que las otras: piénsese en los 12 juegos de paréntesis para "$\veebar 4$", y los 27 para "$\veebar 5$", en las otras definiciones. Naturalmente, lo que siempre sigue siendo una ganancia en lógica, es la recursión.

La definición segunda es intuitiva en el sentido de que una proposición "A" en disyunción exclusiva con otras, implica que -de darse-, entonces no se dan las otras; y de no darse, se propone la disyunción exclusiva entre las otras; y viceversa. Pero podría asaltarnos una duda, así que la comprobamos formalmente, y en lógica hasta lo trivial debe comprobarse formalmente. De modo que daremos una prueba formal -merced a las tablas abreviadas-, ya para "$\veebar n$". Sea

$$A \veebar B \veebar C.....\veebar n \leftrightarrow [A \rightarrow (\neg B \wedge \neg C...\wedge \neg n)] \wedge [\neg A \rightarrow (B \veebar C...\veebar n)]$$

Si el término de la izquierda de la equivalencia es verdadero, según el tenor de la definición de "$\veebar n$" (una, y sólo una de las proposiciones debe ser verdadera y necesariamente una, cambiamos, pues, a este nuevo tenor, a partir de lo bi y triargumental, y es el tenor definitivo), entonces una de las proposiciones del término de la derecha es verdadera y las otras falsas; si la proposición verdadera es "A", entonces el primer término de la conjunción es verdadero (consecuente verdadero), y el segundo también verdadero (antecedente falso), con lo cual la conjunción es verdadera; si la proposición verdadera no es "A", entonces el primer término de la conjunción es verdadero (antecedente falso), y el segundo término de la conjunción también verdadero (consecuente verdadero, una sola letra proposición verdadera), con lo cual la conjunción es verdadera. Si el término izquierdo de la equivalencia es falso, entonces hay más de una proposición verdadera, o todas son falsas; si ocurre lo primero, y una de las proposiciones verdaderas es "A", entonces el primer término de la conjunción del término de la derecha de la equivalencia es falso (antecedente verdadero con consecuente falso, ya que uno de los términos de esta conjunción es falso), con lo cual la conjunción o término derecho es falso; si "A" no es una de estas más de una proposiciones verdaderas, entonces el segundo término de la conjunción del término derecho de la equivalencia es falso (antecedente verdadero, con consecuente falso, ya que más de un término es verdadero en disyunción exclusiva), con lo cual, la conjunción derecha es falsa; si el término izquierdo de la equivalencia es falso porque todas sus letras proposición son falsas, entonces el término derecho de la equivalencia es falso (antecedente verdadero, con consecuente falso, ya que todos sus términos en disyunción exclusiva son falsos), con lo cual, la conjunción del término derecho de la equivalencia es falsa. Queda, pues, demostrada la definición (que en semántica, o trabajo con tablas de verdad, quedará anotada mediante "↔", y no "Def.", que no es manejable por tablas). La definición es, observamos otra vez, recursiva, es decir, que debe aplicarse una y otra vez, hasta eliminar completamente los signos "$\underline{\vee}$" del definiendo.

Resultado inmediato de nuestra definición, será reemplazar la definición por tablas de verdad de "$\underline{\vee}$n", escrita como fórmula (o cuarta de las definiciones anotadas arriba), para el trabajo sintáctico o trabajo posterior sobre "$\underline{\vee}$n". Y este reemplazo siempre se debe a la manejabilidad -de hecho, es posible escribir metateoréticamente tal cuarta definición, que responde al tenor para el trabajo con tablas para "$\underline{\vee}$n", para n proposiciones, pero es mucho menos manejable que la definición segunda elegida, a tal punto que en la práctica hablamos de inmanejabilidad. De modo, pues, que nos quedamos con una definición para "$\underline{\vee}$n", para sintaxis, frente a las varias posibles para una conectiva en lógica biargumental (teóricamente, como dijimos, siempre es posible dar estas definiciones varias, para una conectiva cualquiera o interdefinición). Para el trabajo con tablas, el hecho hasta aquí, naturalmente, siempre queda la definición cuarta anotada arriba (que sería escrita metateoréticamente para **n** proposiciones), cual su tenor ("$\underline{\vee}$n" es verdadera si no se da el caso de que más de una letra sea verdadera, y si no son todas falsas), tenor que es en realidad el que se emplea y no la fórmula. A hora de hacer ciertas reflexiones como la anterior, corresponde hacer otras útiles en torno a las demostraciones dadas, y por venir, ya que estamos ante la novedad de trabajar siempre con **n** proposiciones (conectiva múltiple).

5. Las tablas de verdad para conectivas múltiples

En el trabajo con tablas de verdad, semántica, es posible escribir la tabla en detalle para una fórmula para pocas proposiciones. Cuando el número crece, se emplea el modo abreviado, lo que ahorra trabajo, y en un momento dado, es imprescindible (pensad en un número finito, pero extremadamente elevado de proposiciones, materialmente es imposible llevar a cabo en detalle esta tabla); pero todavía estamos en el campo de la posibilidad. Para **n** proposiciones, no es posible escribir la tabla en detalle, ya que si bien **n** no es infinito, potencialmente sí lo es, y esto frustra el intento de cerrar la tabla. Las tablas abreviadas buscan el momento crítico en que una fórmula se torna en tautología, contradicción o contingencia, para resolver en este sentido el valor de verdad de la fórmula; a ello agregaremos, nosotros, que estas tablas abreviadas permiten decidir si una fórmula -que ya se ha decidido como equivalencia-, verifica o no el principio o ley de identidad para equivalencia, es decir, si las tablas completas o en sí -no sólo la conectiva dominante de cada uno de los términos de la equivalencia-, son iguales o no. Esto establece aquellas leyes triviales -pero diferentes a la identidad-, que nosotros habíamos establecido para la conjunción y disyunción inclusiva. Por ello nosotros distinguimos entre las tablas en detalle, y las tablas completas, aunque, naturalmente, escribir las tablas completas, quiere decir lo mismo que escribir las tablas en detalle. Las demostraciones para **n** proposiciones, pues, exigen un modo propio, que son las tablas abreviadas; éstas recurren a las definiciones de las conectivas, que cabalmente son para n proposiciones -con lo cual alcanzan el n inalcanzable por detalle por definición-, y estas definiciones pueden actuar recursivamente, y generar también demostraciones por reducción al absurdo. Para el trabajo sintáctico, que no recurre a tablas, se hará necesario un proceso inductivo implícito en las demostraciones, para alcanzar **n**; e implícito, porque la inducción matemática explícita se emplea en lógica más bien para demostrar metateoremas del sistema sintáctico (no confundir éstos con el hecho de que nuestros teoremas a demostrar serán más bien metateoremas, y por los signos ".....n", "{[()]}", etc.). Una última reflexión sobre las demostraciones para n proposiciones -novedad en lógica, en la medida en que reemplazan a demostraciones biargumentales, insistimos-, es la siguiente.

El hecho de demostrar un tesis para "$\veebar$4", por ejemplo, no significa demostrarla para "$\veebar$3", ni para "$\veebar$2", ni, por supuesto, por mucha intuición que genere "$\veebar$4", para "$\veebar$5" o más. Esta formalidad es importante, ya que nos obliga a demostrar siempre por "$\veebar n$"; así, demostrar "$A \veebar B \veebar C \to (A \veebar B) \veebar C$" -como quedó palpable arriba al hacer la tabla para "$\veebar 3 \leftrightarrow \veebar 3()2$"-, no significa demostrar "$\veebar n \to \veebar n()2$", lo cual es una tesis (que subsume a la anterior). Nos vemos obligados, pues, a demostrar con **n** proposiciones, lo cual podría parecer excesivo (nunca nos toparemos, en formalizaciones prácticas, con tantas proposiciones), o especulativo (jactancia de virtuosismo y prolijidad), lo cual es más bien falso, pues una demostración para **n** es más corta, merced a la definición o a la inducción, que una para 4 o 5 proposiciones, digamos, sin aquéllas o en detalle.

6. La defensa de la disyunción exclusiva

Acudiremos, ahora, en defensa de la disyunción exclusiva, que suele ser relegada del mundo lógico. Los lógicos suelen escribir "$\vee$" cuando, en algún contexto de formalización aplicada, en realidad lo a formalizar es "$\veebar$" (lo mismo, a menudo, se hace en el caso de la coimplicación, escribiendo en su lugar implicación), con lo cual, al menos en el caso de "$\veebar$", que al parecer no aparece en otros contextos de la lógica como "$\leftrightarrow$", tendería a desembarazarse de ella; el fundamento de este reemplazo -una conectiva por otra-, no puede ser en modo alguno una confusión lingüística entre "A o B" (sentido inclusivo) y "o A o B", lo cual es un error contra el cual no se necesita mayor argumentación (lo mismo que la confusión de "$\leftrightarrow$" por "$\to$"); el fundamento de este reemplazo son las fórmulas, tautologías, "$A \veebar B \to A \vee B$", y "$A \veebar B \to \neg A \vee \neg B$", que autorizan el paso al cambio de conectiva en la formalización (sin primacía de ninguna de ellas, ya que acentuar la primera sería caer en el error mentado); con estas fórmulas, razonamientos como "$(A \veebar B) \wedge \neg A \rightarrow B$" y "$(A \veebar B) \wedge A \rightarrow \neg B$" podrían formalizarse con "$\vee$" (respectivamente a aquellas fórmulas); el fin de este reemplazo, si no puede ser desembarazarse de "$\veebar$", que obviamente se está empleando, tiene que ser mostrar una deducción, y no una formalización de doctrina (pues el reemplazo no es equivalencia), en su simplicidad suficiente (ya que la lógica puede muy bien mirar al meollo suficiente de donde se deduce algo); así, por ejemplo, ya sea exclusiva o inclusiva una disyunción, lo cierto es que se da una inclusiva, y si ésta basta para una deducción, ésta es su base suficiente (la parte de la disyunción exclusiva, si aquélla lo es, que genera la deducción); de este modo mostramos lo simple (la parte "$A \vee B$", por ejemplo, de un "$A \veebar B$", o "$(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$", que es la que basta o genera la deducción). Visto así, el procedimiento es legítimo, y estamos de acuerdo con él, pero nunca al punto de que se desembarace de la disyunción exclusiva; si fuera así, ésta actuaría como un fantasma o implícita, generando fórmulas pero sin aparecer en el sistema, que es lo peor que puede ocurrir en lógica, que indaga precisamente los fundamentos a partir de donde se deduce algo, o lo implícito y lo formal en deducciones, formalizaciones. Está demás decir que nosotros no seguiremos nunca este procedimiento, en una indagación de la disyunción exclusiva, procedimiento que siempre debería hacer explícito su implícito, afirmando precisamente el procedimiento, que a su vez afirma "$A \veebar B$"; no escribiremos, por ejemplo, "$(A \vee B \vee C \vee D) \wedge (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \rightarrow D$", por "$(A \veebar B \veebar C \veebar D) \wedge (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \rightarrow D$". Tampoco estamos de acuerdo con formalizaciones en las que se usa "$\vee$" en vez de "$\veebar$" en una axioma, cuando la distorsión no vaya a ser corregida por un axioma más profundo (con lo que en realidad el primero sería un teorema); tal el caso, por ejemplo, de escribir "$A \vee \neg A$" por el principio del tercio excluso, en lugar de "$A \underline{\vee} \neg A$", que es lo que en realidad excluye una tercera posibilidad como el nombre lo indica; en la práctica, sin embargo, al constituir el sistema lógico, tal como prueba su eficacia en que funciona, la posibilidad "$A \wedge \neg A$", de "$A \vee \neg A$" viene eliminada por el uso de tablas que no admiten "$v \wedge f$" a la vez, o -escribiéndolo en fórmula- "$A \underline{\vee} \neg A$"; gracias e esto se puede escribir "$A \vee B$" para el tercio excluso (la posibilidad "$A \wedge \neg A$" no se infiltrará en el sistema); pero si usáramos "$A \vee \neg A$" para el trabajo con tablas, es decir, escrito con valores de verdad, "$v \vee f$", entonces deberíamos anotar la posibilidad "$v \wedge f$" en las tablas, con lo cual "$A \wedge \neg A$" se infiltraría en el sistema, distorsionándolo. Otro ejemplo de esto es usar "$x > y \vee x < y \vee x = y$", donde x e y son dos números naturales cualesquiera, en lugar de "$x > y \underline{\vee} x < y \underline{\vee} x = y$", para formalizar la aritmética, práctica muy frecuente entre los lógicos matemáticos y los matemáticos; afortunadamente, axiomas previos del sistema eliminan la posibilidad de, por ejemplo, que un número sea a la vez mayor, menor, e igual a otro cualquiera, y todas las otras posibilidades de distorsión del sistema de esta disyunción inclusiva tríadica; pero, si el teorema en cuestión fuese propuesto como axioma, y en lógica y lógica de la aritmética cabe tanto un sistema como otro, siempre que sea eficaz, entonces tendríamos que expresar el axioma en cuestión con la disyunción exclusiva múltiple (que ahora no podría ser asociada en pares); nos extendemos, pues, en la defensa de la disyunción exclusiva en la medida en que, si ésta es prescindible, es prescindible nuestro estudio.

Una vez que afirmamos a la disyunción exclusiva como necesariamente perteneciente al sistema lógico (incluidas en él sus posibles descomposiciones a lo simple, y sus posibles prescindencias en teoremas protegidos de distorsión, lo expuesto arriba), examinemos los intentos de algunos lógicos de trabajar más bien con una equivalencia para la disyunción exclusiva. Escribir "$(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$", "$\neg(A \leftrightarrow B)$", por ejemplo (recordad las definiciones de "$\veebar 2$" dadas arriba, que se las escribió en cierto orden en cierta medida por este acápite), que son las fórmulas más conocidas para ya no escribir nunca "$\veebar$"; con esto se "elimina" (como si no estuviera presente en la intención, no en la equivalencia), "$\veebar$". Es inútil decir que este procedimiento obedece a criterios económicos, y de conectivas, ya que las fórmulas reemplazo son más largas; pero si nosotros hemos contado 6 conectivas lógicas fundamentales, y la lógica matemática en sí (salvo esta retractación de "$\veebar$" por parte de algunos lógicos), no haremos grande economía de 6 a 5; evidentemente, es una pérdida de captación de lo real desaconsejable (la intuición exige "$\veebar$"). La economía en conectivas tiene su lugar en sintaxis, y aún en ésta las definiciones vuelven a colocar las conectivas intuitivas; con un criterio tal podríamos prescindir de "$\leftrightarrow$", y aun de "$\rightarrow$" o "$\vee$", pero un otro criterio nos obliga a ponerlas en el sistema lógico, y el mismo criterio entonces exige "$\veebar$"; este criterio es el de que "$\veebar$", como las otras 5, es una conectiva lógica fundamental. Por lo demás, merced a "$\veebar n$" puede armarse un sistema sintáctico que goza de la misma ventaja que "$\rightarrow$" y "$\vee$" (los más usados para este efecto), que es la de definir a las otras con la sola ayuda de la negación, a diferencia de "$\leftrightarrow$" y "$\veebar 2$", que requieren a la negación y a "$\rightarrow$" o "$\vee$" o "$\wedge$" necesariamente; esto, además, quiere decir que puede armarse un sistema sintáctico con "$\veebar n$" (y la negación), aunque resulte poco manejable (además del de "$\veebar 2$", la negación, e "$\wedge$", por ejemplo). Concluimos, pues, que la disyunción exclusiva es una conectiva fundamental, y que debe estudiarse tal cual la lógica matemática le ha asignado un símbolo específico o "$\veebar$".

6. Las conectivas lógicas fundamentales

Una vez "defendida" -permítasenos entrecomillar el término- la disyunción exclusiva, y la disyunción exclusiva múltiple, que nos resulta una conectiva fundamental de un modo inmediato (y por tal fundamentalidad tal vez debimos aclarar que entendemos que pertenece al orden intuitivo tal cual "$\wedge$", "$\rightarrow$", "$\leftrightarrow$", etc., y que no es trivial y prescindible tal cual "$\wedge n$" y "$\vee n$", suplantables por "$\wedge 2$" y "$\vee 2$", y que no es técnica como las conectivas que veremos a continuación, y que goza de todos los requisitos para una naturaleza sintáctica o previo no-significado), una vez despejada la utilidad o pertinencia de "$\veebar n$", conviene hacer una reflexión última acerca de su heurística, y siempre aprovechando el momento semántico o de pleno significado. Si "$\veebar n$" es heurística, enriquece a la lógica matemática hasta aquí, ¿cómo puede justificarse su hallazgo, como alcance de conectiva, después de tanto tiempo de historia de la lógica matemática?; las conectivas, tipificación y estudio, pertenecen al estrato elemental de la lógica, de modo que no puede hablarse de una sofisticación o teoría naturalmente tardías a la lógica matemática; una conectiva, en lógica, genera sus silogismos propios, sus interdefiniciones, sus momentos de presencia en razonamientos metateoréticos, genera leyes lógicas, en suma, ya sean metaleyes, con lo cual nos preguntamos, pues, ¿habremos descubierto, con este estudio, leyes heurísticas para la lógica?; la respuesta es positiva -no podría ser de otro modo-, pero dejaremos este punto, conclusivo, para el final del libro, en el que se minimizará la sorpresa creada, hablando precisamente de la modestia del estudio (ya que la sorpresa, y el ademán de responder negativamente a la pregunta también es parte de este libro, como para cualquier lógico matemático). Lo que corresponde aquí es ver si existen otras posibles conectivas, ya que no alcances de conectiva, ya que estamos en el terreno, y ello podría provocar un desmesurado aumento o crecimiento de la lógica, hacia lo especulativo; en efecto, en lógica se han propuesto, por ejemplo, las conectivas Sheffer, que son la "incompatibilidad", "$A \mid B$", y la "negación conjunta", "$A \downarrow B$", siendo sus definiciones, respectivamente, escritas en fórmula, "$\neg(A \wedge B)$" y "$\neg A \wedge \neg B$" o "$\neg(A \vee B)$"; ambas conectivas podrían considerarse como múltiples, ya que es lícito hablar de la incompatibilidad entre tres personas (que no pueden estar juntas las tres a la vez, ni tampoco una con otra), y así hasta n, y la segunda, si se traduce como "ni A ni B", como hacen los lógicos, permite hablar de "ni A ni B ni C", y así hasta n (las equivalencias con sus definiciones son también perfectas en sentido múltiple); pero aquí descartaremos esta última observación de su multiplicidad -antes de recusarlas por su trivialidad, recusaremos las conectivas en sí-; lo que nos preguntamos, es, si son nuevas conectivas, ¿no amerita estudiar sus silogismos, cual han sido estudiadas en sus definiciones, como "$(A \mid B) \wedge A \rightarrow \neg B$", y "$\neg(A \downarrow B) \wedge \neg A \rightarrow B$", que serían los más clásicos, y el resto de sus leyes propias, o reescritura[2] de las leyes lógicas inclusive (como se hace en lógica con "$\wedge$", "$\rightarrow$", y "$\vee$")?; ¿no haremos, nosotros, lo propio, investigar sus leyes -sin reescritura, naturalmente, no es pertinente para "$\underline{\vee}$"-, con "$\underline{\vee}$"?; de este modo la lógica crecería con más leyes para estas dos conectivas. La respuesta, obviamente negativa, podría ser tratar a "$|$" y a "$\downarrow$" como a "$\wedge n$" y "$\vee n$", es decir, como triviales o demasiado cerca de sus equivalencias como para que el lógico las tome en cuenta, aunque se trate de legítimas conectivas (su tabla completa sería diferente); sin embargo, la respuesta debe ser más radical, arguyendo que no se trata de legítimas conectivas, en el orden intuitivo, aunque son plenamente conectivas en el orden técnico. En efecto, "incompatible A con B" significa lingüísticamente siempre una idea en torno a la no coexistencia o imposibilidad de acuerdo, o, en lógica, "$\neg(A \wedge B)$", así define el diccionario "incompatibilidad", y ello no ocurre nunca con las otras conectivas (las que llamamos fundamentales o del orden intuitivo), ya que en versión lógica la definición no llevaría nunca a interdefinición, sino a un signo específico; concluimos, pues, que, para "$|$", se da una diferencia lingüística con "$\neg(\wedge)$", tal cual registran los lógicos las diferencias entre "si....entonces", "en tanto que", "implica", etc., para "$\rightarrow$", para prescindir de ellas abstrayendo el sinónimo lógico (la lógica, por supuesto, pertenece también al lenguaje); no otro es el caso de "ni A ni B", o "$\downarrow$", que podría parecer una conectiva para $n \geq 2$, o un "ni" o negación que exige al menos una letra más negada, a diferencia de la negación escueta, que es estrictamente para n =

[2] Para un mayor tratamiento de esta reescritura o de la reescritura de leyes en lógica, véase Cap. II, 2.

1; en la noción lingüística de "$\downarrow$" siempre se involucra la noción lógica de "$\wedge$", por lo cual decimos que es un sinónimo lógico de "$\neg A \wedge \neg B$", como lo atestigua la serie de sinónimos lógicos: "ni A ni B", "tanto A como B, no", "ambos, A y B, no", "no: A y B", "no A, y no B", etc. Las conectivas Sheffer, pues, tienen su específica utilidad, y noción, en el uso técnico, que es para lo que han sido diseñadas, y estudiadas en sus definiciones o leyes (restringidamente) para tal fin; sus ventajas técnicas son indudables, pues permiten definir con ellas solas a todas las otras (definir a todo el sistema con una sola conectiva o signo), y hasta de un solo axioma, aunque sea poco manejable; estas ventajas teóricas y sintácticas, empero, recordemos, están al servicio de pasar al orden intuitivo o semántico (para estas últimas reflexiones hemos cuasi identificado intuición y semántica, para lo cual pedimos que el lógico suponga las pertinentes notas). Los ejemplos dados con las conectivas Sheffer nos sirven para precisar que el orden intuitivo o conectivas fundamentales no admiten añadidos, a estas 6 conectivas fundamentales; es decir, que en la distinción de conectiva técnica y conectiva del orden intuitivo o conectiva lógica propiamente, logramos distinguir 6 conectivas lógicas fundamentales. Conectivas técnicas hay muchas, pero su último destino, como el de la lógica es siempre el orden intuitivo o semántico. Las conectivas fundamentales siempre tienen una peculiar serie de sinónimos lógicos, como "si...entonces", "en tanto que A, B", "así pues que A, B", etc., y la intrusión de una expresión lingüística para una conectiva en la serie de otra no es posible con la mantención del sinónimo lógico. Concluimos, pues, que no contamos, en lógica, sino con 6 conectivas fundamentales, y que el descubrir el alcance múltiple de algunas, es una buena, y hasta fundamental iniciación de estudio, máxime si una de ellas arroja positivo en cuanto a su estudio total.

7. La disyunción exclusiva múltiple y la lógica cuantificacional

Las conectivas lógicas, tal cual las seis hasta aquí estudiadas, o revisadas, pertenecen a la lógica proposicional; sin embargo, existe un reducto en la lógica de predicados, o lógica cuantificacional, en el que el nuevo alcance de conectiva o "$\underline{\vee}n$", al igual que todas las otras conectivas, tiene un campo de aplicación, no reductible a la lógica de proposiciones, sino a la de predicados. Estudiaremos este reducto, en la medida en que nuestro estudio de "$\underline{\vee}n$" pretende ser completo, y tiene que tomar en cuenta todo aquello en lo que intervenga la conectiva, de un modo heurístico.

La lógica matemática ha definido las siguientes expresiones para la lógica de predicados:

(x)Px, o, para todos los individuos x, pertenecientes a un determinado dominio, o universo del discurso, el predicado P, o P de x, o todos los x tales son P.

(Ex)Px, o, para algún individuo x, del dominio tal, P de x, o algún x tal es P, o al menos un x de los tales es P.

(x)(Px → Qx), o, para todo x -o individuo del universo, o universo restringido tal- vale que si es P, entonces es Q, o para todo x si P de x entonces Q de x, o todos los P son Q.

$(Ex)(Px \wedge Qx)$, o, existe al menos un x, de dominio restringido o no, para el que P de x y Q de x, o algún x es P y Q.

Estas simbolizaciones, o directamente expresiones propias de la lógica de predicados, nos bastan para apreciar una nueva posición de las conectivas lógicas de la lógica de proposiciones; en efecto, pueden estar insertas en un paréntesis sometido a la acción de un cuantificador conectando expresiones como "Px", "Qx", etc. La expresión "Px" es una función y no tiene valor de verdad sino hasta reemplazar x por un criterio definido; podríamos ver a la función "Px" como "P¿?", o P de un adivina quién; merced al cuantificador que ejerce su acción sobre "Px" esta función se convierte en una proposición una vez interpretado P; merced al cuantificador "Px" se transforma en P de todos, P de ninguno, P de algunos, o P de éste o P de Javier (por ejemplo), siendo en este último caso dable escribir Pa, Pb, etc, indicando un individuo concreto (ya elegido al azar o con un criterio determinado), y resulta un tercer y último criterio de definir "Px" (otros lógicos emplean la expresión Px o Py misma para este tercer fin, pero en este caso, que eludimos por evitar confusión aquí, también se debe distinguir el Px definido del "Px" función); una vez definida la función, si la expresión es verdadera para cualquier interpretación de P, se trata de una expresión válida, si no lo es para ninguna, es una expresión contraválida, y si lo es para algunas y no para otras es una expresión contingentemente válida, el paralelo a tautología, contradicción y contingencia en lógica de proposiciones. Con este pequeño marco teórico, o semántica de la lógica de predicados, podemos apreciar que las conectivas de la lógica proposicional conectan también funciones (abstrayendo de momento la acción del cuantificador, y prescindiendo de definiciones de la función como "Pa → Qa", ya que no se escribe nunca "a(Px → Qx)", por ejemplo). Ahora bien, cuando una conectiva conecta funciones se comporta exactamente como tal conectiva, tal cual conectara proposiciones; tal es lo lógico (si se emplea tal conectiva) y nos propone, el hecho, las siguientes leyes ya conocidas en lógica de proposiciones

$$(Px \rightarrow Qx) \leftrightarrow (\neg Px \vee Qx) \leftrightarrow \neg(Px \wedge \neg Qx) \leftrightarrow \neg(Px \veebar Qx \veebar Qx)$$

$$Px \veebar Qx \veebar Rx.....\veebar nx \leftrightarrow [Px \rightarrow (\neg Qx \wedge \neg Rx..\wedge \neg nx)] \wedge [\neg Px \rightarrow (Qx \veebar Rx..\veebar nx)]$$

$$Px \rightarrow (Qx \rightarrow Px), \quad o, \quad (x)(Px) \rightarrow (x)(Qx \rightarrow Px)$$

$$[(Px \rightarrow Qx) \wedge Px] \rightarrow Qx \quad o, \quad (x)[(Px \rightarrow Qx) \wedge Px] \rightarrow (x)Qx$$

Etc. Los dos últimos ejemplos muestran que no hace falta que la ley sea una equivalencia, puede ser una implicación (la aclaración de la derecha, en ambos dos últimos ejemplos, es un ejemplo, el cuantificador podría ser "(Ex)"). Por otra parte, como es obvio, las conectivas conectan proposiciones ya definidas de lógica de predicados, constituyéndose estas fórmulas, en consecuencia, en simples letras proposición, y sometiéndose a las leyes de éstas, no aportando nada heurístico el estudio de una conectiva en este aspecto; así, considerando aisladamente los dos casos de conectivas en lógica de predicados, no encontramos nada nuevo como aporte del comportamiento de una conectiva. Sin embargo, existen leyes de relación entre estos dos aspectos del estar dentro -la letra proposición- y el estar fuera -de la letra proposición-, de las conectivas; estas leyes reciben el nombre de leyes de distribución.

Así, existen leyes de distribución para cada conectiva, por la que pasa de conectar funciones (o "Px", "Qx", etc) siempre sometidas todas ellas a la acción de un solo cuantificador (ya que no existen funciones solas, sin cuantificar o definir, en lógica de predicados, es un pre-concepto), a conectar proposiciones ya cuantificadas, y viceversa. Las leyes no siempre brindan una paso en uno y otro sentido, son a menudo una implicación, veamos breves ejemplos

$$(x)(\neg Px) \leftrightarrow \neg(Ex)Px$$

$$(x)(Px \wedge Qx) \leftrightarrow (x)Px \wedge (x)Qx$$

$$(Ex)(Px \wedge Qx) \rightarrow (Ex)Px \wedge (Ex)Qx$$

$$(x)(Px \rightarrow Qx) \rightarrow (x)Px \rightarrow (x)Qx$$

$$(x)(Px \underline{\vee} Qx) \rightarrow (x)Px \underline{\vee} (Ex)Qx$$

Etc. El primer ejemplo no es, propiamente, una ley de distribución para la negación, sino la definición de "(x)" por "(Ex)", o del generalizador por el particularizador; pero podría pasar por una ley de distribución en la medida en que saca y mete a una conectiva a la acción de un cuantificador y consideramos a la negación como una conectiva, y todas las conectivas tienen sus leyes de distribución. Resta, pues, yuxtaponer, indagar, las leyes de distribución para el nuevo alcance de conectiva propuesto aquí, o "$\underline{\vee}$n", o las leyes de distribución para "$\underline{\vee}$" en general.

La silogística categórica, la silogística aristotélica, expresada en lógica matemática por medio de la lógica de predicados (ya que existe un tratamiento para esta silogística por medio del cálculo de clases, y otros cálculos had hoc, dado que por lógica de predicados algunos silogismos de esta silogística no pueden formalizarse o resolverse), la silogística esta no involucra leyes heurísticas para las conectivas aquí revisadas y para "$\underline{\vee}$n"; las leyes propias de esta silogística son, como las de la lógica de predicados en general, las que permiten desembarazarse momentáneamente de los cuantificadores, para verificar resultados mediante la lógica de proposiciones, para luego ganar otra vez los cuantificadores para estos resultados obtenidos. Quedamos, pues, en que, para estudiar "$\underline{\vee}n$" en su totalidad, un estudio de sus leyes de distribución es importante como parte de la lógica de predicados, la misma que es monádica o poliádica (predicados simples o relaciones), aunque las leyes de distribución se expresan en su forma simple de modo monádico.

De modo que, sea lógica de proposiciones, o lógica de predicados de cualquier orden (cuantificación y predicación de predicados), o razonamientos metateoréticos que alojan conectivas en un metalenguaje intuitivo, nada diferente tiene la conectiva "$\underline{\vee}$" (o su alcance heurístico aquí "$\underline{\vee}n$"), que no esté indicado en su lógica proposicional y en sus leyes de distribución. Estudiaremos ambos aspectos, ahora, en la sintaxis de la conectiva en cuestión.

II SINTAXIS

1. El sistema sintáctico o cálculo L

Vamos ahora a definir el sistema sintáctico o cálculo L, de lógica elemental, lógica de proposiciones y de predicados de primer orden, que nos servirá de base al cálculo heurístico de "Vn" aislado. Sólo definiremos el sistema o cálculo, y anotaremos los resultados que nos serán útiles en el trabajo para con "Vn"; es decir, como es natural, presupondremos los resultados de la lógica matemática hasta aquí. El cálculo o sistema sintáctico es el modo formal propio de la lógica (aunque a veces se emplee el término formal para semántica), y prescinde temporalmente del significado de los signos dejándolos como meras luces en la pantalla de un computador o señales en el papel; luego, estos signos son interpretados o considerados semánticamente, para lo cual median complejos teoremas de adecuación (en uno y otro sentido), más allá de lo intuitivo (el cálculo sintáctico se construye para que se adecue al orden semántico, que es, por lo tanto su fin y su modelo); sin embargo, para nuestro estudio aquí presente, y como en lógica elemental se da la adecuación entre los dos órdenes, y nuestro estudio no toca ni tangencialmente estos teoremas (metateoremas más bien) de adecuación, vale la pena que el lector pueda leer el sistema sintáctico ya interpretado, o con plena adecuación semántico sintáctica, en la medida en que esto pueda facilitar la lectura, o que se gane en el trabajo mismo un paso que no es tema del mismo. Definamos, pues, el sistema L.

Son signos primitivos del sistema axiomático L o cálculo L los siguientes:

Las letras o variables proposicionales A, B, C, etc.

Las conectivas lógicas ¬ y →

Las variables individuales x, y, z, etc. (w, t)

Las variables o letras predicado P, Q, R, S, etc.

Las constantes individuales a, b, c, etc.

El cuantificador (x) (generalizador)

Los signos de puntuación (), [], {}

Son fórmulas -o fórmulas bien formadas, fbf-, las capaces de tener sentido en semántica, las siguientes, en L

A, B, C, etc. son fórmulas (fbf). ¬fbf y fbf → fbf son fórmulas, siendo esta cláusula recursiva para lograr fórmulas más complejas. La primera cláusula logra fórmulas simples y la segunda ya complejas.

Pa, Qb, Rc, etc. y (x)Px, (y)Qy, etc. son fórmulas (fbf). En tanto fbf, estas fórmulas, las primeras simples y las segundas complejas, se someten a la segunda cláusula de fbf de fórmulas proposicionales complejas arriba.

P, Q, R, etc. son predicados, o predicados bien formados (pbf). ¬pbf y pbf → pbf son predicados, siendo esta cláusula recursiva para lograr predicados más complejos. La primera cláusula logra predicados simples y la segunda ya complejos.

Para predicados simples, P, Q, R, etc. son fórmulas Pabc..n, Qabc..n, etc. y (x)(y)..(n)Pxy..n, (x)(y)..(n)Qxy..n, etc., o predicación de relaciones (predicados poliádicos) (si n = 1, predicado monádico o no relación). Estas fbf se someten a la segunda cláusula para fbf de fórmulas proposicionales complejas arriba.

Las expresiones Px, Qy, Rz, etc. no son fórmulas (fbf) de L.

Definamos, ahora, los axiomas de L, ya que es un sistema axiomático y no con puras reglas (deducción natural)

Ax 1 $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

Ax 2 $[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)]$

Ax 3 $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

Ax 4 $Pa \rightarrow (x)Px$

Ax 5 $(x)Px \rightarrow Pa$

Las reglas para la manipulación de signos, fórmulas, y axiomas, son las siguientes

Si se tiene que $K \rightarrow L$, y K, entonces puede deducirse L, donde K, L, son fórmulas cualesquiera (fbf). Anotamos esta regla brevemente así: $K \rightarrow L, K \vdash L$, donde "$\vdash$" es el signo metateorético de deducción (sintáctica), como K, L, son signos metateoréticos de fórmulas, en tanto que las reglas son siempre metateoréticas (hablan acerca de una pluralidad de fórmulas del lenguaje objeto). Esta regla es comúnmente llamada Modus Ponens (MP) dada su raigambre escolástica, y así la abreviaremos.

Regla de sustitución uniforme (SU) En los axiomas 1 al 3 es lícito sustituir (el axioma se mantiene) una letra proposicional por una fbf K cualquiera; como la letra en cuestión es la misma en todas sus ocurrencias, la sustitución debe ser la misma.

Regla de sustitución uniforme de predicados (SUP) En los axiomas 4 y 5 es lícito sustituir (el axioma se mantiene) una letra predicado por un pbf P cualquiera; la sustitución se opera en todas las ocurrencias de dicho predicado.

Como es natural, las reglas SU y SUP se transmiten a todo teorema obtenido a partir de los axiomas y de las reglas.

Las reglas SU y SUP pueden escribirse en fórmula metateorética usando variables metateoréticas K, L, M, y P o Q, que significan una fbf cualquiera y un pbf cualquiera; hay que escribir cada axioma con estas variables. Ello incluso puede hacer prescindir de formular las reglas. Pero prescindiremos de esta práctica porque adelante utilizaremos las variables metateoréticas para otro fin; no es bueno aglomerar los metas -meta metavariable-, así que mantendremos las reglas y en su formulación verbal.

Para los axiomas 4 y 5 existe una tercera fuente de preceptos que difícilmente pueden expresarse en fórmula y que son igualmente importantes a los axiomas y las reglas para una correcta deducción del cálculo. Una de ellas es la simple aclaración de que los axiomas 4 y 5 sirven también para la predicación poliádica o de relaciones Pab..n, (x)(y)..(n)Pxy..n, (x)(Ey)..( )nPxy..n, etc. Luego, viene una serie compleja de restricciones al uso de estos axiomas, que nosotros no formularemos aquí, dado que no es nuestro tema (la exposición del cálculo en sí); baste anotar -en función de lo que usaremos de esta parte del cálculo-, que la constante individual a de los axiomas 4 y 5 (más allá de que sea un signo que pueda funcionar como nombre a su vez de otro signo de los de la serie a, b, c, etc.), ha sido elegido al azar o arbitrariamente sin restricción, es decir, es un individuo cualquiera de los de la serie a, b, c, etc. (podría haber sido cualquiera de éstos); si negamos Pa, o ¬(Pa), obtenemos que no se da P de un cualquiera, o que se da ¬P de al menos uno, o ¬P de alguno, o ¬Pa, pero donde a ahora ya no es un cualquiera, sino un determinado -un alguno-, o precisamente del individuo que está determinado con ¬P (puede entenderse también que a es ahora el nombre del individuo determinado con ¬P). Tal es el efecto -todo lo expuesto- que consigue, por ejemplo, el axioma 4 y su contraposición merced al axioma 3: Pa → (x)Px, ¬(x)Px → ¬(Pa) o ¬(x)Px → ¬Pa. Respetando estas restricciones -llamémoslas también así- y echando siempre una mirada al contexto donde aparecen las fórmulas (para saber si el alguno que está afectado por P puede ser el otro alguno, etc.), no pueden ocurrir deducciones incorrectas con estos axiomas. La restricción breve puesta arriba es en el fondo lo que expresan las complejas restricciones técnicas de la lógica matemática específica al punto; y no se puede decir que el criterio puesto aquí sea intuitivo o no puramente sintáctico, ya que trabajamos, elegimos, simples letras o signos, lo que puede pasar también con sintaxis. A esta exposición de la restricción para Axs 4 y 5, larga en su brevedad debida aquí, nos ha obligado el rigor del formalismo en la exposición del cálculo o la lógica matemática. Debido a estas restricciones, que requieren algún análisis al deducir -o el uso de las restricciones-, exponemos en su forma simple los axiomas 4 y 5, en lugar de juntarlos en (x)Px ↔ Pa.

2. La inserción de la disyunción exclusiva múltiple en el cálculo L

Expongamos, ahora, la parte final del cálculo, o las definiciones de las otras conectivas -merced a $\neg$ y $\rightarrow$-, o reescritura abreviada del cálculo L

$A \wedge B \wedge C \ldots \wedge n$ Def $\neg[A \rightarrow \neg(B \wedge C .. \wedge n)]$

$A \vee B \vee C \ldots \vee n$ Def $\neg A \rightarrow (B \vee C .. \vee n)$

$A \leftrightarrow B$ Def $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

$A \veebar B \veebar C \ldots \veebar n$ Def $[A \rightarrow (\neg B \wedge \neg C .. \wedge \neg n)]$

$\wedge\ [\neg A \rightarrow (B \veebar C .. \veebar n)]$

Las definiciones para $\wedge$, $\vee$, y $\veebar$, son recursivas, deben volverse a aplicar hasta agotar el símbolo definido. Están expuestas en sentido múltiple, aunque la que nos interesa a nosotros aquí es la definición de $\veebar$. Para $\wedge$ y $\vee$, podemos anotar ya directamente como parte de L (no deducidos de L), los dos metateoremas ya conocidos (deducibles en L con las definiciones arriba)

$\wedge n \leftrightarrow \wedge(\,)2$

$\vee n \leftrightarrow \vee(\,)2$

Con lo cual estandarizamos nuestro sistema a lo biargumental, para $\wedge$ y $\vee$, e introducimos estos signos o notación convencional de metateoremas. En las definiciones múltiples, también, ha sido introducido el símbolo .....n, metateorético, para expresar multiplicidad. En las definiciones también se introduce el metasímbolo Def.

Para la lógica de predicados, la definición de (Ex) merced a (x) es (tenemos una sola definición para lógica de predicados)

$(Ex)Px \quad Def \quad \neg(x)\neg Px$

Las definiciones pueden entenderse como equivalencias; sin embargo, y para ser más formales en el sistema axiomático -en el que la sola puerta de entrada de un símbolo definido al sistema es su definición-, y para respetar la distinción entre el signo metateorético Def., del signo objeto $\leftrightarrow$ (que nos ofrece alguna otra puerta de entrada del símbolo definido al sistema, como la definición al revés), hablamos de que el signo Def. posibilita la introducción del signo izquierdo de la definición o definido, en sustitución del de la derecha o definidor (el cual queda reescrito por el anterior); así, la tesis $\neg(A \to \neg B) \leftrightarrow \neg(A \to \neg B)$, fácilmente obtenible en L, puede reescribirse $(A \land B) \leftrightarrow \neg(A \to \neg B)$, lo cual nos permite ya el uso de la definición como equivalencia, la cual es más manejable, está entera en lenguaje objeto, y es una tesis o teorema del sistema. Sin embargo, no debe olvidarse que los símbolos definidos son una abreviatura o reescritura de los símbolos primitivos del sistema; es decir, que son una especie de notación metateorética de estos símbolos teoréticos primitivos, de modo que su denominación de símbolos (aunque definidos) no les da un mismo status -dentro del cálculo-, que a los símbolos primitivos. Entendidas así las definiciones, también podría verse un modo directo de entenderlas como equivalencias ya que escribir con otra notación un símbolo permite también escribir el símbolo en lugar de su notación (lo cual es el funcionamiento de la equivalencia, véase el metateorema de intercambio más abajo). Renunciamos, pues, como hacen otros lógicos, a ver en los símbolos definidos legítimos símbolos, ya que añadirían supuestos al sistema L, precisamente las definiciones -y el sinfín de leyes obtenibles a partir de ellas para las conectivas y símbolos definidos-, atentando contra la economía de L, y proponiendo con ello un sistema pragmáticamente intermedio inútil, ya que a la larga el sistema L será interpretado -es su pragmática o fin último- y es allí donde de todos modos las conectivas todas, símbolos primitivos y definidos, recibirán su plena interpretación expresiva (allí Def., será $\leftrightarrow$, como vimos en semántica, y ello resume toda nuestra discusión y exposición aquí: buscábamos pragmáticamente el funcionamiento de Def., equivalente al semántico $\leftrightarrow$).

Como la parte de definiciones en el sistema L es lo más importante para nuestra investigación de $\veebar n$, nos hemos extendido un poco, y lo seguiremos haciendo, ya que es aquí donde se introduce $\veebar n$ a L, o a la lógica matemática propiamente formal (sintaxis). Advirtamos que en la introducción de conectivas definidas -hablamos de introducción de conectivas, más que de símbolos primitivos, ahora, porque es el objetivo de nuestro trabajo-, no requiere que el entero sistema L -en cuanto a resultados o teoremas obtenidos- esté escrito en símbolos primitivos o conectivas tales; en la práctica, basta introducir en algunas tesis las conectivas nuevas -definidas- y a partir de ellas construir las restantes (para esa conectiva nueva); o merced a una conectiva construir para la otra (interdefinición); todo ello siempre en función a la manejabilidad, brevedad, y arte. Así, para nuestra definición de $\veebar n$, no hace falta entender que $A \rightarrow \neg B \wedge \neg C \ldots \wedge \neg n$ debe trabajarse con la definición de $\wedge$ -merced a $\neg$ y $\rightarrow$ o símbolos primitivos- para despejar completamente $\wedge$. Como $\wedge$ ya ha sido definida previamente, puede quedar en la definición de $\underline{\vee}n$.

Hablando de la reescritura, podemos decir que todo el sistema L (en cuanto a resultados), está escrito en símbolos primitivos, y reescrito en símbolos definidos (aunque en muchos casos la reescritura no abrevie sino todo lo contrario); pero por el fin o pragmática del cálculo (que es llegar a semántica) no todas las tesis de escritura y reescritura figuran en él, sino precisamente las pragmáticas o expresivas -o las útiles para llegar a aquéllas, si éstas parecen poco expresivas o útiles-; es decir, de la teoría, todas las tesis, extractamos un subconjunto práctico, que es expresivo (en sentido semántico), y que expresa las leyes más propias de una conectiva o símbolo lógico. Entre este subconjunto, sin embargo encontramos escritura y reescritura de fórmulas lógicas (ya no consideremos, aquí, símbolos primitivos, y símbolos definidos) como, por ejemplo, la que hay -inter reescritura- entre $(A \rightarrow B) \wedge A \rightarrow B$, $\neg(A \wedge \neg B) \wedge A \rightarrow B$, y $(\neg A \vee B) \wedge A \rightarrow B$ -distíngase la primera de la regla MP-, fórmulas todas sumamente expresivas de cada conectiva en cuestión; en $A \rightarrow (B \rightarrow A)$, $A \rightarrow (\neg B \vee A)$, $A \rightarrow \neg(B \wedge \neg A)$ -o mejor, para esta última, $(B \wedge \neg A) \rightarrow \neg A$-, hay también inter reescritura o casi reescritura (la última en su forma contrapuesta es una tesis sumamente expresiva y útil) entre fórmulas muy propias de cada conectiva; sin embargo, si escribimos, para cada uno de los ejemplos, $\neg(A \underline{\vee} B \underline{\vee} B) \wedge A \rightarrow B$, $A \rightarrow \neg(B \underline{\vee} A \underline{\vee} A)$, respectivamente, y usando $\underline{\vee}3$, solamente, tendremos una reescritura, sí, pero una tesis -estas últimas- que difícilmente podrían ser consideradas expresivas o útiles -de hecho sólo podrían serlo en un caso extremo técnico, que veremos en un siguiente capítulo-; esta reflexión pues, tal vez superflua, nos hace ver que estudiar una conectiva es estudiar sus tesis propias, expresivas y útiles (cosas que al fin y al cabo vienen a ser lo mismo, o tener un sentido semántico); un sistema que anote tesis como ejercicio, especulación, o abuse de la técnica lógica de rehuir la intuición para garantizar la deducción formal, es un sistema precisamente de mero ejercicio, especulativo, y abusivo; pero, para más, si no dispusiéramos de tesis expresivas para $\underline{V}$, nuestro trabajo sería tan muerto como las tesis puestas para $\underline{V}3$ arriba, y para más, refutable. Indagaremos, pues, las tesis propias de $\underline{V}$ a continuación, en base a los resultados de L expuesto arriba. (Anotamos, también, que tampoco, en modo alguno, las tesis de $\underline{V}$ son reescritura de las de $\leftrightarrow$, hay reescritura entre $\underline{V}2$ y $\leftrightarrow$, pero $\underline{V}n$ es un signo múltiple, no así $\leftrightarrow$).

El primer resultado de L, y necesariamente, pues sin él no es posible seguir mucho más adelante, además de que facilita enormemente las deducciones, es el metateorema de deducción, usual a los sistemas de la familia del que acabamos de exponer. Su obtención se hace merced a lo expuesto de L y el uso intuitivo del principio de inducción matemática adaptado a uso lógico (inducción semiótica); como este principio no figura en L, y es vital para la obtención del metateorema, puede considerarse a éste como parte de L así como su resultado. Lo enunciaremos directamente en fórmula, por ser suficientemente conocido por los lógicos:

TD si $K, L \vdash M$, entonces $K \vdash L \to M$ para K eventualmente igual a una fórmula vacía

Debe claramente distinguirse este metateorema de la fórmula siguiente obtenible sólo a partir de aquél, que parecería ser su versión objeto (teórica): $[(A \land B) \to C] \to [A \to (B \to C)]$ (fórmula, llamada de exportación, que también funciona como equivalencia, gracias a una demostración por TD o por sí mismo). La distinción importante no está entre variables y metavariables, cosa trivial y eliminable usando SU para las variables, sino en los signos $\vdash$ del metateorema, que exigen que M sea deducible -no sólo implicada o término consecuente- de K, L; igualmente, a la derecha del teorema, el signo $\vdash$ establece una deducción, con lo cual tal término (al igual que el de la izquierda) es siempre un teorema o axioma, a diferencia de exportación, en que los términos separados pueden ser meras implicaciones. Además, el signo $\vdash$ de la izquierda del teorema (no así el derecho), puede se mediato -lo cual no es el correspondiente $\to$ de exportación, siempre inmediato-, con lo cual exportación tendría que usar cadenas de silogismos hipotéticos y otras leyes y reglas para alcanzar a TD. Una aproximación para acercar a TD a objeto (fórmula en mera teoría) podría sonar así, utilizando a TD sobre sí mismo

TD* si $K \land L \vdash M \to K \to (L \to M)$

y para $K = 0$, $L \vdash M \to (L \to M)$

Con lo que la diferencia con exportación (y la forma de la identidad $(B \to C) \to (B \to C)$ para $A = 0$) queda expuesta en su estrictez. (En K, L, la coma o tal signo debe entenderse como $\land$, si no hay esta cláusula de metasigno a signo, la coma no entrará nunca al sistema, y el sistema rechazará al metateorema, por signo no identificado por él). Por MP en TD*, el término de la derecha siempre es teorema o axioma (no hay necesidad de escribir $\vdash$). Esta explicación, y curiosidad de TD*, la explicación es usual en los sistemas de la familia de L, es necesaria en la medida en que -además de la idea teórica- se usen ambos TD y exportación; como haremos nosotros, dada la comodidad que se logra, usando un máximo de axiomaticidad, o menor posibilidad de confusión en demostraciones con .....n.

Es usual, también, en los sistemas axiomáticos de la familia de L, obtener como metateorema derivado el metateorema de intercambio (usualmente dejado a la intuición, también, en muchos sistemas, y no sólo de la familia de L); su demostración emplea también el principio de inducción matemática, y por lo tanto, como TD, puede considerarse parte y resultado de L arriba (de hecho, en sí, L arriba y resultados son parte de L o cálculo L). Nos sirve, este metateorema, para emplear las definiciones en forma de equivalencia, además de toda su generalidad. Podemos expresarlo en fórmula dado que es suficientemente conocido:

TI si $K \leftrightarrow L$, entonces $Fk \leftrightarrow Fl$ donde Fk, Fl, son fórmulas cualesquiera que contienen como subfórmula a K, L

No anotaremos, cada vez que lo usemos, este metateorema, en nuestras demostraciones; y ello, más allá de otras no anotaciones que practicaremos dada la excesiva aglomeración de las mismas, en los muchos pasos de las demostraciones; entendemos, pues, aquí, a TI, como un equivalente sintáctico de su evidencia intuitiva en plano semántico (equivaler es ser lo mismo, tener el mismo valor, la misma tabla, etc.)

3. Los resultados de L que servirán al cálculo de la disyunción exclusiva múltiple

A continuación escribamos los resultados de L que usaremos en nuestras demostraciones de leyes o tesis de $\underline{\vee}n$. Sin embargo, refirámonos un poco al sistema L diseñado; a su biografía, o a la de su familia. Los sistemas así diseñados reemplazan (están renovados) al célebre y pilar de PRINCIPIA MATHEMATICA de Whitehead y Russell, y son de gran popularidad entre los tratadistas -o lógica standard, diremos, o lógica casi no de autor-, aunque no es la única familia -la de estos sistemas- de la lógica contemporánea o misma standard. Para nuestro sistema L, los axiomas de la lógica de proposiciones pertenecen a Church (1956), quien se inspiró en Lukasiewics (estos axiomas pueden cambiarse por otros, manteniéndose el efecto, y cambiarse también el número y la conectiva otra que la negación, pero la familia y efecto se mantienen); para la lógica de predicados, nuestro sistema L se inspira en la deducción natural de Gentzen (1934), proponiendo como axiomas dos de sus reglas de introducción y eliminación del signo primitivo elegido en L. Expongamos ahora las tesis de L, la eficacia del sistema diseñado para las tesis de $\underline{\vee}n$, podrá ser juzgada por el lector.

ID $A \rightarrow A$

Simp (Simplificación) $(A \wedge B) \rightarrow A,$
B

T1 (Teorema o Tautología 1) $[A \rightarrow (B \wedge C)] \rightarrow (A \rightarrow B),$
$(A \rightarrow C)$

MT (Modus Tollens) $[(A \rightarrow B) \wedge \neg B] \rightarrow \neg A$

Conj (Conjunción) $A, B \rightarrow (A \wedge B)$ Esta ley debe ser introducida sin demostración o protocolarmente a L, como advertimos, ya que la coma o tal signo debe ser indroducida novedosamente a L de algún modo, para que éste la reconozca y arme demostraciones; la coma es la no-conectiva (única, opuesta a las sí-conectivas) entre dos o más hechos o letras dadas, o la consideración no conjuncionada de lo conjuncionado, o la abstracción de la conjunción en una conjunción abstraíble; es decir, que la coma es idéntica a $\wedge$, la conjunción, ya que sería difícil aceptar que un signo pueda ser introducido por la sola vía de la implicación, o que la coma sea una conectiva (menos, una no-conectiva) heurística; así, $A, B \rightarrow (A \wedge B)$, es $(A \wedge B) \rightarrow (A \wedge B)$, o mejor, $(A \wedge B) \leftrightarrow (A \wedge B)$; de modo que, nuestro signo es meramente mental o protocolar, y para nuestro cálculo en L, o para la lógica usual, puede considerarse demostrable el sentido inverso de Conj (las leyes de Simplificación).

T2 $[A \rightarrow (B \wedge C)] \leftrightarrow [(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)]$

Idemp (Idempotencia) $(A \wedge A) \leftrightarrow A$

Asoc (Asociación) $\wedge$ $[(A \wedge B) \wedge C] \leftrightarrow [A \wedge (B \wedge C)]$

T3 $(A \wedge B) \rightarrow \neg(\neg A \wedge B)$

Conm (Conmutación) $\wedge$ $(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$

Distr (Distribución) $\vee$ $[A \wedge (B \vee C)] \leftrightarrow [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$

Def $\wedge$ $(A \wedge B) \leftrightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)$

Def $\rightarrow$ $(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$

Def $\leftrightarrow$ $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow [(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)]$

Def $\vee$ $(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \rightarrow B)$

Def $\underline{\vee}()2$ $(A \underline{\vee} B) \leftrightarrow (\neg A \leftrightarrow B)$

Def $\rightarrow$ $(A \rightarrow B) \leftrightarrow [A \leftrightarrow (A \wedge B)]$

Distrb $\underline{\vee}()2$ $[(A \underline{\vee} B) \wedge C] \leftrightarrow [(A \wedge C) \underline{\vee} (B \wedge C)]$

Asoc $\underline{\vee}()2$ $[(A \underline{\vee} B) \underline{\vee} C] \leftrightarrow [A \underline{\vee} (B \underline{\vee} C)]$

Sil $\underline{\vee}()2$ $[(A \underline{\vee} B) \wedge \neg A] \rightarrow B$

$A] \rightarrow \neg B$

Abs (Absurdo) $[A \rightarrow$ Contradic, $B \wedge \neg B] \rightarrow \neg A$

T4 $(A \wedge B) \rightarrow (A \rightarrow B)$

Ad (Adición) $A \rightarrow (A \vee B)$

T6 $[(A \leftrightarrow B) \wedge A] \rightarrow B$

T7 $[(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)] \leftrightarrow [(A \vee B) \rightarrow C]$

Contrapos (Contraposición) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

T8 $[A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow D)] \rightarrow [(A \vee B) \rightarrow (C \vee D)]$

T9 $[(A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)] \leftrightarrow [(A \wedge B) \rightarrow C]$

T10 $[(C \rightarrow A) \vee (C \rightarrow B)] \leftrightarrow [C \rightarrow (A \vee B)]$

T11 $[(A \rightarrow B) \wedge A] \leftrightarrow (A \wedge B)$

T12 $[A \rightarrow (B \underline{\vee} B)] \leftrightarrow \neg A$

Sil hip (Silogismo hipotético) $[(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)] \rightarrow$

$(A \rightarrow C)$

Def (x) $(x)Px \leftrightarrow \neg(Ex)\neg Px$

Def (Ex) $(Ex)Px \leftrightarrow \neg(x)\neg Px$

Distrb $\wedge$ $[(Ex)Px \wedge (Ex)Qx] \rightarrow (Ex)(Px \wedge Qx)$

Distrb $\rightarrow$ $[(x)Px \rightarrow (Ex)Qx] \leftrightarrow (Ex)(Px \rightarrow Qx)$

Distrb $\rightarrow$ $[(Ex)Px \rightarrow (Ex)Qx] \rightarrow (Ex)(Px \rightarrow Qx)$

Subalt (Subalternación) $(x)Px \rightarrow (Ex)Px$

Distrb $\wedge$ $[(x)Px \wedge (x)Qx] \leftrightarrow (x)(Px \wedge Qx)$

Distrb $\rightarrow$ $(x)(Px \rightarrow A) \rightarrow [(x)Px \rightarrow A]$

Algunas de estas tesis tienen nombre, los usuales, otras no, dada su relativa complicación, pero se las nombra por el número que les corresponde en tal orden (Tautología 5, por ejemplo). Igual haremos para las tesis de Vn, nombrando las factibles de hacerlo, y para otras no. Anotemos, ahora, los usos de tesis y reglas que no nombraremos, y que por lo tanto no escribiremos tales pasos de demostración, en la medida en que en nuestras largas demostraciones se aglomerarían demasiados pasos deductivos, y que, tampoco esta es una obra de iniciación a la lógica, y que podemos en consecuencia presuponer algunos pasos obvios o elementales. No anotaremos el axioma o teorema que sirve al uso de MP para una deducción, ya debidamente preparado este axioma o teorema por SU para el uso de MP, sino que escribiremos directamente la deducción (nos referimos a deducción de una hipótesis que no es axioma o teorema), nombrando al lado el axioma o teorema usado. Esta práctica de escribir el axioma o teorema, preparado por SU, o una fórmula como $\vdash A \rightarrow B$, que va a reunirse con nuestra hipótesis A, es el modo propio del modo axiomático de deducción, pero es demasiado para nosotros; de modo que, nuestros axiomas y teoremas actuarán como reglas. No escribiremos tesis nimias como $\neg\neg A \leftrightarrow A$, que ni siquiera han sido nombradas arriba, entre nuestros auxiliares (Tesis de doble negación), otras sí, serán nombradas, como Idempotencia, en la medida en que hagan un paso poco claro. Añadiremos a nuestras reglas sobre lógica de predicados la de equivalencia de predicados, o metateorema de intercambio de predicados equivalentes, ya que, por ejemplo, el predicado $\neg\neg P$ es equivalente al predicado P; ello también puede considerarse una abreviatura de pasos en la que se pasa directamente de $(P \wedge Q)x$, a $(\neg(P \rightarrow \neg Q))x$, y no: $(P \wedge Q)x$ (para cualquier cuantificador), $Pa \wedge Qa$, $Pa \rightarrow \neg Qa$, $(\neg(P \rightarrow \neg Q))x$. No escribiremos, pues, las tesis de ascenso y descenso (llamémoslas así, generalizar, por ejemplo), de x a a, y esto para equivalencia. La equivalencia entre los predicados es la misma que entre las proposiciones, y ese nombre de tesis será nombrado. El orden de nuestros auxiliares -o resultados de L que anotamos- es en el que irán a ser usados a continuación, sin embargo, comienzan con la identidad, en la medida en que ésta es básica para la demostración por absurdo, y para la obtención de TD o Exportación (tesis esta de Exp que no anotamos sino en lo referido a TD).

Resta anotar que nuestro sistema L puede ser entendido como múltiple o bimembre para $\wedge$ y $\vee$. Si es múltiple, los resultados o auxiliares han sido escritos en bi por evitar la engorrosidad de escribirlos en múltiple (siempre, no vale esto la pena para $\wedge$ y $\vee$). Si el sistema es bi, las definiciones múltiples de $\wedge$ y $\vee$ han sido introducidas por estética, para no dejar sola a $\underline{\vee}$, que sí debe figurar múltiple ($\underline{\vee}n$ no tiene el metateorema $\underline{\vee}n \leftrightarrow \underline{\vee}n()$ para figurar más bien en ese lugar del sistema). El puente entre el sistema múltiple y el bi (la única pragmática considerada aquí, para el sistema múltiple $\wedge$ y $\vee$, es la de servir a $\underline{\vee}n$), son los metateoremas $\wedge n \leftrightarrow \wedge n()$, y $\vee n \leftrightarrow \vee n()$, con los que: si el sistema es múltiple -y todo es deducido en múltiple, incluso son deducidos los metateoremas-, entonces el sistema bi es un número de $\wedge n$. Si el sistema es bi -y así queremos, nosotros, dejar a la lógica, salvo una opcionalidad al paso-, entonces las tesis múltiples, el sistema múltiple, se obtiene por recursión de la tesis bi, aplicada al complejo de n variables asociadas, y luego la eliminación de los paréntesis por los metateoremas anotados. (Las notaciones metateoréticas para lo múltiple, cuando sea esto necesario además del ....n, serán ejemplificadas más bien con $\underline{\vee}$n).

4. La demostración de la conmutación y distribución para la disyunción exclusiva múltiple

Sea ahora la demostración de

$$A \underline{\vee} B \underline{\vee} C \ldots \underline{\vee}\, n \;\leftrightarrow\; K \underline{\vee} L \underline{\vee} M \ldots \underline{\vee}\, N$$

donde $K, L, M \ldots N = A, B, C \ldots n$

y $K \neq L \neq M \ldots \neq N$

Es la ley de conmutación para $\underline{\vee}$; las cláusulas abajo explican la notación metateorética del término de la derecha, notación imprescindible para una conmutación de n letras proposición; K, L, etc., son cualquiera de las letras A, B, etc. del término de la izquierda, pero si se es una la otra metaletra debe ser otra letra proposición, y así; la metaletra N quiere decir un mismo número de metaletras que las n letras proposición; una vez sustituidas las metaletras o metavariables por variables, tesis en objeto (lenguaje objeto), las variables pueden ser sustituidas por sustitución uniforme SU por cualquier fórmula o por letras iguales ahora sí.

Demostración (Conm. $\underline{\vee}$, o Conm)

Demostraremos primero una preconm (Pconm)

Pconm $A \veebar B \veebar C..\veebar n \leftrightarrow B \veebar A \veebar C..\veebar n$

Demostremos primero I

I $[A \to (\neg B \land \neg C..\land \neg n) \land [\neg A \to (B \veebar C..\veebar n)] \to [B \to (\neg A \land \neg C..\land \neg n)] \land [\neg B \to (A \veebar C..\veebar n)]$

Hemos abreviado paréntesis para la equivalencia a demostrar, el signo dominante es $\to$. Escribiremos abreviadamente el término izquierdo como F1 $\land$ F2. Demostremos primero Ia y Ib

Ia $F1 \land F2 \to [B \to (\neg A \land \neg C..\land \neg n)]$

El signo dominante es $\to$, en adelante no haremos estas aclaraciones. Demostremos primero Ia1

Ia1 $F1 \land F2 \land B \to (\neg A \land \neg C..\land \neg n)$

1 $F1 \land F2 \land B$ Hipótesis

2 F1 Simp 1

3 $A \to \neg B$ T1 2

4 B Simp 1

5 $\neg A$ MT 3, 4

6 F2 Simp 1

7 $B \veebar C..\veebar n$ MP 6, 5

8 $[B \to (\neg C \land \neg D..\land \neg n)] \land [\neg B \to (C \veebar D..\veebar n)]$ Def $\veebar$ 7

9 $B \to (\neg C \land \neg D..\land \neg n)$ Simp 8

10 $\neg C \land \neg D..\land \neg n$ MP 10, 4

11 $\neg A \land \neg C \land \neg D..\land \neg n$ Conj 5, 10

12 $F1 \land F2 \land B \to (\neg A \land \neg C..\land \neg n)$ TD 1, 11

QDIa1

13 $F1 \land F2 \to [B \to (\neg A \land \neg C..\land \neg n)]$ Exp 12 o Ia1

QD Ia

Ib $F1 \land F2 \to [(\neg B \to (A \veebar C..\veebar n)]$

Demostremos primero Ib1

Ib1 $F1 \wedge F2 \wedge \neg B \rightarrow [(A \rightarrow (\neg C \wedge \neg D..\wedge \neg n)] \wedge [(\neg A \rightarrow (C \underline{\vee} D..\underline{\vee} n)]$

Demostremos primero Ib1a

Ib1a $F1 \wedge F2 \wedge \neg B \rightarrow [A \rightarrow (\neg C \wedge \neg D..\wedge \neg n)]$

Demostremos primero Ib1a1

Ib1a1 $F1 \wedge F2 \wedge \neg B \wedge A \rightarrow (\neg C \wedge \neg D..\wedge \neg n)$

14 $F1 \wedge F2 \wedge \neg B \wedge A$ Hipótesis

15 $F1$ Simp 14

16 A Simp 14

17 $\neg B \wedge \neg C..\wedge \neg n$ MP 15, 16

18 $\neg C \wedge \neg D..\wedge \neg n$ Simp 17

19 $F1 \wedge F2 \wedge \neg B \wedge A \rightarrow (\neg C \wedge \neg D..\wedge \neg n)$ TD 14, 18

QD Ib1a1

20 $F1 \wedge F2 \wedge \neg B \rightarrow [A \rightarrow (\neg C \wedge \neg D..\wedge \neg n)$ Exp 19 o Ib1a1

QD Ib1a

Ib1b $F1 \wedge F2 \wedge \neg B \rightarrow [\neg A \rightarrow (C \underline{\vee} D..\underline{\vee} n)$

Demostremos primero Ib1b1

Ib1b1 $F1 \wedge F2 \wedge \neg B \wedge \neg A \rightarrow (C \underline{\vee} D..\underline{\vee} n)$

21 $F1 \wedge F2 \wedge \neg B \wedge \neg A$ Hipótesis

22 $F2$ Simp 21

23 $\neg A$ Simp 21

24 $B \underline{\vee} C..\underline{\vee} n$ MP 22,23

25 $[B \rightarrow (\neg C \wedge \neg D..\wedge \neg n)] \wedge [\neg B \rightarrow (C \underline{\vee} D..\underline{\vee} n)]$ Def $\underline{\vee}$ 24

26 $\neg B \rightarrow (C \underline{\vee} D..\underline{\vee} n)$ Simp 25

27 $\neg B$ Simp 21

28 $C \underline{\vee} D..\underline{\vee} n$ MP 26, 27

29 $F1 \wedge F2 \wedge \neg B \wedge \neg A \rightarrow (C \underline{\vee} D..\underline{\vee} n)$ TD 21, 28

QD Ib1b1

30 $F1 \wedge F2 \wedge \neg B \rightarrow [\neg A \rightarrow (C \underline{\vee} D..\underline{\vee} n)]$ Exp 29 o Ib1b1

QD Ib1b

31 $F1 \wedge F2 \wedge \neg B \rightarrow [A \rightarrow (\neg C \wedge \neg D..\wedge \neg n)] \wedge [\neg A \rightarrow (C \veebar D..\veebar n)]$

Conj y T2 20 o Ib1a, 30 o Ib1b

QD Ib1

32 $F1 \wedge F2 \rightarrow [\neg B \rightarrow (A \veebar C..\veebar n)]$ Exp y Def $\veebar$ 31 o Ib1

QD Ib

33 $F1 \wedge F2 \rightarrow [B \rightarrow (\neg A \wedge \neg C..\wedge n)] \wedge [\neg B \rightarrow (A \veebar C..\veebar n)]$

Conj y T2 13 o Ia, 32 o Ib

QD I

34 $A \veebar B \veebar C..\veebar n \rightarrow B \veebar A \veebar C..\veebar n$ Def $\veebar$, Def $\veebar$ 33 o I

QD I*

Demostremos ahora la contrapuesta I**

35 $B \veebar A \veebar C..\veebar n$ Hipótesis

36 $A \veebar B \veebar C..\veebar n$ 34 o I* 35

37 $B \veebar A \veebar C..\veebar n \rightarrow A \veebar B \veebar C..\veebar n$ TD 35, 36

QD I**

38 $A \veebar B \veebar C..\veebar n \leftrightarrow B \veebar A \veebar C..\veebar n$ Conj y def $\leftrightarrow$ 34 o I*, 37 o I**

QD Pconm

Demostremos ahora Conm (Conm $\veebar$n)

39 $A \veebar B \veebar C \veebar D..\veebar n \leftrightarrow [A \rightarrow (\neg B \wedge \neg C \wedge \neg D..\wedge \neg n)] \wedge [\neg A \rightarrow (B \veebar C \veebar D..\veebar n)]$ Def $\veebar$

40 $A \veebar B \veebar C \veebar D..\veebar n \leftrightarrow [A \rightarrow (\neg C \wedge \neg B \wedge \neg D..\wedge \neg n)] \wedge [\neg A \rightarrow (C \veebar B \veebar D..\veebar n)]$ Conm $\wedge$ y Pconm 39

41 $A \veebar B \veebar C \veebar D..\veebar n \leftrightarrow A \veebar C \veebar B \veebar D..\veebar n$ Def $\veebar$ 40

QD Pconm*

42 $A \veebar B \veebar C \veebar D..\veebar n \leftrightarrow [A \rightarrow (\neg C \wedge \neg B \wedge \neg D..\wedge \neg n)] \wedge [\neg A \rightarrow (C \veebar B \veebar D..\veebar n)]$ Def $\veebar$ 41 o Pconm*

43 $A \veebar B \veebar C \veebar D..\veebar n \leftrightarrow [A \rightarrow (\neg C \wedge \neg D \wedge \neg B..\wedge \neg n)] \wedge [\neg A \rightarrow (C \veebar D \veebar B..\veebar n)]$ Conm $\wedge$ y Pconm* 42

44 $A \veebar B \veebar C \veebar D..\veebar n \leftrightarrow A \veebar C \veebar D \veebar B..\veebar n$ Def $\veebar$ 43

QD Pconm**

.

.

.

Por este procedimiento demostrativo a partir de 39, siempre el mismo, practicado n - 2 veces, la una vez más es Pconm, y la última ubicación o conmutación es aquella de la que se parte, se llega a establecer Pconm**...*n - 2 leyes, que permiten que una letra (adjuntando Pconm) pueda pasar siempre al lugar siguiente, y que a su vez una letra cualquiera, de la conmutación de la que se parte, pueda pasar al lugar anterior; ello equivale a decir que se pueden ordenar conmutativamente las letras como se quiera, partiendo de un estado dado; es decir, se ha demostrado Conm

$$A \veebar B \veebar C...\veebar n \leftrightarrow K \veebar L \veebar M...\veebar N$$

donde $K, L, M...N = A, B, C...n$

y $K \neq L \neq M...\neq N$

El procedimiento demostrativo, 39 - 44.....Pconm**..*n - 2, o dicho verbalmente, a partir de 44 (pero podía ser antes), "aplicando muchas veces este procedimiento (39 -44)....se llega a...(la conmutación de n con su anterior)", este procedimiento demostrativo puede muy bien interpretarse como un proceso inductivo implícito, así como cuando sabemos que todas las fichitas de dominó caerán a partir de la primera verificamos un proceso inductivo implícito aún sin saber explícitamente de inducción; en efecto, sabemos que, a partir de 44, o antes, que una conmutación dada siempre será el fundamento de una siguiente, y que por lo tanto ésta se dará, y que tenemos una primera conmutación (Pconm), es decir, que una conmutación anterior cualquiera implica la conmutación posterior, y que se da la primera conmutación, lo cual, todo lo cual, es la definición de inducción matemática; escrito técnicamente, diríamos: Pconm 1 (Pconm), y Pconm k (Pconm**cualquiera incluida Pconm) → Pconm k + 1, entonces Pconm K o Conm (no debe verse ninguna paradoja en esta formulación de PI o principio de inducción matemática).

Hemos querido poner de explícito esta inducción matemática en nuestra demostración -y en las siguientes, siempre que se da ....n-, cosa que no haremos luego; en cuanto a la demostración dada, y primera (la conmutación es lógicamente una demostración primera, sólo tendría que verse que por definición de $\underline{\vee}$, la conmutación de ésta ya estaría demostrada, es decir, la definición de $\underline{\vee}$ para tablas de verdad o intuitiva primera, con lo cual nos hubiéramos ahorrado tremenda demostración arriba y por cálculo, pero éste es el modo como insisten los lógicos matemáticos deben hacerse las cosas), en cuanto a la demostración arriba hagamos unas aclaraciones u observaciones. Se ha especificado la estrategia o arte demostrativo con los protocolos "primero demostraremos" -cosa perfectamente eliminable en una demostración continua, aunque necesariamente por partes, la parte continua son los números 1, 2, etc. de la izquierda de la demostración-; este diagramar la estrategia (no demasiado) es para que el lector, aún el lógico, no se entere a último momento de qué es lo que se estaba haciendo, en una demostración tan larga. Se ha escrito Exportación en lugar de usar TD en su completo alcance; esto ha alargado la demostración (no demasiado), y ha hecho preguntarse al lector por qué; más allá de un capricho, que lo es, al autor le gustaría trabajar siempre axiomáticamente -el lector se habrá dado ya cuenta de ello, casi fundiendo axiomas y reglas, que sean lo mismo, y teoremas-, y el TD no es propiamente axiomático, sí lo es Exportación y MP, e igualmente nos gustaría a MP como axioma; pero, más allá de este capricho, tenemos serias reservas contra la demostración de TD en L, y ya que estamos en L, cabe afirmar lo propicio en él;

TD como simple nudo entre premisa y conclusión, en un condicional (o la noción de $\vdash$ o deducción sintáctica, $\vdash$ es la implicación de un axioma o teorema, y $\rightarrow$ de un teorema es una deducción sintáctica), el cual, TD, así entendido, no es más que la introducción de $\vdash$ a nuestro metacálculo, es decir, que no es demostrable en él (puede probarse esta última aserción); a partir de TD, entendido como $\vdash \leftrightarrow (\vdash \rightarrow)$, o $A \vdash B \rightarrow \vdash (A \rightarrow B)$ (ya que es este sentido, y no $\leftarrow$, el que es precisamente indemostrable en L), es posible obtener en L Exportación, con lo cual, la síntesis, logra el mismo efecto que TD con completo alcance. Seguimos hablando de TD con completo alcance, paradójicamente yuxtapuesto a un TD (llamado igual) restringido (el que nosotros usaremos); y es que TD en completo alcance es verdadero, y sólo hay que cambiarle de demostración a partir de los axiomas y reglas de L, y algún que otro teorema derivado de éstos, u obtenerlo de Exportación, o introducirlo innato a L probándolo en semántica con tablas de verdad (cosa elemental) como se hace con los axiomas y definiciones (y hasta reglas). Es decir, no hacemos apostasía de L (que incluye a TD completo), sería inútil exponer un sistema que no se va a usar (habríamos puesto estas notas al exponer el sistema, verificando el cambio), lo que traicionaría la verdad de TD completo relegando injustamente a L; usaremos pues en lo sucesivo TD restringido y Exportación en un paso, ya entendiendo al primero como innato a L o la parte no demostrada del TD completo demostrado; y esto por un gusto o afán axiomático, pero también por un cambio en la demostración de TD. Esta larga nota, en manera alguna parte de nuestro tema, por la que nos disculpamos, viene en realidad a tono con un trabajo que trata de completar la lógica matemática y que por lo tanto revela una preocupación por ella, así el sistema o cálculo en que ella funciona -uno de entre los utilísimos- debe ser perfecto o ceder sugerencias. No hablaremos más de TD, pero estas observaciones deben bastar al lógico para que revise sus demostraciones, que son tema standard de la lógica matemática hasta aquí. Obviamente, la demostración de TD -completo-, en L, es al menos tan larga o adecuada -propicia- a L, como la de Exp, lo que ha justificado nuestra alternativa de elección. Cerremos, pues, este caso de errores lógicos entre los lógicos, manteniendo el férreo prestigio de TD para la lógica, o de TD restringido y Exp. (No es necesario, sin embargo, presuponer el principio de inducción matemática para la demostración de TD).

Demostremos ahora una siguiente ley para $\veebar$n, que es la ley de distribución.

Distr $\veebar$ (Distr) $(A \veebar B \veebar C..\veebar n) \wedge K \leftrightarrow (A \wedge K) \veebar (B \wedge K) \veebar (C \wedge K)..\veebar (n \wedge K)$

Demostraremos primero una predistr (Pdistr)

Pdistr $(A \veebar B \veebar C..\veebar n) \wedge K \leftrightarrow \{(A \wedge K) \rightarrow [\neg(B \wedge K) \wedge \neg(C \wedge K)..\wedge$

$\neg(n \land K)]\} \land \{(\neg(A \land K) \rightarrow [(B \veebar C..\veebar n) \land K]$

Abreviaremos el término derecho por F3 $\land$ F4

Demostremos primero I

I $[A \rightarrow (\neg B \land \neg C..\land \neg n)] \land [\neg A \rightarrow (B \veebar C..\veebar n)] \land K \rightarrow F3 \land F4$

Abreviaremos el término izquierdo por F1 $\land$ F2 $\land$ K.

Demostremos primero Ia y Ib

Ia F1 $\land$ F2 $\land$ K $\rightarrow$ F3

1 F1 $\land$ F2 $\land$ K $\land$ (A $\land$ K) Hipótesis

2 F1 $\land$ A Simp 1

3 $\neg B \land \neg C \land .. \neg n$ MP 2

4 K Simp 1

5 $\neg B \land \neg C \land .. \neg n \land K$ Conj 3,4

6 $\neg B \land \neg C \land .. \neg n \land K \land K \land .. K(n - 1)$ Idemp 5 (aplicada recursivamente hasta K(n - 1))

7 $(\neg B \land k) \land (\neg C \land K)..\land (\neg n \land K)$ Asoc $\land$ 6

8 $\neg(B \land K) \land \neg(C \land K)..\land \neg(n \land K)$ T3 7

9 F1 $\land$ F2 $\land$ K $\rightarrow$ F3 TD y Exp 1, 8

QD Ia

Ib F1 $\land$ F2 $\land$ K $\rightarrow$ F4

10 F1 $\land$ F2 $\land$ K $\land$ $\neg$(A $\land$ K) Hipótesis

11 $\neg(A \land K)$ Simp 10

12 $\neg(K \land A)$ Conm $\land$ 11

13 $K \rightarrow \neg A$ Def $\rightarrow$ 12

14 K Simp 10

15 $\neg A$ MP 13, 14

16 F2 Simp 10

17 $B \veebar C..\veebar n$ MP 16, 17

18 $(B \veebar C..\veebar n) \land K$ Conj 17, 14

19 $F1 \wedge F2 \wedge K \rightarrow F4$ TD y Exp 10, 18

QD Ib

20 $F1 \wedge F2 \wedge K \rightarrow F3 \wedge F4$ Conj y T2 Ia, Ib

QD I

Demostremos ahora la contrapuesta o II

II $F3 \wedge F4 \rightarrow F1 \wedge F2 \wedge K$

Demostremos primero IIb y IIa

IIb $F3 \wedge F4 \rightarrow F2 \wedge K$

21 $F3 \wedge F4 \rightarrow [A \vee (B \veebar C..\veebar n)] \wedge K$ Def $\rightarrow$ IIb

22 $F3 \wedge F4 \rightarrow \{(A \wedge K) \vee [(B \veebar C..\veebar D) \wedge K]\}$ Distr $\vee$ 21

23 $F3 \wedge F4 \rightarrow \{\neg(A \wedge K) \rightarrow [(B \veebar C..\veebar D) \wedge K]\}$ Def $\vee$ 22

24 $F3 \wedge F4 \wedge \neg(A \wedge K) \rightarrow [(B \veebar C..\veebar D) \wedge K]$ Exp 23

25 $F3 \wedge \{\neg(A \wedge K) \rightarrow [(B \veebar C..\veebar D) \wedge K]\} \wedge \neg(A \wedge K)$ Hipótesis

26 $[(B \veebar C..\veebar D) \wedge K]$ Simp y MP 25

27 $F3 \wedge F4 \rightarrow \{\neg(A \wedge K) \rightarrow [(B \veebar C..\veebar D) \wedge K]\}$ TD y Exp 25, 26

QD IIb (27 es equivalente a IIb)

IIa $F3 \wedge F4 \rightarrow F1$

28 $A \rightarrow \{K \rightarrow [\neg(B \wedge K) \wedge \neg(C \wedge K)..\wedge \neg(n \wedge K)]\} \wedge F4 \rightarrow F1$ Exp IIa

29 $A \rightarrow \{K \rightarrow [\neg(B \wedge K) \wedge \neg(C \wedge K)..\wedge \neg(n \wedge K)]\} \wedge F4 \wedge A$ Hipótesis

30 $\{K \rightarrow [\neg(B \wedge K) \wedge \neg(C \wedge K)..\wedge \neg(n \wedge K)]\} \wedge F4$ Simp y MP y conj 29

31 $F3 \wedge F4 \rightarrow F2 \wedge K$ IIb

32 $F3 \wedge F4$ Hipótesis de IIa

33 K MP y Simp 31, 32

34 $\neg(B \wedge K) \wedge \neg(C \wedge K)..\wedge \neg(n \wedge K)$ MP 30, 33

35 $(K \rightarrow \neg B) \wedge (K \rightarrow \neg C)..\wedge (K \rightarrow \neg n)$ Conm $\wedge$ y Def $\rightarrow$ 34

36 $K \rightarrow \neg B \wedge \neg C..\wedge \neg n$ T2 35

37 $\neg B \wedge \neg C..\wedge \neg n$ MP 36, 33

38 $F3 \wedge F4 \rightarrow F1$ TD y Exp 29, 37

QD IIa

39 $F3 \wedge F4 \rightarrow F1 \wedge F2 \wedge K$ Conj y T2 IIa, IIb

QD II

40 $(A \underline{\vee} B \underline{\vee} C..\underline{\vee} n) \wedge K \leftrightarrow \{(A \wedge K) \rightarrow [\neg(B \wedge K) \wedge \neg(C \wedge K)..\wedge \neg(n \wedge K)]\} \wedge \{(\neg(A \wedge K) \rightarrow [(B \underline{\vee} C..\underline{\vee} n) \wedge K]$ Conj y Def $\leftrightarrow$ y Def $\underline{\vee}$ I, II

QD Pdistr

Si quisiéramos demostrar Distr, que es lo que queremos, nos faltaría que $(B \underline{\vee} C..\underline{\vee} n) \wedge K$ sea equivalente a $(B \wedge K) \underline{\vee} (C \wedge K)..\underline{\vee} (n \wedge K)$, con lo cual, por definición de $\underline{\vee}$ llegamos a Distr. Pero esto nos pone como al principio, sólo que con n - 1 variables. Por lo tanto, aplicando recursivamente a Pdistr sobre sí misma, llegamos hasta

$(B \underline{\vee} C..\underline{\vee} n) \wedge K$

.

.

$[(n - 1) \underline{\vee} n] \wedge K$

Fórmula que es fácilmente distribuible por Distr $\underline{\vee}()2$, tras haber aplicado n - 3 veces Pdistr sobre sí misma (la una vez más es Pdistr, y las otras dos Distr $\underline{\vee}()2$). Ahora, aplicando la definición de $\underline{\vee}$ n - 2 veces (también para Pdistr) llegamos a

$[(n - 1) \wedge K] \wedge (n \wedge K)$

.

.

$(B \wedge K) \veebar (C \wedge K)..\veebar (n \wedge K)$

Distr

QD Distr $(A \veebar B \veebar C..\veebar n) \wedge K \leftrightarrow (A \wedge K) \veebar (B \wedge K) \veebar (C \wedge K)..\veebar (n \wedge K)$

5. Los silogismos de la disyunción exclusiva múltiple

Demostremos, ahora, los silogismos de $\veebar n$, los cuales son muy fácilmente deducibles, a partir de la definición de $\veebar n$, y de otra ley a demostrar. Antes, notemos que $\veebar n$ no tiene ley de asociación -esto viene dado por definición, pues si fuera equivalente a $\veebar n()2$, ya la definición de $\veebar \leftrightarrow (\leftrightarrow\neg)$, hubiera sido elegida, y cancelado el estudio heurístico de $\veebar n$-, salvo precisamente para $\veebar()2$ o $\veebar \leftrightarrow (\leftrightarrow\neg)$. Los resultados para asociación son

$\veebar n()2 \leftrightarrow \veebar n()2$ Asoc $\veebar n()2$

O mejor $\veebar 3()2 \leftrightarrow \veebar 3()2$ Asoc $\veebar 3()2$

O mejor $A \veebar (B \veebar C) \leftrightarrow (A \veebar B) \veebar C$ Asoc $\veebar()2$

La última, la ley conocida de asociación para disyunción biargumental, y resultado presupuesto por nosotros en L, logra por recursión la primera, y la diferencia entre la segunda y esta tercera (recordemos), está en que la segunda es metalenguaje, en cuanto contiene la conmutación de la tercera.

Tras la ley de asociación -no asociación, aquí-, vienen por elemental orden lógico los silogismos para $\veebar n$. Demostraremos primero T20, a partir de la cual convendremos se deducen unos silogismos, y los otros a partir de la definición de $\veebar n$

T20 $A \underline{\vee} B \underline{\vee} C..\underline{\vee}\, n \rightarrow \{(A \underline{\vee} B..\underline{\vee}\, m) \rightarrow [\neg(m + 1) \wedge \neg(m + 2)..\wedge \neg n]\} \wedge \{(\neg A \wedge \neg B..\wedge \neg m) \rightarrow [(m + 1) \underline{\vee} (m + 2)..\underline{\vee}\, n]\}$ para $m \geq 2, \leq (n - 1)$ (lo que obliga a $n \geq 3$)

Obsérvese que para m (un número de las variables del término de la izquierda en ese orden) = 1, T20 se convierte en uno de los sentidos de la equivalencia de la definición de $\underline{\vee}n$, con lo cual, si escribiéramos $m \geq 1$ en T20, y usáramos -como que lo haremos- la definición de $\underline{\vee}n$ en la demostración de T20, cometeríamos petición de principio. Por ello escribimos $m \geq 2$ en T20. Podríamos, igualmente, escribir $m \geq 1$ en T20, y advertir que para $m = 1$ ya está demostrada, y que su demostración general comienza en realidad de $m \geq 2$, con lo que conseguimos una fórmula más general que T20 arriba; pero, no nos interesa esta fórmula más general -que subsume un sentido de la definición de $\underline{\vee}n$- por ahora, sino resaltar la heurística de T20 arriba, respecto de Def $\underline{\vee}n$. Demostremos, pues, T20. La abreviaremos, como acostumbramos, por $F1 \wedge F2$ (la definición de $\underline{\vee}n$) $\rightarrow F3 \wedge F4$. Demostremos primero Ib

Ib $F1 \wedge F2 \rightarrow F4$

1 $F1 \wedge F2 \wedge (\neg A \wedge \neg B..\neg m)$ Hipótesis

2 $\neg A$ Simp 1

3 $\neg A \rightarrow (B \underline{\vee} C..\underline{\vee}\, n)$ Simp 1

4 $B \underline{\vee} C..\underline{\vee}\, n$ MP 3, 2

5 $\neg B$ Simp 1

6 $\neg B \rightarrow (C \underline{\vee} D..\underline{\vee}\, n)$ Def $\underline{\vee}$ y Simp 4

7 $C \underline{\vee} D..\underline{\vee}\, n$ MP 6, 5

.

.

8 $\neg m$ Simp 1

9 $(m + 1) \veebar (m + 2)..\veebar n$ MP 7*..*, 7*..*

10 $F1 \wedge F2 \rightarrow F4$ TD y Exp 1, 9

QD Ib

Ia $F1 \wedge F2 \rightarrow F3$

11 $F1 \wedge F2 \wedge (A \veebar B..\veebar m)$ Hipótesis

12 $\neg[\neg(m + 1) \wedge \neg(m + 2)..\wedge \neg n)]$ Hipótesis para demostración por absurdo (Abs)

13 $A \rightarrow (\neg B \wedge \neg C..\wedge \neg n)$ Simp 11

14 $A \rightarrow [\neg(m + 1) \wedge \neg(m + 2)..\wedge \neg n)]$ T1 13

15 $\neg A$ MT 14, 12

16 $\neg A \rightarrow (B \veebar C..\veebar n)$ Simp 11

17 $B \veebar C..\veebar n$ MP 16, 15

18 $B \rightarrow (\neg C \wedge \neg D..\wedge \neg n)$ Def $\veebar$ y Simp 17

19 $B \rightarrow [\neg(m + 1) \wedge \neg(m + 2)..\wedge \neg n)]$ T1 18

20 $\neg B$ MT 19, 12

.

.

21 $\neg m$ MT 20*..*, 12

22 $A \veebar B..\veebar m$ Simp 11

23 $\neg A \rightarrow (B \veebar C..\veebar m)$ Def $\veebar$ y Simp 22

24 $B \veebar C..\veebar m$ MP 23, 15

25 $\neg B \rightarrow (C \veebar D..\veebar m)$ Def $\veebar$ y Simp 24

26 $C \veebar D..\veebar m$ MP 25, 20

.

.

27 $(m - 1) \veebar m$ MP 26*..*, 20*..*

28 m Sil $\veebar$()2 27, 20*..*

29 $m \wedge \neg m$ Conj 28, 21

30 $[\neg(m + 1) \wedge \neg(m + 2)..\wedge \neg n)]$ Abs 12, 29

31 $F1 \wedge F2 \rightarrow F3$ TD y Exp 11, 30

QD Ia

32 $F1 \wedge F2 \rightarrow F3 \wedge F4$ Conj y T2 Ia, Ib

33 $A \veebar B \veebar C..\veebar n \rightarrow \{(A \veebar B..\veebar m) \rightarrow [\neg(m + 1) \wedge \neg(m + 2)..\wedge \neg n]\}$ $\wedge \{(\neg A \wedge \neg B..\wedge \neg m) \rightarrow [(m + 1) \veebar (m + 2)..\veebar n]\}$ para $m \geq 2$, $\leq (n - 1)$ Def $\veebar$ 32

QD T9

Debe observarse muy detenidamente que T20 no posee su contrapuesta o no es equivalencia, sólo implicación. Es aquí donde nos abandona la intuición porque no es fácil pensar este no sentido inverso, y requerimos demostración formal en sentido grueso. Lamentablemente la lógica no es la demostración de las contingencias, por lo cual, en torno a T20, nos quedamos con la demostración de T20; aunque, no estaría mal, alguna vez, intentar un sentido demostrativo sintáctico, de no deductibilidad y no no deductibilidad; más tarde, este proceso demostrativo, francamente posible, nos será útil y necesario, lo que a fin de cuentas no es aquí. Pero la mayor atracción de T20 es su paralelo a la definición de $\veebar$n, su heurística respecto de esta Def $\veebar$, y el hecho de que es paradigmática de $\veebar$n, una ley muy propia y al estilo de $\veebar$n, diríamos, y por fin, del hecho de que encierra las leyes de silogismos de $\veebar$n.

En verdad, los silogismos a mostrarse en base a T20, de los de abajo, constituyen más bien la demostración de T20, y no es que los deducimos a partir de T20; pero considerando la paradigmicidad de T20, o ser precisamente la síntesis de silogismos de $\underline{\vee}n$, preferimos presentar primero T20. Convendremos, pues, que obtenemos silogismos de T20, como parte de la demostración (cada uno) de ésta, o "deducidos" de T20 (alguna deducción de T20 directa siempre hubiera sido posible, aunque más tediosa, y de allí, sí, deduciríamos a Sils 3 y 4).

Anotaremos, simplemente, los silogismos, en la medida que su demostración a partir de Def $\underline{\vee}$, Sils 1 y 2, y de T20, Sils 3 y 4, es trivial, hartamente trivial

Sil 1 $(A \underline{\vee} B..\underline{\vee}\ n) \wedge A \rightarrow \neg B \wedge \neg C..\wedge \neg n$

Sil 2 $(A \underline{\vee} B..\underline{\vee}\ n) \wedge \neg A \rightarrow B \underline{\vee} C..\underline{\vee}\ n$

Sil 3 $(A \underline{\vee} B..\underline{\vee}\ n) \wedge (A \underline{\vee} B..\underline{\vee}\ m) \rightarrow \neg(m + 1) \wedge \neg(m + 2)..\wedge \neg n$

Sil 4 $(A \underline{\vee} B..\underline{\vee}\ n) \wedge (\neg A \wedge \neg B..\wedge \neg m) \rightarrow (m + 1) \underline{\vee} (m + 2)..\underline{\vee}\ n$

Sil 3, 4, para $m \geq 2, \leq (n - 1)$

Es digno de aclarar que Sils 1 y 2 no necesitan en realidad demostración, son por definición, por el hecho de que hemos elegido tal definición para $\underline{\vee}n$; con otra definición, Sils 1 y 2, hubieran necesitado de demostración. Por este motivo, como dijimos, separamos Def $\underline{\vee}$ de T20, en lugar de sumarlas, en una T20* para $m \geq 1$, y escribir sólo dos fórmulas de silogismos, es decir, para mostrar explícitamente fundamentos. Aunque, claro, la vía de proponer T20* para este acápite, puede considerarse que ha sido hecha arriba.

Antes de usar a T20 para nuevas leyes, advirtamos que registramos a T20 como resultado y no como auxiliar, T20 yuxtapuesta a Sils (hemos dicho esto ya sobradamente). También, ahora, registraremos a T20* como resultado formal

T20* $(A \underline{\vee} B..\underline{\vee}\ n) \rightarrow F3 \wedge F4$ para $m \geq 1, \leq (n - 1)$ $(n \geq 2)$

Conj (y resto de leyes) Def $\underline{\vee}$, T9

A partir de T20*, observaremos un resultado que en realidad es un tópico en lógica

T20* $(A \veebar B..\veebar n) \leftrightarrow F3 \wedge F4$ para $n = 2$ (lo que obliga a $m = 1$)

La equivalencia se verifica, pues, para $n = 2$ o $\veebar()2$ o $\veebar 2$; este es un tópico en lógica, cual, en lógica de predicados, el todo es igual a la parte, o $(x)Px \leftrightarrow (Ex)Px$, para un universo de un individuo, y hay más ejemplos; cuando el número es pequeño, o el mínimo, los resultados son especiales.

Demostremos, ahora, T21, sin más orden (a partir de Sils no vemos mayor orden en la demostración de leyes) que el aprovechar a T20 (y a T20*)

T21 $A \veebar B \veebar C..\veebar n \rightarrow \{(A \veebar B..\veebar m) \leftrightarrow [\neg(m + 1) \wedge \neg(m + 2)..\wedge \neg n]\} \wedge \{(\neg A \wedge \neg B..\wedge \neg m) \leftrightarrow [(m + 1) \veebar (m + 2)..\veebar n]\}$ para $m \geq 1, \leq (n - 1)$

Ya tenemos demostrado $\rightarrow$, sólo queda demostrar $\leftarrow$, no hay, pues, problema de petición de principio al usar def $\veebar$ o T20*

1 $A \veebar B \veebar C..\veebar n$ Hipótesis

2 $(m + 1) \veebar (m + 2)..\veebar n \veebar A \veebar B..\veebar m$ Conm $\veebar$ 1

3 $\{[(m + 1) \veebar (m + 2)..\veebar n] \rightarrow (\neg A \wedge \neg B..\wedge \neg m)\} \wedge \{[\neg(m + 1) \wedge \neg(m + 2)..\wedge \neg n] \rightarrow (A \veebar B..\veebar n)\}$ T20* 2 (Abrev F1)

4 $A \veebar B \veebar C..\veebar n \rightarrow F1$ TD 1, 3

5 T21 Conj y T2 y Def $\leftrightarrow$ T20*, 4

QD T21

T21 nos muestra, pues, que dada $\veebar n$, la afirmación de la alternativa entre algunas letras, equivale (no sólo implica) a la negación de las otras, y que la negación de unas letras equivale (no sólo implica) a la alternativa de las restantes.

Conservaremos a T21 como un resultado para el cálculo de $\veebar n$, y sacaremos de ella un resultado también importante o T22

T22 $A \veebar B .. \veebar n \leftrightarrow [A \leftrightarrow (\neg B \land \neg C .. \land \neg n)] \land [\neg A \leftrightarrow (B \veebar C .. \veebar n)]$

1 $A \veebar B .. \veebar n \rightarrow [A \leftrightarrow (\neg B \land \neg C .. \land \neg n)] \land [\neg A \leftrightarrow (B \veebar C .. \veebar n)]$

T21 para m = 1

2 $[A \leftrightarrow (\neg B \land \neg C .. \land \neg n)] \land [\neg A \leftrightarrow (B \veebar C .. \veebar n)] \rightarrow A \veebar B .. \veebar n$

Obviaremos la demostración de este paso

3 T22 Conj y Def $\leftrightarrow$ 1, 2

QD T22

Esta ley es la versión en equivalencia, o coimplicación, de la definición de $\veebar n$; un resultado importante.

6. Las leyes "paradójicas" de la disyunción exclusiva múltiple

Demostremos, ahora, algunas complicaciones de los silogismos hacia la equivalencia o coimplicación, que también pueden verse como leyes de aquellas "paradógicas" que han consternado a los lógicos. La "paradoja" (no contradicción, pero malestar respecto al mundo intuitivo) desaparece -en la doctrina lógico matemática- por la distinción entre implicación, coimplicación, disyunción (y ahora disyunción múltiple) materiales, y las mismas estrictas (valga esta nota para informar la aparición de una disyunción exclusiva múltiple estricta); también aclaramos que coimplicación y equivalencia son lo mismo (aunque con un matiz relevante de diferencia lingüística), aquí, siendo el apellido material o estricta el que hace la diferencia que otros lógicos denominan coimplicación y equivalencia, por ejemplo.

Demostraremos sólo un sentido de las siguientes fórmulas, o $\leftarrow$, obviando el anterior, elemental en base a los silogismos respectivos

T23 $(A \veebar B..\veebar n) \wedge A \leftrightarrow (\neg B \wedge \neg C..\wedge \neg n) \wedge A$

T24 $(A \veebar B..\veebar n) \wedge \neg A \leftrightarrow (B \veebar C..\veebar n) \wedge \neg A$

T25 $(A \veebar B..\veebar n) \wedge (A \veebar B..\veebar m) \leftrightarrow [\neg(m + 1) \wedge \neg(m + 2)..\wedge \neg n)]$
$\wedge (A \veebar B..\veebar m)$

T26 $(A \veebar B..\veebar n) \wedge (\neg A \wedge \neg B..\wedge \neg m) \leftrightarrow [(m + 1) \veebar (m + 2)..\veebar n)]$
$\wedge (\neg A \wedge \neg B..\wedge \neg m)$

T25 y T26 para $m \geq 2$

T23 (Dem) $(\neg B \wedge \neg C..\wedge \neg n) \wedge A$ Hipótesis

2 $A \rightarrow (\neg B \wedge \neg C..\wedge \neg n)$ Conm $\wedge$ y T4 1

3 A Simp 1

4 $A \vee (B \veebar C..\veebar n)$ Ad 3

5 $\neg A \rightarrow (B \veebar C..\veebar n)$ Def $\vee$ 4

6 $(A \veebar B..\veebar n) \wedge A$ Conj y Def $\veebar$ 2, 5, 3

7 QD T23 TD 1, 6

T24 (Dem) $(B \veebar C..\veebar n) \wedge \neg A$ Hipótesis

2 $\neg A \rightarrow (B \veebar C..\veebar n)$ Conm $\wedge$ y T4 1

3 $\neg A$ Simp 1

4 $\neg A \vee (\neg B \wedge \neg C..\wedge \neg n)$ Ad 3

5 $A \rightarrow (\neg B \wedge \neg C..\wedge \neg n)$ Def $\vee$ 4

6 $(A \veebar B..\veebar n) \wedge \neg A$ Conj y Def $\veebar$ 5, 2, 3

7 QD T24 TD 1, 6

T25 (Dem) $[\neg(m + 1) \wedge \neg(m + 2)..\wedge \neg n] \wedge (A \veebar B..\veebar m)$
Hipótesis

2 $(A \veebar B..\veebar m) \wedge [\neg(m + 1) \wedge \neg(m + 2)..\wedge \neg n] \rightarrow (A \veebar B \quad \veebar n)$

T27 (Demostraremos esta ley a continuación, no conviene hacerlo aquí en la medida en que es una ley independiente, no la parte del reverso de otra, obviamente su demostración no presupone T25)

3 $A \veebar B..\veebar n$ Conm $\wedge$ y MP 1, 2

4 $A \veebar B..\veebar m$ Simp 1

5 QD T25 TD y Conj 1, 3, 4

T26 (Dem) $(A \veebar B..\veebar n) \wedge (\neg A \wedge \neg B..\wedge \neg m)$ Hipótesis (Transformaremos el miembro derecho de la fórmula a demostrar hasta llegar a identidad con el izquierdo)

2 $[(A \veebar B..\veebar n) \wedge \neg A] \wedge (\neg B \wedge \neg C..\wedge \neg m)$ Asoc $\wedge$ 1

3 $[(B \veebar C..\veebar n) \wedge \neg A] \wedge (\neg B \wedge \neg C..\wedge \neg m)$ T24 2

4 $[(B \veebar C..\veebar n) \wedge \neg B] \wedge (\neg A \wedge \neg C..\wedge \neg m)$ Asoc $\wedge$ y Conm $\wedge$ 3

5 $[(C \veebar D..\veebar n) \wedge \neg B] \wedge (\neg A \wedge \neg C..\wedge \neg m)$ T24 4

.

.

6 $\{[(m + 1) \veebar (m + 2)..\veebar n] \wedge \neg m\} \wedge [\neg A \wedge \neg B..\wedge \neg(m - 1)]$ T24 5*..*

7 $[(m + 1) \veebar (m + 2)..\veebar n] \wedge (\neg A \wedge \neg B..\wedge \neg m)$ Asoc $\wedge$ y Conm $\wedge$ 6

QD T26

En el trabajo anterior hemos separado T23 y T24 de T25 y T26, respectivamente, nuevamente, y para mantener sistematicidad con lo hecho en Si1s, e indirectamente mostrando fundamentos; pero, claro está, anotar T23 nos sirve también, al igual que T24, para pensar mejor las fórmulas, liberados de la jerga técnica de los emes más unos, etc. (ya dijimos que este trabajo sintáctico puede verse también en sentido semántico, y por ello, preocupados también por nuestra aproximación hacia lo real). Así, T23 guarda relación con las fórmulas $[(A \rightarrow B) \wedge A] \leftrightarrow (B \wedge A)$, $[(A \vee B) \wedge \neg A] \leftrightarrow (B \wedge \neg A)$, $[(A \leftrightarrow B) \wedge \neg A] \leftrightarrow (\neg B \wedge \neg A)$, etc., que indican que dados unos simples hechos, o proposiciones, ello equivale a que están conectados, y que se da uno de ellos; en el caso de T23, dada una proposición y otras varias negativas, se sigue la equivalencia de que están en disyunción exclusiva, y que se da la proposición positiva. Ello ciertamente es "paradójico" e ilustra nuestro trato de la disyunción exclusiva en sentido material y una disyunción exclusiva estricta o lógica propiamente que debe verse en el signo $\veebar n$ dominante de un teorema o ley lógica. A continuación veremos la fórmula clave para todas las "paradojas" de $\veebar n$, y que obedece precisamente a los dictados de $\veebar n$ en su definición por tablas de verdad o $\veebar n$ material. Para ello, trabajaremos ya con $m \geq 1$, o sólo dos fórmulas de silogismos, sólo T20*, y T25 y T26. De esta fórmula, o T27, podrían deducirse T25 y T26 (así dijimos, en efecto, para T25), y es justamente lo paradigmático para $\veebar n$ (aunque nosotros hayamos obtenido T26 por otra vía). Valga toda esta pequeña reflexión al paso, para mostrar preocupación por la poca eficiencia de la distinción entre material y estricta, para una conectiva, en pos de resolver las paradojas de las conectivas (preocupación frente a lo real). Tras demostrar T27 para $m \geq 1$, insistimos todavía en anotar el caso para $m = 1$, y hacer algún que otro desarrollo sobre ello. Demostremos T27

T27 $(A \veebar B..\veebar m) \wedge [\neg(m + 1) \wedge \neg(m + 2)..\wedge \neg n] \rightarrow (A \veebar B \quad \veebar n)$

1 $(A \veebar B..\veebar m) \wedge [\neg(m + 1) \wedge \neg(m + 2)..\wedge \neg n]$ Hipótesis

2 $[A \to (\neg B \wedge \neg C..\wedge \neg m)] \wedge [\neg A \to (B \veebar C..\veebar m)$ Simp y Def $\veebar$ 1

3 $A \to (\neg B \wedge \neg C..\wedge \neg m)$ Simp 2

4 $\neg(m + 1) \wedge \neg(m + 2)..\wedge \neg n$ Simp 1

5 $A \to [\neg(m + 1) \wedge \neg(m + 2)..\wedge \neg n]$ Ax1 4

6 $A \to (\neg B \wedge \neg C..\wedge \neg n)$ Conj y T2 3, 5

7 $\neg A \wedge \neg(B \veebar C..\veebar n)$ Hipótesis Abs

8 $\neg(B \veebar C..\veebar n)$ Simp 7

9 $[B \to (\neg C \wedge \neg D..\wedge \neg n)] \to \neg[\neg B \to (C \veebar D..\veebar n)]$ Def $\veebar$ y Def $\to$ 8

10 $[B \to (\neg C \wedge \neg D..\wedge \neg n)] \to [\neg B \wedge \neg(C \veebar D..\veebar n)]$ Def $\wedge$ 9

11 $B \veebar A..\veebar m$ Simp y Conm $\veebar$ 1

12 $B \to (\neg A \wedge \neg C..\wedge \neg n)$ Pasos similares a 2 - 6 para 11

13 $B \to (\neg C \wedge \neg D..\wedge \neg n)$ T1 12

14 $\neg B \wedge \neg(C \veebar D..\veebar n)$ MP 10, 13

15 $\neg C \wedge \neg(D \veebar E..\veebar n)$ Pasos similares a 8 - 14 para 14

.

.

16 $\neg(m - 1) \wedge \neg[m \veebar (m + 1)..\veebar n]$ Pasos similares a 8 - 14 para 15 *..*

17 $\neg A$ Simp 7

18 $\neg B$ Simp 14

.

.

19 $\neg(m - 1)$ Simp 16

20 $\neg A \wedge \neg B..\wedge \neg(m - 1)$ Conj 17 - 19

21 $A \veebar B..\veebar m$ Simp 1

22 m Conj y Sil 2 o 4 21, 20

23 $\neg m \wedge \neg[(m + 1) \veebar (m + 2)..\veebar n)$ Pasos similares a 8 - 14 para 16

24 $\neg m$ Simp 23

25 $m \wedge \neg m$ Conj 22, 24

26 $\neg[\neg A \wedge \neg(B \veebar C..\veebar n)]$ Abs 7, 25

27 $\neg A \rightarrow (B \veebar C..\veebar n)$ Def $\rightarrow$ 26

28 $A \veebar B..\veebar n$ Conj y Def $\veebar$ 6, 27

QD T27

Esta larga demostración puede sugerir un par de observaciones; en primer lugar, no se olvide nunca que m es una letra de la serie $A \veebar B..\veebar n$, ≥ 1, y $\leq (n - 1)$, y que, en segundo lugar, no debe confundirse al (término) m de Sil 2 o 4, con el m (y los m + 1, etc.) de los pasos 20 a 22 de la demostración. Otro aspecto relevante de T27, es que hubiera podido ayudarnos (y, en verdad, es el teorema paradigmático clave para todos los teoremas paradógicos o materiales de $\veebar n$, como dijimos), también a T26, merced a ley de conmutación para $\veebar n$; además, subsumiendo a T23 y a T24 en T25, y T26, gracias a $m \geq 1$, los hubiera deducido a todos; sin embargo, hemos ofrecido demostraciones más simples a la hora de T23 - T26, y en honor a la claridad nos sentimos satisfechos de ello; oteemos, ahora, a T27, sustituyendo 1 para m

$$A \wedge \neg B \wedge \neg C..\wedge \neg n \rightarrow A \veebar B \veebar C..\veebar n$$

La "paradoja" consiste en que, dado un hecho, o mejor, una proposición, o mejor el mero símbolo A, y otros n - 1 negativos, se deduce que están en disyunción exclusiva; la "paradoja", en lógica matemática, se elimina afirmando -en última instancia-, que no es esa -la real, la disyunción exclusiva real-, la que se está estudiando, sino una llamada material, sobre la que actúa, digámoslo así, una llamada estricta o lógica, que cual la material coincide unas veces sí, otras no, con lo real (disyunción simple o contingente y disyunción lógica o teorema o tautología), la disyunción estricta es el signo $\underline{\vee}n$ dominante de un teorema, o mejor, el intento de cifrarla siempre en el metalenguaje y no en el lenguaje lógico, por parte de los lógicos. Pero, alguna vez, los lógicos deberíamos corregir este error de finalidad: estudiar lo real lógico sí y sólo sí, aunque en el intento caigamos más bien en un problema abierto, como que es lo que ocurre en lógica matemática, a este respecto. Modifiquemos un poco al ejemplo de T27 dado arriba, o que llamaremos T27*

$K, \neg L, \neg M, .., \neg N \rightarrow A \underline{\vee} B \underline{\vee} C..\underline{\vee} n$ para $K, L, .., N = A, B, .., n$ y $K \neq L \neq M, .. \neq N$

Ya habituados a nuestra notación metateorética, no nos es difícil entender el teorema; su demostración es fácil a partir de T27* (y de T27) por conmutación del término derecho. El teorema afirma que cualquiera de las letras del término derecho, acompañada de todas las otras negadas, implican la disyunción exclusiva de las mismas; es pues, más general que T27* (y T27); este teorema -llamémoslo simplemente T27*- pertenece a la familia de $(A \wedge B) \rightarrow (A \rightarrow B)$, $(A \wedge \neg B) \rightarrow (A \vee B)$, etc., y expresan, toda esta familia, el modo como construimos las tablas de verdad en semántica, aunque ahora, en sintaxis, poseemos fórmulas o teoremas. Gracias a la notación expuesta arriba para T27*, podría fácilmente escribirse una definición alternativa para $\underline{\vee}n$, no así necesario esto para las otras conectivas, ya que bastan para ellas las eficaces definiciones triviales, aunque sea posible escribirlas con Ks; pero para $\veebar n$ es igualmente engorrosa una definición tal, que emparenta con sus definiciones para semántica y tablas de verdad; el lector ya habrá podido darse cuenta de esta cercanía de una definición a la notacionalidad de T27*; luego intentaremos, como teorema extra, el preciso intento de una definición tal.

7. La relación entre la disyunción exclusiva múltiple y su forma asociada

Demostremos, ahora, una última tesis, que tal vez no es muy cercana al mundo intuitivo, o que parecería inútil respecto del tal, o poco paradigmática para $\veebar n$; sin embargo, emparenta a $\veebar n$ con $\veebar n()2$, lo cual es llamativo, si comenzamos estudiando a $\veebar n$ porque no coincidía con $\veebar n()2$ o asociación por pares; además, todo el resto de la lógica está escrita en asociación por pares, es, pues, si no un teorema útil un teorema llamativo. Sea T28

$$A \veebar B..\veebar n \rightarrow \{..\{[(A \veebar B) \veebar C] \veebar D\}..\veebar n\}..\}$$

Abreviaremos el término derecho con () (donde se supone que () es asociación por pares, o ()2, o que todo el término es $\veebar n()2$). Asimismo, escribiremos ya este término derecho como lo que sigue, aprovechando ya la ley conocida de asociación por pares o Asoc $\veebar()2$

T28 $A \veebar B..\veebar n \rightarrow \{A \veebar [B \veebar C..()..\veebar n]\}$

1 $A \veebar B..\veebar n \rightarrow \{\neg A \leftrightarrow [B \veebar C..()..\veebar n]\}$ Def $\veebar()2$ T17

2 $A \underline{\vee} B..\underline{\vee}\ n \rightarrow \{\{\neg A \rightarrow [B \underline{\vee} C..()..\underline{\vee}\ n]\} \wedge \{[B \underline{\vee} C..()..\underline{\vee}\ n] \rightarrow \neg A\}\}$ Def $\leftrightarrow$ 1 (Abrev 2, $F1 \rightarrow F2 \wedge F3$)

Demostremos primero Ib

Ib $F1 \rightarrow F3$

3 $F1$ Hipótesis

4 $[B \underline{\vee} C..()..\underline{\vee}\ n] \wedge A$ Hipótesis Abs

5 A Simp 4

6 $A \rightarrow (\neg B \wedge \neg C..\wedge \neg n)$ Def $\underline{\vee}$ y Simp 3

7 $\neg B \wedge \neg C..\wedge \neg n$ MP 6, 5

8 $\neg B$ Simp 7

9 $\neg B \leftrightarrow [C \underline{\vee} D..()..\underline{\vee}\ n]$ Simp y Def $\underline{\vee}()2$ 4

10 $C \underline{\vee} D..()..\underline{\vee}\ n$ T6 9, 8

11 $\neg C$ Simp 7

12 $\neg C \leftrightarrow [D \underline{\vee} E..()..\underline{\vee}\ n]$ Def $\underline{\vee}()2$ 10

13 $D \underline{\vee} E..()..\underline{\vee}\ n$ T6 12, 11

.

.

14 $(n - 1) \underline{\vee}\ n$ T6 13*..*, 13*..*

15 $\neg(n - 1)$ Simp 7

16 n Sil $\underline{\vee}()2$

17 $\neg n$ Simp 7

18 $n \wedge \neg n$ Conj 16, 17

19 $\neg\{[B \underline{\vee} C..()..\underline{\vee}\ n] \wedge A\}$ Abs 4, 18

20 $[B \underline{\vee} C..()..\underline{\vee}\ n] \rightarrow \neg A$ Def $\rightarrow$ 19

21 $F1 \rightarrow F3$ TD 1, 20

QD Ib

Ia $F1 \rightarrow F2$

22 $F1 \wedge \neg A \rightarrow [B \underline{\vee} C..()\ \underline{\vee}\ n]$ Exp Ia

23 $F1 \wedge \neg A \to \{\neg B \to [C \underline{\vee} D..()..\underline{\vee} n]\} \wedge \{[C \underline{\vee} D..()..\underline{\vee} n] \to \neg B\}$ Def $\underline{\vee}()2$ y Def $\leftrightarrow$ 22 (Abrev $F1 \wedge \neg A \to F4 \wedge F5$)

Demostremos primero Ia2

Ia2 $F1 \wedge \neg A \to F5$

24 $F1 \wedge \neg A$ Hipótesis

25 $B \underline{\vee} C..\underline{\vee} n$ Sil 2 24

26 F5 Ib 25

QD Ia2

Demostremos ahora Ia1

Ia1 $F1 \wedge \neg A \to F4$

27 $F1 \wedge \neg A \wedge \neg B \to [C \underline{\vee} D..()..\underline{\vee} n]$ Exp Ia1

28 $F1 \wedge \neg A \wedge \neg B \to \{\neg C \to [D \underline{\vee} E..()..\underline{\vee} n]\} \wedge \{[D \underline{\vee} E..()..\underline{\vee} n] \to \neg C\}$ Def $\underline{\vee}()2$ y Def $\leftrightarrow$ 28 (Abrev $F1 \wedge \neg A \wedge \neg B \to F6 \wedge F7$)

28 nos propone ahora demostrar $F1 \wedge \neg A \wedge \neg B \to F7$, y $F1 \wedge \neg A$ $\neg B \to F6$, todo en orden a demostrar Ia1 y con ello Ia; la primera de estas fórmulas ($F1 \wedge \neg A \wedge \neg B \to F7$) es fácilmente demostrable cual Ia2 (gracias a Ib); la segunda se descompone en una fórmula similar a 28, pero con una variable más (o una variable menos en el término derecho), en el término izquierdo; con lo cual, el proceso vuelve a comenzar. Así llegamos hasta

.

.

29 $(A \underline{\vee} B..\underline{\vee} n) \wedge \neg A \wedge \neg B..\wedge \neg(n - 1) \to n$ Sil $\underline{\vee}$ 4

QD T28

29 es, en efecto, lo último que necesitamos demostrar para Ia, a través de Ia1, Ia1a...1a, etc., y 29 ya coincide con un silogismo de $\underline{\vee}n$. Con ello queda demostrado T28, y renunciamos a establecer o escribir el enlace de los pasos de 29 a 21.

8. Los dilemas o multilemas de la disyunción exclusiva múltiple

Demostraremos, ahora, los dilemas de $\underline{\vee}n$, que, en rigor, deberían llamarse multilemas, ya que el dilema encierra la idea de una alternativa bimembre; pero, para conservar la tradición, y la idea de la familia de estos teoremas, los llamaremos dilemas, o los seguiremos llamando dilemas, para disyunción exclusiva. Con estos teoremas volvemos a la intuición, ya que pueden ser muy familiares a nuestros razonamientos ordinarios. La familia de estos teoremas en realidad abarca a más de lo que tradicionalmente se ha denominado dilema, por lo cual, expondremos esta lista sin solución de continuidad, sin pretender la exhaustividad, pero sí la expresividad de $\underline{\vee}n$ sistemática. Sea Dil 1

Dil 1 $(A \to K) \wedge (B \to K)..\wedge (n \to K) \to [(A \underline{\vee} B..\underline{\vee} n) \to K]$ (Abrev $F1 \to [(A \underline{\vee} B..\underline{\vee} n) \to K]$)

Dem 1 $F1 \wedge (A \underline{\vee} B..\underline{\vee} n)$ Hipótesis

2 $F1 \wedge [\neg A \to (B \underline{\vee} C..\underline{\vee} n)]$ Def $\underline{\vee}$ y Simp 1

3 $A \vee (B \underline{\vee} C..\underline{\vee} n)$ Simp y Def $\vee$ 2

4 A Hipótesis

5 $A \to K$ Simp 1

6 K MP 5, 4

7 $A \to K$ TD 4, 6

8 $B \underline{\vee} C..\underline{\vee} n$ Hipótesis

Si logramos probar que $8 \to K$, y tenemos que $A \to K$, siempre bajo la hipótesis de 1, entonces por T7 tendremos que 3 $\rightarrow$ K, lo cual nos lleva a un MP de demostrar el dilema bajo Exportación. Demostremos, pues, 8 $\rightarrow$ K

9 $\neg B \rightarrow (C \veebar D..\veebar n)$ Def $\veebar$ y Simp 8

10 $B \vee (C \veebar D..\veebar n)$ Def $\vee$ 9

11 $B \rightarrow K$ Simp 1

12 $C \veebar D..\veebar n$ Hipótesis

.

.

13 n Hipótesis

14 $n \rightarrow 4$ Simp 1

Aplicando sucesivamente Conjs y T7s, MPs y TDs, a partir de 14 y arriba, llegamos a

15 $A \vee (B \veebar C..\veebar n) \rightarrow K$

16 K MP 15, 3

17 $F1 \wedge (A \veebar B..\veebar n) \rightarrow K$ TD 1, 16

18 $(A \rightarrow K) \wedge (B \rightarrow K)..\wedge (n \rightarrow K) \rightarrow [(A \veebar B..\veebar n) \rightarrow K]$ Exp 17

QD Dil 1

Esta demostración, quizá un poco rebuscada, ha sido hecha expresamente (pudiéramos haber dado una más directa y sencilla), para mostrar la reducción de $A \veebar B..\veebar n$ a $A \vee B..\vee n$, y a través de ello demostrar el dilema (está, pues, implícita en la demostración anterior, la de $\veebar n \rightarrow \vee n$, cosa que veremos más completamente luego); de manera que demostramos, gracias a $\veebar n \rightarrow \vee n$, T7 (escrito en sentido múltiple) por Dil 1. En esto se basa, como dijimos en el capítulo 1, que algunos lógicos sugieran, o empleen, T7 (en sentido múltiple para nosotros) por Dil 1, alegando que es suficiente; de modo, que, si escribimos $\vee$, por

$\underline{\vee}$, en Dil 1, la deducción de K no se obstruye en el dilema, y así usar $\vee$, en vez de $\underline{\vee}$, es válido. Advertimos todo esto, con la demostración de Dil 1 intencionada, porque no nos conviene que se diga que, en realidad, Dil 1 ya estaba demostrado (la lógica matemática hasta aquí, y quitando importancia a la extensión a lo múltiple de $\vee$); la lógica sólo puede usar este paso, si ha demostrado que, en efecto, se verifica, pero este paso es precisamente un estudio sistemático de $\underline{\vee}n$, o $\underline{\vee}$ en toda su magnitud. Un intento de reducir $\underline{\vee}$ a $\vee$ sistemáticamente -para toda $\underline{\vee}$- no es viable (es inmanejable y viola una finalidad de la lógica). Un uso ad hoc de reducción de $\underline{\vee}$ a $\vee$, el anterior por ejemplo, tiene que anotar este paso (anotar $\underline{\vee}n \rightarrow \vee n$, anotarlo como sea, ya en un preámbulo teórico o en cada demostración). La justificación, pues, de usar $\vee$, por $\underline{\vee}$, en casos, tiene sus cautelas (la justificación consiste en usar lo simple de $\underline{\vee}$, que permite la deducción deseada, en una deducción tal, y por la vinculación del lógico a lo simple o fundamento). Sancionamos así, la necesidad de Dil 1, y el resto de dilemas y teoremas a continuación, que son parte de una situación parecida. Pero la última sanción, o sanción gruesa de Dil 1 y similares, es que es sólo una implicación, mientras que T7 (y en sentido múltiple) es una equivalencia o coimplicación.

Seguiremos, pues, escribiendo lo que es por lo que es, y hasta corrigiendo errores (hay quien cree, y un lógico, que $\underline{\vee}$ es $\vee$). Sea Dil 2

Dil 2 $(K \rightarrow A) \wedge (K \rightarrow B)..\wedge (K \rightarrow n) \rightarrow [(\neg A \,\underline{\vee}\, \neg B..\underline{\vee}\, \neg n) \rightarrow \neg K]$

Dem 1 $(\neg A \rightarrow \neg K) \wedge (\neg B \rightarrow \neg K)..\wedge (\neg n \rightarrow \neg K) \rightarrow [(\neg A \,\underline{\vee}\, \neg B..\underline{\vee}\, \neg n) \rightarrow \neg K]$ Contrapos y Dil 1 Dil 2

QD Dil 2

Dil 3 $(A \leftrightarrow A') \wedge (B \leftrightarrow B')..\wedge (n \leftrightarrow n') \rightarrow [(A \underline{\vee} B..\underline{\vee} n) \rightarrow (A' \underline{\vee} B'..\underline{\vee} n'')]$

La demostración de este dilema es harto evidente, basta utilizar las equivalencias del término izquierdo en el derecho, o en la hipótesis del derecho, para obtener el consecuente. No mencionaremos ya las posibles variaciones de este dilema por ser harto triviales, las cuales socavan ya el afán de sistema o casi protocolo por el cual ha sido introducido este dilema. Sin embargo, aclararemos que la versión de Dil 3 con V, en sentido múltiple para nosotros, o T8, no lleva tampoco coimplicación en la conectiva dominante, sólo implicación, cuya Dil 3; la diferencia está en que Dil 3 exige coimplicación en los términos conjuncionados de la hipótesis o término derecho. Aclaramos, además, que la forma múltiple de una tesis del cálculo bimembre, para V e $\wedge$, se obtiene por aplicación recursiva de la tesis bimembre y luego la supresión de paréntesis (para el caso de la identidad sólo la supresión de paréntesis).

Demostremos, ahora, T29, que también tiene un paralelo con una tesis de V (y en sentido múltiple para nosotros)

T29 $(A \rightarrow K) \underline{\vee} (B \rightarrow K)..\underline{\vee} (n \rightarrow K) \rightarrow [(A \wedge B..\wedge n) \rightarrow K]$

1 $(A \rightarrow K) \underline{\vee} (B \rightarrow K)..\underline{\vee} (n \rightarrow K)$ Hipótesis

2 $\neg(A \rightarrow K) \rightarrow [(B \rightarrow K) \underline{\vee} (C \rightarrow K)..\underline{\vee} (n \rightarrow K)]$ Def $\underline{\vee}$ y Simp 1

3 $(A \wedge B..\wedge n) \wedge \neg K$ Hipótesis Abs

4 $A \wedge \neg K$ Simp 3

5 $\neg(A \rightarrow K)$ Def $\wedge$ 4

6 $(B \rightarrow K) \underline{\vee} (C \rightarrow K)..\underline{\vee} (n \rightarrow K)$ MP 2, 5

7 $\neg(B \rightarrow K) \rightarrow [(C \rightarrow K) \underline{\vee} (D \rightarrow K)..\underline{\vee} (n \rightarrow K)]$ Def $\underline{\vee}$ y Simp 6

8 $B \wedge \neg K$ Simp 3

9 $\neg(B \rightarrow K)$ Def $\wedge$ 8

10 $(C \rightarrow K) \underline{\vee} (D \rightarrow K)..\underline{\vee} (n \rightarrow K)$ MP 7, 9

.

.

11 $n \rightarrow K$ MP 10*..*, 10*..*

12 $\neg K$ Simp 3

13 $\neg n$ MT 11, 12

14 n Simp 3

15 $n \wedge \neg n$ 14, 13

16 $\neg[(A \wedge B..\wedge n) \wedge \neg K]$ Abs 3, 15

17 $(A \wedge B..\wedge n) \rightarrow K$ Def $\rightarrow$ 16

18 T29 TD 1, 17

QD T29

Demostremos, ahora, T30, igualmente con paralelo con V; ambas, T29 y T30, carecen de la coimplicación que sí poseen T9 y T10

T30 $(K \rightarrow A) \underline{\vee} (K \rightarrow B)..\underline{\vee} (K \rightarrow n) \rightarrow [K \rightarrow (A \underline{\vee} B..\underline{\vee} n)]$

1 $(K \rightarrow A) \underline{\vee} (K \rightarrow B)..\underline{\vee} (K \rightarrow n) \wedge K$ Hipótesis

2 $(K \rightarrow A) \wedge K \underline{\vee} (K \rightarrow B) \wedge K..\underline{\vee} (K \rightarrow n) \wedge K$ Distr $\underline{\vee}$ 1

3 $K \wedge A \underline{\vee} K \wedge B..\underline{\vee} K \wedge n$ T11 2

4 $(A \underline{\vee} B..\underline{\vee} n) \wedge K$ Distr $\underline{\vee}$ 3

5 $(A \underline{\vee} B..\underline{\vee} n)$ Simp 4

6 T30 TD y Exp 1, 5

QD T30

Todos los dilemas para V, salvo T8, y las tesis de la familia mentada, T7 - T10, cuando se ponen bajo exportación (o cuando no están bajo exportación, como quiera entenderse), es decir, cuando por ejemplo T7 tiene la forma $\{[(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \wedge (A \vee C)] \rightarrow C\}$, entonces no les es válida la coimplicación (su diferencia con las formas paralelas para $\underline{\vee}n$, Dil 1 - T30); pero es una propiedad muy suya, T7 a T10, mostrar esa coimplicación cuando se modifica el lugar de la hipótesis destinada a sacar la conclusión; es, pues, una propiedad muy suya, Dil 1 a T30, mostrar esa no coimplicación, su diferencia gruesa respecto a las formas $\vee$.

Ya sólo anotaremos, sin efectuar las demostraciones, algunas tesis más para $\underline{\vee}n$, que podrían tener paralelo, algunas, con tesis de $\vee$; la considerable extensión de las demostraciones para $\underline{\vee}n$, nos obliga a ahorrar espacio.

T31 $(A \rightarrow A') \underline{\vee} (B \rightarrow B')..\underline{\vee} (n \rightarrow n') \rightarrow [(A \wedge B..\wedge n) \rightarrow (A' \underline{\vee} B'..\underline{\vee} n')]$

T32 $(A' \rightarrow A) \underline{\vee} (B' \rightarrow B)..\underline{\vee} (n' \rightarrow n) \rightarrow [(\neg A \wedge \neg B..\wedge \neg n) \rightarrow (\neg A' \underline{\vee} \neg B'..\underline{\vee} \neg n')]$

T33 $(A \underline{\vee} B..\underline{\vee} n) \wedge (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow D)..\wedge (1 \rightarrow m) \rightarrow [(m + 1) \underline{\vee} (m + 2)..\underline{\vee} n]$ para $m \geq 2, \leq (n - 1)$

La última tesis es, seguramente, muy propia de $\underline{\vee}n$; en efecto, nos dice que, dada una disyunción exclusiva, si una de las variables implica a otra, entonces debe contemplarse una disyunción exclusiva sólo entre las restantes (el que una variable implique a otra contradice a la idea o definición de la disyunción exclusiva).

9. Las definiciones alternativas para la disyunción exclusiva múltiple

Escribiremos, ahora, tan sólo las escribiremos, las definiciones alternativas para $\underline{\vee}n$, en notación metateorética, tan sólo por curiosidad y registro, y para llenar los huecos que dejamos en torno a ellas, o a una de ellas, anteriormente. Sin embargo, advertimos que su demostración no es tan compleja (o larga, más bien) como podría pensarse. Son harto evidentes semánticamente. Sean

$(K \wedge \neg L \wedge \neg M .. \wedge \neg N) \veebar (K \wedge \neg L \wedge \neg M .. \wedge \neg N)' .... \veebar (K \wedge \neg L \wedge \neg M .. \wedge \neg N)'' .. '' \leftrightarrow A \veebar B \veebar C .. \veebar n$

para $K, L, M, .. N = A, B, C, .. n$, y $K \neq L \neq M .. \neq N$

y $(K \wedge \neg L \wedge \neg M .. \wedge \neg N)$, ()', ()''..'', etc., son todas las posibles sustituciones de K, L, M,..N en bloque (es decir, que si una metavariable cambia de sustitución, entonces cambian también de sustitución todas las otras metavariables)

$A \veebar B \veebar C .. \veebar n$ Def $\neg K1 \vee \neg K2 .. \vee \neg Km \vee K(m + 1) .. \vee Kn$

para $K1, K2, K3, .. Kn = A, B, C .. n$ y $K1 \neq K2 \neq K3 .. \neq Kn$

(en esta definición se ha cambiado la notación de K, L, M, etc., a K1, K2, K3, etc., para evitar confusiones con la letra M, que debe actuar como número de letra y no simplemente como letra, lo cual parece al estar cerca de K, y no ser tan clásica o dispensable como el caso de N)

y para $m = 0$, y $m \geq 2$, y $m \leq n$, y para todo m ((m)), y para toda sustitución posible de K1, K2, K3, etc. (ya no en bloque, sino individualmente)

Para esta definición, la cláusula "para todo m", o, imitando la notación de lógica de predicados, (m), debe entenderse que cada sustitución genera una disyunción múltiple o paréntesis, y que deben anotarse todas esas sustituciones o paréntesis de disyunciones inclusivas múltiples, generando una conjunción de disyunciones inclusivas múltiples.

Una otra y tercera definición es

A $\veebar$ B $\veebar$ C..$\veebar$ n Def ¬[K1 ∧ K2..∧ Km ∧ ¬K(m + 1)..∧ ¬Kn]

para las mismas cláusulas y notas de la definición anterior, resumidas

para (todo) m ≠ 1, y para todas las sustituciones posibles de las metavariables

Expliquemos, ahora, y comentemos un poco las definiciones. La primera es la definición positiva de $\veebar$n para tablas de verdad, o semántica, escrita en fórmula, o metafórmula, en realidad. Expresa que cada vez que se da una de las variables de $\veebar$n, en conjunción con la negación de las otras, entonces se da $\veebar$n. La disyunción exclusiva múltiple, o $\veebar$n de los paréntesis de las conjunciones múltiples, que sirve para aglutinarlos y constituir la equivalencia o definición, puede ser sustituida por una disyunción inclusiva múltiple, o Vn, según lo hablado respecto a los casos en que es lícito hacer esta sustitución (el resultado se mantiene, en este caso la equivalencia o definición). Se ha escrito esta definición al revés y como equivalencia (equivalencia y conmutación), para sugerir que estas tesis (cual las otras) pueden considerarse como teoremas extras, dada su inmanejabilidad como definiciones, pero que esta poca manejabilidad puede no ser una manejabilidad nula como teoremas, sobre todo si se extractan partes del teorema. La segunda definición nos pone la relación entre $\underline{\vee}n$ y $\vee n$, y corresponde a la definición $(A \underline{\vee} B)$ Def $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$ para la disyunción exclusiva biargumental, o $\underline{\vee}()2$. La nota relevante en las cláusulas está en que las variables que caen bajo el número m, llevan negación, y las que son un número de variable mayor a m, son positivas. Con esta cláusula, y su especificación para m $\neq$ 1, y para todas las sustituciones posibles de las metavariables, se consigue la serie de disyunciones inclusivas conjuncionadas -cuyo número, el número de paréntesis que encierran a las disyunciones inclusivas, es igual a 2 elevado a la n, menos n, número que se calcula fácilmente por la teoría combinatoria de la lógica matemática-, serie que expresa las posibilidades exactas de realización de $\underline{\vee}n$, es decir, que tenemos una equivalencia. Al usar la cláusula "para todas las sustituciones posibles de las metavariables", obtenemos términos repetidos de la serie de disyunciones inclusivas; en realidad, no exactamente repetidos, sino términos equivalentes por la ley de conmutación para la disyunción inclusiva múltiple; estos términos deben absorverse en uno solo por tal ley de conmutación y por la ley de Idempotencia. La segunda definición de la que hablamos nos permite obtener un (o un par) de resultados de interés para el momento en que se puede sustituir $\vee$ en vez de $\underline{\vee}$, tal como gustan de hacer algunos lógicos (e hicimos o mostramos en Dem Dil 1, por ejemplo), y he aquí el fundamento

$$A \underline{\vee} B \underline{\vee} C..\underline{\vee}\, n \rightarrow A \vee B \vee C..\vee n$$

$$\rightarrow \neg A \vee \neg B \vee \neg C..\vee \neg n$$

Este resultado, $\underline{\vee}n \rightarrow \vee n$, o resultados, se obtienen de nuestra definición segunda por T1, de nuestra serie de auxiliares. De esto es de lo que hablábamos al sostener que partes de los teoremas en cuestión pueden ser muy útiles a la hora de deducir.

La tercera definición es simplemente la aplicación de una de las leyes de Morgan a la disyunción inclusiva múltiple de la segunda definición (con lo cual, la segunda definición viene a ser la aplicación de la otra ley de Morgan a la conjunción múltiple de la tercera definición). La aplicación de esta ley de Morgan puede y debe hacerse directamente a las metavariables, en lugar de hacerlo a la serie de paréntesis que engendran, uno por uno. La única nota relevante de esta tercera definición, en consecuencia, ya que todo lo dicho y glosado para la segunda definición sirve para esta mera aplicación de una ley de Morgan, es que esta tercera definición representa la forma negativa de la definición semántica de $\underline{\vee}n$, escrita en fórmula, o metafórmula. Lo que expresa es que, si se da $\underline{\vee}n$, entonces no se da que todas las variables sean negativas, y no se da que más de una sea positiva, es decir, no más, y no menos de una, positivas. La aglutinación de todas estas posibilidades por conjunción múltiple, logra la equivalencia o definición deseada. Es, pues, esta tercera definición, la contraparte o el complemento de la primera, y viceversa. Escribamos, pues, para terminar, una definición en concreto o simple lenguaje, o para un n determinado, como $\underline{\vee}3$, y para la tercera definición, por ejemplo; y esto, porque en alguna medida, este texto pretende también ser didáctico (se yuxtapone, no se encima, a la lógica elemental matemática hasta aquí). Sea $\underline{\vee}3$, para la tercera definición

para m = 0, tenemos $\neg(\neg A \land \neg B \land \neg C)$

para m = 2, tenemos $\neg(A \wedge B \wedge \neg C)$

para m = 3, tenemos $\neg(A \wedge B \wedge C)$

para obtener $\neg(C \wedge B \wedge \neg A)$ (o, por Conm $\wedge$, $(\neg A \wedge B \wedge C)$), utilizamos otra sustitución de las metavariables K1, K2 y K3, y obtenemos para m = 2, precisamente $\neg(C \wedge B \wedge \neg A)$; esto -esta nueva sustitución- nos origina $\neg(C \wedge B \wedge A)$ para m = 3, término que debe ser absorbido en $\neg(A \wedge B \wedge C)$ (o viceversa) por Conm $\wedge$, e Idemp. Para obtener el último término necesario a la definición, o $\neg(A \wedge C \wedge \neg B)$, operamos de modo análogo a lo anterior (el término anterior) desembarazándonos, igualmente, de todos los términos conmutativamente idempotentes.

La primera definición, o teorema, como habrá podido advertir el lector, es fácilmente expresable en simple lenguaje, o con las variables proposicionales usuales, A, B, etc. Esto es

$(A \wedge \neg B \wedge \neg C..\wedge \neg n) \veebar (\neg A \wedge B \wedge \neg C..\wedge \neg n) \veebar (\neg A \wedge \neg B \wedge C..\wedge \neg n)....\veebar (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C..\wedge n) \leftrightarrow A \veebar B \veebar C..\veebar n$

La serie de los paréntesis se deja insinuar fácilmente, y es, incluso, una definición más simple; pero también es expresable metateoréticamente, e incluso con un sólo paréntesis (ampliando la cláusula pertinente abajo); la hemos expuesto en metateoría por simetría con las definiciones siguientes.

Las definiciones segunda y tercera no pueden insinuar su serie de paréntesis sino es con metateoría (la alternativa en simple lenguaje sería, más bien, una simple definición verbal, lo que es renunciar al cálculo); no obstante, dado el momento casi ya especulativo en el que ingresan, una definición verbal podría ser alternativa. Añadamos que estas definiciones segunda y tercera, requieren Conm $\wedge$, y Conm $\vee$, e Idemp, para su culminación, e incluso para su ordenación alfabética (este criterio no es del todo libre al aplicar las cláusulas); esta presuposición de leyes para su culminación y retoque, podría cuestionarlas como definiciones (que usualmente proceden con anterioridad a toda ley o retoque); no obstante, como las leyes requeridas para esta su culminación (y en torno a esto incluso podrían quedar "inconclusas", es decir, con términos no absorbidos o conmutativamente repetidos), como estas leyes requeridas no contienen el término definido, y considerando el esfuerzo del cálculo por asimilar estas complejas o largas definiciones, podemos considerar a Vn definida en nuestras segunda y tercera definiciones, genuinamente. No haremos, por último, ninguna nota en cuanto a las conmutaciones ya introducidas por las definiciones por el uso de metavariables, y las cláusulas en torno a m y a las sustituciones (ya en bloque, ya individualmente) de las metavariables (quiere decir esto, que las definiciones, ya introducen conmutaciones, las cuales, las precisamente introducidas y no otras no introducidas, no requieren ya demostración). (Para una definición para tablas de verdad, para la conjunción biargumental, por ejemplo, cuando decimos que es verdadera cuando las dos variables son verdaderas, ya hemos introducido la conmutación biargumental, o, escrito todo ello en fórmula, $A \wedge B$ Def K, L, para $K, L = A, B$, y $K \neq L$). Concluyamos, pues, que por rigor de cálculo, una exigencia de cálculo, las definiciones, si son posibles, cual las arriba anotadas, deben ser calculables en los términos en que han sido escritas, cual el hecho de que podríamos demostrar las definiciones arriba, en los exactos términos en que han sido escritas.

10. La posibilidad de la disyunción exclusiva múltiple como conectiva primitiva

Pasaremos, ahora, a demostrar las tesis de $\veebar n$ para la lógica de predicados o cuantificacional, o las leyes de distribución de cuantificadores para $\veebar n$. Sin embargo, podríamos terminar el trabajo proposicional para $\veebar n$, como buen corolario, con una tesis "rara" para $\veebar n$, de esas que suelen utilizar a menudo los lógicos para rehuir la intuición, de tal suerte que el cálculo se muestre psicológicamente puro. Demostraremos esta tesis para $\veebar 3$, no hace falta más

T34 $\neg(A \veebar B \veebar B) \leftrightarrow (A \rightarrow B)$

1 $\neg(A \veebar B \veebar B)$ Hipótesis

2 $\neg\{[A \rightarrow (\neg B \wedge \neg B]) \wedge [\neg A \rightarrow (B \veebar B)]\}$ Def $\veebar$ 1

3 $\neg[(A \rightarrow \neg B) \wedge A]$ Idemp y T*12 2

4 $\neg(A \wedge \neg B)$ T*11 3

5 $A \rightarrow B$ Def $\rightarrow$ 4

6 T34 TD (para equivalencia) 1, 5

QD T34

Esta tesis nos puede ser muy útil a la hora de construir un cálculo con $\veebar n$ y $\neg$ como símbolos primitivos, ya que tenemos la definición de $\rightarrow$ en la tesis; además, podemos expresar el principio de identidad mediante la misma, escribiendo $\neg(A \veebar A \veebar A)$, y ver que $\veebar n$ mantiene el carácter -como es lógico- de negar la contradicción (o la autoexclusión) respecto de $\neg(A \veebar A)$ o identidad para $\veebar()2$, aunque $\veebar n$ no nos sirve ya para el principio del tercio excluso (bajo forma de disyunción exclusiva).

11. Las leyes de distribución de la disyunción exclusiva múltiple para la lógica de predicados

Demostremos, ahora, las leyes de distribución, Distrb, para $\veebar n$. Antes anotemos los resultados para $\veebar()2$ para tener un plan de trabajo (intencionalmente no anotamos estos resultados de la lógica matemática hasta aquí antes en el texto, para tenerlas aquí frescas)

Distrb $\veebar()2$ 1 $(x)(Px \veebar Qx) \rightarrow (x)Px \veebar (Ex)Qx$

2 $(x)(Px \veebar Qx) \rightarrow (Ex)Px \veebar (x)Qx$

3 $(x)Px \veebar (x)Qx \rightarrow (Ex)(Px \veebar Qx)$

4 $(Ex)Px \veebar (Ex)Qx \rightarrow (Ex)(Px \veebar Qx)$

Demostremos ahora Distrb $\veebar n$ 3, primero, y demostrándola -la ley- para $\veebar 3$ primero, para luego inducirla a $\veebar n$

Distrb $\veebar 3$ 3 $(x)Px \veebar (x)Qx \veebar (x)Rx \rightarrow (Ex)(Px \veebar Qx \veebar Rx)$

1 $(x)Px \veebar (x)Qx \veebar (x)Rx$ Hipótesis

2 $[(x)Px \rightarrow \neg(x)Qx \wedge \neg(x)Rx] \wedge [\neg(x)Px \rightarrow (x)Qx \veebar (x)Rx]$ Def $\veebar$ 1 (Abreviamos paréntesis obvios)

3 $(x)Px \rightarrow (Ex)\neg Qx \wedge (Ex)\neg Rx$ Simp y Def (Ex) 2

4 $(x)Px \rightarrow (Ex)(\neg Qx \wedge \neg Rx)$ Distrb $\wedge$ y Sil hip 3

5 $(Ex)(Px \rightarrow \neg Qx \wedge \neg Rx)$ Distrb $\rightarrow$ 4

6 $(Ex)\neg Px \rightarrow (x)Qx \veebar (x)Rx$ Simp y Def (Ex) 2

7 $(Ex)\neg Px \rightarrow (Ex)(Qx \underline{\vee} Rx)$ Distrb $\underline{\vee}()2$ y Sil hip 6

8 $(Ex)(\neg Px \rightarrow Qx \underline{\vee} Rx)$ Distrb $\rightarrow$ 7

9 $(Ex)[(Px \rightarrow \neg Qx \wedge \neg Rx) \wedge (\neg Px \rightarrow Qx \underline{\vee} Rx)]$ Conj y Distrb $\wedge$ 5, 8

10 $(Ex)(Px \underline{\vee} Qx \underline{\vee} Rx)$ Def $\underline{\vee}$ 9

Gracias a nuestra definición de $\underline{\vee}n$, podemos ver que en el primer término, véase 3, no importaría que los términos de la conjunción del consecuente fueran n $((Ex)\neg nx)$, el resultado 5 nos daría una misma forma de distribución; igualmente, gracias precisamente a Distrb $\underline{\vee}3$, el término derecho de la definición, véase 6, podría albergar a 3 términos disyuncionados en su consecuente, con lo cual lograría una misma forma de distribución a 7; así podemos lograr una Distrb $\underline{\vee}4$, y una $\underline{\vee}5$, etc., la inducción está hecha. Así podemos escribir

Distrb $\underline{\vee}n$ 3 $(x)Px \underline{\vee} (x)Qx..\underline{\vee} (x)nx \rightarrow (Ex)(Px \underline{\vee} Qx..\underline{\vee} nx)$

QD Distrb $\underline{\vee}n$ 3

Demostremos, ahora, Distrb $\underline{\vee}n$ 4. Igualmente, la demostraremos por inducción con base $\underline{\vee}3$

Distrb $\underline{\vee}3$ 4 $(Ex)Px \underline{\vee} (Ex)Qx \underline{\vee} (Ex)Rx \rightarrow (Ex)(Px \underline{\vee} Qx \underline{\vee} Rx)$

1 $(Ex)Px \underline{\vee} (Ex)Qx \underline{\vee} (Ex)Rx$ Hipótesis

2 $[(Ex)Px \rightarrow \neg(Ex)Qx \wedge \neg(Ex)Rx] \wedge [\neg(Ex)Px \rightarrow (Ex)Qx \underline{\vee} (Ex)Rx]$ Def $\underline{\vee}$

3 $(Ex)Px \rightarrow (x)\neg Qx \wedge (x)\neg Rx$ Simp y Def (x) 2

4 $(Ex)Px \rightarrow (x)(\neg Qx \wedge \neg Rx)$ Distrb $\wedge$ 3

5 $(Ex)Px \rightarrow (Ex)(\neg Qx \wedge \neg Rx)$ Subalt y Sil hip 4

6 $(Ex)(Px \rightarrow \neg Qx \wedge \neg Rx)$ Distrb $\rightarrow$ 5

7 $(x)\neg Px \rightarrow (Ex)Qx \underline{\vee} (Ex)Rx$ Simp y Def (x) 2

8 $(x)\neg Px \rightarrow (Ex)(Qx \underline{\vee} Rx)$ Distrb $\underline{\vee}()2$ y Sil hip 7

9 (Ex)(¬Px → Qx ⊻ Rx) Distrb → 8

Hacemos una nota similar a Distrb ⊻n 3, y, previo paso protocolar de Conj 6, 9, TD 1, 10, Def ⊻ 11, podemos escribir

Distrb ⊻n 4 (Ex)Px ⊻ (Ex)Qx..⊻ (Ex)nx → (Ex)(Px ⊻ Qx..⊻ nx)

QD Distrb ⊻n 4

Estas demostraciones anteriores, relativamente sencillas (gracias al método usado, inducción a base de ⊻3, o hasta de ⊻2, el método más económico posible, dada la complejidad de ⊻n para cuantificadores o predicados, la diferencia de este método con otros más largos es más bien estética, en otros casos, en que se escribe en signos lo que aquí en lenguaje corriente), estas demostraciones de distribuciones 3 y 4 contrastan con las siguientes de Distrb 1 y 2 (la numeración corresponde al orden en que en lógica matemática se suelen deducir, o escribir estas tesis para ⊻()2, o para ↔, que es de donde se las obtiene fácilmente). Estas formas de distribución de ⊻n ya no son ni sencillas o perfectas sino que ya no son posibles; en efecto, el paralelo a Distrb ⊻()2 1 y 2, en ⊻n, o una forma de distribución que parta de ( )(Px ⊻ Qx..⊻ nx) y llegue a ( )Px ⊻ ( )Qx..⊻ ( )nx, ya no es posible (como en el caso de ⊻()2, y aquí tenemos otro caso especial para ⊻()2 o número mínimo o pequeño). Sin embargo, escribiremos las tesis -el paralelo o total alcance a Distrb ⊻()2 1 y 2-, en la medida en que la deferencia a la conectiva -su puesto en la lógica- rescata su valor intuitivo, ya que no su utilidad para el cálculo, además, verificaremos precisamente que no hay tal forma distributiva. Como las tesis son tres, llamémoslas Distrb 5, 6, 7

Distrb 5 (x)(Px ⊻ Qx..⊻ nx) → [(x)Px → (x)¬Qx..∧ (x)¬nx] ∧

$[(x)\neg Px \rightarrow (x)(Qx..\underline{\vee}\ nx)]$

Distrb 6 $(x)(Px \underline{\vee} Qx..\underline{\vee}\ nx) \rightarrow [(Ex)Px \rightarrow (Ex)\neg Qx..\wedge (Ex)\neg nx] \wedge$
$[(Ex)\neg Px \rightarrow (Ex)(Qx..\underline{\vee}\ nx)]$

Distrb 7 $(x)(Px \underline{\vee} Qx..\underline{\vee}\ nx) \rightarrow [(x)Px \rightarrow (Ex)\neg Qx..\wedge (Ex)\neg nx] \wedge$
$[(x)\neg Px \rightarrow (Ex)(Qx..\underline{\vee}\ nx)]$

Si se piensa en $\underline{\vee}3$, se verá que no hay forma posible de obtener una forma ( )Px $\underline{\vee}$ ( )Qx $\underline{\vee}$ ( )Rx aplicando la definición de $\underline{\vee}n$ a los consecuentes de las fórmulas arriba (ni a las 9 posibilidades obtenibles, ya que son 2 términos por consecuente, con 3 posibilidades de combinación cada uno). Y si no es posible distribuir para $\underline{\vee}3$, por la definición de $\underline{\vee}n$, sabemos que no será posible para $\underline{\vee}n$, algo similar a la inducción hecha para Distrb 3 y 4. Los consecuentes arriba han sido obtenidos aplicando las leyes de distribución de la implicación y la conjunción a la definición del antecedente, y es hasta allí a donde podemos llegar, en materia de distribución tal. Esto es lo que afirmábamos al hablar de escribir las tesis. Pensemos, ahora, en el valor intuitivo de, por ejemplo, Distr 5; el tenor sonaría así: "si cada cosa es o P o Q o R o S, entonces, si todo es P, entonces todo no es Q, y todo no es R, y todo no es S; y, si todo no es P, entonces cada cosa es o Q o R o S". Si quiere distribuirse a su vez "cada cosa es o Q o R o S", debe operarse por recursión de la misma fórmula Distrb 5.

Este sería el cuadro completo de distribución para $\underline{\vee}n$, en materia de cuantificadores; sin embargo, pensando en los tenores del orden intuitivo, nos viene a la mente una tesis, o un tenor, que no está registrado aquí, y que es harto evidente, así como un paradigma de distribución de cuantificadores para $\underline{\vee}n$. El tenor dice así: "si o todo es blanco o todo es negro, entonces cada cosa es o blanca o negra". La formalización del tenor sería

$$(x)Px \underline{\vee} (x)Qx \rightarrow (x)(Px \underline{\vee} Qx)$$

Pero, entonces, así resulta que la tesis no es válida, pues la formalización no es válida (cual la versión para $\vee$ o $(x)Px \vee (x)Qx \rightarrow (x)(Px \vee Qx)$). Si el tenor es válido, tiene que ser que hemos formalizado mal. En efecto, si comprobamos con $(Ex)(Px \wedge Qx)$, por ejemplo, el antecedente de la formalización, poniéndolos en conjunción, veremos que no hay contradicción

$$(x)Px \wedge \neg(x)Qx \text{ (o } (Ex)\neg Qx) \wedge (Ex)(Px \wedge Qx)$$

Y de un modo similar para la otra posibilidad de aquel antecedente. Debemos, pues, buscar una formalización en la cual ni $(Ex)(Px \wedge Qx)$ ni $(Ex)Px \wedge (Ex)Qx$ sean incontradictorios con el antecedente $(x)Px \underline{\vee} (x)Qx$ o "o todos son P, o todos son Q"; pero, precisamente, (x)Px, es la formalización de "todos son P", "para todo x, vale que es P", "todo es P", etc. Nos encontramos, pues, con un nuevo sentido de $\underline{\vee}$, más fuerte, y que actúa expresamente en presencia de un (x)Px (en cuanto a (Ex)Px, no lo afecta, o no necesita afectarlo); con lo cual, en cuanto a $\underline{(x)Px \vee}$, o A $\underline{\vee (x)Px}$, en realidad es (x)Px lo que modifica su definición. Definiremos, pues, $\underline{(x)Px \vee}$, sólo en orden a esta ley de distribución tan común (a la vez, sólo subrayaremos el símbolo, o la yuxtaposición de los mismos, entendiendo que no pretendemos crear un signo nuevo, ni siquiera en la medida en que justamente es un signo nuevo)

$$\underline{(x)Px \vee} \quad \text{Def} \quad (x)Px \leftrightarrow \neg(x)\neg Px$$

$$(x)Px \leftrightarrow (Ex)Px$$

$$(x)Px \underline{\vee} (x)\neg Px$$

$(x)Px \leftrightarrow \neg(Ex)\neg Px$

La filosofía de esta definición, la de <u>(x)Px V</u>, es la de pasar directamente del todos sí, al todos no, cuando hay negación de uno de ambos, como se ve en la primera fórmula de la definición, que es en realidad la misma definición; las otras fórmulas son aclaraciones, y para mostrar que esta definición no abandona la definición común de (x)Px (última fórmula) sino que la integra (segunda fórmula), y que (tercera fórmula), la definición elimina la posibilidad de $(Ex)Px \wedge (Ex)\neg Px$. Podríamos, pues expresar la definición más brevemente así: para $(x)Px \leftrightarrow \neg(Ex)\neg Px$, $(x)Px \leftrightarrow \neg(x)\neg Px$ (la definición común de (x)Px, ciertamente que lógica, es ineliminable). Ahora podemos demostrar la ley de distribución anunciada arriba, formalizándola con <u>(x)Px V</u>. Aclaremos, de paso, y como dijimos para (Ex)Px, que la definición no se aplica a (Ex)Px, cuando esta fórmula no sea un uso de la def <u>(x)Px V</u>, sobrevenido a raíz de un <u>(x)Px V</u>. Así, es lícito escribir (Ex)Px $\underline{\vee}$ (Ex)Qx, si se tuvo un (x)Px $\underline{\vee}$ (x)Qx; pero no un (x)Px $\underline{\vee}$ (x)Qx, si se partió de un (Ex)Px $\underline{\vee}$ (Ex)Qx original. Demostremos, ahora la ley de distribución en cuestión, Distrb 8, para $\underline{\vee}$n. Lo primero será formalizarla en base a su definición -o Def <u>(x)Px V</u>- para luego tratarla como a un (x)Px o una $\underline{\vee}$ vulgar; pero, como el modo como hemos tratado su definición es "úsese a <u>(x)Px V</u> como a un (x)Px vulgar, pero con la ley $(x)Px \leftrightarrow \neg(x)\neg Px$, añadida a él", el modo como procederemos será precisamente el añadir una equivalencia a nuestro arsenal de leyes, con lo cual obtendremos sin problemas la ley en cuestión. Nótese que este procedimiento requiere el cuidado de no someter jamás a la ley heurística al consecuente de la ley de distribución Distrb 8 a demostrar

Distrb 8 $\underline{(x)Px \veebar (x)Qx..\veebar (x)nx} \rightarrow (x)(Px \veebar Qx..\veebar nx)$

1 $(x)Px \veebar (x)Qx..\veebar (x)nx$ Hipótesis

2 $(x)Px \rightarrow [\neg(x)Qx \wedge \neg(x)Rx..\wedge \neg(x)nx)] \wedge \neg(x)Px \rightarrow [(x)Qx \veebar (x)Rx..\veebar (x)nx]$ Def $\veebar$ 1 (Abreviamos paréntesis para los términos de la conjunción)

3 $(x)Px \rightarrow [(x)\neg Qx \wedge (x)\neg Rx..\wedge (x)\neg nx]$ Simp y Def $\underline{(x)Px \veebar}$ 2

4 $(Ex)Px \rightarrow [(Ex)\neg Qx \wedge (Ex)\neg Rx..\wedge (Ex)\neg nx]$ Def $\underline{(x)Px \veebar}$ 3

5 $(Ex)Px \rightarrow (Ex)(\neg Qx \wedge \neg Rx..\wedge \neg nx)$ Distrb $\wedge$ y Sil hip 4

6 $(Ex)(Px \rightarrow \neg Qx \wedge \neg Rx..\wedge \neg nx)$ Distr $\rightarrow$ 5

7 $(x)(Px \rightarrow \neg Qx \wedge \neg Rx..\wedge \neg nx)$ Def $\underline{(x)Px \veebar}$ 6

8 $\neg(x)Px \rightarrow [(x)Qx \veebar (x)Rx..\veebar (x)nx]$ Simp 2

9 $\neg(x)Px \rightarrow (Ex)(Qx \veebar Rx..\veebar nx)$ Distrb 4 y Sil hip 8

10 $(Ex)\neg Px \rightarrow (Ex)(Qx \veebar Rx..\veebar nx)$ Def (Ex) 9

11 $(Ex)(\neg Px \rightarrow Qx \veebar Rx..\veebar nx)$ Distrb $\rightarrow$ y Sil hip 10

12 $(x)(\neg Px \rightarrow Qx \veebar Rx..\veebar nx)$ Def $\underline{(x)Px \veebar}$ 11

13 $(x)[(Px \rightarrow \neg Qx \wedge \neg Rx..\wedge \neg nx) \wedge (\neg Px \rightarrow Qx \veebar Rx..\veebar nx)]$ Conj y Distrb $\wedge$ 7, 12

14 $(x)(Px \veebar Qx..\veebar nx)$ Def $\veebar$ 13

QD Distrb 8

Este consecuente, insistimos, en cuanto cobra una forma original, es decir, cual si no procediera del antecedente de Distrb 8, ya no puede ser manipulado por Def $\underline{(x)Px \veebar}$; aunque, como consecuente de Distrb 8, sí puede precisamente serlo; aunque, el sentido de Distrb 8 es precisamente abandonar $\underline{(x)Px \veebar}$.

Una otra forma de obtener Distrb 8, hubiera sido buscar una definición para $\underline{(x)Px \veebar (x)Qx}$, en el sentido usual de definición, para ya sólo trabajar con las leyes usuales de lógica de predicados, en la medida en que precisamente aquella disyunción heurística se define por una disyunción u otras fórmulas comunes. Estas hubieran sido (o lo son) algunas alternativas (y sigamos en este párrafo con $\underline{\vee}2$)

$$\underline{(x)Px \vee (x)Qx} \quad \text{Def} \quad [(x)Px \rightarrow (x)\neg Qx] \wedge [(x)\neg Px \rightarrow (x)Qx]$$

$$[(Ex)Px \rightarrow (x)\neg Qx] \wedge [(Ex)\neg Px \rightarrow (x)Qx]$$

$$[(x)Px \wedge (x)\neg Qx] \underline{\vee} [(x)\neg Px \wedge (x)Qx]$$

Los consecuentes llegan a $(x)(Px \rightarrow Qx)$ sin necesidad de $(x)Px \leftrightarrow \neg(x)\neg Px$. Esta curiosidad, o mejor alternativa, de $\underline{(x)Px \vee (x)Qx}$, nos sirve además para pensar que no se trata de una mera disyunción común, pero que llevara una cláusula o descripción implícita (los implícitos del lenguaje ordinario) que nos llevara a los lógicos a formalizarla con tal implícito, como en el caso de la definición tercera (la más propicia para este implícito entre más de los anotados posibles, la propia Def $\underline{(x)Px \vee}$ incluso), por ejemplo. En efecto, decir "o todos son blancos, o todos son negros", no lleva el implícito (o los implícitos) "o todos son blancos (y no negros), o todos son negros (y no blancos)", aunque registremos la equivalencia entre ambos tenores. "Todos son blancos, o negros (para todos blancos, o negros, equivalente a no todos no blancos, o negros)", y "todos blancos o todos negros (y o todos son no blancos o todos son no negros)", ninguno de estos tenores es, tampoco, nuestra disyunción fuerte, pese a que los implícitos de estos tenores construyen su definición. Así, pues, hemos descubierto un nuevo sentido de la disyunción exclusiva y lo hemos indagado; este nuevo sentido (llamado aquí "fuerte", dentro de la lógica de predicados o cuantificadores) siempre se vinculará a (x)Px. Naturalmente, como la lógica no puede poblarse ilimitadamente, ni siquiera moderadamente, nuestro trato de $\underline{\text{(x)Px V}}$, ha sido ocasional (en torno a una ley, sí, imprescindible, de distribución), y más para deshacerse de ella; de modo que, se recomienda, que ante $\underline{\text{(x)Px V}}$, se actúe como si ésta (disyunción o generalización, fuerte) no existiera, y se la formalice ya con una de las definiciones arriba, o se la trate como a (x)Px $\underline{V}$ común, pero añadiendo una tesis en su trato o Def $\underline{\text{(x)Px V}}$ (nuestra definición más bien de su cálculo arriba).

Este trato ocasional de $\underline{\text{(x)Px V}}$ nos sirve para atestiguar que $\underline{V}$n no se rinde a ser eliminada del cálculo lógico (a pesar de que encontraremos una equivalencia suya con $\underline{V}$()2, al final del libro), tal cual $\underline{\text{(x)Px V}}$ (un detalle lógico, o del lenguaje intuitivo, sin demasiada importancia o peso, algo así como la trivialidad de Vn y de Λn). Dejamos al lector pensar en qué casos se formalizará con (x)Px $\underline{V}$ fuerte o débil (en qué caso se usa Distrb 3, estrictamente, por ejemplo), y a qué otras conectivas podría afectar (x)Px fuerte (ya que esto es investigación de (x)Px "fuerte", más bien que de $\underline{V}$ "fuerte"), y en que casos se usará (x)Px fuerte o débil para estas otras conectivas; advertimos, sin embargo, que el uso de $\underline{\text{(x)Px V (x)Qx..V (x)nx}}$, es mucho más frecuente que el de la forma sin subrayar.

Demostremos, ahora, las formas finales de distribución para $\underline{V}$n, que son las que llevan una fórmula A, la cual no se deja afectar por los cuantificadores de la fórmula total (o por los cuantificadores de un antecedente o de un consecuente, de una ley); es decir, que A no es una función. Enumeraremos primero las leyes de distribución estas para $\veebar()2$, para luego buscar sus formas Vn correspondientes

Distrbs $\veebar()2$ $\quad (x)(A \veebar Px) \rightarrow A \veebar (x)Px$

$(x)(A \veebar Px) \rightarrow A \veebar (Ex)Px$

$A \veebar (x)Px \rightarrow (Ex)(A \veebar Px)$

$A \veebar (Ex)Px \rightarrow (Ex)(A \veebar Px)$

Demostremos, ahora, Distrb 9

Distrb 9 $\quad (x)(A \veebar B..\veebar n \veebar Px \veebar Qx..\veebar nx) \rightarrow A \veebar B..\veebar n \veebar (x)(Px \veebar Qx..\veebar nx)$ para $n \geq 1$

Nótese que usamos un mismo símbolo, n, para expresar el número de letras proposición, y el número de predicados de la variable x, siempre ambos en disyunción exclusiva, y como lo veníamos haciendo cuando constituían leyes separada o independientemente; igualmente, obsérvese que ahora n puede ser igual a 1, pero siempre siendo proposición y predicado.

1 $\quad (x)(A \veebar B..\veebar n \veebar Px \veebar Qx..\veebar nx)$ $\quad$ Hipótesis

2 $\quad (x)(Px \veebar Qx..\veebar nx \veebar A \veebar B..\veebar n)$ $\quad$ Conm $\veebar$ 1

3 $\quad (x)\{(Px \veebar Qx..\veebar nx \veebar A \veebar B..\veebar n) \wedge [(Px \veebar Qx..\veebar nx) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B..\wedge \neg n)]\}$ $\quad$ Sil $\veebar$ 3 (bajo Exp) y Def $\rightarrow$ 2

4 $\quad (x)[(Px \veebar Qx..\veebar nx) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B..\wedge \neg n)]$ $\quad$ Distrb $\wedge$ y Simp 3

5 $\quad (x)(Px \veebar Qx..\veebar nx) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B..\wedge \neg n)$ $\quad$ Distrb $\rightarrow$ 4

6 $\quad (x)\{(Px \veebar Qx..\veebar nx \veebar A \veebar B..\veebar n) \wedge [(Px \veebar Qx..\veebar nx) \veebar (A \veebar B..\veebar n)]\}$ $\quad$ T28 y Def $\rightarrow$ 2

7 $\quad (x)[(Px \veebar Qx..\veebar nx) \veebar (A \veebar B..\veebar n)]$ $\quad$ Distrb $\wedge$ y Simp 6

8 $\quad (x)[(A \veebar B..\veebar n) \veebar (Px \veebar Qx..\veebar nx)]$ $\quad$ Conm $\veebar()2$ 7

9 $\quad (A \veebar B..\veebar n) \veebar (x)(Px \veebar Qx..\veebar nx)$ $\quad$ Distrb $\veebar()2$ 8

10 $\quad (x)(Px \veebar Qx..\veebar nx) \veebar (A \veebar B..\veebar n)$ $\quad$ Conm $\veebar()2$ 9

11 $\quad \neg(x)(Px \veebar Qx..\veebar nx) \rightarrow (A \veebar B..\veebar n)$ $\quad$ Def $\veebar$ y Simp 10

12 (x)(Px ⊻ Qx..⊻ nx) ⊻ A ⊻ B..⊻ n   Conj y Def ⊻ 5, 11

13 A ⊻ B..⊻ n ⊻ (x)(Px ⊻ Qx..⊻ nx)   Conm ⊻ 12

14 Distrb 9   TD 1, 13

QD Distrb 9

Haremos una nota en cuanto a la demostración misma, y otra en cuanto al carácter de Distrb 9. En los pasos 3 y 6 se ha usado el siguiente procedimiento (y lo aclaramos porque podría parecer poco claro): en 3 usamos Sil ⊻ 3, que tiene la forma K, L → M, y bajo Exp K → (L → M); si a ello le añadimos la Def → con coimplicación, o (A → B) ↔ [A → (A ∧ B)], obtendremos, para Sil ⊻ 3, K ↔ [K ∧ (L → M)]; como teníamos en 2 K, aplicamos la ley de reemplazo de predicados equivalentes y obtenemos 3 de 2; y lo mismo para 6 con T17. (Obsérvese que el paso explicado (o un paso así en general) hubiera podido evitarse si en nuestro cálculo hubiéramos introducido una regla MP para predicados, que expresaría que dados K, K → L, predicados, puede obtenerse L predicado, del mismo sujeto que llevaba los predicados premisa, o sea, o todos, o alguno, o un sujeto determinado, de entre los individuos del discurso). Obsérvese, también, ya en cuanto al carácter de Distrb 9, que debe distinguirse esta tesis de una diferente o Distrb 9* (llamémosla así)

Distrb 9* (x)(A ⊻ B..⊻ n ⊻ Px ⊻ Qx..⊻ nx) → [(A ⊻ B..⊻ n) ⊻ (x)(Px ⊻ Qx..⊻ nx)] para n ≥ 1

Distrb 9* se obtiene por T28, aplicado al consecuente de Distrb 9, con lo cual el consecuente de Distrb 9* ostenta una disyunción bimembre o ⊻()2 entre la parte proposicional y la de predicados; mientras que Distrb 9 tiene un consecuente que es una disyunción múltiple, aun entre la parte proposicional y la de predicados. Como $(x)(Px \veebar Qx..\veebar nx)]$ atrapa en un cuantificador a lo que queda dentro de sí, hay la tendencia a confundir Distrb 9 con Distrb 9*. Esta observación vale también para Distrb 10, que consideramos enseguida

Distrb 10 $(x)(A \veebar B..\veebar n \veebar Px \veebar Qx..\veebar nx) \rightarrow A \veebar B..\veebar n \veebar (Ex)(Px \veebar Qx..\veebar nx)$

Esta tesis, similar en estructura a Distrb 9, salvo por el cuantificador (Ex), puede demostrarse por el mismo conjunto de pasos que Distrb 9, pero usando una Distrb $\rightarrow$, y una Distrb $\veebar()2$, distintas; de modo que, con esa nota, la dejamos demostrada. Quedan los paralelos de Distrb $\veebar$n, a $(A \veebar (x)Px) \rightarrow (Ex)(A \veebar Px)$, y a $(A \veebar (Ex)Px) \rightarrow (Ex)(A \veebar Px)$; sin embargo, estas formas para $\veebar$n sólo son válidas para $nx = 1$, por lo que más que una demostración sólo vale la pena anotarlas

Distrb 11 $A \veebar B..\veebar n \veebar (x)Px \rightarrow (Ex)(A \veebar B..\veebar n \veebar Px)$

Distrb 12 $A \veebar B..\veebar n \veebar (Ex)Px \rightarrow (Ex)(A \veebar B..\veebar n \veebar Px)$

Si se tomara en cuenta T28, y según lo hablado en torno a Distrb 9 y Distrb 9*, sí podría escribirse

Distrb 11* $A \veebar B..\veebar n \veebar (x)(Px \veebar Qx..\veebar nx) \rightarrow (Ex)[(A \veebar B..\veebar n) \rightarrow (Px \veebar Qx..\veebar nx)]$ para $n \geq 1$, $nx \geq 1$

Con ello hemos terminado nuestro trabajo en torno a las leyes de distribución de cuantificadores para $\veebar$n, y asimismo nuestro trabajo sintáctico en torno a $\veebar$n.

III CONCLUSION

Convendría hacer un pequeño resumen sobre lo hecho.

Hablamos de $\wedge n$, y demostramos $\wedge n \leftrightarrow \wedge n()$, y particularmente $\wedge n \leftrightarrow \wedge n()2$. Esta equivalencia nos permitía reducir el estudio de $\wedge n$, al de $\wedge n()2$, estudio ya hecho por la lógica matemática hasta aquí (sustituir un término izquierdo por uno derecho, escribir uno por otro) (naturalmente, en lógica no siempre el registrar una equivalencia permite prescindir de uno de los términos, como ocurre en $A \rightarrow B \leftrightarrow \neg A \vee B$, en que las conectivas se mantienen como estudio lógico, pero en nuestro caso $\wedge n$ no sólo es sólo el alcance de una conectiva, lo que permite operarla por recursión desde su mínimo, sino que es fútil y trivial respecto de $\wedge n()2$ en cuanto a su heurística, lo cual último constituye más bien el fundamento de su reducción o sustitución por $\wedge n()2$). Naturalmente, la reducción no significa que el lógico sea prohibido de usar $\wedge n$ (como hicimos nosotros, porque $\wedge n$ era lo más apto para trabajar $\underline{\vee}n$); entonces, y precisamente su futilidad o trivialidad permite determinarla al paso u opcionalmente (y gracias a $\wedge()n \leftrightarrow \wedge()2$), se la usa así: en semántica, se usan tablas de verdad múltiples (en las cuales queda incluida $\wedge()2$), o, se usan tablas de verdad para $\wedge()2$, donde una $\wedge n$ se obtiene de la supresión de paréntesis de una $\wedge n()2$, merced a $\wedge n \leftrightarrow \wedge n()2$. En sintaxis, se da una definición para $\wedge()n$, con lo cual el cálculo es múltiple, y en el cual queda incluido el caso mínimo $\wedge()2$, o, se da una definición para $\wedge()2$, y una $\wedge n$ se obtiene (se entiende, una F para $\wedge n$), por recursión de la F para $\wedge()2$, y luego la supresión de paréntesis, siempre por $\wedge n \Leftrightarrow \wedge n()2$.

El caso de la disyunción inclusiva múltiple, $\vee n$, es análogo al de $\wedge n$ (tal vez ligeramente menos fútil o trivial).

La equivalencia $\underline{\vee} n \Leftrightarrow \underline{\vee} n()$ no se verifica, lo cual nos obliga a una completa sintaxis de $\underline{\vee} n$, así como la no opcionalidad de su semántica (respecto de $\underline{\vee} n()2$).

Cabe, pues, ahora, si lo que se rescata de nuestro trabajo es la sintaxis de $\underline{\vee} n$ -las leyes de una conectiva lógica-, preguntarse si hemos anotado nuevos teoremas para la lógica con este alcance heurístico de conectiva, y por lo tanto, si ello no resulta demasiado inverosímil para una lógica matemática que cuenta con más de cien años de historia, y que estamos en el terreno de la lógica elemental. En realidad, la respuesta es elemental y harto lógica: la lógica matemática nació, sí, con el afán de copar un mundo suficiente de partículas y leyes lógicas, pero para mostrar su matematicidad, el hecho de que constituían un cálculo, o, dicho de un modo grueso, algo por lo que los matemáticos podían interesarse; en este afán es natural que todo el mundo lógico no fuera copado, porque había un segundo interés, tal vez más importante que el primero (para su momento). Aún hoy en esta idea -siempre mermándose a lo largo de la historia-, es natural que pretendamos completar el mundo de partículas lógicas y sus leyes, lo que es completar una idea de suficiencia, también, para una lógica madura, al menos en su parte elemental. Así, si $\underline{\vee}$ es un símbolo lógico, tenemos un estudio completo del mismo (el lógico no está inerme frente a él, o buscando al momento antisemánticas equivalencias). Todo lo cual, habla de la **modestia** de nuestra tesis, o estudio de $\underline{\vee}n$: en efecto, una vez constituida la lógica, todos los métodos, cálculos, y procedimientos, están constituidos, la concepción misma de la lógica matemática está hecha, de suerte que todo está servido para que nosotros demostremos el alcance n de la partícula $\underline{\vee}$ (sus leyes); esto es hablar de la importancia de configurar a la lógica como matemática, y de referirnos a nuestra tesis casi como a un ejercicio de lógica matemática. Hemos añadido, pues, preferentemente por un punto de vista semántico (formal e informal, pero que incluye a la sintaxis como su trato estrictamente formal), el estudio del alcance n de $\underline{\vee}$, a una lógica matemática completa en cuanto a su matemática (lógica elemental).

Podemos hacer, ahora, un par de observaciones finales.

1 La conectiva $\underline{\vee}n$, para $n > 2$, genera un cálculo lógico (sintaxis) con la sola ayuda de la negación (serán las conectivas primitivas, y con ellas se escribirán igualmente los axiomas y las reglas). Esto quiere decir, que como toda conectiva lógica, $\underline{\vee}n$, para $n > 2$, genera un cálculo primitivo, donde las otras conectivas y sus leyes, entran por definición (a partir de lo primitivo). Pero además, significa que $\underline{\vee}n$, para $n > 2$, sólo requiere de la negación para constituir lo primitivo, comportándose en esto similar a $\rightarrow$, $\vee$, e $\wedge$, que también sólo requieren de la negación para constituir lo primitivo, a diferencia de $\leftrightarrow$, y $\underline{\vee}()2$, o $\underline{\vee}n$ para $n = 2$, que requieren de la negación y una conectiva extra de entre $\rightarrow$, $\vee$, e $\wedge$, para

constituir lo primitivo. A pesar de que desechemos el cálculo sintáctico de $\veebar_n$, para $n > 2$, puede considerarse esta curiosidad de la economía de esta conectiva (para este efecto), una ventaja sintáctica de la misma. A manera de ejemplo, escribiremos una definición (y ya habíamos adelantado la demostración de ésta, y la sugerencia del cálculo sintáctico de $\veebar_n$ anteriormente), el axioma 1 del cálculo L usado en este libro, y la regla MP, todo en base a $\veebar_n$, para $n > 2$, como primitiva

$A \rightarrow B$ Def $\neg(A \veebar B \veebar B)$

Ax 1 $\neg[A \veebar \neg(B \veebar A \veebar A) \veebar \neg(B \veebar A \veebar A)]$

R MP Si es deducible la fórmula $\neg(A \veebar B \veebar B)$, y es deducible también A, entonces también es deducible en el cálculo en cuestión la fórmula B

Como se ve, sólo hemos requerido de $\veebar_3$ para nuestros ejemplos. Pero, fácilmente podríamos introducir $\veebar_n$ en los mismos, logrando un mismo efecto práctico, aunque no teórico. Pero para los fines prácticos del cálculo lógico este cálculo con $\veebar_n$ es engorroso, redundante, y, por lo tanto, superfluo. De hecho, ya el cálculo con $\veebar_3$ es engorroso, por lo que sólo hemos introducido su idea teórica, en esta observación (necesitábamos saber que $\veebar_n$ construye un cálculo lógico en tanto conectiva lógica).

2 Una última idea es advertir que los lógicos, y los matemáticos, suelen acompañar sus exposiciones -en cualquier terreno- con ejercicios y ejemplos concretos de la materia expuesta, cosa que no hemos hecho nosotros. Ello es comprensible si se piensa que existen también exposiciones más bien teóricas; además, puede tenerse en cuenta que el autor piensa que la idea del ejercicio es una idea más bien matemática que lógica

(filosofía), y se ha escrito este trabajo en esta última perspectiva. También -y esto es lo principal de esta observación- ofrecen los lógicos axiomatizaciones de teorías científicas con la lógica tratada (una aplicación, ya no sólo a la vida ordinaria); nosotros pensamos que una conectiva como →, por ejemplo, no requiere de un test de si va a ser aplicable o no a la axiomatización de una teoría científica (parcela, teoría elemental, etc., ya que no el intento exagerado de axiomatizar toda una ciencia), para que esa conectiva, o partícula lógica y sus leyes, sea aceptada por la lógica como estudio lógico; de esta manera, si no exigimos un test para →, o V, o (x), entonces tampoco exigiremos uno para $\underline{V}n$. Naturalmente, perogrullamos que la ciencia está llena de alternativas múltiples (no inclusivas), en las que $\underline{V}n$ formalizaría literal (sin uso de equivalencias).

LLenamos, así, en estas dos observaciones, los requisitos de un sistema axiomático lógico en base a $\underline{V}n$, y una axiomatización científica con tal conectiva, con su suficiente mención.

TABLA DE TEOREMAS DEMOSTRADOS PARA LA DISYUNCION EXCLUSIVA MULTIPLE

Lógica de proposiciones

Conm $\veebar$n $\quad A \veebar B \veebar C...\veebar n \leftrightarrow K \veebar L \veebar M...\veebar N$

donde $K, L, M...N = A, B, C...n$

y $K \neq L \neq M... \neq N$

Distr $\veebar$n $\quad (A \veebar B \veebar C..\veebar n) \wedge K \leftrightarrow (A \wedge K) \veebar (B \wedge K) \veebar (C \wedge K)..\veebar (n \wedge K)$

T20 $\quad A \veebar B \veebar C..\veebar n \rightarrow \{(A \veebar B..\veebar m) \rightarrow [\neg(m + 1) \wedge \neg(m + 2)..\wedge \neg n]\} \wedge \{(\neg A \wedge \neg B..\wedge \neg m) \rightarrow [(m + 1) \veebar (m + 2)..\veebar n]\}$ para $m \geq 2, \leq (n - 1)$

Sil 1 $\quad (A \veebar B..\veebar n) \wedge A \rightarrow \neg B \wedge \neg C..\wedge \neg n$

Sil 2 $\quad (A \veebar B..\veebar n) \wedge \neg A \rightarrow B \veebar C..\veebar n$

Sil 3 $\quad (A \veebar B..\veebar n) \wedge (A \veebar B..\veebar m) \rightarrow \neg(m + 1) \wedge \neg(m + 2)..\wedge \neg n$

Sil 4 $\quad (A \veebar B..\veebar n) \wedge (\neg A \wedge \neg B..\wedge \neg m) \rightarrow (m + 1) \veebar (m + 2)..\veebar n$

Sil 3, 4, para $m \geq 2, \leq (n - 1)$

T21 $\quad A \veebar B \veebar C..\veebar n \rightarrow \{(A \veebar B..\veebar m) \leftrightarrow [\neg(m + 1) \wedge \neg(m + 2)..\wedge \neg n]\} \wedge \{(\neg A \wedge \neg B..\wedge \neg m) \leftrightarrow [(m + 1) \veebar (m + 2)..\veebar n]\}$ para $m \geq 1, \leq (n - 1)$

T22 $\quad A \veebar B..\veebar n \leftrightarrow [A \leftrightarrow (\neg B \wedge \neg C..\wedge \neg n)] \wedge [\neg A \leftrightarrow (B \veebar C..\veebar n)]$

T23 $\quad (A \veebar B..\veebar n) \wedge A \leftrightarrow (\neg B \wedge \neg C..\wedge \neg n) \wedge A$

T24 $\quad (A \veebar B..\veebar n) \wedge \neg A \leftrightarrow (B \veebar C..\veebar n) \wedge \neg A$

T25 $\quad (A \veebar B..\veebar n) \wedge (A \veebar B..\veebar m) \leftrightarrow [\neg(m + 1) \wedge \neg(m + 2)..\wedge \neg n)] \wedge (A \veebar B..\veebar m)$

T26 $\quad (A \veebar B..\veebar n) \wedge (\neg A \wedge \neg B..\wedge \neg m) \leftrightarrow [(m + 1) \veebar (m + 2)..\veebar n)] \wedge (\neg A \wedge \neg B..\wedge \neg m)$

T25 y T26 para $m \geq 2$

T27 $(A \underline{\vee} B..\underline{\vee}\, m) \wedge [\neg(m + 1) \wedge \neg(m + 2)..\wedge \neg n] \rightarrow (A \underline{\vee} B \;\; \underline{\vee}\, n)$

para $m \geq 1$

T28 $A \underline{\vee} B..\underline{\vee}\, n \rightarrow \{A \underline{\vee} [B \underline{\vee} C..()..\underline{\vee}\, n]\}$

donde () es asociación por pares, o ()2

Dil 1 $(A \rightarrow K) \wedge (B \rightarrow K)..\wedge (n \rightarrow K) \rightarrow [(A \underline{\vee} B..\underline{\vee}\, n) \rightarrow K]$

Dil 2 $(K \rightarrow A) \wedge (K \rightarrow B)..\wedge (K \rightarrow n) \rightarrow [(\neg A \underline{\vee} \neg B..\underline{\vee} \neg n) \rightarrow \neg K]$

Dil 3 $(A \leftrightarrow A') \wedge (B \leftrightarrow B')..\wedge (n \leftrightarrow n') \rightarrow [(A \underline{\vee} B..\underline{\vee}\, n) \rightarrow (A' \underline{\vee}$ $B'..\underline{\vee}\, n")]$

T29 $(A \rightarrow K) \underline{\vee} (B \rightarrow K)..\underline{\vee} (n \rightarrow K) \rightarrow [(A \wedge B..\wedge n) \rightarrow K]$

T30 $(K \rightarrow A) \underline{\vee} (K \rightarrow B)..\underline{\vee} (K \rightarrow n) \rightarrow [K \rightarrow (A \underline{\vee} B..\underline{\vee}\, n)]$

T31 $(A \rightarrow A') \underline{\vee} (B \rightarrow B')..\underline{\vee} (n \rightarrow n') \rightarrow [(A \wedge B..\wedge n) \rightarrow (A' \underline{\vee}$ $B'..\underline{\vee}\, n')]$

T32 $(A' \rightarrow A) \underline{\vee} (B' \rightarrow B)..\underline{\vee} (n' \rightarrow n) \rightarrow [(\neg A \wedge \neg B..\wedge \neg n) \rightarrow (\neg A'$ $\underline{\vee} \neg B'..\underline{\vee} \neg n')]$

T33 $(A \underline{\vee} B..\underline{\vee}\, n) \wedge (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow D)..\wedge (1 \rightarrow m) \rightarrow [(m$ $+ 1) \underline{\vee} (m + 2)..\underline{\vee}\, n]$ para $m \geq 2, \leq (n - 1)$

T34 $\neg(A \underline{\vee} B \underline{\vee} B) \leftrightarrow (A \rightarrow B)$

Lógica de predicados

Distrb Vn 3 $(x)Px \underline{\vee} (x)Qx..\underline{\vee} (x)nx \rightarrow (Ex)(Px \underline{\vee} Qx..\underline{\vee}\, nx)$

Distrb Vn 4 $(Ex)Px \underline{\vee} (Ex)Qx..\underline{\vee} (Ex)nx \rightarrow (Ex)(Px \underline{\vee} Qx..\underline{\vee}\, nx)$

Distrb 5 $(x)(Px \underline{\vee} Qx..\underline{\vee}\, nx) \rightarrow [(x)Px \rightarrow (x)\neg Qx..\wedge (x)\neg nx] \wedge$ $[(x)\neg Px \rightarrow (x)(Qx..\underline{\vee}\, nx)]$

Distrb 6 $(x)(Px \underline{\vee} Qx..\underline{\vee}\, nx) \rightarrow [(Ex)Px \rightarrow (Ex)\neg Qx..\wedge (Ex)\neg nx] \wedge$ $[(Ex)\neg Px \rightarrow (Ex)(Qx..\underline{\vee}\, nx)]$

Distrb 7 $(x)(Px \underline{\vee} Qx..\underline{\vee}\, nx) \rightarrow [(x)Px \rightarrow (Ex)\neg Qx..\wedge (Ex)\neg nx] \wedge$ $[(x)\neg Px \rightarrow (Ex)(Qx..\underline{\vee}\, nx)]$

Distrb 8 $\underline{(x)Px \vee (x)Qx..\vee (x)nx} \rightarrow (x)(Px \underline{\vee} Qx..\underline{\vee}\, nx)$

Distrb 9 $(x)(A \underline{\vee} B..\underline{\vee}\, n \underline{\vee} Px \underline{\vee} Qx..\underline{\vee}\, nx) \rightarrow A \underline{\vee} B..\underline{\vee}\, n \underline{\vee} (x)(Px$

$\underline{\vee}$ Qx..$\underline{\vee}$ nx)

Distrb 10 $(x)(A \underline{\vee} B..\underline{\vee}\ n \underline{\vee} Px \underline{\vee} Qx..\underline{\vee}\ nx) \rightarrow A \underline{\vee} B..\underline{\vee}\ n \underline{\vee} (Ex)(Px$

$\underline{\vee}$ Qx..$\underline{\vee}$ nx)

Distrb 9, 10, para $n \geq 1$, $nx \geq 1$

Distrb 11 $A \underline{\vee} B..\underline{\vee}\ n \underline{\vee} (x)Px \rightarrow (Ex)(A \underline{\vee} B..\underline{\vee}\ n \underline{\vee} Px)$

Distrb 12 $A \underline{\vee} B..\underline{\vee}\ n \underline{\vee} (Ex)Px \rightarrow (Ex)(A \underline{\vee} B..\underline{\vee}\ n \underline{\vee} Px)$

GLOSARIO

Glosaremos aquí, lo estrictamente heurístico para este texto, o lo útil para ello.

Disyunción exclusiva múltiple
En rigor, toda disyunción exclusiva es una disyunción exclusiva múltiple o $\veebar n$, para $n \geq 2$. O mejor, toda disyunción exclusiva es simplemente una disyunción exclusiva, pero entendida como conectiva múltiple (o para un número **n** de letras proposición, a partir de dos). Sin embargo, como este texto indaga a partir de dos -que es el trabajo que ya ha hecho la lógica matemática hasta aquí-, distinguiremos en el texto entre la disyunción exclusiva múltiple y la disyunción exclusiva de dos proposiciones o biargumental. Así como, como es natural, llegaremos a hablar de la disyunción exclusiva simplemente.

Inducción implícita
En las demostraciones con ....n, en Sintaxis, o no uso de tablas de verdad u otro método semántico que proceda por definiciones, no es posible alcanzar la variable **n** (o la **n** - 1, etc.) sino es por un proceso inductivo. Se muestra que un segmento demostrativo válido para una variable, implica su validez siempre para la siguiente, y ya se tiene el segmento demostrativo para unas primeras variables, de modo que todas las variables pasarán por tal demostración. Sin embargo, la demostración toda del teorema procede por los modos normales no inductivos de la lógica matemática -cual si fueran no **n** variables (potencialmente infinitas)-; así, pues, se opera una inducción implícita en las demostraciones de esta forma, que anotamos con los usuales puntos suspensivos (en este caso verticales o de demostración). En demostraciones más complejas -lógica de predicados-, puede hacerse más formal o explícita esta inducción, aunque sólo explicada verbalmente -la demostración comienza ya no con **n** variables, en la hipótesis, sino sólo con las de la base de la inducción, luego se explica que esta base implica el teorema para una variable más, y esta última para la siguiente, y así.

Metateoría, Metavariables
Por metateoría se entiende, el lenguaje (teórico) que habla **acerca** de otro lenguaje o teoría o lenguaje objeto (en la medida, por ejemplo, en que se esté estipulando o estudiando un lenguaje para **usar** de él). Es frecuente, entro los lógicos, a su vez, estipular que lo que pertenece al lenguaje (objeto) no pertenece al metalenguaje, y viceversa. Una fórmula como $A \veebar B \veebar C$, esta en lenguaje objeto; una fórmula (o metafórmula) como $K \veebar L \veebar M$, está en lenguaje metateórico, en la medida en que habla **acerca** de muchas fórmulas posibles de las primeras, si estipulamos que las variables K, L, M, etc., pueden ser sustituidas o nombran a cualquier fórmula -o tales fórmulas- del lenguaje objeto, así tales variables son metavariables. (Este efecto de las metavariables puede ser logrado, en casos, por la aplicación o el uso de la regla de sustitución uniforme SU, que permite escribir la fórmula en lenguaje objeto, pero que ahora aparece ella misma, la

regla, como el momento metalingüístico -habla acerca, o las nombra, de todas las fórmulas que resulten de su aplicación o sustitución). Otro caso de uso de metavariables (sin esta equivalencia con el uso de SU), es nuestra fórmula de conmutación para $\underline{V}$n, o A $\underline{V}$ B $\underline{V}$ C...$\underline{V}$ n $\leftrightarrow$ K $\underline{V}$ L $\underline{V}$ M...$\underline{V}$ N, donde las metavariables ya no son cuaquier letra o fórmula objeto, sino sólo las de la izquierda de la metafómula, y si se reemplaza K por B, por ejemplo, L debe buscar otra letra (véase Ley de Conmutación para $\underline{V}$n). Otro uso de metateoría en el texto es el de la expresión "....n", o "$\underline{V}$n", que hablan acerca de todos los números posibles -o fórmulas en lenguaje- de disyunciones exclusivas. Otros ejemplos son "$\underline{V}$n()" o "$\underline{V}$n()2", que nombran las asociaciones posibles de una $\underline{V}$n y la asociación por pares de una $\underline{V}$n, respectivamente. Otros ejemplos de uso de metavariables, y su cálculo respectivo, ya que tienen su cálculo propio, prescindiendo de SU (sus sustituciones posibles vienen dadas por las cláusulas), se pueden ver en las definiciones alternativas de $\underline{V}$n (véase esta sección en Sintaxis). Cabe anotar que la metateoría o metalenguaje suele usar comillas para el término o lenguaje del que se habla, como en ""$\underline{V}$n" no es asociable con mantención de equivalencia"; en Sintaxis, en nuestro lenguaje común usado como metalenguaje para explicar el lenguaje objeto de "$\underline{V}$n", hemos prescindido de las comillas, en la medida en que esto se entiende, y el poner desnudamente el símbolo $\underline{V}$n, sugiere prescisamente su previa carencia de significado o que $\underline{V}$n no es nada más que lo que se dice de él.

Recursión, fórmulas recursivas

La recursión -como se ha aplicado aquí en lógica- consiste en volver a apelar a un concepto (o fórmula o definición) para obtener un resultado de creciente complejidad relativamente a una anterior aplicación de tal concepto. Usualmente la recursión procede de un caso primero o simple, hasta casos tan complejos como se quiera. Un ejemplo son las cláusulas de fórmulas bien formadas en Sintaxis, que, tras establecer las bien formadas fórmulas atómicas, nos permite -la cláusula siguiente, o "es una fbf "fbf $\rightarrow$ fbf""- conseguir fbfs de creciente complejidad, aplicando siempre la misma cláusula. En nuestro texto, dedicado a $\underline{V}$n, su definición es un ejemplo de uso de recursión o de una fórmula (definición) recursiva -procede así, A $\underline{V}$ B $\underline{V}$ C...$\underline{V}$ n Def. [A $\rightarrow$ (~B &~C..& ~n)] & [~A $\rightarrow$ (B $\underline{V}$ C..$\underline{V}$ n)], para liberarse enteramente del término definido o $\underline{V}$, debe volverse a aplicar la misma definición tantas veces como sea necesario. Es así la fórmula recursiva, una que puede aplicarse muchas veces sobre sí misma.

Tablas de verdad abreviadas

En las demostraciones con tablas de verdad en Semántica, no es posible escribir toda la tabla para fórmulas con n proposiciones (esto más allá de lo posible materialmente). Las tablas de verdad abreviadas proceden por las definiciones (semánticas) de las conectivas buscando la contradicción o la identidad de tales definiciones (las de los términos cotejados según la conectiva dominante de la fórmula), o el caso de la contingencia (contradicción a ciertos valores de verdad de tales variables e identidad a otros). Las definiciones de las conectivas, alcanzan a las n proposiciones, precisamente por definición.

BIBLIOGRAFIA

Agazzi, Evandro, **La lógica Simbólica**, Editorial Herder, Barcelona, 1986.

Bochenski, I. M., **Historia de la la Lógica Formal**, Editorial Gredos, Madrid, 1976.

Copi, Irving, **Introducción a la Lógica**, EUDEBA, Buenos Aires, 1972.

Ferrater Mora, José, y Hugues Leblanc, **Lógica Matemática**, Fondo de Cultura Económica, México, 1970.

Garrido, Manuel, **Lógica Simbólica**, Editorial Tecnos, Madrid 1977.

Granell, M., **Lógica**, Revista de Occidente, Madrid, 1949.

Hilbert, D., y W. Ackermann, **Elementos de Lógica teórica**, Editorial Tecnos, Madrid, 1975.

Haack, Susan, **Filosofía de las Lógicas**, Cátedra-Teorema, Madrid, 1991.

Quine, Willard V, O., **Los Métodos de la Lógica**, Editorial Planeta, Barcelona, 1993.

Rodríguez Artalejo, Mario, **Lógica para Matemáticos**, Paraninfo S. A., Madrid, 1980.

*Nuestra Bibliografía recesariamente recae en la Lógica Elemental, de modo que contempla tratados sistemáticos de la misma, o de la Lógica en sí general. Podría, naturalmente, alargarse la lista, pero sería recaer en una repetición. Baste, pues, esta lista para una lógica standard.

INDICE