Universidad Mayor de San Andrés
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Carrera de Matemática

Ecuaciones Integrales de Fredholm y Volterra asociada a Ecuaciones Diferenciales

Proyecto de Grado presentado para la obtención del Titulo de Licenciatura en Matemática

Autor: Univ. Danitza Miriam Quispe Ortiz

Tutor: M.Sc. Miguel Yucra Calle

La Paz - Bolivia
2021

Dedicado a las memorias de:
Eduardo Papusco Quispe Murga mi amado padre (1970 - 2021)
Elsa Miriam Ortiz Loza mi madre (1970 - 2007)
Ana Maria Chuquimia Pantoja mi madre (1971 - 2019)

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi Profesor y Tutor M.Sc. Miguel Yucra por todo su apoyo y sugerencias durante la elaboración de este trabajo. También quiero agradecer al Seminario de Teoría de Control de la Carrera de Matemática, a los profesores Doc. Efraín Cruz, M.Sc. Willy Condori y M.Sc. Miguel Yucra, (nuevamente), por brindarme la oportunidad de desarrollarme, por estar siempre dispuestos a conversar de matemática y desde luego por su amistad.

En mi adolescencia gracias a un auxiliar de la materia de matemática descubrí mi gran fascinación por el área, lo cual en un principio me llevo a ingeniería, donde descubrí que no me gusta la química, y gracias a una amiga que estudiaba Informática me dio a conocer la Carrera de Matemáticas.

Debo mencionar mi agradecimiento a todos los profesores de la Carrera de Matemática por transmitirme sus conocimientos, a todos mis amistades que conocí en los años de carrera, donde compartimos experiencias académicas y sociales, en especial a mi enamorado Lic. Edson Medrano, a un buen amigo Isrrael Villarreal y a amigos que conocí en el Seminario de Teoría de Control.

Finalmente, pero no menos importante, estoy muy agradecido con mis hermanos Ing. Luis Quispe, Yerko Quispe y Abel Quispe, por su apoyo constante y amor, gracias a ellos tuve la fuerza suficiente para concluir con mi trabajo proyecto de grado, a mis queridas amigas del colegio que siempre me brindaron su amistad incondicional y más que todo a mi querido papá Eduardo Quispe que si no fuera por él jamás hubiera estudiado una carrera universitaria.

Índice general

Introducción

La Teoría de Ecuaciones Integrales fue ampliamente desarrollada por el matemático sueco Erick Ivar Fredholm, quien estudio en la universidad de Uppsala donde obtuvo el grado de Magister en Ciencias en mayo del 1888. Para obtener el doctorado trabajó en la Universidad de Estocolmo, donde en su tesis doctoral abordo el estudio de Ecuaciones Diferenciales Parciales, que fue motivado por un problema de equilibrio en elasticidad dentro del área de la Física. Todo ello dio origen a una de las investigaciones más trascendentales para la matemática en la primera cuarta parte del siglo XX, a saber: las Ecuaciones Integrales y la Teoría Espectral.

Para la construcción de una teoría general de las ecuaciones integrales lineales, se considera que los fundadores de dicha teoría son: **V. Volterra** (1896), **E. Fredholm** (1903), **D. Hilbert** (1912) y **E. Schmidt** (1907). Incluso antes de estas investigaciones, se propuso el método de aproximaciones sucesivas para la construcción de una ecuación no lineal de tipo Volterra en relación con el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias en el trabajo de **J. Lioville** (1838), **L. Fuchs** (1870), **G. Peano** (1888) una solución a la ecuación integral de segunda clase:

$$f(s)=\int_a^b k(s,t)u(t)\,dt = Kuf(s)=u(s)-\mu\int_a^b k(s,t)u(t)\,dt, \quad s\in[a,b].$$

El trabajo de Fredholm fue precedido por las investigaciones de Volterra que estudiaron ecuaciones integrales de la forma:

$$f(s)=\int_a^s k(s,t)u(t)dt = Kuf(s)=u(s)-\mu\int_a^s k(s,t)u(t)dt, \quad s\in[a,b].$$

Para ambas ecuaciones se supone que el núcleo $k(s,t)$, $f(s)$ y la desconocida $u(s)$ son funciones continuas en el cuadrado $[a,b]\times[a,b]$.

El método clásico para estudiar ecuaciones integrales del primer tipo es el denominado método de regularización. Dicho método consiste en contribuir soluciones aproximadas de problemas mal planteados, tomando los valores de un operador de regularización con respecto a los datos iniciales, por lo cual en este trabajo se tomara sólo las ecuaciones de segundo tipo.

El trabajo inicia con el capítulo de preliminares, dando inicio a los Operadores Compactos y sus propiedades, de referencia el libro César R. de Oliveira, *Introdução à análise funcional* y Martin Schechter, *Principles of Functional Analysis*, donde se define Operador Compacto y Operador de Rango Finito, el conjunto de operadores de rango finito esta contenido en el conjunto de operadores compactos, además se prueba que el conjunto de los operadores compactos es cerrado en el conjunto de operadores continuos o acotados. Dando inicio al Teorema principal para este primer capitulo: Si X es un espacio normado, $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert Complejo, con el producto interno usual, y un operador compacto $T : X \to \mathcal{H}$ entonces existe una sucesión de operadores de rango finito $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a T en el conjunto de operadores continuos.

En el segundo capítulo; se inicia con algunas nociones de la Teoría Espectral de operadores compactos donde se especifica que se trabajará con autovalores distintos de cero, para exponer el Teorema de la Alternativa de Fredholm. Está alternativa es uno de los Teoremas más útiles en matemática aplicada ya que tiene varias formas de expresarlo, en el presente trabajo será estudiado para operadores lineales compactos, para lo cual existen dos casos sobre la existencia y unicidad de soluciones en un caso de las mismas.

En el tercer capítulo; se presenta las ecuaciones integrales lineales en los espacios de Hilbert de dimension infinita, tiene como origen en diversos problemas del análisis funcional. Concretamente son un precedente a la teoría espectral de los operadores de Fredholm, como una solución a la ecuación integral, con una pequeña modificación al Teorema de la Alternativa de Fredholm descrita en el capítulo 2, asociando las ecuaciones diferenciales con condiciones de frontera a la ecuación integral de Fredholm y con condiciones iniciales a la ecuación integral de Volterra.

En el último capítulo; se mostrará ejemplos en física que conducen a ecuaciones integrales de Fredholm y Volterra y que se asocian a ecuaciones diferenciales de segunda clase ya sea con condiciones iniciales o de frontera y viceversa, como ser: "La cuerda con carga continua", .El Problema de Sturm - Liouvillez "La Cuerda vibrante".

CAPÍTULO 1
Preliminares

En las dos siguientes secciones se presentan algunas definiciones y resultados del Análisis Funcional, necesarios para abordar lo que es un operador compacto y sus propiedades en espacios de dimensión infinita. Además, veremos que si el operador tiene rango finito, es decir que la imagen tiene dimensión finita, entonces el operador transforma conjuntos acotados en compactos.

1.1. Operadores Compactos

Sean X e Y espacios normados, se denota al conjunto de todos los operadores lineales de X en Y como:

$$L(X,Y) = \{T : X \to Y / T \text{ es un operador lineal}\}.$$

El conjunto de los operadores continuos o acotados se denotará por:

$$B(X,Y) = \{T \in L(X,Y) / T \text{ es un operador continuo o acotado}\}.$$

Definición 1.1 (Operadores de Rango Finito)**.** Si X, Y son espacios normados, decimos que $T \in L(X,Y)$ es de *rango finito* si, la dimensión de su imagen es finito.

Se denota el conjunto de operadores de rango finito por:

$$F(X,Y) = \{T \in L(X,Y) / T \text{ es de rango finito}\}.$$

Observación 1. El conjunto de operadores de rango finito $F(X,Y)$ es un subespacio vectorial del conjunto de operadores lineales $L(X,Y)$. En efecto:

i) Para el operador nulo:

$$\begin{aligned} 0 : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto 0, \end{aligned}$$

se tiene $0(X) = \{0\}$, entonces $\dim(0(X)) = 0$. Así, $0 \in F(X,Y)$.

ii) Sean S, T de rango finito, entonces $\dim T(X) < \infty$ y $\dim S(X) < \infty$. Además como

$$(T+S)(X) \subset T(X) + S(X)$$

y, siendo $T(X)$ y $S(X)$ son de dimensión finita, entonces $T(X)+S(X)$ es de dimension finita, de donde $(T+S)(X)$ es de dimension finita y

$$\dim(T+S)(X) \leq \dim[T(X)+S(X)] \leq \dim T(X) + \dim S(X).$$

Así, $T+S$ es de rango finito.

iii) Sean $\lambda \in \mathbb{F}$ y $T \in F(X,Y)$. Entonces $\dim T(X) < \infty$ $\lambda T(X)$, sea $\{Tx_1, Tx_2, \ldots\ldots Tx_n\}$ una base de $T(X)$ para $w \in \lambda T(X)$ existe $x \in X$ tal que $w = \lambda(Tx)$

$$w \in Span(Tx_1, Tx_2, \ldots\ldots, Tx_n),$$

Por lo tanto $(\lambda T)X = \lambda(Tx)$.

Así, $F(X,Y)$ es un subespacio de $L(X,Y)$.

Definición 1.2. (Operadores Compactos). Sean X, Y espacios normados, decimos que el operador $T \in L(X,Y)$ es un *Operador Compacto*, si $\overline{T(B[0,1])}$ es compacta en Y, donde $B[0,1]$ es la bola unitaria de centro 0 y radio 1 de $x \in X$.

Se denota el conjunto de todos los operadores compactos como:

$$K(X,Y) = \{T \in L(X,Y)/T \text{ es un operador compacto}\}.$$

Proposición 1.1. *Sean X, Y espacios normados y $T \in L(X,Y)$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

a) T es compacto.

b) $\overline{T(A)}$ es compacto, para todo conjunto acotado $A \subset X$.

c) Para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ acotada en X, $\{Tx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente en Y.

Demostración. $a) \Rightarrow c)$ Para esta equivalencia primero se prueba lo siguiente. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada de $B[0,1]$, entonces existe $M > 0$ tal que $\|x_n\| \leqslant M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Así $\{Tx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión en $T(B[0,1]) \subset \overline{T(B[0,1])}$.

Ahora como T es compacto, $\overline{T(B[0,1])}$ es compacto y por lo tanto, existe $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\{Tx_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a cierto $y \in \overline{T(B[0,1])}$. Por lo tanto, $\{Tx_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $y \in Y$.

$c) \Rightarrow b)$ Dado $S \subset X$ acotado, se puede ver que $\overline{T(S)}$ es totalmente acotado, es decir, para todo real positivo $\varepsilon > 0$, existe un número finito de bolas abiertas de radio ε, que cubren al conjunto $\overline{T(S)}$. Se supone lo contrario, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $z_1, \ldots, z_n \in \overline{T(S)}$ y $n \in \mathbb{N}$

$$\overline{T(S)} \subsetneq \bigcup_{j=1}^{n} B(z_j, \varepsilon). \tag{1.1.1}$$

Si $S = \phi$, todo es trivial, así que se puede suponer que existe $x_1 \in S$, entonces $\overline{T(S)} \subsetneq B(T(x_1, \varepsilon))$ y así existe $y_1 \in \overline{T(S)}$ tal que $y_1 \notin B(T(x_1, \varepsilon))$; como $y_1 \in \overline{T(S)}$ existe $x_2 \in S$ tal que $\|T(x_2) - y_1\| < \varepsilon/2$.

Se puede notar que

$$\varepsilon \leqslant \|T(x_1) - y_1\| \leqslant \|T(x_1) - T(x_2)\| + \|T(x_2) - y_1| < \|T(x_1) - T(x_2)\| + \varepsilon/2$$

entonces $\varepsilon < \|T(x_1) - T(x_2)\| + \varepsilon/2$. Por lo tanto $\varepsilon/2 < \|T(x_1) - T(x_2)\|$.

Ahora por la ecuación 1.1.1. $\overline{T(S)} \subsetneq \bigcup_{j=1}^{2} B(T(x_j), \varepsilon)$, se tiene que existe $y_2 \in \overline{T(S)}$ tal que $y_2 \notin \bigcup_{j=1}^{2} B(T(x_j), \varepsilon)$, como $y_2 \in \overline{T(S)}$, existe $x_3 \in S$ talque $\| T(x_3) - y_2 \| < \varepsilon/2$.

Se puede notar que

$$\varepsilon \leqslant \|T(x_2) - y_2\| \leqslant \|T(x_2) - T(x_3)\| + \|T(x_3) - y_2\| < \|T(x_2) - T(x_3)\| + \varepsilon/2$$

entonces $\varepsilon < \|T(x_3) - T(x_2)\| + \varepsilon/2$. Por lo tanto, $\varepsilon/2 < \|T(x_3) - T(x_2)\|$. De forma similar, se tiene que $\varepsilon/2 < \| T(x_3) - T(x_1) \|$.

Así, se construye inductivamente la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en S tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene $\varepsilon/2 < \|T(x_n) - T(x_j)\|$, esto para todo j menor que n.

Ahora bien, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ resulta una sucesión acotada en X (ya que S es acotado), luego por hipótesis, existe $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\{T x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente en Y. Entonces $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en Y, por lo tanto, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$i, k \geqslant k_0 \Rightarrow \|T(x_{n_k}) - T(x_{n_i})\| < \varepsilon/2.$$

Pero este último es absurdo por la construcción que se hizo en la demostración, esto provino de suponer que $\overline{T(S)}$ no es totalmente acotado.

$b) \Rightarrow a)$ La bola unitaria $B[0,1] = \{x \in X / \|x_n\| \leqslant 1\}$ es cerrada y acotada, luego por hipótesis se tiene que $\overline{T(B(0,1))}$ es compacta. Por lo tanto T es compacto. □

Observación 2. Sean X, Y espacios normados, entonces

a $K(X,Y) \subset B(X,Y) \subset L(X,Y)$

b $F(X,Y) \subset K(X,Y)$

Demostración. $a)$ Sea $T \in K(X,Y)$, así $\overline{T(B[0,1])}$ es compacta en Y, como $T(B[0,1]) \subset \overline{T(B[0,1])}$ se tiene que $T(B[0,1])$ es acotado, así existe $c > 0$ tal que $\|Tx\| \leq c$, para todo $x \in B[0,1]$, donde; $sup\|Tx\| \leq \infty$, $x \in B[0,1]$. Así $T \in B(X,Y)$. Se tiene inicialmente que todo operador acotado es un operador lineal.

$b)$ Sea $T \in F(X,Y)$, como $B[0,1] \subset X$ es cerrado y acotado, como T es continua $T(B[0,1])$ es cerrado y acotado, $T(B[0,1]) = \overline{T(B[0,1])}$, y como $T(X)$ es un operador de rango finito, entonces $\overline{T(B[0,1])} \subset T(X)$ es compacto (cerrado y acotado en dimension finita es compacto). Así, $T \in K(X,Y)$.

□

Observación 3. El conjunto de operadores compactos $K(X,Y)$ es subespacio de $B(X,Y)$.

Se mostrará que los operadores nulo, $S+T$ y αT son operadores compactos, donde S, $T \in K(X,Y)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Es inmediato que $0 \in K(X,Y)$.

ii) Sean $S, T \in K(X,Y)$. Dado $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en X, entonces $\{Tx_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ y $\{Sx_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ poseen subsucesiones que convergen en X.

$$(S+T)x_{n_j} = Sx_{n_j} + Txn_j \to y_0 + y_1 \in Y.$$

Así, $(S+T) \in K(X,Y)$.

iii) Sean $T \in K(X,Y)$ y $\alpha \in \mathbb{F}$. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada de X, entonces tiene una subsucesión $\{Tx_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a un $y \in Y$. Como

$$(\alpha T)x_{n_k} = \alpha(Tx_{n_k}) \to \alpha y$$

Así $\alpha T \in K(X,Y)$.

Ejemplo 1. Sea $k : [a,b] \times [c,d] \to \mathbf{R}$ continua

$$\begin{array}{rcccccl} T: & C[a,b] & \to & C[a,b] & & & \\ & f & \mapsto & Tf: & [c,d] & \to & \mathbb{R} \\ & & & & t & \mapsto & \int_a^b k(s,t)f(s)\,ds \end{array}$$

T es compacto (su demostración y aplicación se verán en los Capítulos 3 y 4) donde T se llama el operador integración, con núcleo k.

Ejemplo 2. Sea X un espacio normado infinito dimensional, entonces el operador identidad I en X no es compacto. En efecto, se considera que I es compacto, ya que X es un espacio normado infinito dimensional, entonces existe una sucesión de vectores unitarios x_n en X la cual no tiene una subsucesión convergente. De ahí la sucesión $Ix_n = x_n$ tampoco tiene una subsucesión convergente, lo que contradice con lo supuesto. Así, el operador I no es compacto en un espacio de dimension infinita.

1.2. Propiedades de los Operadores Compactos

En esta sección se describirá las principales propiedades algebraicas de un operador compacto T, que también se aplican al operador adjunto T^* en espacios complejos de Hilbert, con la norma del producto interno usual, que se utilizará en el Capítulo 2 como una herramienta para la demostración del Teorema de la Alternativa de Fredholm.

Teorema 1.1. *Sean X, Y y Z espacios normados. Si $S \in B(X,Y)$, $T \in B(Y,Z)$ y al menos uno de ellos es compacto, entonces TS es compacto.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en X. Si S es compacto entonces por la Proposición 1.1.c) se tiene una subsucesión $\{x_{n_r}\}_{r\in\mathbb{N}}$ talque $\{Sx_{n_r}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, ya que T es acotada la sucesión $\{TSx_{n_r}\}_{r\in\mathbb{N}}$ converge. Por lo tanto, TS es compacto.

Si S es acotado pero no compacto entonces la sucesión $\{Sx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotado. Como T debe ser compacto, entonces existe una subsucesión $\{Sx_{n_r}\}_{r\in\mathbb{N}}$ tal que $\{TSx_{n_r}\}_{r\in\mathbb{N}}$ converge y otra vez TS es compacto. □

De la Definición 1.2., continuamente se usará las subsucesiones $\{x_{n_r}\}_{r\in\mathbb{N}}$ o incluso $\{x_{n_{r_s}}\}_{s\in\mathbb{N}}$ de una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Para simplificar la notación a menudo supondremos que la subsucesión se ha vuelto a denotar como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, por lo que se puede omitir de las r, s, esto se permite en caso de no especificar la sucesión original al empiezo de la demostración.

Teorema 1.2. *Sean X un espacio normado e Y un espacio de Banach. El conjunto de los operadores compactos $K(X,Y)$ es cerrado en el conjunto de los acotados $B(X,Y)$.*

Demostración. Basta probar $\overline{K(X,Y)} = K(X,Y)$ en $B(X,Y)$. Ya se sabe que $K(X,Y) \subset \overline{K(X,Y)}$ ahora sólo bastará mostrar que $\overline{K(X,Y)} \subset K(X,Y)$.

Sea $T \in \overline{K(X,Y)}$, luego existe $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $K(X,Y)$ tal que $T_n \to T$ cuando $n \to \infty$, se puede ver que $T(B[0,1])$ es totalmente acotado. En efecto, sea $\varepsilon > 0$, como $T_n \to T$ cuando $n \to \infty$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_{n_0}\| < \varepsilon/3$.

Se ve que

$$\overline{T_{n_0}(B[0,1])} \subset \bigcup_{x\in B[0,1]} B(T_{n_0}(x), \varepsilon/3),$$

como $T_{n_0} \in K(X,Y)$ resulta que existen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in B[0,1]$ tal que:

$$\overline{T_{n_0}(B[0,1])} \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(T_{n_0}(x_j), \varepsilon/3).$$

En particular,

$$T_{n_0}(B[0,1]) \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(T_{n_0}(x_j), \varepsilon/3),$$

entonces dado $x \in B([0,1])$ existe un $j \in \{1,\ldots,n\}$ tal que $T_{n_0}(x) \in B(T_{n_0}(x_j), \varepsilon/3)$, así

$$\begin{aligned}\|T(x) - T(x_j)\| &\leq \|T(x) - T_{n_0}(x)\| + \|T_{n_0}(x) - T_{n_0}(x_j)\| + \|T_{n_0}(x_j) - T(x_j)\| \\ &< \|T - T_{n_0}\|\|x\| + \varepsilon/3 + \|T - T_{n_0}\|\|x_j\| \\ &< \|T_{n_0} - T\| + \varepsilon/3 + \|T_{n_0} - T\| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon,\end{aligned}$$

donde $T(x) \in B(T(x_j), \varepsilon)$.

En conclusión $T(B[0,1]) \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(T(x_j), \varepsilon)$ con $x_1, x_2, \ldots x_n \in B[0,1]$, es decir $T(B[0,1])$ resulta totalmente acotado. Así $T \in K(X,Y)$, por lo tanto $K(X,Y)$ es cerrado en $B(X,Y)$. □

Corolario 1.1. *Sean X un espacio normado e Y un espacio de Banach y $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $K(X,Y)$ que converge a un operador $T \in B(X,Y)$, entonces T es compacto.*

Demostración. Por hipótesis se tiene que existe una sucesión en el conjunto $K(X,Y)$, por el Teorema 1.2. se puede decir que la sucesión converge a un $T \in K(X,Y)$. Por lo tanto T es compacto. □

Corolario 1.2. *Sea X un espacio normado, Y un espacio de Banach y $\{T_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada de operadores de rango finito que converge a $T \in B(X,Y)$ entonces T es compacto.*

Demostración. Por la Observación 3. a) y por Corolario 1.1. queda demostrado el Corolario 1.2. □

El recíproco del Corolario 1.2. no es cierto en general cuando Y es un espacio de Banach, Pero es cierto cuando Y es un espacio de Hilbert.

Primero se mostrara el siguiente Teorema 1.3. que servirá para demostrar el recíproco del Corolario 1.2.

Teorema 1.3. *Sea T un operador compacto, entonces Im T y $\overline{ImT}$ son separables.*

Demostración. Para cualquier $r \geq \mathbb{N}$, sea $R_r = T(B(0,r)) \subseteq Y$ es la imagen de la bola $B(0,r) \subseteq X$, ya que T es compacto el conjunto $\overline{R_r}$ es compacto, entonces es completo y totalmente acotado; es decir, existe un número finito de bolas abiertas de radio r, que cubren al conjunto, lo cual forma una unión contable de bolas, es separable. Además ya que la Im T es igual a la unión contable $\bigcup_{r=1}^{\infty} R_r$ se tiene también que es separable.

Finalmente, sea S un subconjunto denso numerable de Im T y como $\overline{\mathrm{Im}T} \subseteq \mathrm{Im}T$ entonces S es también un conjunto denso numerable, así también $\overline{\mathrm{Im}T}$ es separable. □

Teorema 1.4. *Sean X es un espacio normado, $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $T \in K(X,\mathcal{H})$, entonces existe una sucesión de operadores de rango finito $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a T en $B(X,\mathcal{H})$.*

Demostración. Si T es de rango finito entonces la dimensión de la imagen de T es finita, se deduce por la Observación 3.$b)$ que T es compacto, y por Teorema 1.2. existe una sucesión T_n que converge al mismo T en $B(X,Y)$.

Se considera que T no tiene rango finito es decir que Im T es infinito dimensional, sea $\overline{\mathrm{Im}T}$ un subespacio cerrado en $\mathcal{H}$, así $\overline{\mathrm{Im}T}$ es un subespacio lineal en Hilbert entonces es Hilbert, y por el Teorema 1.3. se tiene que $\overline{\mathrm{Im}T}$ es separable.

Como Im T es infinito dimensional e Im $T \subset \overline{\mathrm{Im}T}$ entonces $\overline{\mathrm{Im}T}$ es infinito dimensional, así por el Teorema A1 (ver Anexo) y como $\overline{\mathrm{Im}T}$ es un espacio de Hilbert, infinito dimensional y separable entonces tiene una base ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Para cada entero k mayor o igual a 1, sea P_k una proyección ortogonal de $\overline{\mathrm{Im}T}$ sobre el subespacio lineal del espacio generado por la base ortonormal $\mathcal{M}_k = \mathrm{Span}\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$, donde

$$T : X \to \overline{ImT} \subset \mathcal{H}$$

y

$$P_k : \overline{ImT} \subset \mathcal{H} \to \mathcal{M}_k,$$

entonces T compuesta con la P_k son los que llamaremos los T_k

$$T_k = P_k \circ T : X \to \mathcal{M}_k$$

así Im $T_k \subset \mathcal{M}_k$, la imagen es infinito dimensional y por definición T_k es de rango finito.

Sólo falta mostrar que T_k converge a T en $B(X,\mathcal{H})$. Se considera por contradicción, es decir existe $\varepsilon > 0$ tal que $\|T_k - T\| \geq \varepsilon$, para todo $k \in \mathbb{N}$, así existe una sucesión de vectores unitarios $x_k \in X$ tal que

$$\|(T_k - T)x_k\| \geq \varepsilon/2, \ \forall k \in \mathbb{N},$$

como T es compacto y por la Proposición 1.1.$c)$ para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ acotada en X, Tx_n tiene una subsucesión que converge en $\mathcal{H}$. Se considerara la misma sucesión es decir $Tx_n \to y$, para $y \in \mathcal{H}$ ahora se utiliza la representación de la proyección, es decir, si $\mathcal{M}_k$ es un subespacio lineal de $\mathcal{H}$, $\{e_n\}_{n=1}^{j}$ una base ortonormal para $\mathcal{M}_k$ donde $n \in \mathbb{Z}^+$ o infinito y P_k es una proyección de $\mathcal{H}$ sobre $\mathcal{M}_k$,

$$P(a) = \sum_{n=1}^{\infty} < a, e_n > e_n, \text{ para todo} a \in \mathcal{H},$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
(T_k - T)x_k &= (P_k \circ T - T)x_k \\
&= (P_k - I)T x_k \\
&= (P_k - I)(T x_k - y + y), \\
&= (P_k - I)(T x_k - y) + (P_k - I)y \\
&= -(P_k - I)y + (P_k - I)(T x_k - y),
\end{aligned}$$

y que si P es una proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre $\mathcal{M}$, $(P - I)$ es una proyección de $\mathcal{H}$ sobre el $\mathcal{M}^{\perp}$ entonces

$$(T_k - T)x_k = -\sum_{n=k+1}^{\infty} < y, e_n > e_n + (P_k - I)(T x_k - y).$$

Ahora aplicando normas

$$\begin{aligned}
\varepsilon/2 &\leq \|(T_k - T)x_k\| \\
&= \Big\| - \sum_{n=k+1}^{\infty} \langle y, e_n \rangle e_n \Big\| + \|(P_k - I)(Tx_k - y)\| \\
&\leq (\Big\| \sum_{n=k+1}^{\infty} \langle y, e_n \rangle e_n \Big\|^2)^{1/2} + \|(P_k - I)\| \|(Tx_k - y)\| \\
&\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |\langle y, e_n \rangle|^2 + (\|P_k\| \| - I\|)\|Tx_k - y\| \\
&= \sum_{n=k+1}^{\infty} |\langle y, e_n \rangle|^2 + 2\|Tx_k - y\|.
\end{aligned}$$

(La tercera desigualdad es por la desigualdad de Bessel y de Parseval (ver Anexo A2), ya que $\|P_k\| = 1$), lo ultimo converge a 0 cuando $n \longrightarrow \infty$. Lo cual es una contradicción de que no converge, entonces $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a T en $B(X, \mathcal{H})$. □

Lema 1.1. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T \in B(\mathcal{H})$ entonces* $\dim Im(T) = \dim Im(T^*)$. *En particular, si T tiene rango finito si, y sólo si, T^* también tiene rango finito.*

Demostración. Se considera que $\dim \mathrm{Im}(T) < \infty$, para cualquier $x \in \mathcal{H}$, se escribe la descomposición ortogonal sobre el ker T^*

$$x = u + v,$$

donde $u \in (\ker T^*)$ y $v \in (\ker T^*)^{\perp} = \overline{\mathrm{Im} T} = \mathrm{Im} T$ (ya que $\dim \mathrm{Im}(T) < \infty$), aplicando T^* a $x = u + v$ se tiene

$$\begin{aligned}
T^* x &= T^*(u + v) \\
&= T^* u + T^* v,
\end{aligned}$$

como $u \in \ker T^*$ se tiene que $T^* u = 0$ entonces $T^* x = T^* v$ donde $v \in \mathrm{Im} T$, generalizando se tiene que

$$T^*(\mathcal{H}) = \mathrm{Im}\, T^* = T^*(\mathrm{Im}\, T) = T^*(T(\mathcal{H})),$$

implica que $\dim \mathrm{Im}(T^*) \leq \dim \mathrm{Im}(T)$ cuando $\dim \mathrm{Im} T) < \infty$.

Aplicando este resultado al operador adjunto T y sabiendo que $(T^*)^* = T$, entonces

$$\dim \mathfrak{I}((T^*)^*) \leq \dim \mathfrak{I}(T^*).$$

Así se tiene que

$$\dim \mathrm{Im}(T) \leq \dim \mathrm{Im}(T^*).$$

Por lo tanto dim $\mathrm{Im}(T^*) =$ dim $\mathrm{Im}(T)$.

□

El Lema 1.1 también prueba que un rango no puede ser finito y el otro infinito, y también para el caso cuando el rango es infinito.

Teorema 1.5. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T \in B(\mathcal{H})$, entonces T es compacto si, y sólo si, T^* es compacto.*

Demostración. Sea T compacto, entonces por el Teorema 1.3., existe una sucesión de operadores de rango finito $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que la sucesión converge a T. Por el Lema 1.1. cada operador T_n^* es de rango finito, se sabe que $\|T^*\| = \|T\|$, entonces se tiene

$$\|T_n^* - T^*\| = \|T_n - T\| \longrightarrow \infty.$$

Por el Corolario 1.2. se tiene que T^* es compacto.

Recíprocamente, sea T^* compacto, por la anterior demostración tenemos que $(T^*)^*$ es compacto, y como $(T^*)^* = T$ entonces T es compacto.

□

El siguiente Teorema identificará cuando T es invertible.

Teorema 1.6. *Si X es un espacio normado infinito dimensional y $T \in K(X)$ un operador compacto entonces T no es invertible.*

Demostración. Se considera que T es invertible, entonces el Teorema 1.1. el operador identidad $I = T^{-1}T$ en X debe ser compacta. Pero ya que X es infinito dimensional es una contradicción al Ejemplo 2. de la primera sección. Por lo tanto T no es invertible.

□

Se termina este Capítulo introduciendo una clase de operadores que tienen propiedades y aplicaciones interesantes que se verán a continuación.

Definición 1.3. Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert infinito dimensional con una base ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y si $T \in B(\mathcal{H})$. Decimos que T es un *operador de Hilbert - Schmidt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty,$$

Teorema 1.7. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert infinito dimensional y sean $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bases ortonormales de $\mathcal{H}$, $T \in B(\mathcal{H})$.*

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|T^* f_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|T f_n\|^2$, *(donde los valores de estas sumas pueden ser finitos o infinitos). Así la condición para un operador Hilbert - Schmidt no depende de la elección de la base ortonormal de $\mathcal{H}$.*

b) *T es un operador Hilbert-Schmidt, si, y sólo si, T^* es un operador Hilbert- Schmidt.*

c) *Si T es un operador Hilbert- Schmidt entonces T es compacto.*

d) *El conjunto de operadores Hilbert- Schmidt es un subespacio de $B(\mathcal{H})$.*

Demostración. $a)$ Usando $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$, para todo $x \in \mathcal{H}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \langle Te_n, f_m\rangle|^2 \right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, T^* f_m\rangle|^2 \right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \|T^* f_m\|^2.
\end{aligned}$$

Similarmente, también se nuestra que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|Tf_n\|^2=\sum_{m=1}^{\infty}\|T^*f_m\|^2,$$

que proporciona la ecuación del Teorema 1.7.a), se sigue de esta forma que $\sum_{n=1}^{\infty}\|Te_n\|^2<\infty$ si, y sólo si, $\sum_{n=1}^{\infty}\|Tf_n\|^2<\infty$, por ser un operador Hilbert - Schmidt la condición no depende de la base.

b) Se ve en la parte a) poniendo la base $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ igual a $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty}\|Te_n\|^2<\infty$ si, y sólo si, $\sum_{n=1}^{\infty}\|T^*e_n\|^2<\infty$.

c) Usando el Corolario 1.3., ya que $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal que para cualquier $x\in\mathcal{H}$, se puede escribir

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,e_n\rangle e_n,$$

para todo $k\in\mathbb{N}$. Ahora se define un operador $T_k\in B(\mathcal{H})$ por

$$T_kx=T\left(\sum_{n=1}^{k}\langle x,e_n\rangle e_n\right)=\sum_{n=1}^{k}\langle x,e_n\rangle Te_n,$$

claramente $\dim\operatorname{Im}(T_k)\le k$, también para cualquier $x\in\mathcal{H}$ se tiene

$$\begin{aligned}\|(T_k-T)x\|&=\left\|\sum_{n=1}^{k}\langle x,e_n\rangle Te_n-\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,e_n\rangle Te_n\right\|\\&\le\sum_{n=k+1}^{\infty}|\langle x.e_n\rangle|\|Te_n\|\\&\le\left(\sum_{n=k+1}^{\infty}|\langle x,e_n\rangle|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=k+1}^{\infty}\|Te_n\|^2\right)^{1/2}\\&\le\|x\|\left(\sum_{n=k+1}^{\infty}\|Te_n\|^2\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

(Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz para l^2), por lo tanto

$$\|T_k-T\|\le\left(\sum_{n=k+1}^{\infty}\|Te_n\|^2\right)^{1/2}$$

ya que la serie de la derecha converge se tiene $\lim_{k\to\infty}\|T_k-T\|=0$. Por el Corolario 1.2., se tiene que T es compacto.

d) Sea $S,T\in B(\mathcal{H})$ son operadores Hilbert - Schmidt y $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ entonces

$$\sum_{n=k+1}^{\infty}\|\alpha Te_n\|^2=\sum_{n=k+1}^{\infty}|\alpha|^2\|Te_n\|^2<\infty$$

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \|(S+T)e_n\|^2 \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} (\|Se_n\| + \|Te_n\|)^2$$
$$\leq 2\sum_{n=k+1}^{\infty} (\|Se_n\|^2 + \|Te_n\|^2) < \infty.$$

Por lo tanto el conjunto de operadores Hilbert -Schmidt es un subespacio de $B(\mathcal{H})$.

□

Los Teoremas siguientes son los preliminares para el siguiente Capítulo para un $\lambda \neq 0$.

Teorema 1.8. *Sean $T \in K(\mathcal{H})$ e $I \in B(\mathcal{H})$. Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ entonces* $\ker(T-\lambda I)$ *tiene dimensión finita.*

Demostración. Se considerará lo contrario para la demostración. Sea el $\ker(T-\lambda I)$ infinito dimensional, y el núcleo de un operador acotado es cerrado, así se tiene que el $\ker(T-\lambda I)$ es un espacio de Hilbert e infinito dimensional, que contiene una sucesión ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en ker $(T-\lambda I)$.

Ya que $e_n \in \ker(T-\lambda I)$, se tiene que $Te_n = \lambda e_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y como $\lambda \neq 0$ la sucesión $\{e_n\}$ no puede tener una subsucesión convergente (por que si se considera que si converge entonces para $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene $\|e_m - e_n\|^2 = \langle e_m - e_n, e_m - e_n\rangle = 2$. Así cualquier elemento de la forma $\{e_n\}$ todos distan $\sqrt{2}$, en efecto ninguna subsucesión puede ser una sucesión de Cauchy por lo que ninguna subsucesión converge). Por lo tanto, $\ker(T-\lambda I)$ es de dimensión finita. □

Teorema 1.9. *Sean $T \in K(\mathcal{H})$ e $I \in B(\mathcal{H})$. Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ entonces $Im(T-\lambda I)$ es cerrado.*

Demostración. Sea $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Im $(T-\lambda I)$ con $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, donde $y \in \mathrm{Im}\mathcal{H}$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ que $y_n = (T-\lambda I)x_n$ para algún x_n y como $\ker(T-\lambda I)$ es cerrado, x_n tiene una descomposición ortogonal única

$$x_n = u_n + v_n,$$

donde $u_n \in \ker(T-\lambda I), v_n \in (\ker(T-\lambda I))^{\perp}$ ahora se muestra que $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, se supone que $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no esta acotada, se puede suponer que $\|v_n\| = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to N} \|v_n\| = \infty$. Se supone que $w_n = \dfrac{v_n}{\|v_n\|}$ donde $w_n \in \ker(T-\lambda I)^{\perp}$ y $|w_n| = 1$.

(Así la sucesión $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y se evalúa $(T-\lambda I)w_n = \dfrac{(T-\lambda I)v_n}{\|v_n\|} = \dfrac{y_n}{\|v_n\|}$ converge a cero, ya que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotado por que converge). También por la compacidad de T, se puede suponer $\{Tw_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, al combinar este resultado, se sigue que la sucesión $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge por que $\lambda \neq 0$. Por lo tanto, $\mathfrak{I}(T-\lambda I)$ es cerrado. □

Corolario 1.3. *Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ entonces*

$$Im(T-\lambda I) = \ker(T^* - \overline{\lambda} I)^{\perp}$$
$$Im(T^* - \overline{\lambda} I) = \ker(T-\lambda I)^{\perp}.$$

Demostración. Para la demostración del Corolario se usa los Teoremas 1.8. y 1.9., $\ker T = (\mathrm{Im}\, T^*)^{\perp}$ y $\ker T^* = (\mathrm{Im}\, T)^{\perp}$

$$\ker\, T = (\mathrm{Im}\, T^*)^{\perp}, \quad \ker\, T^* = (\mathrm{Im}\, T),$$

se tiene que

$$\ker(T-\lambda I) = (\mathrm{Im}\,(T^* - \overline{\lambda} I))^{\perp}$$

y

$$\ker(\mathrm{Im}(T^* - \overline{\lambda} I) = (\mathrm{Im}(T - \lambda I))^{\perp},$$

entonces

$$\ker(T - \lambda I)^{\perp} = (\mathrm{Im}(T^* - \overline{\lambda} I)),$$

y

$$\ker(\mathrm{Im}(T^* - \overline{\lambda} I)^{\perp} = (\mathrm{Im}(T - \lambda I)).$$

□

$\boxed{\text{CAPÍTULO 2}}$ La alternativa de Fredholm

2.1. Nociones de la Teoría Espectral

En todo este Capítulo, $\mathcal{H}$ será un espacio de Hilbert complejo, esto para poder estudiar el espectro de un $T \in K(\mathcal{H})$. Si $\mathcal{H}$ es finito dimensional, entonces se sabe que el espectro $\sigma(T)$ consiste en una colección finita no vacía de autovalores, cada uno de los cuales tiene una multiplicidad finita.

Para operadores en general, en espacios de dimensión infinita, el espectro puede ser muy diferente, pero para operadores compactos el espectro tiene muchas similitudes con el caso de dimension finita. Específicamente, se mostrará que si $\mathcal{H}$ es de dimensión infinita, entonces el $\sigma(T)$ consiste en una colección contable de autovalores no ceros con una multiplicidad finita.

Definición 2.1. Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y si $S \in B(\mathcal{H})$, definimos el espectro de T como:

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \textit{ no es invertible}\},$$

el espectro puntual de T;

$$\sigma_p(T) = \{\lambda : \lambda \textit{ es un autovalor de } T\};$$

y el conjunto resolvente como:

$$\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T) \tag{2.1.1}$$

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T \setminus \lambda I \textit{ es invertible}\}. \tag{2.1.2}$$

Se comienza la discusión de $\sigma(T)$ para un $\lambda = 0$.

Teorema 2.1. *a) Si $\mathcal{H}$ es infinito dimensional, entonces $0 \in \sigma(T)$.*

b) Si $\mathcal{H}$ no es separable, entonces $0 \in \sigma_p(T)$.

c) Si $\mathcal{H}$ es separable, entonces se tiene $0 \in \sigma_p(T)$ o $0 \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$.

Demostración. $a)$ Sea tiene $0 \in \rho(T)$, entonces T sería invertible; sin embargo, ya que $\mathcal{H}$ es infinito dimensional esto contradice el Teorema 1.9, por lo que tenemos que $0 \in \sigma(T)$.

$b)$ Ya que $\mathcal{H}$ no es separable se sigue del Teorema 1.3 se deduce que $\overline{ImT} \neq \mathcal{H}$; así,

$$\ker T = \overline{ImT}^{\perp} \neq \{0\},$$

por lo tanto, existe $e \neq 0$ Talque $Te = 0$ donde e es un autovector de T con autovalor 0, por definición se tiene $0 \in \sigma_p(T)$.

$c)$ Si $\mathcal{H}$ es separable entonces por el Teorema 1.3 se tiene que $\overline{ImT} = \mathcal{H}$ y como 0 no esta en $\sigma_p(T)$ así no es un autovalor, y $\overline{ImT}$ es infinito dimensional por $a)$ se deduce que $0 \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$. Ahora si 0 no esta en $\sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$, la ecuación $Ta - 0a = 0$ es invertible entonces la ecuación tiene soluciones distinta de cero así se deduce que 0 es un autovalor de T por tanto $0 \in \sigma_p(T)$. □

Ahora se discutirá la estructura de la parte no cero de $\sigma(T)$ y $\sigma(T^*)$, los resultados para T se aplicarán también para T^*.

Teorema 2.2. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y T un operador lineal. Para cualquier $t > 0$ el conjunto de todos los autovalores distintos λ de T con $|\lambda| \geqslant t$ es finito.*

Demostración. Se considera que para algún $t_0 > 0$, donde $\{\lambda_n\}$ es una sucesión de autovalores con $|\lambda_n| \geqslant t_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, sea $\{e_n\}$ la sucesión unitaria con autovalores correspondientes. Se construye por inducción, en particular, la sucesión de vectores unitarios $\{y_n\}$, sea $y_1 = e_1$, se considera ahora cualquier entero $k \geqslant 1$. Como los autovalores son todos distintos entonces el conjunto de autovectores correspondiente a cada autovalor $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ es linealmente independiente. Así el conjunto $\mathcal{M}_k = Span\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ es $k-$ dimensional y esta contenido en un espacio de Hilbert, entonces $\mathcal{M}_k$ es cerrado, para cualquier $a \in \mathcal{M}_k$ puede ser escrito como

$$a = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_{k-1} e_{k-1} + \alpha_k e_k,$$

se tiene

$$\begin{aligned}
(T - \lambda_k I)a &= (T - \lambda_k I)\alpha_1 e_1 + ... + (T - \lambda_k I)\alpha_{k-1} e_{k-1} + (T - \lambda_k I)\alpha_k e_k \\
&= \alpha_1 T e_1 - \lambda_k \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_{k-1} T e_{k-1} - \lambda_k \alpha_{k-1} e_{k-1} + \alpha_k T e_k - \lambda_k \alpha_k e_k \\
&= \alpha_1 \lambda_1 e_1 - \lambda_k \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} e_{k-1} - \lambda_k \alpha_{k-1} e_{k-1} + \alpha_k \lambda_k e_k - \lambda_k \alpha_k e_k \\
&= \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k) e_1 + ... + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) e_{k-1},
\end{aligned}$$

y así si $a \in \mathcal{M}_k$ donde

$$(T - \lambda_k I)a \in \mathcal{M}_{k-1}.$$

Similarmente si $a \in \mathcal{M}_k$ entonces

$$Ta \in \mathcal{M}_k.$$

Se sigue, $\mathscr{M}_k$ es un subespacio cerrado de $\mathscr{M}_{k+1}$ y no es igual a $\mathscr{M}_{k+1}$. Si el complemento ortogonal de $\mathscr{M}_k$ en $\mathscr{M}_{k+1}$ es un subespacio lineal no trivial de $\mathscr{M}_{k+1}$ talque $\langle y_{k+1}, a\rangle = 0$, para todo $a \in \mathscr{M}_k$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\|y_{k+1} - a\|^2 &= \langle y_{k+1} - a, y_{k+1} - a\rangle \\
&= \langle y_{k+1} - a, y_{k+1}\rangle + \langle y_{k+1} - a, -a\rangle \\
&= \langle y_{k+1}, y_{k+1}\rangle + \langle -a, y_{k+1}\rangle + \langle y_{k+1}, -a\rangle + \langle -a, -a\rangle \\
&= \langle y_{k+1}, y_{k+1}\rangle + \langle -a, -a\rangle - 2\langle a, y_{k+1}\rangle \\
&\geq 1
\end{aligned}$$

esto es

$$\|y_{k+1} - a\| \geq 1.$$

Se repite este proceso inductivamente, se construye una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, si ahora se sigue de la construcción de las sucesiones $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, para cualquier entero m, n con $n > m$

$$\begin{aligned}
\|Ty_n - Ty_m\| &= |\lambda_n|\|y_n - \lambda_n^{-1}[-(T-\lambda_n)y_n + Ty_m]\| \\
&\geq |\lambda_n| \\
&\geq t_0,
\end{aligned}$$

esto muestra que la sucesión $\{Ty_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no puede tener una subsucesión convergente, lo cual contradice la compacidad de T .

□

Si se toma la unión finita del conjunto de los autovalores λ con $|\lambda| \geqslant r^{-1}$, $r = 1, 2, \ldots$ obtenemos el siguiente Corolario del Teorema 2.2.

Corolario 2.1. *El conjunto* $\sigma_p(T)$ *a lo sumo es infinitamente contable. Si* $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es cualquier sucesión de autovalores distintos de* T *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

Demostración. Como $\sigma_p(T)$ es a lo sumo infinitamente contable, entonces existe una correspondencia uno a uno con los $\mathbb{N}$ y por el Teorema 2.2 la sucesión $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 cuando n tiende al infinito.

□

Es posible para un operador compacto T en un espacio infinito dimensional no todos tienen autovalores como se vera en las demostraciones de la siguiente sección .

2.2. La Alternativa de Fredholm

Ahora se demostrará que para cualquier operador compacto $T \in B(X, Y)$, todos los puntos no nulos de $\sigma(T)$ deben ser autovalores. Ya que T^* también es compacto, sea $\lambda \notin T - \lambda I$ que $T - \lambda I$ es invertible entonces $(T - \lambda I)^* = (T^* - \overline{\lambda} I)$ es invertible, entonces $\overline{\lambda} \notin T^* - \overline{\lambda} I$ y viceversa, así $\sigma(T^*) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}$, se sigue que si $\lambda = 0$ es un autovalor de T entonces λ es un valor propio de T^*. También se mostrará que estos autovalores tienen igual multiplicidad finita. Estos resultados son estándar en el entorno finito-dimensional. Para el caso de infinito-dimensional en dos pasos:

a) Se considera a los operadores de rango finito y reduce el problema al caso de finito-dimensional.

b) Se considera a los operadores compactos en general y reduce el problema al caso del rango finito.

La siguiente notación será de utilidad para las demostraciones a continuación.
Sea $A \in B(X)$, $B \in B(Y,X)$, $C \in B(X,Y)$ y $D \in B(Y)$. Se puede definir un operador $M \in B(X \times Y)$ por

$$M(x,y) = (Ax + By, Cx + Dy),$$

donde el operador puede ser escrito en matrices

$$M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{2.2.1}$$

Así, se utilizará reglas de multiplicación de matrices estándar de dos por dos, aunque los elementos de matrices sean operadores o vectores, esto es valido siempre y cuando se mantenga el orden de los mismos.

Lema 2.1. *Si T tiene rango finito y $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ entonces cumple una de las condiciones:*

a) $\lambda \in \rho(T)$ *y* $\overline{\lambda} \in \rho(T^*)$ *; o*

b) $\lambda \in \sigma_p(T)$ *y* $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$.

Además $n(T - \lambda I) = n(T^* - \lambda I) < \infty$.

Demostración. Se sabe que ker T = (Im $T^*)^{\perp}$, ker T^* = (Im $T)^{\perp}$, ahora sea E =Im T y F = ker T^*, ya que E es finito - dimensional cerrado pues $T \in F(\mathcal{H})$, así para cualquier $x \in \mathcal{H}$ se tiene una descomposición ortogonal

$$x = u + v, \text{ donde } u \in E, \ \ v \in F.$$

Por esta descomposición podemos identificar cualquier $x \in \mathcal{H}$ con un único elemento $(u,v) \in E \times F$ y viceversa. (Alternativamente esto muestra que el espacio $\mathcal{H}$ es isométricamente isomorfo al espacio $E \times F$.)

Considerando que

$$\begin{aligned} \varphi : & E \times F \to \mathcal{H} \\ & (u,v) \to u + v, \end{aligned}$$

también

$$(T - \lambda I)(u + v) = Tu - \lambda u + Tv - \lambda v,$$

donde $Tu - \lambda u + Tv \in E$ y $\lambda v \in F$, así se puede expresar el operador $(T - \lambda I) \in (E, F)$ en matriz

$$(T - \lambda I) \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (T - \lambda I)|_E & T|_F \\ 0 & -\lambda I|_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

donde se denota las restricciones de los operadores $T - \lambda I$, T e I se tiene $(T - \lambda I)|_E \in B(E)$, $T|_F \in (F, E)$ y $I|_F \in B(F)$. Se escribe $A = (T - \lambda I)|_E$, A es inyectiva si solo si $A(x) = 0$ tiene solución $x = 0$, equivalente ker $A = \{0\}$ o dim ker$(A) = 0$, ahora si A es sobreyectiva si solo si Im $T = W$, si dim F

es finito, es equivalente a $\dim \mathrm{Im}(A) = \dim F$. Por último si, A es biyectivo entonces A es invertible y $n(A) = 0$ o $n(A) > 0$.

Así, $T - \lambda I$ es invertible.

Si se toma $B = T|_F$, $C = 0$, $D = -\lambda I|_F$ y $M_1 = (T - \lambda I)$

$$M_1 = \begin{bmatrix} A & T|_F \\ 0 & -\lambda I|_F \end{bmatrix},$$

como A es invertible es decir que existe A^{-1},

$$\begin{bmatrix} A & T|_F \\ 0 & -\lambda I|_F \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-\lambda I|_F\, A}\begin{bmatrix} -\lambda I|_F & -T|_F \\ 0 & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -T|_F A^{-1} \\ 0 & \lambda I|_F \end{bmatrix} = M^{-1},$$

así

$$M_1 \times M_1^{-1} = M_1^{-1} \times M_1 = I.$$

Por lo tanto, M_1 es invertible; entonces $T - \lambda I$ es invertible o $n(T - \lambda I) = n(A) > 0$, se tiene que

$$\rho(T) = \{\lambda : T - \lambda I \textit{ es invertible}\} = \mathbb{C} \setminus \sigma(T),$$

así $\lambda \in \rho(T)$, caso contrario si $T - \lambda I$ no es invertible entonces $\lambda \in \sigma_p(T)$, ahora se tiene P_E y P_F proyecciones ortogonales de $\mathcal{H}$ sobre E y F, se utilizará $I = P_E + P_F$, donde por Teorema de linealidad y como $F = \operatorname{Ker} T^*$ donde $u \in E$ y $v \in F$ se tiene

$$\begin{aligned}
(T^* - \overline{\lambda} I)(u + v) &= (T^* - \overline{\lambda} I)u + (T^* - \overline{\lambda} I)v \\
&= T^* u - \overline{\lambda} I u + T^* v - \overline{\lambda} I v. \\
I(T^* - \overline{\lambda} I)(u + v) &= (P_E + P_F)(T^* u - \overline{\lambda} I u - \overline{\lambda} I v) \\
&= P_E T^* u - P_E \overline{\lambda} I u - P_E \overline{\lambda} I v + P_F T^* u - P_F \overline{\lambda} I u - P_F \overline{\lambda} I v \\
&= P_E (T^* - \overline{\lambda} I) u - \overline{\lambda}(P_E + P_F) v + P_F T^* u - \overline{\lambda} P_F u,
\end{aligned}$$

Si $P_F u$ no existe entonces

$$I(T^* - \overline{\lambda} I)(u + v) = P_E (T^* - \overline{\lambda} I) u + P_F T^* u - \overline{\lambda} v,$$

se usa una matriz similar para hacer una demostración similar a lo anterior

$$(T^* - \overline{\lambda} I)\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_E (T^* - \overline{\lambda} I)|_E & 0 \\ P_E T^*|_E & -\overline{\lambda} I|_F \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

se cambia $P_E(T^* - \overline{\lambda} I|_E) = A^*$, sean $u, v \in E$ donde $P^2 = P$ y es autoadjunto

$$\langle Au, v\rangle = \langle (T - \lambda I)|_E\, u, v\rangle \quad = \langle u, (T^* - \overline{\lambda} I)|_E\, v\rangle = \langle P_E u, (T^* - \overline{\lambda} I)|_E\, v\rangle \langle u, A^* v\rangle \quad = \langle u, P_E (T^* - \overline{\lambda} I)|_E\, v\rangle,$$

donde

$$M_2 = (T^* - \overline{\lambda} I)\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* & 0 \\ P_E T^*|_E & -\overline{\lambda} I|_F \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Del mismo modo que se hizo con la primera matriz, para M_2 se tiene

$$M_2^{-1} = \begin{bmatrix} (A^*)^{-1} & 0 \\ P_E T^*|_E (A^*)^{-1} & I|_E \end{bmatrix},$$

y se tiene que

$$M_2 \times M_2^{-1} = M_2^{-1} \times M_2 = I,$$

por tanto, $T^* - \overline{\lambda} I$ es invertible y se llega como en el resultado anterior que $\overline{\lambda} \in \rho(T)$ y si no es invertible se tiene que $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T)$, se cambio $E = \text{Im } T$ y es infinito dimensional, un resultado lineal muestra que dim Im(A) = dim Im (A^*), es decir $(\text{Im } A)^{\perp} = \ker(A^*)$ y $(\text{Im } A^*)^{\perp} = \ker A$, se tiene que dim Im$(A)^{\perp}$ =dim Im$(A^*)^{\perp}$ entonces dim(ker A^*) = dim (ker A), y se puede ver que si $(T - \lambda I)$ y $(T * - \overline{\lambda} I)$ son invertibles, entonces $\lambda \in \rho(T)$ y $\overline{\lambda} \in \rho(T^*)$, pero si no son invertible entonces $\lambda \in \sigma_p(T)$ y $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$.
Además que

$$\dim \ker(T - \lambda I) = \dim \ker(T^* - \overline{\lambda} I)$$

□

Ahora se extenderá el resultado del Lema 2.1 a un caso general de un operador compacto T.

Teorema 2.3. *Si T es compacto y $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces se tiene:*

a) $\lambda \in \rho(T)$ *y* $\overline{\lambda} \in \rho(T^*)$ *; o*

b) $\lambda \in \sigma_p(T)$ *y* $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$.

Además, $n(T - \lambda I) = n(T^* - \lambda I) < \infty$.

Demostración. Por el Lema 2.1 sabemos que si $T \in F(\mathcal{H})$ cumple a) o b). Por el Teorema 1.4 , para $T \in K(\mathcal{H})$ entonces existe una sucesión de operadores de rango finito $\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ que converge a T en $B(\mathcal{H})$.
Sea T_k en $\mathcal{H}$ con

$$\begin{aligned}
\|\lambda^{-1}(T - T_k)\| &< \frac{1}{2} \\
\|\lambda^{-1}(T - T_k)\| = |\lambda^{-1}| \|T - T_k\| &< \frac{1}{2} \\
\|T - T_k\| &< \frac{|\lambda|}{2} 1.
\end{aligned}$$

Por teorema A 3 (ver anexo), si $\lambda^{-1}(T - T_k) \in B(\mathcal{H})$ y como $\| \lambda^{-1} (T - T_k) \| < \frac{1}{2} < 1$, entonces $I - \lambda^{-1}(T - T_k)$ es invertible y por el Lema 2.1 se tiene que $(I - \lambda^{-1}(T - T_k))^*$ es invertible, donde $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ se llama a $I - \lambda^{-1}(T - T_k) = S$ y S^* son invertibles

$$\begin{aligned}
\lambda^{-1}(T - T_k) = I - S \quad &\text{entonces} \quad T - T_k = \lambda(I - S) = \lambda I - \lambda S \\
&\text{entonces} \quad T - \lambda I = T_k - \lambda S = (T_k S^{-1} - \lambda I) S,
\end{aligned}$$

ahora $G = T_k S^{-1}$, se ve que $T - \lambda I = (G - \lambda I) S$ y lo mismo para $T^* - \overline{\lambda} I = (G^* - \overline{\lambda} I) S^*$, ya que S y S^* son invertibles se sigue que $T - \lambda I$ y $T^* - \overline{\lambda} I$ son invertibles si, y sólo si, $G - \lambda I$ y $G^* - \overline{\lambda} I$ son invertibles y dim Im$(T - \lambda I)$ = dim Im$(G - \lambda I)$, ya que $S \in B(\mathcal{H})$ es decir $G - \lambda I \in B(\mathcal{H})$, donde se sabe que S es invertible y como $T - \lambda I = (G - \lambda I) S$.

Ahora, si $G-\lambda I$ es invertible, entonces $S^{-1}(G-\lambda I)^{-1}$ es un inverso acotado para $T-\lambda I$, así $T-\lambda I$ es invertible, se tiene el mismo argumento para la demostración de $G-\lambda I=(T-\lambda I)S^{-1}$ si $T-\lambda I$ es invertible entonces $G-\lambda I$ es invertible, así se tiene que si $T-\lambda I$ es invertible si, y sólo si, $G-\lambda I$. Ahora si la $\dim\ker(T-\lambda I)=n(T-\lambda I)$ y $\dim\ker(G-\lambda I)=n(G-\lambda I)$, sea $x\in\ker(T-\lambda I)$ si, y sólo si, $Sx\in\ker(G-\lambda I)$ entonces el resultado se deduce de la invertibilidad de S, así se tiene que $n(T-\lambda I)=n(G-\lambda I)$.

Ya que $\operatorname{Im} G\subset\operatorname{Im} T_k$ el operador G tiene rango finito, así que los primeros resultados del Teorema se desprenden del Lema 2.1. □

Se considera las siguientes ecuaciones

$$(T-\lambda I)x=0, \quad (T^*-\overline{\lambda}I)y=0, \tag{2.2.2}$$

$$(T-\lambda I)x=p, \quad (T^*-\overline{\lambda}I)y=q, \tag{2.2.3}$$

(las ecuaciones de (2.2.2) son llamadas ecuaciones homogéneas y las ecuaciones de (2.2.3) son llamadas ecuaciones no homogéneas). El resultado del Teorema 2.3 junto al Corolario 1.3, se puede replantear en términos de la existencia de las soluciones de estas ecuaciones.

Teorema 2.4. *(**La Alternativa de Fredholm**). Si $\lambda\in\mathbb{C}-\{0\}$ y $T\in K(\mathcal{H})$, entonces solo vale una:*

a) Las ecuaciones homogéneas (2.2.2) tiene soluciones triviales $x=0$ e $y=0$, mientras que las ecuaciones no homogéneas (2.2.3) tiene una solución para cualquier $p,\ q\in\mathcal{H}$.

b) Existe un número finito de $m_\lambda>0$ (donde m_λ es la multiplicidad) talque cada ecuación homogénea (2.2.2) tiene exactamente m_λ soluciones linealmente independientes, es decir que $x_n,\ y_n$ donde $n=1,2,....,m_\lambda$ respectivamente, mientras lo que corresponde a las ecuaciones no homogénea (2.2.3) tiene solución si y solo si $p,\ q\in\mathcal{H}$ satisface la condición

$$\langle p,\ y_n\rangle=0,\ \ \langle q,\ x_n\rangle=0 \text{ para } n=1,2,...,m_\lambda$$

Demostración. $a)$ Por el Teorema 2. 3 $a)$, $\lambda\in\rho(T)$ y $\overline{\lambda}\in\rho(T^*)$, por la Definición 2. 1 entonces $T-\lambda I$ es invertible donde para las ecuaciones homogéneas se tiene $x=(T-\lambda I)^{-1}(0)$ y $y=(T^*-\overline{\lambda}I)^{-1}(0)$ entonces $x=0$ y $y=0$.

Para las ecuaciones no homogéneas se tiene $x=p(T-\lambda I)^{-1}$ y $y=q(T^*-\lambda I)^{-1}$ así se deduce que es la única solución de x e y para cualquier p y q de $\mathcal{H}$.

$b)$ Para las ecuaciones homogéneas, el Teorema 2.3$b)$, $\lambda\in\sigma_p(T)$ y $\overline{\lambda}\in\sigma_p(T^*)$ por la Definición 2.1 λ es un autovalor de T y $\overline{\lambda}$ en un autovalor de T^* entonces la ecuación $T(x)=\lambda x$ y $T^*(y)=\overline{\lambda}y$ tienen soluciones distintas de cero para $x,\ y\in\mathcal{H}$ y la multiplicidad de λ y $\overline{\lambda}$ es el número $m_\lambda=n(T-\lambda I)$ y $m_\lambda=n(T^*-\overline{\lambda}I)$ respectivamente, cada uno de ellos son linealmente independientes.

Se sigue que $\mathcal{H}=(\operatorname{Im} T)\oplus(\operatorname{Im} T)^\perp$ donde $(\operatorname{Im} T)^\perp=\ker T^*$ y $\ker T=(\operatorname{Im} T^*)^\perp$, para las ecuaciones no homogéneas tiene soluciones entonces $p,q\in\mathcal{H}$ satisface la condición $\langle p,\ y_n\rangle=0$, $\langle q,\ x_n\rangle=0$ para $n=1,2,...,m_\lambda$.

Se sabe que $p\in\operatorname{Im}(T-\lambda I)$, pero $y_i\in\ker(T^*-\overline{\lambda}I)=(\operatorname{Im}(T-\lambda I))^\perp$ entonces $\langle p,y_i\rangle=0$ lo mismo para $\langle q,x_i\rangle=0$.

Ahora, si $\langle p,\ y_i\rangle=0$ y $\langle q,\ x_i\rangle=0$ entonces las ecuaciones (2.2.3) tiene soluciones, así

$$y_i\in\ker(T^*-\overline{\lambda}I) \text{ y } p\in(\ker(T^*-\overline{\lambda}I))^\perp=\mathfrak{I}(T-\lambda I),$$
$$x_i\in\ker(T-\lambda I) \text{ y } p\in(\ker(T-\lambda I))^\perp=\mathfrak{I}(T^*-\overline{\lambda}I)$$

entonces es las soluciones de las ecuaciones (2.2.3) existe.

□

La dicótomia expresada en el Teorema 2.4, entre la solución única de la ecuación y la resolución si, y sólo si, un conjunto finito de condiciones se cumple a menudo es llamado la **Alternativa de Fredholm**.

La dicótomia fue descubierto por Fredholm en su investigación de ciertas ecuaciones integrales que dan lugar a ecuaciones (2.2.2) y (2.2.3) con operadores integrales compactos, donde se vera más generalizado en el Capítulo 3 así el operador $T-\lambda I$ en las ecuaciones (2.2.2.) y (2.2.3) es reemplazado por un operador S se dice que satisface la Alternativa de Fredholm, si las nuevas ecuaciones satisfacen nuevamente el Teorema 2.4. Una característica particularmente importante de la alternativa de Fredholm es la siguiente reexpresión de alternativa a) del Teorema 2.4.

Corolario 2.2. *Si* $\lambda \in \mathbb{C}-\{0\}$ *y la ecuación*

$$(T-\lambda I)x = 0, \tag{2.2.4}$$

tiene solución $x=0$*, entonces* $T-\lambda I$ *es invertible, y la ecuación*

$$(T-\lambda I)x = p, \tag{2.2.5}$$

tiene única solución $x=(T-\lambda I)^{-1}p$ *para cualquier* $p\in\mathcal{H}$. *Esta solución depende continuamente de p*

Demostración. La hipótesis asegura que λ no es un autovalor de T, entonces por el inciso a) de la Alternativa de Fredholm $\lambda \in \rho(T)$, por lo tanto $T-\lambda I$ es invertible, y así se puede deducir que la ecuación $(T-\lambda I)x = p$ que tiene una única solución de la forma $x=(T-\lambda I)^{-1}p$ para cualquier $p\in\mathcal{H}$.

□

En esencia, el Corolario 2.2 establece que "la singularidad de las soluciones de la ecuación (2.2.5) implica la existencia de soluciones". Este es el resultado extremadamente útil, en muchas aplicaciones es relativamente fácil probar la unicidad de la solución de la ecuación dada. La ecuación tiene la forma de la ecuación (2.2.5) y se sabe que el operador T es compacto entonces podemos inmediatamente deducir la existencia de una solución.

Muchos problemas en aplicaciones matemáticas pueden ser reducidas a resolver una ecuación de la forma.

$$R\ u = f$$

para algún operador lineal R y alguna función dada f. En orden para que esta ecuación sea un modelo razonable de una situación física, debe tener ciertas propiedades Hadamard propuso la siguiente definición.

Definición 2.2. La ecuación $R\ u = f$ (o el núcleo físico correspondiente) se dice que esta **bien planteado** si, las siguientes propiedades se mantienen:

a) Una solución u existe para cada f.

b) La solución u es única para cada f.

c) La solución u depende continuamente de f en un sentido adecuado.

La motivación para la propiedad $a)$ y $b)$ es bastante clara. El modelo no sera muy útil si no existen soluciones o si hay varias soluciones. La tercera propiedad esta motivada por el hecho de que en cualquier solución física el dato f no se conocerá con precisión, por lo que es deseable que pequeñas variaciones en los datos no produzca grandes variaciones en la solución predicha. Sin embargo, las declaraciones de las propiedades $a) - c)$ en la Definición 2.2 son bastante vagos.

Por ejemplo, que significa "para cada f y que en un sentido adecuado"para la dependencia continua de la solución. Estas propiedades se hacen generalmente más precisa por la elección, por ejemplo, adecuados espacios normados o de Banach X, Y y un operador adecuado $R \in B(X, Y)$ con los que representan el problema. El espacio Y generalmente incorpora características deseable de los datos que esta siendo modelado, mientras X incorpora correspondientes características deseables de la solución que se buscan. En una configuración tal, es claro que la ecuación $Ru = f$ de la definición esta bien planteado es equivalente al operador R siendo invertible y esto es a menudo demostrado usando el Corolario 2.2.

$\boxed{\text{CAPÍTULO } 3}$

Ecuaciones Integrales y Diferenciales

3.1. Ecuación Integral de Fredholm

Ahora se trabajará con los operadores integrales que actúan en el espacio de Banach $X = C[a, b]$ donde $a,\ b \in \mathbb{R}$; sin embargo, se considera el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = L^2[a, b]$ donde para el propósito del trabajo se considera el espacio de Hilbert en lugar del espacio de Banach y así todo lo que se hizo en el Capítulo 2 y se denotará al producto interno usual $\langle f, g\rangle = \int_a^b |f * g|^2 d\lambda$ en $L^2[a, b]$. Sin embargo, las normas se distinguiera por $\|\cdot\|_{\mathcal{H}},\ \|\cdot\|_X$ respectivamente.

Se define los conjuntos

$$R_{a,b} = [a, b] \times [a, b] \subset \mathbb{R}^2 \text{ es un rectángulo en } \mathbb{R}^2$$

$$\triangle_{a,b} = \{(s, t) \in R_{a,b} : t \leqslant s\} \text{ es un triángulo en } R_{a,b}$$

Dado $k : R_{a,b} \to \mathbb{C}$ continuo, para cada $s \in [a, b]$ se define

$$\begin{aligned} k :\, & R_{a,b} \to \mathbb{C} \\ & (s, t) \mapsto k(s, t) = k_s(t) \quad t \in [a, b], \end{aligned}$$

es decir, que $k_s \in X$ también es continua, se define números $M,\ N$ por

$$M = \max\{|k(s, t)| : (s, t) \in R_{a,b}\},$$

$$\begin{aligned} N^2 &= \int_a^b \int_a^b |k(s, t)|^2 ds\, dt \\ &= \int_a^b \left(\int_a^b |k(s, t)|^2 dt \right) ds \\ &= \int_a^b \|k_s\|_{\mathcal{H}}^2 ds \end{aligned}$$

Ahora para cualquier $u \in \mathcal{H}$ definimos una función

$$\begin{aligned} f &: [a,b] \to \mathbb{C} \\ s &\mapsto f(s) = \int_a^b k(s,t)u(t)dt \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Lema 3.1. *Para cualquier $u \in \mathcal{H}$, la función f definida por la ecuación 3.1.1 pertenece a $X \subset \mathcal{H}$. Además*

$$\|f\|_X \leq M(b-a)^{1/2}\|u\|_{\mathcal{H}} \tag{3.1.2}$$

$$\|f\|_{\mathcal{H}} \leq N\|u\|_{\mathcal{H}} \tag{3.1.3}$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y $s \in [a,b]$, se elige un $\delta > 0$ y que sea a y $b \in \mathbb{R}$ y como $k_s \in X$ función continuo y también está en $\mathcal{H}$, se tiene a M definido como un número, se recuerda que $\|u\|_{\mathcal{H}} = (\int_a^b |u|^2)^{1/2}$. $R_{a,b}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y como $R_{a,b}$ es cerrado y acotado entonces k_s es uniformemente continuo y por eso existe un $\delta > 0$ talque si $|s-s'| < \delta$ para cualquier $s' \in [a,b]$ entonces $\|k_s(t) - k_{s'}(t)\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon$, para todo $t \in [a,b]$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} |f(s) - f(s')| &= \left| \int_a^b k(s,t)u(t)dt - \int_a^b k(s',t)u(t)dt \right| \\ &= \left| \int_a^b (k(s,t) - k(s',t))u(t)dt \right| \\ &\leqslant \int_a^b |k(s,t) - k(s',t)||u(t)|dt \\ &= \left(\left(\int_a^b |k(s,t) - k(s',t)||u(t)|dt \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\leqslant \left(\int_a^b |k(s,t) - k(s',t)|^2 |u(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\ &= \|k_s - k_{s'}\|_{\mathcal{H}} \|u\|_{\mathcal{H}} \\ &= \left(\int_a^b |k(s,t) - k(s',t)|^2 dt \right)^{1/2} \|u\| \\ &= \left(\int_a^b \varepsilon^2 \, dt \right)^{1/2} \\ &\leqslant \varepsilon(b-a)^{1/2}\|u\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Para la demostración se usa la desigualdad de Cauchy y la norma de $\mathcal{H}$. Un cálculo similar muestra que,

$$|f(s)| \leqslant \int_a^b |k(s,t)||u(t)| \, dt \leqslant \|k_s\|_{\mathcal{H}} \|u\|_{\mathcal{H}},$$

se sabe que la norma en X es $\|f\|_X = \sup\{|f(s)| : s \in [a,b]\}$ se tiene que

$$|k_s(t)| = |k(s,t)| \leqslant sup\{k(s,t) : \; s, \, t \in R_{a,b}\} = M,$$

así

$$
\begin{aligned}
\|k_s\|_{\mathcal{H}} &= \left(\int_a^b |k_s(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} \\
&\leqslant \left(\int_a^b M^2 \, dt \right)^{1/2} \\
&= M \left(\int_a^b dt \right)^{1/2},
\end{aligned}
$$

justamente, $\|f\|_X \leqslant M(b-a)^{1/2}\|u\|_{\mathcal{H}}$. Ahora, siendo $|f(s)| \leqslant \|k_s\|_{\mathcal{H}}\|u\|_{\mathcal{H}}$ y elevando al cuadrado e integrando se tiene

$$
\int_a^b |f(s)|^2 ds \leqslant \|u\|_{\mathcal{H}}^2 \int_a^b \|k_s\|_{\mathcal{H}}^2 ds.
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\|f\|^2 &\leqslant N^2 \|u\|_{\mathcal{H}}^2, \\
\|f\| &\leqslant N \|u\|_{\mathcal{H}},
\end{aligned}
$$

se concluye con las normas de f en X y en $\mathcal{H}$.

□

Por el Lema 3.1 ahora se puede definir un operador $K : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ poniendo $K u = f$ para cualquier $u \in \mathcal{H}$, donde f es definido por la ecuación 3.1.1 donde se puede ver que K es lineal y por el Lema 3.1, $\|K\|_{\mathcal{H}}$ es acotado.

El operador K es llamado un *Operador Integral de Fredholm* (o simplemente un *Operador Integral*) y la función k es llamada el núcleo o *kernel* del operador K, este es un uso diferente al kernel a su uso habitual, pero este nuevo kernel esta bien definido y sólo se utilizará para este sentido del operador integral.

Si se considera a f como conocido y u como desconocido, entonces la ecuación 3.1.1 es llamada ecuación integral. De hecho, este tipo de ecuación se conoce como una ecuación integral de Fredholm y tiene la forma.

$$
f(s) = u(s) - \mu \int_a^b k(s,t)u(t)dt, \quad s \in [a,b], \tag{3.1.4}
$$

donde $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, las ecuaciones 3.1.1 y 3.1.4 se pueden escribir de la forma de operador como

$$
ku = f, \tag{3.1.5}
$$

$$
(I - \mu K)u = f. \tag{3.1.6}
$$

A continuación se verá que existe una teoría extensa y satisfactoria de la capacidad de resolución de ecuaciones de segundo tipo, basados en el Capitulo 2, mientras que la teoría de ecuaciones de primer tipo es considerablemente menos satisfactoria.

Observación 3.1 En $L^2[a,b]$ se puede establecer que no es necesario que el kernel k sea una función continua. Suponiendo que k es cuadrado integrable en la $R_{a,b}$ bastaría para los resultados a continuación, sin embargo, el Lema 3.1 no seria cierto y se requería la medida de Lebesgue y la Teoría de integración de lo que se ha hecho en las materias de pregrado incluso demostrar que la ecuación 3.1.1 define una función medible f en este caso. También, sería más difícil de justificar diversas manipulaciones de integrales que se realizaran a continuación.

Dado que todas nuestras aplicaciones tendrán kernel continuos, evitaremos estas dificultades puramente teóricas de medida asumiendo que k es continuo en todo el trabajo. La Teoría de integración estándar de Riemman será suficiente, esta suposición también tiene un beneficio positivo a continuación que sería falso en general para núcleos en L^2 y que fortalecerá algunos resultados en las siguientes secciones sobre ecuaciones diferenciales. Una de las propiedades más importantes de K es que es compacto. Una vez que hayamos demostrado esto, podemos aplicar la Teoría del Capítulo 2 al operador K y a las ecuaciones 3.1.5 y 3.1.6.

Teorema 3.1. *El operador integral $K : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es compacto.*

Demostración. Para demostrar que K es compacto, se demostrara que el operador es Hibert Schmidt y así se concluirá que que K es compacto. Sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$ (tal base existe por que $L^2[a,b]$ es infinito dimensional y separables), para cada $s \in [a,b]$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$(K e_n)(s) = \int_a^b k(s,t)e_n(t)dt = \langle k_s, \overline{e_n}\rangle.$$

donde $\overline{e_n}$ es el conjugado complejo de e_n. Por el Teorema donde la $\{\overline{e_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión ortonormal es también una base ortonormal y

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \|K e_n\|_{\mathcal{H}}^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_b^a |k_s, \overline{e_n}|^2 ds \\ &= \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} |k_s, \overline{e_n}|^2 ds \\ &= \int_a^b \|k_s\|_{\mathcal{H}}^2 ds < \infty,\end{aligned}$$

en efecto, se puede ver en la segunda línea de la demostración se debe al Lema 3.1 que cada término $|(k_s, e_n)|^2$ es continuo en s y no negativo y después la desigualdad de Cauchy Schwartz, por lo que las manipulaciones analíticas anteriores pueden justificarse utilizando la integración de Riemman. □

En el Capítulo 2 el operador adjunto juega un rol importante. Donde K^* es el operador adjunto de K.

Teorema 3.2. *El operador adjunto $K^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ esta dada por la fórmula*

$$(K^* v)(t) = \int_a^b \overline{k(s,t)} v(s)\, ds,$$

para cualquier $v \in \mathcal{H}$.

Demostración. Para cualquier $u,\ v \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}\langle Ku, v\rangle &= \int_a^b (Ku)(s)\overline{v(s)}ds \\ &= \int_a^b \left(\int_a^b k(s,t)u(t)\,dt\right)\overline{v(s)}ds,\end{aligned}$$

se utiliza el Teorema general de Fubini (A4 ver apendice)

$$\begin{aligned}\langle Ku, v\rangle &= \int_a^b \left(\int_a^b k(s,t)\overline{v(s)}\,ds\right)u(t)\,dt \\ &= \int_a^b \left(\int_a^b \overline{\overline{k(s,t)}v(s)}\,ds\right)u(t)\,dt \\ &= \int_a^b \overline{\left(\int_a^b \overline{k(s,t)}v(s)\,ds\right)}u(t)\,dt \\ &= \int_a^b u(t)\overline{\left(\int_a^b \overline{k(s,t)}v(s)\,ds\right)}\,dt \\ &= \langle u, K^*v\rangle,\end{aligned}$$

con la última linea demuestra como es la fórmula de K^*, para cualesquiera $u,\ v$.

□

Observación 3.2 El cambio de orden de la integración, en la prueba anterior, no es trivial para las funciones generales $u,\ v \in L^2[a,b]$, se desprende del Teorema de Fubini; sin embargo, podemos evitar usar el Teorema de Fubini por el siguiente método, que se utilizará comúnmente para probar los resultados en L^2 y otros espacios. Sea X un espacio normado y supongamos que se puede elegir un subconjunto denso $Y \subset X$ que consiste en manipular los elementos y para lo cual es relativamente fácil probar la fórmula requerida. Luego extendemos esto a todo el espacio dejando $x \in X$, arbitrario y elegir una secuencia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Y con $y_n \to x$ y tomando límites en la fórmula.

Suponiendo que la fórmula tiene propiedades de continuidad adecuadas a este procedimiento será válido, por ejemplo, en el caso de un conjunto denso, se elige el conjunto de funciones continuas (que es denso en $L^2[a,b]$). Para funciones continuas $u,\ v$ la prueba anterior requiere solamente la Teoría de integración de Riemann. Ahora, para cualquier $u,\ v \in \mathcal{H}$, escogimos sucesiones de funciones continuas $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ tal que $u_n \to u,\ v_n \to v$. El deseado resultado se sostiene para todo $u_n,\ v_n$ así tomamos el limite y usando la continuidad del operador y el producto interno entonces dado el resultado por $u,\ v \in \mathcal{H}$. Por supuesto, no hemos evitado por completo el uso de la Teoría de integración de Lebesgue por este método ya que necesitamos saber que el conjunto de funciones continuas es denso $\mathcal{H}$.

Definición 3.1. Si $k(s,t) = \overline{k(t,s)}$ para todo $s,\ t \in [a,b]$, se dice que k es **Hermitiano**. Si k es valor real y Hermitiano entonces k es simétrico.

Corolario 3.1. *Si k es Hermitiano (o simétrico) entonces el operador integral K es autoadjunto.*

Demostración. Para demostrar que es autoadjunto sólo basta probar que $\langle Ku, v\rangle = \langle u, Kv\rangle$ para cualquier $u,\ v \in \mathcal{H}$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\langle Ku, v\rangle &= \int_a^b \left(\int_a^b k(s,t)u(t)dt\overline{v(s)} \right) ds \\
&= \int_a^b u(t) \overline{\left(\int_a^b \overline{k(s,t)} v(s) ds \right)} dt \\
&= \int_a^b u(t) \overline{\left(\int_a^b k(t,s) v(s) ds \right)} dt \\
&= \langle u,\ Kv\rangle .
\end{aligned}$$

La penúltima fila es por que k es Hermitiano, y así queda demostrado que K es autoadjunto.

□

Ahora se puede aplicar los resultados de los operadores compactos en las ecuaciones de Fredholm de Primera Clase $f(s) = (Ku)(s) = \int_a^b k(s,t)u(t)dt$ para cualquier $t \in [a,b]$ y como K es compacto, en el espacio normado infinito dimensional $L^2[a,b] = \mathcal{H}$, por el Teorema 1.6, se deduce que K no es invertible en $B(\mathcal{H})$. Así en la terminología del Capítulo 2 la ecuación $Ku = f$ no esta bien planteado, es decir, para un $f \in \mathcal{H}$ dado, la ecuación no puede tener una solución o si la tiene, esta solución no puede depender continuamente de f.
Las ecuaciones de primera clase no están contempladas en este trabajo ya que su teoría es más delicada, sea $Ku = f$, si $f = 0$ entonces $K^*u \equiv 0$ como K no es invertible entonces $K \equiv 0$. Por lo cual el trabajo se concentrará en ecuaciones de segunda clase $(I - \mu K)u(t) = \int_b^a k(s,t)u(t)ds$ para cualquier $t \in [a,b]$ es mas amigable donde μ es ligeramente diferente de λ de la anterior ecuación $(T - \lambda I)x = p$.

Definición 3.2. Sea V espacio vectorial y $T \in L(V)$. Un escalar $\mu \in \mathbb{F}$ es un *valor característico* de T si la ecuación $v - \mu T v = 0$ tiene soluciones distintas de cero, para cualquier $v \in V$.

Se puede notar que para $\mu = 0$ no puede ser valor característico de T, y si $\mu \neq 0$ es un valor característicos de T si, y sólo si $\lambda = \mu^{-1}$ es un autovalor de T.
Así existe una correspondencia uno a uno entre los valores características y autovalores de T, ya que para la ecuación $Ku = f$ corresponde al caso $\lambda = 0$, mientras que $(I - \mu K)u = f$ corresponde al caso $\lambda \neq 0$ lo cual se estudió en su mayoría en el capítulo anterior.

Teorema 3.3. *Para cualquier punto $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ la Alternativa de Fredholm se mantiene para $(I - \mu K)u = f$ de la ecuación integral de Fredholm que cumple cualquiera de los dos:*

a) μ no es un valor característico de K y la ecuación tiene una única solución $u \in \mathcal{H}$ para cualquier $f \in \mathcal{H}$, o

b) μ es un valor característico de K y el correspondiente a una ecuación homogénea $(I - \mu K)u = 0$ tiene soluciones distintas de cero, con la ecuación no homogénea $(I - \mu K)u = f$ tiene solución si, y sólo si f es ortogonal al subespacio de $\ker(I - \overline{\mu}K^*)$.

Además, si k es Hermitiano entonces, el resultado para la adjunta de K también se puede aplicar con el mismo resultado en la ecuación homogénea y no homogénea.

Demostración. $a)$ Como μ no es un valor característico, si $\mu = 0$ para la ecuación homogénea $(I - 0K)u = 0$ entonces $u \equiv 0$, para la ecuación no homogénea $(I - 0K)u = f$ entonces $u = f$,por lo tanto existe una única solución.

Ahora, si $\mu \neq 0$ entonces se escribe a $\mu^{-1} = \lambda$ se deduce que no es un auto valor de K entonces $\mu^{-1} \in \rho(K)$ y si reescribimos la ecuación homogénea $(\mu^{-1}I - K)u = 0$ por el Teorema de la Alternativa Fredholm el inciso $a)$ la ecuación tiene una única solución, para la ecuación no homogénea $(\mu^{-1}I - K)u = \mu^{-1}f$ por el mismo Teorema de la Alternativa de Fredholm el inciso $a)$ la ecuación tiene una única solución.

$b)$ Como μ es un valor característico de K se escribe $\lambda = \mu^{-1}$ es un autovalor de K, por el Teorema de la Alternativa de Fredholm el inciso $b)$, nos dice que para las ecuaciones homogéneas existen $n \in \mathbb{N}$ soluciones linealmente independiente para cada μ_i^{-1} $i = 1, 2, 3, ..., n$ distintas de cero.

Mientras para las ecuaciones no homogéneas $(I - \mu K)u = f$ tiene solución si, y sólo si $\langle v, f \rangle = 0$ por el Teorema de la Alternativa de Fredholm y ahora se sabe que $\mathrm{Im}(I - \mu K)$ es cerrado, entonces $\mathcal{H} = \mathrm{Im}(I - \mu K) \oplus \mathrm{Im}(I - \mu K)^{\perp}$, donde $\mathrm{Im}(I - \mu K)^{\perp} = \ker(I - \overline{\mu} K^*)$ así para cualquier $v \in \ker(I - \overline{\mu} K^*)$.

□

Observación 3.3 La dicotomia entre la primera y segunda clase de ecuaciones es decir (es decir $\lambda = 0$ y $\lambda \neq 0$) todavía puede parecer un tanto misterioso. Otra forma de ver por que existe tal distinción es observar que según el Lema 3.1, el rango de K consiste en funciones continuas.

Claramente, la ecuación $Ku = f$ no puede tener una solución si f es discontinua. Ahora aunque el conjunto de funciones continuas es denso en $L^2[a, b]$ hay un sentido bien definido en el que hay funciones más discontinuas en $L^2[a, b]$ (no es difícil convertir una función continua en discontinua, sólo cambia el valor en un punto, en cambio la inversa en general es más complicado). Por lo tanto $Ku = f$ sólo se puede resolver para un conjunto de funciones "pequeño ” y denso.

Esto se refleja en la falta de buena postura de esta ecuación, por otro lado, la reorganización de $(I - \mu K)u = f$ simplemente conduce a una condición necesaria de que necesitan ser continuas individualmente. Esto claramente no impide que existan soluciones, simplemente nos dice algo sobre la solución y, por lo tanto, es coherente con la teoría de existencia y unicidad de solución anterior.

Ejemplo 3.1. Ilustramos los resultados anteriores al considerar la segunda ecuación de Fredholm

$$u(s) - \mu \int_0^1 e^{s-t} u(t) dt = f(s), \tag{3.1.7}$$

reorganizando

$$\begin{aligned} u(s) &= f(s) + \mu \int_0^1 e^{s-t} u(t) dt \\ &= f(s) + (\mu \int_0^1 e^{1-t} u(t) dt) e^s, \end{aligned}$$

$$u(s) = f(s) + c * e^s, \tag{3.1.8}$$

donde c es una constante desconocida sustituyendo en 1 se tiene

$$c(1-\mu)=\mu\int_0^1 e^{-t}f(t)dt, \tag{3.1.9}$$

ahora se supone que $\mu\neq 1$ entonces c se determina de forma única por 3 y así 1 tiene solución

$$u(s)=f(s)+\frac{\mu\int_0^1 e^{-t}f(t)dt}{1-\mu}e^s.$$

Por otro lado, si $\mu=1$ entonces 3 no tiene solución a menos que

$$\int_0^1 e^{-t}f(t)dt=0, \tag{3.1.10}$$

en cuyo caso cualquier $c\in\mathbb{C}$ satisface la ecuación 3.1.9, y la fórmula de la ecuación 3.1.8. con c arbitraria, proporciona el conjunto completo de soluciones de la ecuación 3.1.7. En este caso la ecuación **homogénea** correspondiente al operador adjunto es

$$v(t)-\int_0^1 e^{s-t}v(s)ds=0 \ \text{ para } \ s\in[0,1]$$

y se puede demostrar mediante argumentos similares que cualquier solución de esta ecuación es un múltiplo escalar de la función $v(t)=e^{-t}$, es decir, el conjunto de soluciones de esta ecuación es un subespacio unidimensional que abarca esta función. Por lo tanto la condición de la ecuación 3.1.8 coincide con la existencia de solución propuesta por la Alternativa de Fredholm.

Sólo se considera solución para la ecuación $(I-\mu K)u=f$ en el espacio $\mathcal{H}$, sin embargo, en los problemas particulares de Banach $X=C[a,b]$ puede ser más natural $K_{\mathcal{H}}:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$, y $K_X:X\to X$ es posible que la ecuación podría tener una solución distinta de cero $u\in\mathcal{H}$, pero no una solución $u\neq 0$ en X. Además la ecuación $(I-\mu K)u=f$ solo podría tener una solución $u\in\mathcal{H}-X$ incluso si $f\in X$, puede ocurrir para el general los nucleos en L^2, el Teorema muestra que sólo puede ocurrir cuando k es continuo.

Teorema 3.4. *Supongamos que k es continuo. Sea $\mu\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $f\in X$ y $u\in\mathcal{H}$ es una solución de $(I-\mu K)u=f$, entonces:*

a) $u\in X$.

b) *Si μ es un valor característico de $K_{\mathcal{H}}$ si, y sólo si, es un valor característico de K_X.*

c) *Si μ no es un valor característico de K, entonces para cualquier $f\in X$ la ecuación $(I-\mu K)u=f$ tiene una única solución $u\in X$ y, existe la constante $c>0$ (independientemente de f) tal que $\|u\|_X\leq c\|f\|_X$.*

Así el operador $I-\mu K_X:X\to X$ es invertible.

Demostración. a) Si se reordena la ecuación $(I-\mu K)u=f$ se tiene

$$u=f+\mu Ku. \tag{3.1.11}$$

Se supone que f es continuo y por el Lema 3.1 el termino Ku es continuo por lo que se puede deducir que u es continuo entonces $u\in X$.

b) Como μ es un valor característico del operador $K_{\mathcal{H}}$ si, y sólo si, tiene solución u distinto de cero para $u \in \mathcal{H}$ tal que $(I - \mu K_{\mathcal{H}})u = 0$, por el resultado del inciso *a*) $u \in X$ por lo tanto μ es un valor característico del operador K_X. Ahora para el recíproco se sabe que $X \subset \mathcal{H}$ lo cual se da de manera inmediata.

c) Partiendo del primer Lema 3.1 donde $\|f\|_X \leq M(b-a)^{1/2}\|u\|_{\mathcal{H}}$ y por la ecuación 3.1.11 $u = f + \mu K u$, a la desigualdad la reescribimos de la siguiente manera $\gamma = M(b-a)^{1/2}$ se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \|u\|_X &\leq \|f\|_X + |\mu|\|Ku\|_X \\ &\leq \|f\|_X + |\mu|\gamma\|u\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \|f\|_X + |\mu|\gamma C\|f\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq (1 + |\mu|\gamma C(b-a)^{1/2})\|f\|_X. \end{aligned}$$

Así se demuestra que existe la constante tal que $\|u\|_X \leq c\|f\|_X$.

Finalmente la correspondencia que tiene el conjunto de valores característicos con el conjunto de autovalores, se puede deducir que el operador $I - \mu K_X : X \to X$ es invertible. □

3.2. Ecuación Integral de Volterra

El operador integral de Volterra se consideran un caso especial de los operadores integrales de Fredholm

$$(ku)(s) = \int_a^s k(s,t)u(t)dt \qquad s \in [a,b] \tag{3.2.1}$$

donde el límite superior de la integral es la variable s y el núcleo $k : \triangle_{a,b} \to \mathbb{C}$ es continuo, ya que $\triangle_{a,b} \subset R_{a,b}$ se define $k(s,t) = 0$ cuando $t < s$, si se extiende el núcleo en general sera discontinuo a lo largo de la linea $s = t$ en $R_{a,b}$. Sin embargo, todos los resultados en la Sección 3.1 se pueden repetir, usando la fórmula del operador de Volterra, y se encuentra que estos resultados siguen siendo válidos para este caso. Esto se debe a que las integraciones que se presentan en este caso sólo suponiendo que kernel k es continua en $\triangle_{a,b}$, así el kernel tiene las propiedades de continuidad requeridas en la Sección 3.1, donde son realmente válidos para $L^2[a,b]$ (independientemente del kernel extendido). Al igual que los operadores de Fredholm, existe:
primera clase de Ecuación de Volterra

$$Ku = f,$$

segunda clase Ecuación de Volterra

$$I - \mu K u = f.$$

La teoría de existencia y unicidad de solución sólo para la ecuación de segunda clase de Volterra es mucho más amigable que la ecuación de segunda de Fredholm, se mostrará a continuación tales operadores no tienen autovalores distintos de cero es decir solo una alternativa del Teorema de Fredholm es válida en la existencia de la solución de la ecuación de Volterra para todo $f \in \mathcal{H}$ esto es por la correspondencia uno a uno con el conjunto de valores característicos. Así se considerará la norma de $\mathcal{H}$ los números definidos en la primera sección serán válidas para esta ecuación.

Lema 3.2. *Si K es un operador integral de Volterra en $\mathcal{H}$, entonces existe una constante $c > 0$ tal que*

$$\|K^n\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C^n}{n!} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Demostración. Para cualquier $u \in \mathcal{H}$, tenemos usando la desigualdad de Cauchy Schwarz

$$\begin{aligned}
|(Ku)(s)| &= \left| \int_a^s k_s(t)u(t)dt \right| \\
&\leq \left(\left(\int_a^s |k_s(t)||u(t)| \right)^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_a^s |k_s(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_a^s |u(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_a^s |k_s(t)|^2 dt \right)^{1/2} \|u\|_{\mathcal{H}},
\end{aligned}$$

donde tenemos M ya definido $|k_s(t)| = |k(s,t)| \leq \sup\{|k(s,t)| : s,t \in R_{a,b}\} = M$, resulta:

$$\begin{aligned}
|(Ku)(s)| &\leq \left(\int_a^b M^2 dt \right)^{1/2} \|u\|_{\mathcal{H}} \\
&= M \left(\int_a^b dt \right)^{1/2} \|u\|_{\mathcal{H}} \\
&= M(b-a)^{1/2} \|u\|_{\mathcal{H}},
\end{aligned}$$

para

$$\begin{aligned}
|(K^2u)(s)| = |K(K(u))(s)| &= \left| \int_a^s k_s(t)(Ku)(t)dt \right| \\
&\leq \int_a^s |k_s(t)||(Ku)(t)|dt \\
&\leq \int_a^s |k_s(t)| M(b-a)^{1/2} \|u\|_{\mathcal{H}} dt \\
&= M(b-a)^{1/2} \|u\|_{\mathcal{H}} \int_a^s |k_s(t)|dt \\
&\leq M(b-a)^{1/2} \|u\|_{\mathcal{H}} \int_a^s M dt \\
&= M(b-a)^{1/2} \|u\|_{\mathcal{H}} M(s-a) \\
&= M^2(s-a)(b-a)^{1/2} \|u\|_{\mathcal{H}},
\end{aligned}$$

ahora para

$$\begin{aligned}
|(K^3u)(s)| &\leq \int_a^s |k_s(t)||(K^2u)(t)|dt \\
&\leq \int_a^s |k_s(t)| M^2(s-a)(b-a)^{1/2} \|u\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq M(s-a)M^2(s-a)(b-a)^{1/2} \|u\|_{\mathcal{H}} \\
&= M^3 \frac{(s-a)^2}{2} (b-a)^{1/2} \|u\|_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Por inducción, usando un cálculo similar por la segunda desigualdad se tiene que, para cada $n \geq 3$.

$$\begin{aligned}|K^n u)(s)| &\leq \int_a^s |k_s(t)||(K^{n-1}u)(t)|dt \\ &\leq \frac{(s-a)^{n-1}}{(n-1)!} M^n (b-a)^{1/2} \|u\|_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

Integrando se obtiene

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b |K^n u)(s)|^2 ds\right)^{1/2} &\leq \left(\int_a^b \left(\frac{(s-a)^{n-1}}{(n-1)!} M^n (b-a)^{1/2} \|u\|_{\mathcal{H}}\right)^2 ds\right)^{1/2} \\ \|K^n u\|_{\mathcal{H}} &\leq \left(\int_a^b \frac{(s-a)^{2n-2}}{(n-1)!^2} M^{2n} (b-a) \|u\|^2_{\mathcal{H}} ds\right)^{1/2} \\ &= \frac{M^n (b-a)^{1/2} \|u\|_{\mathcal{H}}}{(n-1)!} \left(\int_a^b (s-a)^{2n-2} ds\right)^{1/2} \\ &= \frac{M^n (b-a)^{1/2} \|u\|_{\mathcal{H}}}{(n-1)!} \left(\frac{(s-a)^{2n-2}}{2n-1}\right)^{1/2}\Bigg|_a^b \\ &\leq \frac{M^n (b-a)^{1/2} \|u\|_{\mathcal{H}}}{(n-1)!} \frac{(b-a)^{n-1/2}}{\sqrt{2n-1}} \quad s \in [a,b] \\ &= \frac{M^n (b-a)^n}{(n-1)!\sqrt{2n-1}} \|u\|_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

Ahora se puede decir que

$$\frac{C^n}{n!} \leq \frac{M^n (b-a)^n}{(n-1)!\sqrt{2n-1}},$$

entonces

$$\|K^n u\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C^n}{n!} \|u\|_{\mathcal{H}},$$

para alguna constante C de donde el resultado sigue de inmediato.

$$\|K^n\| \leq \frac{C^n}{n!} \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

□

Teorema 3.5. *Un operador integral de Volterra K en $\mathcal{H}$ no tiene autovalores distinto de cero. Por lo tanto para K la ecuacion $(I - \mu K)u = f$ tiene una única solución $u \in \mathcal{H}$ para todo $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $f \in \mathcal{H}$.*

Demostración. Se considera que λ es un autovalor de K que es $Ku = \lambda u$ para algún $u \neq 0$. Por el Lema 3.2, para todo entero $n \geq 1$

$$|\lambda| \|u\|_{\mathcal{H}} = \|K^n u\|_{\mathcal{H}} \leq \|K^n\| \|u\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C^n}{n!} \|u\|_{\mathcal{H}},$$

lo cual implica $|\lambda| \leq \dfrac{C^n}{n!}$, para un n que tiende al infinito se tiene $|\lambda| = 0$, entonces K tiene autovalor 0, como $\lambda = \mu^{-1}$ no es un valor característico ver definición de valor característico, entonces por el inciso a) del Teorema de la Alternativa de Fredholm μ no es valor característico de K la ecuación tiene una única solución $u \in \mathcal{H}$ para cualquier $f \in \mathcal{H}$. $\square$

Observación 3.4 Se define que un operador acotado T en un espacio de Banach es **nilpotente** si $T^n = 0$ para algún $n \geq 1$; y **cuasi-nilpotente** si, $\|T^n\|^{1/n} \to 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

El Lema de Volterra muestra que cualquier operador integral de Volterra es cuasi-nilpotente. La prueba del Teorema 3.5 actualmente muestra que cualquier operador cuasi-nilpotente como un operador integral de Volterra no puede tener puntos distintos de ceros en su espectro (que todos los puntos distinto de cero en el espectro son autovalores).

3.3. Ecuaciones Diferenciales

La principal dificultad para aplicar la teoría anterior a las ecuaciones diferenciales es que los operadores diferenciales que surgen son generalmente no acotados. Existe dos formas para superar es dificultad. La primera es desarrollar una teoría de transformaciones lineales no acotadas, es bastante complicado para desarrollarlo en un proyecto de pre grado. La segunda forma es reformular los problemas de ecuaciones diferenciales, los cuales se traen transformaciones no acotadas, como problemas de ecuaciones integrales, los cuales se traen operadores integrales acotados. Se desarrollará este método, se considera las ecuaciones diferenciales ordinarias se segundo orden, pero se puede extenderse a problemas muchos más generales. El primer tipo de problema es con condición inicial.

Se considera la ecuación diferencial.

$$u''(s) + p(s)u'(s) + q(s)u(s) = f(s), \quad s \in [a, b], \tag{3.3.1}$$

donde p, q y f son funciones continuas conocidas en $[a, b]$, con condición inicial:

$$u(a) = a_0, \quad u'(a) = a_1, \tag{3.3.2}$$

para algunas constantes dadas $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$. Una solución del problema con condición inicial, es un elemento $u \in C[a, b]$ satisfaciendo 3.3.1, 3.3.2.

Los siguientes lemas muestran que este problema es equivalente, a una ecuación integral de Volterra.
Sea $X = C[a, b]$ y sea $\mathcal{S}$ una clase de funciones, $u \in C^2[a, b]$ satisfaciendo 3.3.2 para cualquier $u \in \mathcal{S}$, sea $Su = u''$ (ya que $u \in C^2[a, b]$ esta definición tiene sentido y $Su \in X$)

Lema 3.3. *La transformación $S : \mathcal{S} \to X$ es biyectiva.*

Demostración. Se considera que $u \in S$ y sea $w = Su \in X$, integrando w se obtiene

$$\int_a^s (Su)(t)dt = \int_a^s w(t)dt;$$

entonces

$$\int_a^s u''(t)dt = \int_a^s w(t)dt;$$

usando el Teorema de Fundamental de Calculo se tiene

$$u'(s) - u'(a) = \int_a^s w(t)dt,$$

y usando la segunda condición obtenemos

$$u'(s) - a_1 = \int_a^s w(t)dt. \tag{3.3.3}$$

De nuevo integrando

$$\int_a^s (u'(r) - a_1)dr = \int\int_{\triangle_{a,b}} w(t)dt\,dr,$$

entonces

$$\begin{aligned} u(s) - u(a) - a_1(s-a) &= \int_a^s \int_a^r w(t)dt\,dr \\ &= \int_a^s \left(\int_t^s dr \right) w(t)dt \\ &= \int_a^s (s-t)w(t)dt. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$u(s) = a_0 + a_1(s-a) + \int_a^s (s-t)w(t)dt. \tag{3.3.4}$$

Así para cualquier $u \in \mathcal{S}$, nosotros podemos expresar u en términos de $w = Su$ por la ecuación 3.3.4. Ahora se considera que $u_1, u_2 \in \mathcal{S}$ satisfaciendo $Su_1 = Su_2 = w$, para algún $w \in X$, entonces 3.3.4 muestra que $u_1 = u_2$. Por lo tanto S es inyectiva.

Ahora supongamos que $w \in X$ es arbitrario y como se define u en la final de la ecuación 3.3.4. Entonces por los cálculos anteriores, veremos que u' esta dado por 3.3.3 y $u'' = w$ así $u \in C^2[a,b]$, que también u satisface 3.3.2.
Y así comenzando de un arbitrario $w \in X$ se tiene construyendo $u \in \mathcal{S}$ talque $Su = w$. Por lo tanto S es sobreyectiva. Así S es biyectiva. □

Lema 3.4. *La función $u \in \mathcal{S}$ es una solución del problema con condición inicial de*

$$\left.\begin{array}{l} u''(s) + p(s)u'(s) + q(s)u(s) = f(s), \quad s \in [a,b] \\ y \quad u(a) = a_0, \;\; u'(a) = a_1. \end{array}\right\} \;\; \textit{entonces} \;\; w = Su \in X \;\; \textit{satisface:}$$

la ecuación de Volterra.

$$w(s) - \int_a^s k(s,t)w(t)dt = h(t) \tag{3.3.5}$$

donde $\qquad k(s,t) = -p(s) - q(s)(s-t)$

$$h(s) = f(s) - (a_0 + a_1(s-a))q(s) - a_1 p(s). \tag{3.3.6}$$

Demostración. Si $u \in \mathcal{S}$ es una solución del problema con condición inicial

$$u''(s) + p(s)u'(s) + q(s)u(s) = f(s),$$
$$u(a) = a_0, \quad u'(a) = a_1,$$

se sabe que $u \in \mathscr{S}$, entonces se considera que $w \in X$, satisface la relación $w = Su$ y se tiene que $u'' = Su$ es decir que $w = u''$.
Lo que se desarrolla en el Lema 3.3 se obtiene de la ecuación dada 3.3.3 y 3.3.4:

$$u'(s) - a_1 = \int_a^s w(t)dt,$$
$$u(s) = a_0 + a_1(s-a) + \int_a^s (s-t)w(t)dt.$$

Todo lo que se tiene se lo reemplaza en 3.3.1

$$w(s) + p(s)(a_1 + \int_a^s w(t)dt) + q(s)(a_0 + a(1)(s-a) + \int_a^s (s-t)w(t)dt) = f(s);$$
$$w(s) + p(s)a_1 + p(s)\int_a^s w(t)dt + q(s)a_0 + q(s)a(1)(s-a) + q(s)\int_a^s (s-t)w(t)dt = f(s);$$

operando se tiene

$$w(s) + \int_a^s (p(s)w(t) + q(s)(s-t)w(t))dt = f(s) - p(s)a_1 - q(s)a_0 - q(s)a(1)(s-a);$$
$$w(s) - \int_a^s (-p(s) - q(s)(s-t))w(t)dt = f(s) - p(s)a_1 - q(s)a_0 - q(s)a(1)(s-a);$$

se puede interpretar como

$$w(s) - \int_a^s k(s,t)w(t)dt = H(s).$$

Donde el núcleo es

$$k(s,t) = -p(s) - q(s)(s-t))$$

y

$$h(s) = f(s) - p(s)a_1 - q(s)a_0 - q(s)a(1)(s-a).$$

Para el recíproco, el proceso que hicimos es a la inversa lo cual nos daría que u es solución de la ecuación 3.3.1

$$u''(s) + p(s)u'(s) + q(s)u(s) = f(s)$$

en términos de w. $\square$

Teorema 3.6. *El problema con condición inicial de las ecuaciones 3.3.1 y 3.3.2*

$$u''(s)+p(s)u'(s)+q(s)u(s)=f(s), \quad s\in[a,b]$$
$$u(a)=a_0, \quad u'(a)=a_1$$

tiene una única solución $u\in X=C[a,b]$, para cualquier $a_0,a_1\in\mathbb{C}$ y cualquier $f\in X$.

Demostración. Se recuerda que el operador integral de Volterra esta en un espacio de Hilbert y no se vio en el espacio de las funciones continuas, el requisito que se necesita aquí es que $k(s,t)$ sea continuo en el $\triangle_{a,b}$ así se tiene del Teorema 3.4 y donde también se sabe que el operador integral de Volterra es también cuasi nilpotente por el Lema 3.2 y la Observación 3.4, donde se utiliza la norma $||.||_X$ en lugar de la $||.||_{\mathscr{H}}$.

Entonces se tiene que la ecuación

$$w(s)-\int_a^s k(s,t)w(t)dt=h(t); \tag{3.3.7}$$

$$k(s,t)=-p(s)-q(s)(s-t)),$$

y

$$h(s)=f(s)-p(s)a_1-q(s)a_0-q(s)a_1(s-a),$$

existe la equivalencia al problema con condición inicial y por el Teorema 3.5 donde K tiene autovalores distintos de cero, por lo tanto la ecuación $(I-\mu K)w=f$ tiene una única solución $w\in X$ para cualquier $f\in X$.

Así, se demuestra que el problema con condición inicial tiene una única solución $u\in X$.

□

Si $a_0=0$ y $a_1=0$, el espacio $\mathcal{S}$ no es un subespacio lineal de $C^2[a,b]$, y así S no es un operador lineal en $C^2[a,b]$; podemos obtener un operador lineal, primero la transformación $v=u-a_0-a_1(s-a)$ al sustituirlo al problema con condición inicial en 3.3.1 y 3.3.2

$$v''+pv'+qv=h;$$
$$v(a)=v'(a)=0.$$

La aplicación de los argumentos anteriores a este problema transformado da un subespacio lineal $\mathcal{S}$ y una transformación lineal S en $C^2[a,b]$.

El problema con condición inicial impuso dos condiciones en la solución u en el único punto a. Lo cual surge el problema cuando se impone una sóla condición:

$$u(a)=u(b)=0, \tag{3.3.8}$$

donde dadas las ecuaciones 3.3.1 y 3.3.6

$$u''(s)+p(s)u'(s)+q(s)u(s)=f(s) \quad s\in[a,b];$$
$$u(a)=u(b)=0,$$

son llamadas el problema con condiciones en frontera, lo cual una solución del problema con condiciones de frontera es el elemento $u \in C^2[a,b]$ satisfaciendo las ecuaciones 3.3.1 y 3.3.6. Donde este problema tiene la equivalencia con la ecuación integral de Fredholm de segundo tipo. Para simplificar, se supone que la función $p = 0$ se empieza a considerar la ecuación

$$u''(s) + q(s)u(s) = f(s), \tag{3.3.9}$$

junto con la ecuación 3.3.6 $\quad u(a) = u(b) = 0$.

Sea $\mathcal{R}$ es una clase de funciones $u \in C^2[a,b]$ satisfaciendo 3.3.6 y definir $R \in L(\mathcal{R}, X)$ por $Ru = u''$.

Lema 3.5. *La transformación $R \in L(\mathcal{R}, X)$ es biyectiva. Si $w \in X$ entonces la solución $u \in \mathcal{R}$ de la ecuación $Ru = w$ es dado por*

$$u(s) = \int_a^b k(s,t)w(t)dt : \tag{3.3.10}$$

donde

$$k(s,t) = \begin{cases} -\frac{(s-a)(b-t)}{b-a}, & si \quad a \le s \le t \le b; \\ -\frac{(b-s)(t-a)}{b-a}, & si \quad a \le t \le s \le b. \end{cases}$$

Demostración. Se considera que $u \in \mathcal{R}$ y sea $w = Ru$ entonces se tiene que

$$u(s) = a_0 + a_1(s-a) - \int_a^s (s-t)w(t)dt,$$

donde $\quad a_0 = 0$ y $u'(s) = a_1 = \gamma \quad$ se ve que

$$u(s) = \gamma(s-a) - \int_a^s (s-t)w(t)dt,$$

para alguna constante $\gamma \in \mathbb{C}$.

Esta fórmula satisface la condición de frontera en a. Sustituyendo esta en la condición de frontera en b, lo que se obtiene

$$u(b) = \gamma(b-a) + \int_a^b (b-t)w(t)dt,$$

donde $u(b) = 0$ entonces

$$0 = \gamma(b-a) + \int_a^b (b-t)w(t)dt,$$

y por solvencia de la ecuación para γ se tiene

$$\gamma = -\frac{\int_a^b (b-t)w(t)dt}{b-a},$$

lo reemplazamos en lo que tenemos

$$\begin{aligned}
u(s) &= -\frac{s-a}{b-a}\int_a^b (b-t)w(t)dt + \int_a^s (s-t)w(t)dt \\
&= -\frac{s-a}{b-a}\left(\int_a^s (b-t)w(t)dt + \int_s^b (b-t)w(t)dt\right) + \int_a^s (s-t)w(t)dt \\
&= \int_a^b \left\{(s-t) - \frac{s-a}{b-a}(b-t)\right\} w(t)dt + \int_a^s \frac{(s-a)(b-t)}{b-a} w(t)dt \\
&= \int_a^b \left\{\frac{(b-a)(s-t)-(b-t)(s-a)}{b-a}\right\} w(t)dt + \int_a^s \frac{(s-a)(b-t)}{b-a} w(t)dt,
\end{aligned}$$

como $(b-a)(s-t)-(b-t)(s-a) = (bs-as-bt+at)+(-sb+ab+st-at)$ por lo cual,

$$\begin{aligned}
u(s) &= \int_a^b \left\{\frac{-as-bt+at+st}{b-a}\right\} w(t)dt + \int_a^s \frac{(s-a)(b-t)}{b-a} w(t)dt \\
&= \int_a^b \left\{\frac{-(t-a)(b-s)}{b-a}\right\} w(t)dt + \int_a^s \frac{(s-a)(b-t)}{b-a} w(t)dt.
\end{aligned}$$

Entonces

$$u(s) = \int_a^b k(s,t)w(t)dt,$$

lo cual es la fórmula para u en términos de w, se sabe que $Ru = w$, como se hizo anteriormente para la inyectividad se tiene que $Ru_1 = Ru_0 = w$ entonces

$$\begin{aligned}
u_0(s) &= \int_a^b k(s,t)w(t)dt \\
u_1(s) &= \int_a^b k(s,t)w(t)dt.
\end{aligned}$$

Lo cual prueba la inyectividad de R.

Para la sobreyectividad se sabe que para w de X, existe al menos un u en $\mathcal{R}$ tal que $Ru = w$. Por lo tanto R es biyectiva. □

Se puede ver que la función k en el Lema 3.5 es continuo en $R_{a,b}$, sea G_0 denotado del operador integral con el núcleo k.

Lema 3.6. *Si $u \in C^2[a,b]$ es una solución de 3.3.5 y 3.3.6 entonces si satisface la ecuación integral de segundo clase de Fredholm*

$$u(s) + \int_a^b k(s,t)q(t)u(t)dt = h(s), \tag{3.3.11}$$

donde

$$h(s) = \int_a^b k(s.t)f(t)dt.$$

Por el contrario, si $u \in C[a,b]$ satisface 3.3.9 entonces $u \in \mathcal{R}$ y satisface 3.3.5 y 3.3.6.

Demostración. Se considera que $u \in \mathcal{R}$ y $w \in X$ satisface la relación $w = Ru$, entonces se mantiene la ecuación 3.3.8. Si u satisface la ecuación 3.3.7, entonces $w = f - qu$, y sustituyendo esto en la ecuación 3.3.8 se obtiene la ecuación 3.3.9.

Por el contrario, si u satisface 3.3.9 entonces se puede reescribir esta ecuación como

$$u = G_0(f - qu),$$

que en comparación con 3.3.8 muestra que

$$u" = w = f - qu,$$

y por lo tanto u satisface 3.3.7. □

La equivalencia entre el problema con condición inicial y la ecuación integral descrito en el Lema 3.5 es algo más directo que la equivalencia descrito en el Lema 3.3, en que la misma función u satisface ambos problemas. Sin embargo, es importante tener en cuenta que sólo se debe suponer que $u \in C[a,b]$ y satisface 3.3.9 para concluir que $u \in C^2[a,b]$ y satisface 3.3.5 y 3.3.6. Es decir, no se necesita asumir desde el principio que $u \in C^2[a,b]$. Si es crucial por que cuando se use el resultado de la sección anterior para tratar de resolver la ecuación integral producirán en el mejor de casos soluciones en $C[a,b]$. Ahora no se puede usar la ecuación integral para deducir que el problema con condición de frontera tiene una única solución para todo $f \in X$ como se pudo para el problema con condición inicial. De hecho se deduce de la discusión para los problemas de autovalores para operadores diferenciales que si $q \equiv -\lambda$, para una adecuada constante λ entonces el problema homogéneo tiene soluciones distinto de cero su unicidad ciertamente no puede sostenerse en este caso. Sin embargo, se puede mostrar que el problema tiene una solución única si la función q es suficientemente pequeño.

Teorema 3.7. *Si* $(b-a)^2||q||_X < 4$, *entonces el problema con condición de frontera 3.3.5 y 3.3.6 tiene única solución* u *para cualquier* $f \in X$.

Demostración. Sea $Q : X \to X$ el operador integral cuyo núcleo es la función k, q como en 3.3.7. Entonces se desprende del Teorema A.3 (ver Anexo), que la ecuación 3.3.7 tiene una única solución $u \in X$ para cualquier $f \in X$. Si $||Q||_X < 1$, donde $k : \triangle_{a,b} \to \mathbb{C}$ y se definió en numero M para las ecuaciones integrales con la norma en X esta será verdad si $(b-a)max\{|k(s,t)q(t)|\} < 1$.

Ahora de la definición de k y cálculos elementales si puede ser mostrado que el máximo valor de $\dfrac{(b-a)^2}{4}$, luego la condición requerida se mantendrá si $(b-a)^2||q||_X < 4$.

El Teorema ahora se deduce de la equivalencia anterior entre problema con condición en frontera 3.3.7. □

CAPÍTULO 4

Aplicaciones y Conclusiones

4.1. Ejemplos y Aplicaciones

En este capítulo se mostrará ejemplos de ecuaciones integrales de Frendholm y ecuaciones integrales de Volterra.

PROBLEMA DE STURM - LIOUVILLE

Se considera la ecuación de tipo canónico Sturm- Liouville

$$\frac{d}{dx}[p(x)u'(x)]+q(x)u(x)=f(x) \text{ si solo si } L(u)=f(x)$$

donde se supone que $p>0$ en $[0,1]$ y $p\in C^1([0,1])$, $q,f\in C^0([0,1])$ y se añade además las condiciones de frontera

$$u(0)=0, \quad u(1)=0,$$

gracias al Teorema de Peano, este problema posee solución de clase $C^2([0,1])$.

Pasando a sistema la ecuación

$$p'(x)u'(x)+p(x)u''(x)+q(x)u(x)=f(x),$$

si se considera que $p(x)=1$ es una función constante se tiene que

$$u''(x)+q(x)u(x)=f(x),$$

$$\begin{cases} -u_1(x)=u(x) \\ -u_2(x)=u'(x)=u_1'(x). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -u_1'(x)=u_2(x) \\ -u_2'(x)=-q(x)u_1(x)+f(x). \end{cases}$$

Entonces, se expresa en forma matricial

$$\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix}. \tag{4.1.1}$$

La solución de la ecuación no homogénea es la solución de la homogénea mas aún solución particular. Por tanto, se considera conocidas $b_1(x)$ y $b_2(x)$ soluciones de la ecuación homogénea tales que $b_1 = 0$ y $b_2 = 0$ y cuyo Wronskiano $W(x) \neq 0$, entonces una solución particular seria

$$u_p(x) = c_1(x)b_1(x) + c_2(x)b_2(x),$$

donde $c_1(x)$ y $c_2(x)$ son soluciones del sistema

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_1' & b_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -b_1 c_1' + b_2 c_2' = 0 \\ -b_1' c_1' + b_2' c_2' = f, \end{cases} \tag{4.1.2}$$

resolviendo el sistema mediante la regla de Cramer

$$c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & b_2 \\ f & b_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_1' & b_2' \end{vmatrix}} = \frac{-b_2(x)f(x)}{W(x)}; \tag{4.1.3}$$

$$c_2' = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ b_1' & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_1' & b_2' \end{vmatrix}} = \frac{b_1(x)f(x)}{W(x)}, \tag{4.1.4}$$

integrando, se obtiene

$$c_1(x) = -\int_1^x \frac{b_2(s)f(s)}{W(s)} ds, \text{ ya que } c_1(x) = \int_x^1 \frac{b_2(s)f(s)}{W(s)} ds,$$

y

$$c_2(x) = \int_0^x \frac{b_1(s)f(s)}{W(s)} ds, \quad b_1(0) = 0,$$

por tanto, la solución particular que se busca es

$$u_p(x) = \left(\int_x^1 \frac{b_2(s)f(s)}{W(s)} ds \right) b_1(x) + \left(\int_0^x \frac{b_1(s)f(s)}{W(s)} ds \right) b_2(x),$$

ahora dicha solución particular verifica las condiciones de frontera

$$u_p(0) = c_1(0)b_1(0) + c_2(0)b_2(0) = 0,$$

pues $b_1(0) = 1$ por hipótesis y $c_2(0) = 0$, por definición

$$u_p(1) = c_1 b_1(1) + c_2(1)b_2(1) = 0,$$

pues $b_2(1) = 0$ por hipótesis y $c_1(1) = 0$, por definición.

Por lo tanto, la solución de la ecuación, viene dada de la forma

$$u(x) = K_1 b_1(x) + K_2 b_2(x) + u_p(x),$$

se impone las condiciones de frontera, se deduce que

$$u(0) = K_1 b_1(0) + K_2 b_2(0) + u_p(0) = 0 \Leftrightarrow K_2 b_2(0) = 0 \Rightarrow K_2 = 0;$$

$$u(1) = K_1 b_1(1) + K_2 b_2(1) + u_p(1) = 0 \Leftrightarrow K_1 b_1(1) = 0 \Rightarrow K_1 = 0.$$

En conclusión, la solución de la ecuación viene dada por

$$u(x) = \left(\int_x^1 \frac{b_2(s) f(s)}{W(s)} ds \right) b_1(x) + \left(\int_0^x \frac{b_1(s) f(s)}{W(s)} ds \right) b_2(x),$$

es decir,

$$u(x) = \int_0^1 k(x,s) f(s) ds,$$

donde

$$k(x,s) = \begin{cases} -\dfrac{b_1(s) b_2(x)}{W(s)}, & 0 \leq s \leq x \\ -\dfrac{b_2(s) b_1(x)}{W(s)}, & x \leq s \leq 1. \end{cases}$$

$k(x,s)$ se conoce como **funcion de Green** (ver anexo)

Se ve algunas propiedades de la función de Green:

1. La función de Green considerada como función de x verifica las condiciones de frontera, y la ecuación diferencial inicial. En efecto,

$$k(0,s) = \frac{b_1(0) b_2(0)}{W(0)} = 0, \text{ ya que } b_1(0) = 0, \text{ por hipotesis ;}$$

$$k(1,s) = \frac{b_1(1) b_2(1)}{W(1)} = 0, \text{ ya que } b_1(1) = 0, \text{ por hipotesis ,}$$

luego $k(x,*)$ verifica las condiciones de frontera.

Sea $y(x) = k(x,s)$

$$q(x) y(x) = \begin{cases} -\dfrac{q(x) b_1(s) b_2(x)}{W(s)}, & 0 \leq s \leq x \\ -\dfrac{q(x) b_2(s) b_1(x)}{W(s)}, & x \leq s \leq 1. \end{cases}$$

$$y'(x) = \begin{cases} -\dfrac{b_1(s) b_2'(x)}{W(s)}, & 0 \leq s \leq x \\ -\dfrac{b_2(s) b_1'(x)}{W(s)}, & x \leq s \leq 1. \end{cases}$$

$$y''(x) = \begin{cases} -\dfrac{b_1(s) b_2''(x)}{W(s)}, & 0 \leq s \leq x \\ -\dfrac{b_2(s) b_1''(x)}{W(s)}, & x \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$y''(x) + q(x) y(x) = \begin{cases} -\dfrac{b_1(s)(b_2''(x) + q(x) b_2(x))}{W(s)}, & 0 \leq s \leq x \\ -\dfrac{b_2(s)(b_1''(x) + q(x) b_1(x))}{W(s)}, & x \leq s \leq 1, \end{cases}$$

pues b_1 y b_2 son soluciones de la ecuación homogénea principal por hipótesis.

Pero $y'(s) = \delta_x k(s,s) = \begin{cases} -\dfrac{b_1(s)b_2'(s)}{W(s)}, & 0 \leq s \\ -\dfrac{b_2(s)b_1'(s)}{W(s)}, & s \leq 1. \end{cases}$ no es continua en general.

Por lo tanto

$$y''(x) + q(x)y(x) = 0 \text{en}[0,1] \text{ excepto en} x = s.$$

2. La función de Green es **símetrica** en (x,s). En efecto, sean b_1 y b_2 dos soluciones de la ecuación homogénea de la ecuación principal luego se tiene que

$$b_1'' + q b_1 = 0; \tag{4.1.5}$$

$$b_2'' + q b_2 = 0, \tag{4.1.6}$$

multiplicando 4.1.5 por $-b_2$ y 4.1.6 por b_1 y sumando ambas ecuaciones, obtenemos

$$[b_2'' b_1 - b_1'' b_2] + q[b_2 b_1 - b_1 b_2] = 0$$

se tiene en cuenta que $W = -b_1' b_2,$, $\;W' = b_1' b_2' + b_1 b_2'' - b_1'' b_2$ llegamos a,

$$W' = 0$$

integrado, se obtiene que W es una constante $W = C$.

Por lo tanto,

$$k(x,s) = \left\{ \begin{array}{ll} -\dfrac{b_2(x)b_1(s)}{C}, & 0 \leq s \\ -\dfrac{b_1(x)b_2(s)}{C}, & s \leq 1. \end{array} \right\} = k(s,x).$$

Se considera ahora el problema

$$\begin{cases} -u''(x) + (q(x) - \lambda r(x))u = f(x), & r(x) > 0, \lambda \in \mathbb{R} \\ -u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Si $b_1,\ b_2,\ W$ y $k(x,s)$ siguen significando lo mismo que antes, entonces la solución de esta ecuación tiene que verificar la solución de antes sustituyendo $f(x)$ por $f(x) + \lambda r u$:

$$u(x) = \lambda \int_0^1 r(s)k(x,s)u(s)ds + \int_0^1 k(x,s)f(s)ds, \tag{4.1.7}$$

se observa que la relación anterior es una ecuación integral de Fredholm de segundo tipo pues la segunda integral es conocida.

Ahora el recíproco, es decir, toda solución de la ecuación integral de 4.1.7 de $C^1([a,b])$ verifica al reciente problema.

- Condiciones de frontera:

$$u(0) = \lambda \int_0^1 r(s)k(0,s)u(x)ds + \int_0^1 k(0,s)f(s)ds = 0 \text{ pues } k(0,s) = 0;$$

$$u(1) = \lambda \int_0^1 r(s)k(1,s)u(x)ds + \int_0^1 k(1,s)f(s)ds = 0 \text{ pues } k(1,s) = 0.$$

- Ecuación:
Denotando $L(y)=y''+qy$, se tiene que:

$$\begin{aligned} y_1L(y_2)-y_2L(y_1) &= y_1[y_2''+qy_2]-y_2[y_1'''+qy_1] \\ &= \frac{d}{dx}[y_1y_2'-y_2y_1'] = \frac{d}{dx}[W(y_1,y_2)] \end{aligned}$$

Aplicando a $y_1(x)=k(x,s)$, considerando K como una función de x, y, $y_2(x)=u(x)$ solución de la ecuación dada de $C^1(0,1)$ se obtiene

$$kL(u)-uL(k)=\frac{d}{dx}[ku'-uk']$$

donde

$$\int_0^s kL(u)dx = ku'-uk''|_0^{s^-} \text{ y } \int_s^1 kL(u)dx = ku'-uk''|_{s^+}^1,$$

de ahí

$$\begin{aligned} \int_0^s kL(u)dx &= [k(s^-,s)u'(s^-)-u(s^-)k''(s^-,s)]-[k(0,s)u'(0)-u(0)k'(0,s)] \\ \int_s^1 kL(u)dx &= [k(1,s)u'(1)-u(1)k'(1,s)]-[k(s^+,s)u'(s^+)-u(^+)k'(s^+,s)], \end{aligned}$$

sumando ambas integrales

$$\begin{aligned} \int_0^s kL(u)dx+\int_s^1 kL(u)dx &= [k(s^-,s)u'(s^-)-k(s^+,s)u'(s^+)]-u(s^-)k'(s_-,s)+u(s^+)k'(s^+,s) \\ &= u(s)[k'(s^+,s)-k'(s^-,s)], \end{aligned}$$

por otro lado,

$$k'(s^+,s)-k'(s^-,s)=\frac{b_2'(s^+)b_1(s)-b_2(s)b_1'(s^-)}{W(s)}=\frac{W(s)}{W(s)}=1$$

luego,

$$u(s)[k'(s^+,s)-k'(s^-,s)]=u(s)$$

en conclusión

$$\int_0^1 k(x,s)L(u)dx = u(s). \tag{4.1.8}$$

Por la ecuación dada de Fredholm 4.1.8, permutando x y s se tiene

$$\int_0^1 k(s,x)[f(x)+\lambda r(x)u(x)]dx = u(s),$$

como $k(x,s)$ es simétrica, restando las dos últimas ecuaciones

$$\int_0^1 k(x,s)[L(u)-f(x)-\lambda r(x)u(x)]dx = 0.$$

Por lo tanto,

$$k(x,s)[L(u)-f(x)-\lambda r(x)u(x)]=0 \text{ en casi todo } (0,1),$$

entonces

$$L(u)-f(x)-\lambda r(x)u(x)=0 \text{ en casi todo } (0,1),$$

pues $k(x,s)$ es no nula en $(0,1)$. Luego llegamos a que

$$u''(u)+q(x)u(x)=\lambda r(x)u(x)+f(x).$$

Observar que el núcleo de la ecuación Fredholm, es asimétrico, pues $G(x,s)=r(s)k(x,s)$ y además, $r(s)k(x,s)\neq G(s,x)$, pero , si multiplicamos la ecuación dada por $\sqrt{r(x)}$, llamando $Y(x)=\sqrt{r(x)}u(x)$.

$$Y(x)=\lambda\int_0^1 r(s)\sqrt{r(x)}k(x,s)u(s)ds+\int_0^1\sqrt{r(x)}k(x,s)f(s)ds$$

$$\text{si, y solo si,}\quad Y(x)=\lambda\int_0^1\sqrt{r(s)}\sqrt{r(x)}k(x,s)\sqrt{r(s)}u(s)ds+\int_0^1\sqrt{r(x)}k(x,s)f(s)ds$$

$$\text{si, y solo si,}\quad Y(x)=\lambda\int_0^1\sqrt{r(s)}\sqrt{r(x)}k(x,s)Y(s)ds+\int_0^1\sqrt{r(x)}k(x,s)f(s)ds.$$

Ahora el núcleo $G(x,s)=\sqrt{r(s)}\sqrt{r(x)}k(x,s)$ es simétrico, se ve que si la ecuación diferencial es homogénea ($f(x)=0$), entonces la ecuación integral también sera homogénea ($g(x)=0$).
En conclusión, partiendo del problema con condiciones de frontera hemos llegado a la resolución de una ecuación integral del tipo Fredholm de segundo tipo con núcleo simétrico.

OSCILADOR ARMÓNICO

Para $u\in c^2([0,1])$ y $w\in C([0,1])$, donde w es un frecuencia prefijada y $u(x)$ la amplitud que depende de x, tenemos la ecuación:

$$\begin{cases} * & u''+w^2u=0; \\ * & u(0)=0, \ \ u'(0)=1, \end{cases}$$

donde $p(x)=0,\ q(x)=w^2,\ h(x)=0$, con lo que $k(x,t)=(t-x)w^2$ y $f(x)=\int_0^x(x-t)0\,dt=0$ y la ecuación integral correspondiente seria

$$u(x)=x+w^2\int_0^x(t-x)u(t)dt,$$

así vemos que cumple la ecuación integral de Volterra de segunda clase, resolviendo la ecuación de Volterra podremos obtenerla solución por el método de Laplace obtenemos

$$u(x)=\frac{\operatorname{sen}(wx)}{w}.$$

Si se dieran condiciones de frontera

$$*u(0)=0;$$

$$*u(1)=0,$$

se tendría que modificar el procedimiento ya que desconocemos $u'(0)$. La primera integral conduce a

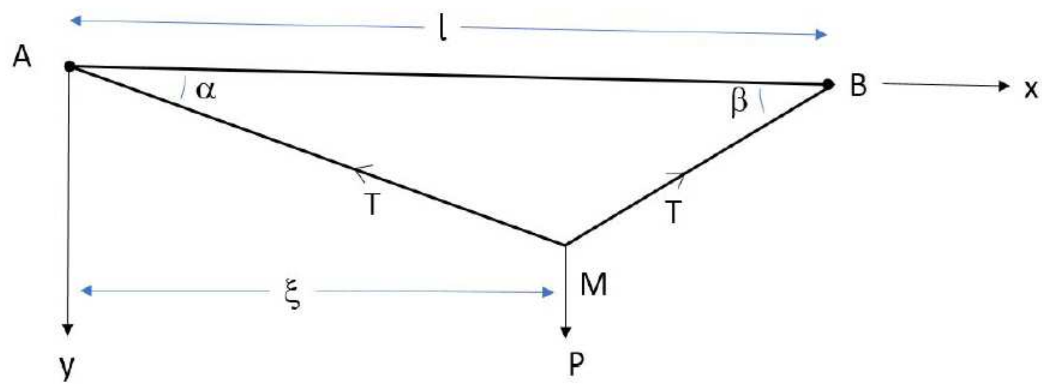
$$u' = -w^2 \int_0^x u\,dx + u_0,$$

volviendo a integrar,

$$u = -w^2 \int_0^x (x-t)u(t)dt + u'(0)x.$$

Si se impone que la condición de frontera $u(1)=0$ entonces

$$w^2 \int_0^1 (1-t)u(t)dt = 1 * u'(0);$$
$$\Rightarrow u'(0) = \frac{w^2}{1}\int_0^1 (1-t)u(t)dt;$$
$$\Rightarrow u' = -w^2 \int_0^1 (x-t)u(t)dt + \frac{w^2}{1}\int_0^1 (1-t)u(t)dt,$$



o bien,

$$u(x) = w^2 \int_0^1 \frac{t}{1}(1-x)u(t)dt + w^2 \int_0^1 \frac{x}{1}(1-t)u(t)dt.$$

Si definimos un núcleo tal que

$$k(x,t)\begin{cases} *\frac{t}{1}(1-x) \text{ para } t<x \\ *\frac{x}{1}(1-t) \text{ para } x<t, \end{cases}$$

así tenemos

$$k(x,t) = \frac{t}{1}(1-x)\theta(x-t) + \frac{x}{1}(1-t)\theta(t-x),$$

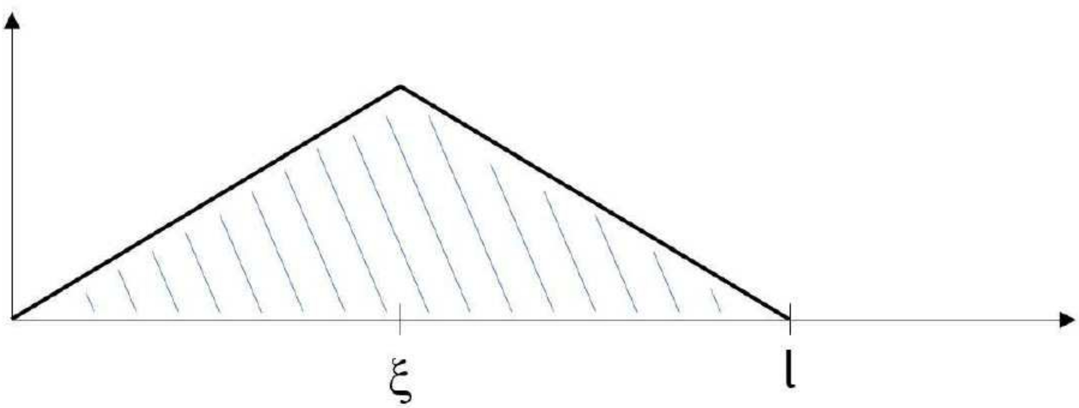
donde $\theta(x)$ es la función de escalón de Heavisible. Sustituyendo llegamos a que

$$u(x) = w^2 \int_0^1 k(x,t)u(t)dt,$$

que es la ecuación de integral de Fredholm de segundo grado.

Para este ejemplo veremos el desarrollo de una ecuación integral de Fredholm a una ecuación diferencial de segundo grado.

Los ejemplos físicos conducentes a ecuaciones integrales tenemos la cuerda con carga continua donde, l es la longitud horizontal de la cuerda de peso despreciable, tensa entre dos puntos A y B fijados, de manera que no puede ser sensiblemente modificada por la aparición de un peso P en un punto M a distancia de ξ de A, lo que implica naturalmente, una modificación muy leve de la forma de la cuerda.



Por la gráfica podemos obtener que $y(x) = x\,tg(\alpha) = \dfrac{P}{Tl}x(l-\xi)$ a la izquierda de punto P $y(x) = (l-x)tg(\beta) = \dfrac{P}{Tl}\xi(l-x)$ a la derecha de punto P, entonces

$$y(x) = \frac{P}{T}K(x,\xi) \text{ donde } K(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{x(l-\xi)}{l} & \text{para } x \leq \xi \\ \dfrac{\xi(l-x)}{l} & \text{para } x \geq \xi. \end{cases}$$

Se supone una carga continua distribuida a lo largo de la cuerda, según la ley de densidad, en cada elemento $d\xi$ hay una carga elemental $p(\xi)d\xi$, aplicando el principio de superposición obtenemos que la forma de la cuerda viene dada por:

$$y(x) = \frac{1}{T}\int_0^l p(\xi)K(x,\xi)d\xi, \tag{4.1.9}$$

donde esta ecuación es conocida como la ecuación integral de primer tipo de Fredholm.

CUERDA VIBRANTE

Ahora, si la cuerda realiza ciertas oscilaciones. Sea $y(x,t)$ la posición en el momento t de aquel punto de la cuerda cuya abscisa es x y sea ρ la densidad lineal de la cuerda. Entonces, sobre un elemento de la cuerda actúa una fuerza de inercia igual a $-\rho\dfrac{\partial^2 y(\xi,t)}{\partial t^2}$. Sustituyendo en la ecuación 4.1.8, se obtiene

$$y(x,t) = \frac{-\rho}{T}\int_0^l \frac{\partial^2 y(\xi,t)}{\partial t^2}K(x,\xi)d\xi$$

se considera que la cuerda realiza oscilaciones armónicas, es decir, buscamos soluciones de la forma $y(x,t) = Y(x)cos(\omega t + \theta)$,

$$\frac{\partial y}{\partial t} = Y(x)(-sen(\omega t + \theta)\omega);$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -Y(x)\omega^2 cos(\omega t + \theta) \Rightarrow \frac{\partial^2 y(\xi, t)}{\partial t^2} = -Y(\xi\omega^2 cos(\omega t + \theta)).$$

Por tanto,

$$Y(x)cos(\omega t + \theta) = \frac{\rho}{T}\int_0^l Y(\xi)\omega^2 cos(\omega t + \theta)K(x,\xi)d\xi;$$

entonces

$$\Rightarrow Y(x) = \frac{\rho\omega^2}{T}\int_0^l Y(\xi)K(x,\xi)d\xi.$$

Al ser $\rho, T > 0$, haciendo $\dfrac{T}{\rho} = a^2$,

$$Y(x) = \frac{\omega^2}{a^2}\int_0^l Y(\xi)K(x,\xi)d\xi, \tag{4.1.10}$$

se puede ver que las soluciones de esta ecuación de segundo tipo son las mismas que las de la ecuación diferencial de segundo orden de la ecuación de la cuerda vibrante.

$$a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \tag{4.1.11}$$

en efecto, se nota que

$$\frac{\partial y}{\partial x} = Y'(x)cos(\omega t + \theta) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = Y''(x)cos(\omega t + \theta).$$

Por tanto,

$$a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \text{si, y solo, si} a^2 Y''(x)cos(\omega t + \theta) = -Y(x)\omega^2 cos(\omega t\theta);$$

$$\text{si, y solo, si}\, Y''(x) = \frac{-\omega^2}{a^2}Y(x);$$

$$\text{si, y solo, si}\, Y''(x) + \frac{\omega^2}{a^2}Y(x) = 0.$$

Considerando $Y(0) = Y(l) = 0$, obtenemos que:

$$y(0,t) = Y(0)cos(\omega t + \theta) = 0;$$

$$y(l,t) = Y(l)cos(\omega t + \theta) = 0.$$

Por tanto, como lo buscamos para cualquier t, vamos a tomar

$$\begin{cases} Y(0) = 0 \\ Y(l) = 0. \end{cases}$$

En conclusión

$$\begin{cases} Y'' + \dfrac{\omega^2}{a^2} Y = 0 \\ Y(0) = 0 \\ Y(l) = 0, \end{cases} \tag{4.1.12}$$

Se puede ver que toda solución de la ecuación integral inicial es solución de esta ecuación diferencial de segundo grado con condiciones de frontera.

Se parte de la ecuación diferencial de segundo grado, $Y''(\xi) + \dfrac{\omega^2}{a^2} Y(\xi) = 0$, multiplicando por $K(x,\xi)$ e integrando entre 0 y l

$$\int_0^l Y''(\xi) K(x,\xi) d\xi + \frac{\omega^2}{a^2} \int_0^l Y(\xi) K(x,\xi) d\xi = 0.$$

Formalmente, integrando por partes y teniendo en cuenta como representamos el núcleo

$$\int_0^l Y''(\xi) K(x,\xi) d\xi = K(x,\xi) Y'(\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=l} - \int_0^l \partial_\xi K(x,\xi) Y(\xi) d\xi,$$

entonces

$$\int_0^l Y''(\xi) K(x,\xi) d\xi = K(l,\xi) Y'(l) - K(0,\xi) Y'(0) - \int_0^l \partial_\xi K(x,\xi) Y'(\xi) d\xi, \tag{4.1.13}$$

volviendo a integrar por partes

$$-\int_0^l \partial_\xi K(x,\xi) Y'(\xi) d\xi = \partial_\xi K(x,\xi) Y(\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=l} + \int_0^l \partial_{\xi\xi}^2 K(x,\xi) Y(\xi) d\xi,$$

entonces

$$-\int_0^l \partial_\xi K(x,\xi) Y'(\xi) d\xi = -\partial_\xi K(l,\xi) Y(l) + \partial_\xi K(0,\xi) Y(0) + \int_0^l \partial_{\xi\xi}^2 K(x,\xi) Y(\xi) d\xi, \tag{4.1.14}$$

se usa la Teoría de distribuciones, sea $\varphi \in D(0,l)$, entonces

$$\begin{aligned} \langle \partial_\xi K(x,\xi), \varphi(\xi) \rangle &= -\langle K(x,\xi), \varphi'(\xi) \rangle = -\int_0^l K(x,\xi) \varphi'(\xi) d\xi \\ &= -\int_0^x \frac{\xi(l-x)}{l} \varphi'(\xi) d\xi - \int_x^l \frac{x(l-\xi)}{l} \varphi'(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

integrando por partes

$$\begin{aligned} \langle \partial_\xi K(x,\xi), \varphi(\xi) \rangle &= -\frac{\xi(l-x)}{l} \varphi(\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=x} + \int_0^x \frac{l-x}{l} \varphi(\xi) d\xi - \frac{x(l-\xi)}{l} \varphi(\xi)\Big|_{\xi=x}^{\xi=l} + \int_0^x \frac{-x}{l} \varphi(\xi) d\xi \\ &= \frac{-x(l-x)}{l} \varphi(x) + \int_0^x \frac{l-x}{l} \varphi(\xi) d\xi + \frac{x(l-x)}{l} \varphi(x) + \int_x^l \frac{-x}{l} \varphi(\xi) d\xi \\ &= \int_0^x \frac{l-x}{l} \varphi(\xi) d\xi + \int_x^l \frac{-x}{l} \varphi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\partial_\xi K(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{x(l-\xi)}{l} & \text{para } x < \xi \\ \dfrac{\xi(l-x)}{l} & \text{para } x > \xi, \end{cases}$$

del mismo modo, donde x esta fijada:

$$\begin{aligned}
\left\langle \partial^2_{\xi\xi} K(x,\xi), \varphi(\xi) \right\rangle &= -\left\langle \partial_\xi K(x,\xi), \varphi'(\xi) \right\rangle \\
&= -\int_0^l \partial_\xi K(x,\xi)\varphi'(\xi) d\xi \\
&= -\int_0^l \partial_\xi K(x,\xi)\varphi'(\xi) d\xi - \int_x^l \partial_\xi K(x,\xi)\varphi'(\xi) d\xi \\
&= -\int_0^x \left(\frac{l-x}{l}\right) \varphi'(\xi) d\xi + \int_x^l \frac{x}{l} \varphi'(\xi) d\xi \\
&= -\int_0^x \left(\frac{l-x}{l}\right) \varphi'(\xi) d\xi + \int_x^l \frac{x}{l} \varphi'(\xi) d\xi \\
&= -\left(\frac{l-x}{l}\right) \int_0^x \varphi'(\xi) d\xi + \frac{x}{l} \int_x^l \varphi'(\xi) d\xi \\
&= -\left(\frac{l-x}{l}\right) \left[\varphi(x) - \varphi(0)\right] + \frac{x}{l} \left[\varphi(l) - \varphi(x)\right] \\
&= \varphi(x) \left[-\frac{l-x}{l} - \frac{x}{l} \right] \\
&= -\varphi(x).
\end{aligned}$$

Luego,

$$\left\langle \partial^2_{\xi\xi} K(x,\xi), \varphi(\xi) \right\rangle = -\varphi(x) = -\left\langle \delta_x, \varphi \right\rangle,$$

entonces

$$\partial^2_{\xi\xi} = K(x,\xi) = -\delta_x,$$

de 4.1.13 y 4.1.14 se llega a

$$\begin{aligned}
\int_0^l Y''(\xi) K(x,\xi) d\xi &= \int_0^l \partial^2_{\xi\xi} K(x,\xi) Y(\xi) d\xi \\
&= \int_0^l -\delta_x(\xi) Y(\xi) d\xi \\
&= \langle \delta_x, Y \rangle \\
&= -Y(x).
\end{aligned}$$

En conclusión,

$$-Y(x) + \frac{\omega^2}{a^2} \int_0^l K(x,\xi) Y(\xi) d\xi,$$

entonces

$$Y(x) = \frac{\omega^2}{a^2} \int_0^l K(x,\xi) Y(\xi) d\xi.$$

Veamos ahora el recíproco, toda solución de 4.1.10 es solución de 4.1.12

Sea $\varphi \in \mathrm{D}(0,l)$, vamos a calcular $\partial_x K(x,\xi)$

$$\begin{aligned}\left\langle \partial_x K(x,\xi), \varphi(x)\right\rangle &= -\left\langle K(x,\xi,\varphi'(x)\right\rangle \\ &= -\int_0^l K(x,\xi)\varphi'(x)d\xi \\ &= \int_0^\xi \frac{x(l-\xi)}{l}\varphi'(x)dx - \int_\xi^l \frac{\xi(l-x)}{l}\varphi'(x)dx,\end{aligned}$$

integrando por partes, se tiene

$$\begin{aligned}\left\langle \partial_x K(x,\xi), \varphi(x)\right\rangle &= -\frac{x(l-\xi)}{l}\ \varphi(x)\Big|_{x=0}^{x=\xi} + \int_0^\xi \frac{(l-\xi)}{l}\varphi(x)dx - \frac{\xi(l-x)}{l}\ \varphi(x)\Big|_\xi^l \left(\frac{(-\xi)}{l}\right)\varphi(x)dx \\ &= \int_0^\xi \frac{l-\xi}{l}\varphi(x)dx + \int_\xi^l \left(-\frac{-\xi}{l}\right)\varphi(x)dx.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\partial_\xi K(x,\xi) = \begin{cases} 1-\dfrac{\xi}{l} & \text{para } \xi > x \\ \dfrac{-\xi}{l} & \text{para } x > \xi \end{cases}.$$

Ahora calculemos $\partial^2_{\xi\xi} K(x,\xi)$ usando que φ es una función de soporte compacto en $(0,l)$ y por tanto $\varphi(0)=0$ y $\varphi(l)=0$.

$$\begin{aligned}\langle \partial_{xx} 2\rangle = -\left\langle \partial_x K(x,\xi), \varphi'(x)\right\rangle &= -\int_0^\xi \left(1-\frac{\xi}{l}\right)\varphi'(x)dx + \int_\xi^l \frac{\xi}{l}\varphi'(x)dx \\ &= -\left(1-\frac{\xi}{l}\right)\varphi\ (x)|_{x=0}^{x=\xi} + \frac{\xi}{l}\varphi\ (x)|_{x=\xi}^{x=l} \\ &= -\left(1-\frac{\xi}{l}\right)\varphi(\xi) + \left(1-\frac{\xi}{l}\right)\varphi(0) + \frac{\xi}{l}\varphi(l) - \frac{\xi}{l}\varphi(\xi) \\ &= -\left[-1+\frac{\xi}{l}-\frac{\xi}{l}\right]\varphi(\xi) \\ &= -\varphi(\xi) \\ &= \left\langle -\delta_{x=\xi}, \varphi\right\rangle,\end{aligned}$$

por consiguiente,

$$\partial^2_{xx} K(x,\xi) = -\delta_{x=\xi},$$

luego

$$
\begin{aligned}
Y''(x) &= \frac{\omega^2}{a^2}\int_0^l Y(\xi)\partial^2_{xx}K(x,\xi)d\xi \\
&= \frac{\omega^2}{a^2}\int_0^l -\delta_{\xi=x}Y(\xi)d\xi \\
&= \frac{-\omega^2}{a^2}\left\langle \delta_{x=\xi}, Y\right\rangle \\
&= \frac{-\omega^2}{a^2}Y(x).
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$Y'' + \frac{\omega^2}{a^2}Y = 0,$$

además, usando la definición del núcleo de $K(x,\xi)$ definido anteriormente, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
Y(l) &= \frac{\omega^2}{a^2}\int_0^l K(l,\xi)Y(\xi)d\xi = 0 \\
Y(0) &= \frac{\omega^2}{a^2}\int_0^l K(0,\xi)Y(\xi)d\xi = 0.
\end{aligned}
$$

Este ejemplo nos muestra la equivalencia que hay entre los problemas de contorno y las ecuaciones integrales, pero además nos da las soluciones de una ecuación integral tipo Fredholm homogénea de segunda especie con núcleo triangular.

Si resolvemos

$$Y'' + \lambda Y = 0, \quad \lambda > 0, \tag{4.1.15}$$

la ecuación característica será $r^2 + \lambda = 0$, luego $r^2 = \lambda$. Tomando $\lambda = a^2$ con $a > 0$, la solución fundamental de 4.1.15 vendría dada por

$$Y(x) = C_1 textcos(ax) + C_2\text{sen}(ax).$$

Al ser $Y(0) = 0 y Y(l) = 0$, se deduce que $C_1 = 0$ y C_2 sen$(al) = 0$ respectivamente.

Como buscamos soluciones no nulas, entonces sen$(al) = 0$, luego $al = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, y por tanto $a = \dfrac{k\pi}{l}$ con $k \geq 0$ ya que $a > 0$. En consecuencia, la sucesión de valores propios sería $\lambda_k = \dfrac{(k\pi)^2}{l^2}$ y la sucesión de soluciones propias

$$Y_k(x) = C\,\text{sen}\left(\frac{k\pi x}{l}\right).$$

En conclusión, las soluciones de 4.1.15 son la solución nula y, tomando un representante, la sucesión de las soluciones propias

$$Y_k(x) = \sqrt{\lambda_k}\,\text{sen}\left(\frac{k\pi x}{l}\right) = \frac{k\pi}{l}\,\text{sen}\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$$

4.2. Conclusiones

Se concluye que:

El Teorema de la Alternativa de Fredholm (Teorema 2.4), muestra la existencia de soluciones de ecuaciones integrales, bajo ciertas condiciones necesarias para las condiciones. Específicamente, con el núcleo continuo y el planteamiento de la ecuación integral de Fredholm, tomando como un caso particular a la ecuación integral de Volterra.

De acuerdo al comportamiento del núcleo continuo en un espacio de Hilbert Complejo de dimensión infinita, la Teoría espectral de los operadores compactos, garantiza que el Teorema de la Alternativa de Fredholm da la posibilidad de una solución o varias soluciones dependiendo si es una ecuación integral de Fredholm o una ecuación integral de Volterra, asociando a ecuaciones diferencial de segunda clase con condiciones iniciales o de frontera.

El porque se estudian la ecuación integral de Fredholm y la ecuación integral de Volterra, si derivando, bajo las hipótesis necesarias, podemos obtener la ecuación diferencial correspondiente. La respuesta viene de que las ecuaciones diferenciales necesitan de unas hipótesis de regularidad mucho mas fuertes que las ecuaciones integrales, de esta forma resulta mas accesible resolverla mediante una ecuación integral. Vimos que una ecuación diferenciable involucra operadores no necesariamente acotados, en cambio una ecuación integrable involucra operadores acotados.

Por último, cabe destacar que al haber una estrecha relación entre ecuaciones integrales de Fredholm, Volterra y las ecuaciones diferenciales, se utilizaron los resultados vistos en ecuaciones diferenciales ordinarias para los ejemplos y las aplicaciones en la física. El trabajo de Fredholm en la Teoría de ecuaciones integrales marco un cambio de ver los sistemas donde se puede ver más una opción de resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Anexo A. Resultados utilizados

Teorema A.1. *Un espacio de Hilbert infinito dimensional* $\mathcal{H}$ *es separable si solo si tiene una base ortonormal.*

Teorema A.2. Desigualdad de Bessel. *Sea* X *un espacio con producto interno y sea* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión ortonormal. Para cualquier* $x \in X$ *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$ *converge y*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Teorema A.3. *Sea* X *un espacio de Banach. Si* T *es un operador acotado en* X *con* $\|T\| < 1$ *entonces* $I - T$ *es invertible y la inversa es dado por*

$$(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Teorema A.4. *Sea* $A = [a,b]*[c,d]$ *un rectángulo de tal* $\mathbb{R}^2$ *y* f *integrable en* $C(A,\mathbb{R})$*, tal que las funciones* $f_x \in C([c,d],\mathbb{R})$*, donde* $f_x(y) = (x,y)$ *son integrables en* $[c,d]$*, para* $x \in [a,b]$*, entonces* $x \mapsto \int_c^d f(x,y)dy$*, es integrable en* $[a,b]$ *y*

$$\int_A f = \int_a^b \left(\int_c^d f_x(y)dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx.$$

Bibliografía

[1] César R. de Oliveira, *Introdução à análise funcional*, Proyecto Euclides, Brasil, 2012.

[2] Martin Schechter, *Principles of Functional Analysis*, American Mathematical Society, USA, 2002.

[3] Robert E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer, New York, 1998.

[4] T., *Introduction a la theorie des equations integrales*, Gauthier- Villars, Paris, 1922.

[5] Adam P. *Curso teórico-Práctico de ecuaciones diferenciales aplicado a la física y técnica* Madrid, 1965.