UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRES

FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES
CARRERA DE MATEMÁTICA

Tesis de Maestría

GRUPOS DE DIVISIBILIDAD

Postulante
Lic. Eugenio Castaños Calle

Tutor
Dr. Ramiro H. Lafuente Rodriguez

LA PAZ - BOLIVIA

2021

Dedicatoria

A la perseverancia, con mucho amor a Karen, Lyanne, Alexander, Wendy y Karley. En especial a Lucy por su comprensión.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi esposa e hijos en los que encuentro la esperanza, a mis padres por sus sueños en el tiempo y a toda mi familia por ser parte de mí.
Al entrañable amigo colega Dr. Ramiro Hernán Lafuente R. mi tutor por su permanente apoyo.
A mis tribunales Msc. Marcelo Machicao R. y Msc. Ernesto Cupe por las sugerencias y orientación en el desarrollo de mi trabajo.

Eugenio Castaños Calle

Índice general

Parte I:

Preliminares

Introducción

El estudio de Los Grupos de Divisibilidad se desarrolla a mediados del siglo XX, en los trabajos de Paul Jaffard[1] y Ohm [2]; como una generalización del concepto de divisibilidad y una extensión de los conceptos de la Teoría de Números a una escena más amplia dentro de la teoría de anillos. Esta teoría de los Grupos de Divisibilidad tiene una fuerte influencia en las estructuras algebraicas ordenadas es decir, en la teoría de los anillos reticularmente ordenados y de los grupos reticularmente ordenados.

Grupos de divisibilidad

Sea la Estructura Algebraica en el que se considera un dominio de integridad D, con U grupo de unidades y el campo cociente K. Si K^*,denota el grupo multiplicativo de K y U subgrupo de K^*, es posible definir el cociente K^*/U como el Grupo de Divisibilidad $G(D)$, afirmando que es un grupo parcialmente ordenado.

Una aplicación importante de ℓ-grupos abelianos es la teoría de dominios de integridad; a través de Grupos de Divisibilidad, facilitado por el hecho de que cada l-grupo abeliano, se puede obtener como un Grupo de Divisibilidad de un dominio apropiado.

Alternativamente se podría considerar el conjunto $\{Dx : x \in K^*\}$ de todos los D- submodulos cíclicos no triviales de K, este conjunto es un grupo parcialmente ordenado isomorfo a G.

Ahora centramos nuestra atención en aquellos dominios para los que el orden parcial sobre los Grupos de Divisibilidad es un retículo ordenado.

Los conceptos de dominios de Bezout y Pseudo Bezout, dan lugar a la propiedad: Un dominio es un dominio de Bezout si y solo si el Grupo de Divisibilidad es un retículo ordenado.

Comenzamos con un dominio y se obtuvo su Grupo de Divisibilidad del campo cociente.

Alternativamente podemos comenzar con el campo equipado con una función en un ℓ-grupo. Estableciendo la propiedad de que cada l-grupo abeliano es el Grupo de Divisibilidad de un dominio de Bezout.

Este es un hecho crucial que permite el traslado de problemas de anillos-teóricos en el lenguaje de ℓ-grupos abelianos, es decir que cada ℓ-grupo surge como Grupo de Divisibilidad de algún dominio (dominio de Bezout). Dando lugar a la correspondencia entre supra-anillos de un dominio de Bezout y los ℓ-grupos convexos de un Grupo de Divisibilidad.

Por tanto, el objetivo general de este trabajo es investigar la forma de convertir un anillo conmutativo en un ℓ-grupo bajo el concepto de divisibilidad, facilitado por el hecho de que cada ℓ-grupo abeliano se puede obtener como un grupo de divisibilidad de un dominio apropiado.

Capítulo 1

ℓ-grupos

En este capítulo y el siguiente vamos a desarrollar las definiciones básicas y notaciones utilizadas en la teoría de grupos reticularmente ordenados, y proporcionar un conjunto de ejemplos cuya importancia serán plenamente apreciados en su momento. La notación aditiva y multiplicativa son a la vez utilizados para el grupo subyacente de un grupo reticularmente ordenado, dependiendo de la aplicación particular en mente, y nos sentiremos libres de usar ambos. Con el fin de que la palabra "positivo" tenga su significado habitual, lo haremos en nuestras definiciones utilizando notación aditiva. El lector no debe inferir de esto que todos los grupos a que se refiere son abeliano.

Un grupo $(G, +)$ se dice que está parcialmente ordenado si está equipado con una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva $\leq$ (un orden parcial) que es compatible con $+$; esto es, si $g \leq h$, entonces, $g + k \leq h + k$ y $k + g \leq k + h$, para cualquier $g, h, k \in G$. El conjunto $G^+ = \{g \in G \mid g > 0\}$ de elementos positivos se llama el *cono positivo* de G. Es fácilmente verificable que el orden parcial determinado por G^+, en el sentido de que $g \leq h$ si y sólo si $h - g \in G^+ \cup \{0\}$. Además, cualquier conjunto $P \subseteq G$ que es cerrado bajo la adición, normal (es decir, $g + P - g = P$ para todos $g \in G$), y satisface la propiedad $P \cap -P = \emptyset$, da lugar a un orden parcial de G.

Supongamos ahora que el orden parcial en G es de hecho una retículo (lo que significa que cada par de elementos a, b de G tiene un límite superior (supremo)

$a \vee b$ y un limite inferior(ínfimo) $a \wedge b$). Entonces G es un grupo *reticularmente ordenado* (o ℓ-grupo, aunque algunos autores prefieren el término de grupo reticular). En los casos en que deseamos hablar del supremo (o del ínfimo) de conjuntos con cardinalidad mayor de dos, usaremos la notación siguiente: $a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n$ (para conjuntos con cardinalidad finita); $\bigvee_{i\in I} a_i$ (para algún conjunto de índices I); $\vee A$ (para algún conjunto $A \subseteq G$); o los análogos para ínfimos. Nótese, sin embargo, que la definición de ℓ-grupo no implica necesariamente la existencia de supremos e ínfimos para otros conjuntos finitos.

Si el orden reticular en un ℓ-grupo G es un orden total (es decir, para cualquier $g, h \in G$, se tiene $g \geq h$ o $h \geq g$), entonces llamamos a G un o-grupo. Nótese que en este caso el cono positivo satisface el criterio adicional de que $P \cup -P \cup \{0\} = G$. Así como un teórico de semigrupos considera su problema se reduce a la teoría de grupos, adoptaremos la opinión de que nuestra comprensión es suficiente cuando podemos reducir preguntas ℓ-grupo a preguntas sobre o-grupos. El tema de o-grupos es en sí rico y lleno de dificultades, y se aconseja al lector consultar textos apropiados para una introducción a la misma. Es fácil comprobar que la operación del grupo distribuye sobre ambos $\vee$ y $\wedge$; esto es,

$$a + b \vee c + d = (a + b + d) \vee (a + c + d),$$

y de igual forma para $\wedge$. La relación entre las operaciones de retículos y el inverso del grupo viene dada por las que podrían llamarse leyes de DeMorgan :

Proposición 1.1 Sean $a, b \in G$. Entonces:

(a) $-(a \vee b) = -a \wedge -b$,

(b) $-(a \wedge b) = -a \vee -b$.

Demostración. Vamos a demostrar solamente (a). Dado que $a, b \leq a \vee b$ entonces, $-a, -b \geq -(a \vee b)$, y también $-a \wedge -b \geq -(a \vee b)$. Para la desigualdad inversa, supongamos que $-a, -b \geq c$, entonces, $a, b \leq -c$, y así $a \vee b \leq -c$; es decir $c \leq -(a \vee b)$. ■

Podemos deducir de la prueba de esta proposición un resultado adicional. Un grupo parcialmente ordenado que es un sup-semiretículo (o ínf-semiretículo) es necesariamente un ℓ-grupo. La siguiente identidad también se desprende de la proposición:

1.2 $\quad a - (a \wedge b) + b = a \vee b$

Esto es debido a que $a - (a \wedge b) = 0 \vee (a - b) = (a \vee b) - b$.

Para $g \in G$, la parte positiva g^+ de g es $g \vee 0$; y la parte negativa g^- de g es $(-g) \vee 0$. Entonces

$$g + g^- = g + (-g \vee 0) = 0 \vee g = g^+;$$

y por eso tenemos que $g = g^+ - g^-$. Ahora,

$$g^+ \wedge g^- = (g + g^-) \wedge g^- = (g \wedge 0) + g^- = -g^- + g^- = 0$$

Si $a \wedge b = 0$, decimos que a y b son *disjuntos.*

Por lo tanto, hemos demostrado que cada elemento de un ℓ-grupo puede representarse como la diferencia de dos elementos positivos disjuntos; el lector puede comprobar que esta representación es única. De hecho, esta propiedad caracteriza a los ℓ-grupos: un grupo parcialmente ordenado dirigido en el que cada elemento se puede representar de forma única como la diferencia positiva de elementos disjuntos es necesariamente un ℓ-grupo.

Nótese que los elementos disjuntos conmutan; de hecho, si $a \wedge b = 0$, entonces $a + b = a \vee b$. Para, $(a + b) - (a \vee b) = (a + b) + (-a \wedge -b) = (a + b - a) \wedge a = a + (b \wedge a) - a = 0$. El *valor absoluto* $|g|$ de g es $g^+ + g^-$; como valor absoluto ordinario, $g = |g|$ exactamente cuando $g \geq 0$. El lector puede verificar que $|g| = g^+ \vee g^- = g \vee -g$. El valor absoluto satisface la desigualdad triangular debilitada:

1.3 $\quad |g + h| \leq |g| + |h| + |g|$. Pues

$$\begin{aligned} |g + h| &= (g + h) \vee 0 + (-h - g) \vee 0 \\ &\leq (g \vee 0) + (h \vee 0) + (-h \vee 0) + (-g \vee 0) \\ &\leq |g| + |h| + |g|. \end{aligned}$$

Además, puesto que $(g+h)^+$ y $(g+h)^-$ son disjuntos y así conmutan, también se deduce que:

1.4 $|g+h| \leq |h| + |g| + |h|$.

Tenga en cuenta que una ligera modificación de la prueba anterior muestra que si el grupo G es abeliano, la desigualdad triangular habitual se verifica. Y de hecho, la recíproca también se verifica: cualquier ℓ-grupo que satisface la desigualdad triangular habitual es necesariamente abeliano.

Una ley importante para ℓ-grupos es que obedecen la *propiedad de descomposición Reisz*, que es el contenido de la siguiente proposición. Existen parcialmente grupos ordenados que tienen esta propiedad, que no son ℓ-grupos, y se han estudiado mucho.

Proposición 1.5 Supongamos $h_1, \ldots, h_n \in G^+$. Si $0 \leq g \leq h_1 + h_2 + \ldots + h_n$, entonces $g = g_1 + g_2 + \ldots + g_n$, donde $0 \leq g_i \leq h_i$.

Demostración. Procedemos por inducción sobre n . El resultado es claro para $n = 1$. Supongamos ahora que $0 \leq g \leq h_1 + h_2 + \ldots + h_n$. Sea $g_1 = g_1 \wedge h_1$. Entonces

$$k = -g_1 + g = (-g \vee -h_1) + g = 0 \vee (-h_1 + g) \leq h_2 + \ldots + h_n,$$

y así por inducción $k = g_2 + \ldots + g_n$, con $0 \leq g_i \leq h_i$. Pero como $g = g_1 + k$ así se sigue la conclusión deseada. ■

Tenga en cuenta la siguiente consecuencia de la propiedad de descomposición Reisz :

1.6 Para positivos g, h y k, $g \wedge (h+k) \leq (g \wedge h) + (g \wedge k)$. Es natural preguntar como a cuales grupos y cuales retículos admiten estructura de ℓ-grupo.

Algunas de las restricciones más evidentes están contenidos en la siguiente proposición. Necesitamos la siguiente terminología de la teoría de retículos: Un retículo L es *homogéneo* si para $a, b \in L$, existe un automorfismo reticular de L que toma de a a b; además L es *distributiva* si $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, y dualmente, para todo $a, b, c \in L$.

Proposición 1.7

(a) El retículo de un ℓ-grupo es homogéneo y distributivo.

(b) El grupo de un ℓ-grupo es libre de torsión.

(c) En un ℓ-grupo, $na = nb$ implica $-c + a + c = b$ para algún c.

Demostración. (a) La homogeneidad de el retículo se deduce del hecho que $x \mapsto x + g$ es un retículo automorfico, para cualquier fijo $g \in G$. Para mostrar que el retículo es distributivo, sólo necesitamos demostrar que si $g \wedge k = h \wedge k$ y $g \vee k = h \vee k$, entonces $g = h$. Pero debido 1.2, tenemos

$$g = (g \vee k) - k - (g \wedge k) = (h \vee k) - k - (h \wedge k) = h.$$

(b) Supongamos que $ng = 0$, por algún elemento g de ℓ-grupo y un positivo entero n. Entonces (repitiendo la distribución varias veces a la adición sobre uniones),

$$n(g \vee 0) = ng \vee (n-1)g \vee \cdots \vee g \vee 0 = (n-1)g \vee \cdots \vee g \vee 0 = (n-1)(g \vee 0).$$

Pero entonces, $g \vee 0 = 0$. De manera similar, $-g \vee 0 = 0$, y así $g = O$.

(c) Sea $c = (n-1)a \vee (n-2)a + b \vee \cdots \vee a + (n-2)b \vee (n-1)b$. Entonces $a + c = c + b$. ■

El hecho de que el retículo de un ℓ-grupo es distributivo era conocido en el caso abeliano por Dedekind y fue redescubierto por Freudenthal. Y Birkhoff demostró el teorema general.

Las condiciones de la Proposición 1.7 no caracterizan los retículos o grupos que admiten la estructura de un ℓ-grupo.

Proposición 1.8 Para un grupo abeliano G, los siguientes son equivalentes:

(a) G admite una estructura o-grupo.

(b) G admite una estructura ℓ-grupo.

(c) G es libre de torsión.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) es obvia, y (b) $\Rightarrow$ (c) está contenida en la Proposición 1.7. Si G es libre de torsión y abeliano, que puede ser encajado en su casco divisible G^d, que como un espacio vectorial racional se puede representar como $\sum_{\lambda\in\Lambda} Q_\lambda$, una suma directa de copias de los racionales aditivos Q. Provee Λ con un buen orden, y llama a un elemento en G^d positiva si es positiva en su primer componente distinto de cero de acuerdo con el buen orden de Λ. Se puede comprobar que esta provee un orden total de G^d, y en consecuencia para G. ■

Proposición 1.9 Sea g, h elementos de el ℓ-grupo G. Entonces

$$g^+ + h^+ \geq (g+h)^+ \geq g^+ \wedge h^+.$$

Demostración. La primera desigualdad es fácilmente resuelta como sigue:

$$\begin{aligned} g^+ + h^+ &= (g \vee 0) + (h \vee 0) \\ &= (g+h) \vee g \vee h \vee 0 \\ &\geq (g+h) \vee 0 = (g+h)^+. \end{aligned}$$

Para la prueba de la segunda desigualdad, tenemos

$$\begin{aligned} (g+h)^+ &= (g+h) \vee 0 = (g \vee -h) + h = (g \vee -h)^+ - (g \vee -h)^- + h \\ &= (g \vee -h \vee 0) - ((-g \wedge h) \vee 0) + h \\ &= g \vee h^- - ((-g \vee 0) \wedge (h \vee 0)) + h \\ &= (g^+ \vee h^-) - (g^- \wedge h^+) + h. \end{aligned}$$

Ahora aplicamos 1.2 al unirse a esta última expresión para obtener

$$(g+h)^+ = g^+ - (g^+ \wedge h^-) + h^- - (g^- \wedge h^+) - h^- + h^+.$$

Ya que $g^- \wedge h^+$ y h^- son disjuntos y por lo tanto conmuta, tenemos

$$\begin{aligned}(g+h)^+ &= g^+ - (g^+ \wedge h^-) - (g^- \wedge h^+) + h^+ \\ &= g^+ - ((g^- \wedge h^+) + (g^+ \wedge h^-)) + h^+ \\ &= g^+ - ((g^- \wedge h^+) \vee (g^+ \wedge h^-)) + h^+.\end{aligned}$$

Donde esta última igualdad se cumple porque $g^- \wedge h^+$ y $g^+ \wedge h^-$ son disjuntos. Pero entonces:

$$(g+h)^+ \geq g^+ - (h^+ \vee g^+) + h^+ = g^+ \wedge h^+$$

la última igualdad es por 1.2. ■

Ahora vamos a describir algunas igualdades importantes que impliquen operaciones de distribución sobre uniones e intersecciones infinitas. El cuidado debe ser tomado en la interpretación de estas ecuaciones, ya que no toda unión e intersección infinita necesariamente existe en un ℓ-grupo arbitrario.

En primer lugar, podemos mencionar las versiones infinitas de las leyes de DeMorgan, es decir

1.10 $-(\bigvee h_\lambda) = \bigwedge(-h_\lambda)$, y dualmente.

Por estas ecuaciones queremos decir que, si existe la operación de retículo infinita en un lado, a continuación, también lo hace sobre el otro lado, y la igualdad se mantiene. La prueba de estas leyes es casi idéntica a la del caso finito 1.1, como el lector puede verificar.

A continuación, se muestra que la operación del grupo se distribuye sobre las operaciones de retículos infinitas; nosotros interpretaremos la existencia de las operaciones de retículos infinitos de la misma manera que lo hicimos para 1.10:

1.11 $g + \bigvee h_\lambda = \bigvee(g + h_\lambda)$, y dualmente.

Para un ejemplo de las pruebas necesariamente, supongamos que $\bigvee h_\lambda$ existe. Es evidente que $g + \bigvee h_\lambda \geq g + h_\lambda$, para todos λ. Supongamos que $k \geq g + h_\lambda$ para todos λ; entonces tenemos que $-g+k \geq h_\lambda$, y así $-g+k \geq \bigvee h_\lambda$. Tenemos así $k \geq g + \bigvee h_\lambda$, y por lo tanto $g + \bigvee h_\lambda = \bigvee(g+h_\lambda)$, Como se quería.

1.12 Si $\bigvee h_\lambda$, existe, entonces $g \wedge \bigvee h_\lambda = \bigvee(g \wedge h_\lambda)$, y dualmente.

Tenga en cuenta que la existencia de la operación de retículo infinito de la derecha no implica necesariamente existencia de la izquierda (por ejemplo, considere un conjunto disjunto de elementos en una suma cardinal de enteros, definidos en la 1.15). Para una prueba, supongamos que $s = \bigvee h_\lambda$ existe. Entonces $g \wedge h_\lambda \leq g \wedge s$, para todo λ, y también $0 \leq (g \wedge s) - (g \wedge h_\lambda) \leq g \wedge (s - h_\lambda) \leq s - h_\lambda$. Pero $0 = s - \bigvee h_\lambda = \bigwedge(s - h_\lambda)$, y también $0 = \bigwedge((g \wedge s) - (g \wedge h_\lambda)) = g \wedge s - \bigvee(g \wedge h_\lambda)$, como se quería.

Ahora vamos a examinar lo que se puede decir de una expresión que implica tal vez infinitamente muchas uniones e intersecciones. Decimos que un ℓ-grupo satisface las leyes distributivas generalizadas si:

$$\bigvee_I \bigwedge_J g_{ij} = \bigwedge_{J^I} \bigvee_I g_{if(i)}, \text{ y dualmente para todos los conjuntos de índice } I \text{ y } J.$$

Una aplicación inductiva tediosa de las leyes de distribución primarias muestra que esto es cierto en el caso para cualquier retículo distributivo, si I y J son finitos. Además, la condición 1.12 nos da que estas leyes son válidas para un ℓ-grupo arbitrario si I es finito. Desafortunadamente, las leyes distributivas generalizadas no deberán mantenerse para todos los ℓ-grupos; ℓ-grupos que satisfacen esto son denominados *completamente distributivos.*

Concluiremos esta sección con una lista de ejemplos de ℓ-grupos.

1.13 Sea X un espacio topológico y $C(X)$ el grupo de funciones continuas de valores reales. Hacemos $C(X)$ un ℓ-grupo dotándolo de su orden habitual puntual: $f \leq g$ si y sólo si $f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in X$. Obviamente las modificaciones de este básico ejemplo abundan en análisis.

1.14 Sea Γ un sistema de raíces. Es decir, Γ es un conjunto parcialmente ordenado para los que $\{\alpha : \alpha \geq \gamma\}$ es totalmente ordenado, para cualquier, $\gamma \in \Gamma$. Sea $\{H_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ una colección de o-grupos indexado por Γ. Considere las funciones v sobre Γ para el cual $v(\gamma) \in H_\gamma$, para todo $\gamma \in \Gamma$. Teniendo en cuenta tales funciones v, el subconjunto de Γ donde v es distinto de cero se denomina su *soporte* y se denota por $spt(v)$. Sea $\bigvee(\Gamma, H_\gamma)$ el conjunto de todas las funciones cuyo soporte satisface la condición ascendente de cadena. Es fácil ver que este es un grupo bajo la adición. Además, si definimos un elemento para ser positivo si es positivo en cada elemento máximal de su soporte, el lector puede verificar que $\bigvee(\Gamma, H_\gamma)$ es un ℓ-grupo, que llamaremos un *grupo de Hahn* en Γ.

Ahora considere los elementos de $\bigvee(\Gamma, H_\gamma)$ cuyos soportes son finitos. Es evidente que este es también un ℓ-grupo equipado con el mismo orden, que denotamos por $\Sigma(\Gamma, H_\gamma)$, y es llamado *grupo restringido de Hahn*. El caso en el que cada H es el o-grupo $\mathbb{R}$ de los números reales es de particular importancia.

1.15 Sea $\{H_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una colección de o-grupos. Denotamos por ΣH_λ y ΠH_λ a los productos directos restringido y no-restringido de los Hs, respectivamente. Ambos de estos grupos se pueden hacer ℓ-grupos con el orden cardinal (o puntual); es decir, un elemento es exactamente positivo si es positivo en cada componente. Todas estas ordenaciones son llamadas *lexicográficas.*

1.16 Sea T un conjunto totalmente ordenado, y sea $A(T)$ el conjunto de orden de preservación, uno-a-uno, sobre mapas de T a T (el orden de preservación de permutaciones de T). Entonces $A(T)$ es un grupo bajo composición. Llamemos a un elemento positivo si $t\alpha \geq t$, para todos $t \in T$. Entonces $A(T)$ es un ℓ-grupo.

Capítulo 2

ℓ-homomorfismos

Una complicación para el álgebra de grupos de retículos-ordenados es que incluso en el caso abeliano, la mayoría de los subobjetos no pueden servir como núcleos de morfismos. Como veremos, la práctica importancia de esto para la teoría de los $\ell - grupos$ es que se preste más atención a subobjetos que no sólo son subretículos y subgrupos, sino también convexos. Afortunadamente, los retículos de ℓ-subgrupos convexos de un ℓ-grupo determinado contiene la mayor parte de la información que uno podría querer sobre el ℓ-grupo. Comenzaremos con morfismos. Una función $\phi : G \to H$ entre ℓ-grupos G y H es un ℓ-homomorfismo si es a la vez un homomorfismo de retículos y un homomorfismo de grupos. El lector puede verificar que es suficiente para comprobar que ϕ es un homomorfismos de grupos, y que $\phi(g \vee 0) = \phi(g) \vee 0$, para todos $g \in G$. Además, es claro que si ϕ es un ℓ-homomorfismo, entonces $\phi(G)$ es a la vez una subretículo y un subgrupo de H; es decir, $\phi(G)$ es un ℓ-subgrupo.

Vamos a caracterizar los núcleos de ℓ-homomorfismos. Primero necesitamos algunas definiciones.

Un ℓ-subgrupo K de un ℓ-grupo G es *convexo* si $h, k \in K$ y $h < g < k$ implica que $g \in K$. (Debido al muy diferente significado de "convexo" en el análisis, ℓ-subgrupos convexos a veces son llamados subgrupos sólidos). El lector puede verificar que con el fin de comprobar si un subgrupo K de G es un ℓ-subgrupo convexo, sólo es necesario verificar que si $k \in K, g \in G$ y $|g| \leq |k|$, entonces

$g \in K$. Un ℓ-subgrupo convexo normal, es llamado un ℓ-ideal.

El siguiente teorema afirma que ℓ-ideales son exactamente los núcleos de ℓ-homomorfismos, y que el grupo de clases laterales de un ℓ-ideal puede ser ordenado de una manera tal que se haga un ℓ-grupo.

Teorema 2.1 Sea ϕ un ℓ-homomorfismo de ℓ-grupo G sobre ℓ-grupo H.

(a) El núcleo $Ker(\phi)$ de ϕ es un ℓ-ideal.

(b) Si N es un ℓ-ideal de G, entonces el conjunto de clases laterales derecho G/N puede ser provisto de un orden que lo convierta en un ℓ-grupo, de manera natural por medio de la aplicación $\nu : G \to G/N$ que es un ℓ-homomorfismo.

(c) $G/Ker(\phi)$ es un ℓ-isomorfo a H.

Demostración. (a) es evidente.

(b) A partir de la teoría de grupos elemental, sabemos que G/N es un grupo, y $\nu : G \to G/N$ es un homomorfismo de grupos. Definimos $N + g \geq N + h$ en el sentido de que existe $k \in N$ tal que $k + g \geq h$. Se puede comprobar fácilmente que esta definición es independiente a la de representaciones de clases laterales, y que la relación resultante es reflexiva y transitiva. Para mostrar la antisimetría, supongamos que $N+g \geq N+h$ y $N+h \geq N+g$. Entonces, existen $r, s \in N$ con $r + g \geq h$ y $s + h \geq g$. Por lo tanto, $s + r + g \geq s + h \geq g$, por lo que $s + r \geq s + h - g \geq 0$. Como N es convexo, $h - g \in N$ y así $N + g = N + h$. Por lo tanto, tenemos un orden parcial sobre G/N. Ahora afirmamos que $N + g \vee h = (N + g) \vee (N + h)$. Claramente, $N + g \vee h \geq N + g$, $N + h$. Si $N + d \geq N + g$, N + h, a continuación , $a + d \geq g$ y $b + d \geq h$, para $a, b \in N$. Pero entonces, $(a \vee b) + d = (a + d) \vee (b + d) \geq g \vee h$, y puesto que N es un subretículo, $N + d \geq N + g \vee h$. Por lo tanto, G/N es una sup-semiretículo. Desde G/N también es un grupo, esto es un ℓ-grupo.

(c) Esto es ahora evidente. ■

Vale la pena señalar que la prueba anterior comprueba que el conjunto de clases laterales derechas G/N es de hecho de un retículo bajo el orden de G incluso si N no es normal.

Ahora examinaremos el conjunto $\mathcal{C}(G)$ de ℓ-subgrupos convexos de un determinado ℓ-grupo G, en algún detalle. Necesitamos un poco de la terminología de la teoría de retículos. Un retículo es *completo* si cada subconjunto tiene supremo e ínfimo. Un retículo completo es *Brouwerian* si satisface la identidad

$$a \wedge \bigvee_{\Lambda} b_\lambda = \bigvee_{\Lambda} (a \wedge b_\lambda).$$

El siguiente teorema fue demostrado para el conjunto de ℓ-ideales por Birkhoff y ampliado a $\mathcal{C}(G)$ por Lorenz.

Teorema 2.2 Sea G un ℓ-grupo. Entonces $\mathcal{C}(G)$ es un retículo Brouwerian completo, que es un subretículo de el retículo de todos los subgrupos de G; esto es, la unión de una arbitraria colección de ℓ-subgrupos convexos es el grupo generado por estos subgrupos.

Demostración. Es evidente que la intersección de cualquier colección de ℓ-subgrupos convexos de G sigue siendo un ℓ-subgrupo convexo. De ello se deduce inmediatamente que $\mathcal{C}(G)$ es un retículo completo, para la unión de una colección de ℓ-subgrupos convexos $\{C_\lambda\}$ es sólo la intersección de todos los ℓ-subgrupos convexos D para el que $D \supseteq C_\lambda$.

Para probar la última afirmación del teorema, supongamos que $\{C_\lambda\}$ es una colección de ℓ-subgrupos convexos, y que C es el grupo generado por ellos. Con el fin de ver que $C \in \mathcal{C}(G)$, supongase que $c \in C$, $g \in G$ y $|g| \leq |c|$. Ahora, $c = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$, donde cada $c_i \in C_{\lambda_i}$, algún $\lambda_i \in \Lambda$. Entonces por 1.3,

$$\begin{aligned} g^+ \vee g^- = |g| &\leq |c_1 + c_2 + ... + c_n| \\ &\leq |c_1| + |c_2| + \cdots + |c_{n-1}| + |c_n| + |c_{n-1}| + \cdots + |c_1|, \end{aligned}$$

y así, por la propiedad de descomposición de Reisz 1.5, g^+ y g^- pueden expresarse como sumas de elementos de la $C'_\lambda s$, y así $g \in C$.

Queda por demostrar que $\mathcal{C}(G)$ es Brouwerian. Para ℓ-subgrupos convexos B, C_λ, es claro que $\bigvee_\Lambda (B \cap C_\lambda) \subseteq B \cap \bigvee_\Lambda C_\lambda$. Si $g \in B^+ \cap C_\lambda$, entonces puede ser expresada como una suma de varios elementos positivos $C'_\lambda s$. Pero ya que cada uno de estos sumandos es limitado por g, cada uno es un elemento de B también. Así $g \in \bigvee_\Lambda (B \cap C_\lambda)$. ■

Un elemento x de un retículo es compacto si $x \leq \bigvee_\Lambda x_\lambda$ implica que $x \leq \bigvee_F x_\lambda$, para algún subconjunto finito F; un retículo es *algebraico* si cada elemento es la unión de elementos compactos. Sea $G(g)$ sea el ℓ-subgrupo convexo más pequeño del ℓ-grupo G que contiene g. Los subgrupos de la forma $G(g)$ se denominan el *ℓ-subgrupo principal convexo* de G. Es obvio que cada ℓ-subgrupo convexo es compacto en $\mathcal{C}(G)$, y también $\mathcal{C}(G)$ es algebraico. Para mostrar que cada elemento compacto de $\mathcal{C}(G)$ es de la forma $G(g)$, describiremos tales ℓ-subgrupos convexos explícitamente en la siguiente proposición:

Proposición 2.3 Sea $g \in G$. Entonces $G(g) = \{h \in G \mid |h| \leq n|g|$, para enteros positivo $n\}$. En consecuencia, $G(g) = G(|g|)$. Si $g, k > 0$, entonces $G(g \vee k) = G(g) \vee G(k)$ y $G(g \wedge k) = G(g) \wedge G(k)$. Además, cualquier elemento compacto de $\mathcal{C}(G)$ es de la forma $G(g)$.

Demostración. Es evidente que $\{h \in G : |h| \leq n|g|$, para enteros positivo $n\}$ contiene $G(g)$, y un argumento similar a la que contenía en la demostración del Teorema 1.2 demuestra que es un grupo, y por lo tanto un ℓ-subgrupo convexo; Por lo tanto, es igual a $G(g)$.

Desde $g, k \in G(g \vee k)$, es obvio que $G(g \vee k) = G(g) \vee G(k)$. También, ya que $g \wedge k \in G(g) \cap G(k)$, tenemos que $G(g \wedge k) \subseteq G(g) \cap G(k)$. Por el contrario, supongamos que $h \in G(g) \cap G(k)$, y así $|h| \leq ng$ y $|h| \leq nk$. Pero entonces $|h| \leq ng \wedge mk \leq n(g \wedge mk) \leq nm(g \wedge k)$, por 1.6, y por eso $h \in G(g \wedge k)$.

Por último, supongamos que $C \in \mathcal{C}(G)$ es compacto. Ahora, $C = \bigvee G(g) : g \in C$, y también $C = G(g_1) \vee \cdots \vee G(g_n)$, para $\{g_i\} \subseteq C$. Ahora, sin pérdida de generalidad cada g_i es positivo; pero entonces $C = G(g_1 \vee \cdots \vee g_n)$. ■

Es en general más difícil describir el ℓ-subgrupo generado por una colección de elementos:

Proposición 2.4 Sea S un subconjunto de G. Entonces el ℓ-subgrupo de G generado por S (es decir, el más pequeño ℓ-subgrupo de G que contiene S) consta de todos los elementos de la forma

$$\bigvee_I \bigwedge_J \sum_K g_{ijk},$$

donde I, JyK son conjuntos de índices finitos y para cada ijk, se tiene $g_{ijk} \in S$ o $-g_{ijk} \in S$.

Demostración. Así se desprende de la aplicación repetida de las leyes distributivas y leyes de DeMorgan. Los detalles se dejan para el lector. ■

Así $\mathcal{C}(G)$ es un retículo Brouwerian, es *pseudo-complementado*; es decir, para cada $C \in \mathcal{C}(G)$, existe un único máximo ℓ-subgrupo convexo C' para el cual $C \cap C' = \{O\}$. Esto es obvio, ya que $C' = \bigvee\{D \in \mathcal{C}(G) \mid D \cap C = \{O\}\}$. Este operador complementario, como para cualquier retículo Brouweriano, Galois define una conexión, que cumplan los siguientes leyes:

(a) $C \subseteq C''$.

(b) Si $B \subseteq C$, entonces $B' \supseteq C'$.

(c) $C' = C'''$.

(d) $(B \vee C)' = B' \cap C'$.

Llamamos a los ℓ-subgrupos convexo C que satisface la ecuación $C = C''$ los *subgrupos polar* de G y denota la colección de tales por $\mathcal{P}(G)$. El siguiente teorema resume la propiedades de $\mathcal{P}(G)$:

Teorema 2.5 $\mathcal{P}(G)$ es un álgebra de Boole completa, cuando está equipado con el $\cap$, una nueva operación de unión $\sqcup$ definida por $B \sqcup C = (B \vee C)''$ y complementariamente. Además, el mapa $A \mapsto A''$ es un homomorfismo reticular de $\mathcal{C}(G)$ sobre $\mathcal{P}(G)$.

Omitimos la demostración del teorema, ya que es básicamente un teorema sobre retículos.

Observe que aunque $\mathcal{P}(G)$ es un subconjunto de $\mathcal{C}(G)$, es de ninguna manera un subretículo, ya que las operaciones de unión son distintas. Podemos decir esto en un lenguaje teórico reticular comentando que $\mathcal{C}(G)$ es pseudo-complementado, pero no necesariamente complementado.

En particular, $C \vee C'$ no tiene que ser igual a G, mientras $C \sqcup C'$ hace. Si $C \vee C'$ es igual a G, entonces $C = C''$ y los llamamos a C y C' *sumandos cardinales* de G; denotamos esto escribiendo $G = C \boxplus C'$. En este caso G es una suma directa de los grupos C y C', y $g \in G$ es positivo exactamente cuando sus proyecciones en C y C' lo son. Observe que el sumando complementaria de un cardinal sumando C se determina de forma única, de la misma forma como C'; Por supuesto, esto contrasta con la teoría de grupos en general, donde complementos de sumandos no es necesariamente determinado de forma única. Es importante reconocer que los polares también se pueden describir en términos de retículos de G:

Proposición 2.6 Supongamos que X es cualquier subconjunto de un ℓ-grupo G. Entonces

$$\{g \in G \mid |g| \wedge |x| = 0, \text{ para todo } x \in X\}$$

es un subgrupo polar de G. Además, si X es un ℓ-subgrupo convexo, entonces este subgrupo es precisamente X'.

Demostración. Sea $Y = \{g \in G : |g| \wedge |x| = 0, \text{ para todo } x \in X\}$, y supongamos que $g, h \in Y^+$. Entonces, si $x \in X$,

$$0 = |x| \wedge g = |x| \wedge ((|x| \wedge h) + g) = |x| \wedge (|x| + g) \wedge (h + g) = |x| \wedge (h + g),$$

y así $h + g \in Y$. Dado que Y es, obviamente, cerrado bajo aditividad inversa, y es convexa, Y es un ℓ-subgrupo convexo. Ahora sea $C = \bigvee\{G(x) \mid x \in X\}$. De la Proposición 2.5, está claro que $Y \cap G(x) = \{0\}$ para todo $x \in X$ y así $Y \cap C = \{0\}$. Así $Y \subseteq C'$. Si elegimos $k \in Y$, entonces existe $x \in X$ con $|k| \wedge |x| > 0$. Reemplazando k por $|k| \wedge |x|$ si es necesario, podemos suponer que $k \leq |x|$, y así $k \in C(x)$. Por lo tanto $x \notin C'$ y por lo tanto, $Y = C'$. ∎

Debido a esta proposición, no vamos a dudar en utilizar la notación X' incluso si X no es un ℓ-subgrupo convexo. También, entenderemos por g' y g'' los subgrupos polares $\{g\}'$ y $\{g\}''$. Los subgrupos polares $\{g\}''$ se denominan *polares principales*.

Consideraremos ahora una generalización natural de subgrupos polares. Un ℓ-subgrupo convexo es *cerrado* si es cerrado con respecto a las uniones infinitas en la que existe en el ℓ-grupo. Más precisamente, un ℓ-subgrupo convexo C de un ℓ-grupo G es cerrado con respecto a las uniones infinitas si cada vez que $\{c_\lambda\} \subseteq C$, y $c = \bigvee c_\lambda$, existe en G, entonces $c \in C$. Tenga en cuenta que la versión infinita de las leyes de DeMorgan implica que en realidad sólo necesitamos que los ℓ-subgrupo convexo sea cerrado con respecto a las uniones. De hecho, un argumento fácil usando la otra ley distributiva infinita muestra que un ℓ-subgrupo convexo es cerrado exactamente si su cono positivo es cerrado con respecto a las uniones infinitas. Vamos a denotar el conjunto de ℓ-subgrupos convexos cerrados de un ℓ-grupo G por $\mathcal{K}(G)$.

Ahora observamos que cada polar es cerrado porque si P es un polar con $\{c_\lambda\} \subseteq P^+$ y $g \in P'$, entonces $g \wedge \bigvee c_\lambda = \bigvee (g \wedge c_\lambda) = O$. Además, cada subgrupo convexo de un o-grupo es cerrado, como es posible comprobar fácilmente. Esto demuestra que no todo ℓ-subgrupo convexo cerrado es necesariamente polar, ya que un o-grupo solo tiene los dos polares triviales.

Es obvio que la intersección de un conjunto convexo cerrado ℓ-subgrupos es cerrado, y ya que el conjunto ℓ-grupo es obviamente cerrado, entonces tenemos un mínimo única convexo cerrado ℓ-subgrupo que contiene cualquier convexo dado ℓ-subgrupo; llamaremos el *cierre de* C, y denotado por $\bar{C}$. De hecho, es una cuestión sencilla para demostrar que el cono positivo de el cierre está dada por $\bar{C}^+ = \{g \in G \mid g = \bigvee c_\lambda$, donde $\{c_\lambda\} \subseteq C^+\}$. Ahora podemos definir la unión de dos ℓ-subgrupos convexos cerrados C y K por $C \mathbin{\bar{\vee}} K$. El lector puede verificar que esta operación, junto con intersección común, hace que $K(G)$ sea un retículo Brouwerian completa, que no necesitará ser subretículo de $\mathcal{C}(G)$; Además, $\mathcal{P}(G)$ no necesita ser un subretículo de $\mathcal{K}(G)$.

Observe que los polares y los ℓ-subgrupos principales convexos son distinguibles en términos de la teoría-reticular dentro de retículos de ℓ-subgrupos convexos;

descubriremos más adelante que esto también es cierto para las clases importantes de subgrupos llamados primo y regular. Sin embargo, tal caracterización de ℓ-subgrupos convexos cerrados es posible.

Podemos caracterizar ℓ-subgrupos convexos cerrados muy bien en términos de homomorfismos . Nosotros llamaremos a un *homomorfismo reticular completo* si preserva todos (no necesariamente finito) uniones e intersecciones.

Teorema 2.7 Un ℓ-subgrupo convexo C de un ℓ-grupo G es cerrado si y sólo si el homomorfismo retículo natural de G sobre el retículo G/C de clases laterales derechas es completa.

Demostración. Primero supongamos que el homomorfismo reticular natural es completa; Sea $\{c_\lambda\} \subseteq C$ y suponga que $c = \bigvee c_\lambda$ existe en G. Entonces $C + c = C + \bigvee c_\lambda = \bigvee(C + c_\lambda) = C + 0$ y así $c \in C$, como se quería.

Por el contrario, supongamos que C es cerrada. Claramente, sólo necesitamos demostrar que el homomorfismo reticular natural preserva uniones infinitas. Para este propósito, sea $\{g_\lambda\} \subseteq C$, y supongamos que $\bigvee g_\lambda$ existe en G. Debemos demostrar que esta unión se conserva por el homomorfismo reticular natural sobre G/C. Claramente $C + g \geq C + g_\lambda$ para todo λ. Supongamos por contradicción $C + g > C + h \geq C + g_\lambda$, para todos λ. Entonces $C + g \vee h = (C + g) \vee (C + h) = C + g > C + h$, y así $(g - h) \vee 0 \notin C$. Tenemos que $C + g_\lambda \vee h = C + h$, y así $(g_\lambda - h) \vee 0 \in C$, para todo λ. Pero entonces $(g - h) \vee 0 = \bigvee((g_\lambda - h) \vee 0)$, ya que C es cerrado. Esta contradicción demuestra el teorema. ∎

Ahora necesitamos otra definición para la teoría reticular: Un elemento x de un retículo es ínf-irreducible si cada vez que $x = \bigwedge_\Lambda x_\lambda$, entonces $x = x_\lambda$, para algún λ. (Un elemento x es *finitamente* ínf-*irreducible* si x satisface lo anterior cuando Λ es finito).

Vamos a examinar ahora el elemento ínf-irreducible de el retículo $\mathcal{C}(G)$, y en particular muestran que cualquier elemento de este retículo se puede obtener como la intersección de los mismos en el siguiente teorema debido a Conrad.

Teorema 2.8 Sea $P \in \mathcal{C}(G)$. Entonces P es ínf-irreducible en $\mathcal{C}(G)$ si y sólo si P es maximal en $\mathcal{C}(G)$ con respecto a que no contiene alguna $g \in G$.

Demostración. Supongamos que P es ínf-irreducible.
Sea $P^* = \cap\{C \in \mathcal{C}(G) \mid C \supset P\}$. Puesto que P es ínf-irreducible, $P^* \supset P$. Elegimos cualquier $g \in P^* \backslash P$. Entonces, $P \subset P \vee G(g) \subset P^*$, Y así $P \vee G(g) = P^*$. Por lo tanto P es maximal con respecto a que no contiene a g.

Por el contrario, si P es maximal con respecto a que no contiene g , entonces $g \in C$ si $C \supset P$. Pero entonces $\cap\{C \in \mathcal{C}(G) \mid C \supset P\} \supset P$. ■

Llamamos un ℓ-subgrupo convexo con las propiedades del teorema 2.8 *regular*, y lo denotamos como el conjunto de aquellos por $\Gamma(G)$. Si $P \in \Gamma(G)$, entonces P^* es la *cobertura* de P, y si $g \in P^* \backslash P$, entonces P es un valor de g.

Observe que si P es un valor de g, entonces el conjugado $-h + P + h$ es un valor de $-h + g + h$; es decir, el conjunto de $\Gamma(G)$ es cerrado bajo la conjunción. El Lema de Zorn nos da lo siguiente:

Proposición 2.9 Cada elemento de un ℓ-grupo tiene por lo menos un valor. En consecuencia, cada ℓ-subgrupo convexo puede ser obtenido como la intersección de subgrupos regulares.

Un subgrupo regular posee la propiedad que su conjunto de clases laterales derechas es totalmente ordenado; ℓ-subgrupos convexos con esta propiedad son de gran importancia en la teoría de ℓ-grupos. Se llaman los subgrupos *primos*, y se caracterizan por el siguiente teorema.

Teorema 2.10 Para $P \in \mathcal{C}(G)$, los siguientes son equivalentes:

(a) P es primo (es decir, G/P está totalmente ordenada).

(b) $\{C \in \mathcal{C}(G) : C \supseteq P\}$ está totalmente ordenada bajo la inclusión.

(c) P es finito ínf-irreducible en $\mathcal{C}(G)$.

(d) Si $a \wedge b \in P$ entonces $a \in P$ o $b \in P$.

(e) Si un $a \wedge b = 0$ entonces $a \in P$ o $b \in P$.

En consecuencia, cada subgrupo normal es primo.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Supongamos que B y C son ℓ-subgrupos incomparables convexos que contiene a P. Elijamos $b \in B^+ \backslash C$ y $c \in C^+ \backslash B$. Sin pérdida de generalidad $P + b \geq P + c$. Entonces existe $p \in P$ con $p + b \geq c$. Por lo tanto $c \in B$, una contradicción.

(b) $\Rightarrow$ (c) Si $B \cap C = P$, entonces $B, C \supseteq P$ y así, sin pérdida de generalidad $B \supseteq C$. Por lo tanto $P = C$.

(c) $\Rightarrow$ (d) Ahora, $(P \vee G(a)) \cap (P \vee G(b)) = P \vee (G(a) \cap G(b)) = P \vee (G(a \vee b)) = P$, y así sea $P = P \vee G(a)$ o $P = P \vee G(b)$, y por lo tanto $a \in P$ o $b \in P$.

$(d) \Rightarrow (e)$ es clara.

$(e) \Rightarrow (a)$ Dado $g, h \in G$, tenemos $((g \vee h) - g) \wedge ((g \vee h) - h) = (g \vee h) + (-g \wedge -h) = (g \vee h) + -(g \vee h) = 0$, y así (sin pérdida de generalidad) $g \wedge h - h \in P$. Entonces, $P + h = P + (g \vee h) \geq P + g$.

Que cada subgrupo normal es primo se sigue inmediatamente de (c). ■

Observe que se deduce que si G es un o-grupo entonces $\{0\}$ es primo y también que los ℓ-subgrupos convexos de G forman una cadena.

Es la similitud de la condición (d) para la definición de anillo teórico que sin duda a motivado el uso del término ***primo***. Dado que todos los teoremas de representación para ℓ-grupos descritos en términos de estructuras totalmente ordenadas, no es de extrañar que los números primos lo harán como papel clave. Observe que (b) implica que el conjunto de primos de un ℓ-grupo (y con mayor razón, $\Gamma(G)$ también) forma un sistema de raíces (recordar la definición de 1.13).

A partir de (b) es evidente que la intersección de una cadena de primos sigue siendo primo. Desde cada primo puede, evidentemente, ser colocado en una cadena maximal de primos, se sigue que cada primo contiene un (no necesariamente único) primo minimal. Con primos mínimos viene un conexión importante entre las nociones de primos y polares, como los próximos dos teoremas revelará.

Esto parte de (d) del teorema 2.10 que si P es un primo, entonces el conjunto $F = G^+ \backslash P$ satisface la propiedad de que $a \wedge b > 0$ para todo $a, b \in F$. Un subconjunto F de G^+ maximal con respecto a esta propiedad se llamado un *ultrafiltro*.

Teorema 2.11 Sea G un ℓ-grupo y H un ℓ-subgrupo convexo. Entonces el mapeo $\Phi : P \rightarrow H \cap P$ da una correspondencia uno a uno entre los subgrupos primos de G que no contiene a H y los subgrupos primos propios de H.

Demostración. Es obvio que si P es un subgrupo primo de G no contiene a H, entonces $P \cap H$ es un subgrupo propio primo de H. Para demostrar que esto establece una correspondencia de uno a uno, definiremos el mapeo inverso de Φ:

para Q un subgrupo primo de H. Sea $\Psi Q = \bigvee\{R \in \mathcal{C}(G); R \cap H = Q\}$. Debemos mostrar que ΨQ es un subgrupo primo de G. Con ese fin supongamos que un $a, b \in G$ y $a \wedge b = 0$. Consideramos $(G(a) \vee Q) \cap H$ y $(G(b) \vee Q) \cap H$. Como se trata tanto de ℓ-subgrupos convexos de H que contiene al primo Q, tenemos (sin pérdida de generalidad) $(G(a) \vee Q) \cap H \supseteq (G(b) \vee Q) \cap H \supseteq Q$. Pero

$$(G(a) \vee Q) \cap H \cap (G(b) \vee Q) \cap H = H \cap (Q \vee (G(a) \cap G(b))) = H \cap Q = Q$$

Por lo tanto $(G(b) \vee Q) \cap H = H$, y así $b \in \Psi Q$.

Queda por demostrar que Φ y Ψ son mapeos inversas. Pero

$$\Psi\Phi Q = H \cap \bigvee\{R; R \cap H = Q\} = \bigvee\{H \cap R \mid R \cap H = Q\} = Q.$$

Por otra parte, es obvio que $\Phi\Psi P \supseteq P$. A la inversa, si $g \in (\Phi\Psi P)^+$, elija $h \in H^+ \backslash P$. Entonces $g \wedge h \in \Phi\Psi P \cap H = P \cap H$. Pero P es primo y así $g \in P$ como se quería. ■

Un ℓ-grupo es Arquimediano, si para cada g, h elementos, $ng \leq h$, donde n es entero positivo implica que $g \leq 0$. Suponemos g, h positivos en esta definición.

Lema 2.12 Si G es Arquimediano y $g \in G$ entonces g' es normal.

Demostración. Supongamos que $g \wedge h = 0$ y $k \in G^+$. Debemos demostrar que si $a = g \wedge (-k + h + k)$, entonces $a = 0$. Sea n cualquier entero positivo. Así $g \wedge h = 0$, tenemos que

$$a \wedge (k + a - k) = g \wedge (-k + h + k) \wedge (k + g - k) \wedge h = 0$$

y también

$$0 = na \wedge n(k + a - k) = na \wedge (k + na - k) \geq (na - k) \vee 0,$$

donde la última desigualdad se cumple porque cada término en la unión está acotado superiormente por cada término en el $\wedge$. Por lo tanto, $(na - k) \vee 0 = 0$, y así $na \leq k$ para todo entero positivo n y así G es Arquimediano, $a = 0$. Un argumento similar muestra que $g \wedge (k + h - k) = 0$, y por lo tanto g' es normal. ■

Teorema 2.13 Cada ℓ-grupo Arquimediano es abeliano.

Demostración. Supongamos que G es un ℓ-grupo Arquimediano, y $g \in G^+$. Por el anterior lema, g' es normal. Como $g'' = \bigcap\{b' \mid b \in g'\}$, está claro que g'' es también normal.

A continuación pretendemos que el ℓ-grupo G/g'' sigue siendo Arquimediano. Supongamos que $g'' + x, g'' + y \in (G/g'')^+$, y $n(g'' + x) \leq g'' + y$, para todo positivo n. Luego existe $a_n \in (g'')^+$, con $nx \leq a_n + y$. Elijamos cualquier $h \in (g')^+$, entonces

$$n(x \wedge h) \leq nx \wedge nh \leq (a_n + y) \wedge nh \leq (a_n \wedge h) + (y \wedge nh) = 0 + (y \wedge nh) \leq y.$$

Y así $x \wedge h = O$. Por lo tanto, $x \in g''$ y así $g'' + x = g'' + 0$.

Ahora, para demostrar que G es abeliano, que evidentemente, sólo es necesario demostrar que los elementos positivos conmutan. Elijamos dos elementos a, b. Sea $t = a + b + b + a - b - a - a - b$. Ahora $t = t^+ - t^-$, y $t^- \in (t^-)''$, por lo que $t \geq 0$ módulo $(t^-)''$. De ello se desprende que, de módulo $(t^-)''$

$$a + b - a - b \leq -a - b + a + b \tag{1}$$

y

$$-b - a + b + a \leq b + a - b - a \tag{2}$$

Ahora usamos estas dos desigualdades para mostrar inductivamente que

$$n(-a - b + a + b) \leq n(-a - b) + n(a + b) \tag{3}$$

y

$$n(b + a - b - a) \leq n(b + a) + n(-b - a) \tag{4}$$

para todo entero positivo n, módulo $(t^-)''$. Ambas desigualdades son evidentes para $n = 1$. Si asumimos la desigualdad (3) para $n - 1$, obtenemos:

$$\begin{aligned} n(-a - b + a + b) &= -a - b + a + b + (n-1)(-a - b + a + b) \\ &\leq -a - b + a + b + (n-1)(-a - b) + (n - l)(a + b) \\ &\leq 2(-a - b) + (a + b) + (n-2)(-a - b) + (n - l)(a + b) \\ &\leq \quad \vdots \\ &\leq n(-a - b) + n(a + b), \end{aligned}$$

por las desigualdades que aplicadas en (1) y (2) varias veces. La otra desigualdad se sigue de manera similar. Así, para cualquier entero positivo n, se tiene

$$(n + l)(b + a) = b + n(a + b) + a \geq n(a + b)$$

y

$$(n + l)(a + b) = a + n(b + a) + b \geq n(b + a),$$

resulta que

$$n(-a - b) + n(a + b) \leq b + a \tag{5}$$

y

$$n(b+a)+n(-b-a)\leq a+b. \tag{6}$$

Por lo tanto, combinando las desigualdades (1), (2), (5) y (6), tenemos en (módulo $(t^-)''$).

$$n(-a-b+a+b)\leq b+a \text{ y } n(b+a-b-a)\leq a+b.$$

Así $G/(t^-)''$ es Arquimediano, se sigue de la primera desigualdad que módulo $(t^-)''$, $-a-b+a+b\leq 0$, es decir, $a+b\leq b+a$. Del mismo modo, la segunda desigualdad se obtiene $b+a\leq a+b$ y así $a+b=b+a$, módulo $(t^-)''$.

El mismo argumento puede ser aplicado para demostrar que $a+b=b+a$, módulo $(t^+)''$. Puesto que $(t^+)''\cap(t^-)''=\{0\}$, esto significa que $a+b=b+a$; es decir, G es abeliano. ■

Tenga en cuenta, sin embargo, que no todos los ℓ-grupos abelianos son Arquimedianos como $Z\oplus Z$ es fácil verlo con el orden lexicográfico.

El primer paso hacia un teorema de representación de ℓ-grupos Arquimedianos fue tomada por Holder, que se hizo cargo del caso totalmente ordenado al probar el siguiente teorema. Su prueba lo hizo, por supuesto, con una prueba de la versión totalmente ordenado del teorema anterior.

Teorema 2.14 Sea G un grupo totalmente ordenado. Entonces los siguientes son equivalentes:

(a) G es Arquimediano.

(b) G es o-isomórfico a un subgrupo de reales aditivos.

(c) G no tiene subgrupos convexos propios.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Elegimos $g\in G^+$. Entonces, definamos $\phi: G\to\mathbf{R}$ por

$$\phi(h)=\bigwedge\{\frac{m}{n}\mid mg>nh, \text{ con } m,n\in\mathbf{Z}\}.$$

Debido a que G es Arquimediano y totalmente ordenado, existen enteros positivos p,q para la que $pg>|h|$ y $q|h|>g$, por lo que el conjunto de los números racionales en el ínfimo anterior es a la vez no vacío y acotado; por lo tanto ϕ está bien definido.

Para demostrar que ϕ es un homomorfismo, supongamos que para $h, k \in G$, y $m, n, p, q \in \mathbf{Z}$, $mg > nh$ y $pg > qk$. Entonces $(mq+np)g > qnh+nqk = qn(h+k)$, ya que G es abeliano.

Por consiguiente,

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq+np}{qn} \geq \phi(h+k),$$

y puesto que esto es cierto para todo m, n, p y q tenemos $\phi(h+k) \leq \phi(h) + \phi(k)$. De manera similar, si $\frac{m}{n} \leq \phi(h)$ y $\frac{p}{q} \leq \phi(k)$, es fácil ver que $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} \leq \phi(h+k)$, por lo tanto $\phi(h+k) = \phi(h) + \phi(k)$. Es evidente que ϕ preserva el orden, y por lo que solo queda demostrar que ϕ es uno-a-uno. Si $b > 0$, entonces existe un entero positivo n para los que $nb \geq g$, y así $\phi(b) \geq \frac{1}{n}$; del mismo modo, si $b < 0, \phi(b) \leq \frac{-1}{n}$, para algún n, y así ϕ es uno-a-uno.

(b) $\Rightarrow$ (c) Esto es obvio.

(c) $\Rightarrow$ (a). Esto se deduce inmediatamente de la Proposición 2.3. ■

Comenzaremos nuestra discusión del teorema de representación para un ℓ-grupo Arquimediano arbitrario, examinando el espacio topológico que se utilizará . Como hemos visto, para ningún ℓ-grupo G el conjunto $\mathcal{P}(G)$ de polares de G es un álgebra de Boole completa. Sea $X(G)$ (o simplemente X) denota el espacio topológico correspondiente a $\mathcal{P}(G)$ de acuerdo con la dualidad del teorema de Stone.

Ahora estamos listos para ver y demostrar el teorema de representación de Bernau para ℓ-grupos arquimedianos:

Teorema 2.15 Sea G un ℓ-grupo Arquimediano. Entonces G puede ser ℓ-incrustado en $D(X)$, donde X es el espacio de Stone correspondiente a el álgebra booleana $P(G)$.

Demostración. En primer lugar, optamos por el lema de Zorn en un conjunto maximal por pares disjuntos del conjunto $\{g_\alpha\}$ de elementos de G^+. Para cualquier

$f \in G^{+}$, ahora estamos listos para definir una función $\overline{f}$ en X de la siguiente manera. Sea $x \in X$; entonces

$$\overline{f}(x) = \bigwedge \left\{ \frac{m}{n} \mid (mg_\alpha - nf)^{+''} \in x, \text{ para algún } \alpha \right\}$$

(Entendemos que este ínfimo es $+\infty$, si el conjunto definido en la definición es vacio).

Afirmamos que para cualquier entero positivo n,

$$\bigsqcup (mg_\alpha - nf)^{+''} = g''_\alpha.$$

Porque si no es así, existe $\{0\} \neq h'' \subseteq g''_\alpha \backslash \sqcup (mg_\alpha - nf)^{+''} = g''_\alpha$. Entonces $h \in (mg_\alpha - nf)^{+''}$ y así, $m(g_\alpha \wedge h) \prec nf$, para todo m. Pero G es Arquimediano, y así $g_\alpha \wedge h = 0$, que es una contradicción.

Ahora podemos comprobar que $\overline{f} \in D(X)$. Si $\overline{f}^{-1}(R)$ no es denso, existe un conjunto abierto en la que $\overline{f}$ es $+\infty$; podemos suponer que este conjunto es de la forma $\mathcal{O}(h'')$, para $h \in G^{+}$. Se deduce que $(mg_\alpha - nf)^{+''} \cap h'' = \{O\}$, para todo entero positivo m y n y cualquier α. Pero entonces $h'' \cap g''_\alpha = \{0\}$ para todos α, lo que contradice la disjunción maximal de los $g'_\alpha s$.

Ahora debemos comprobar que $\bar{f}$ es continua. Si r es un número real positivo, entonces

$$\bar{f}^{-1}(r, \infty) = \bigcup \left\{ \mathcal{O}((mg_\alpha - nf)^{+''}) \mid r < \frac{m}{n} \right\}.$$

que es claramente abierta, mientras que

$$\bar{f}^{-1}[r, \infty) = \bigcup \left\{ \mathcal{O}((mg_\alpha - nf)^{+''}) \mid r > \frac{m}{n} \right\}.$$

es claramente cerrado.

Vamos a demostrar que $\overline{f} + \overline{h} = \overline{f+h}$. Sólo necesitamos demostrar que $\overline{f}(x) + \overline{h}(x) = \overline{f+h}(x)$, para todo $x \in \overline{f}^{-1}(\mathbf{R}) \cap \overline{h}^{-1}(\mathbf{R})$. Supongamos primero que de todos los $(m_1 g_\alpha - n_1 f)^{+''}$ y $(m_2 g_\alpha - n_2 f)^{+''}$ son elementos de x. Así $g''_\alpha \cap g''_\beta = \{0\}$ si $\alpha \neq \beta$, está claro que $\alpha = \beta$ Debido a que $(na)'' = a''$, podemos suponer que

$n_1 = n_2$. Así tenemos, por la Proposición 1.9, que en consecuencia,

$$\begin{aligned} 0 &< (m_1 g_\alpha - nf)^+ \wedge (m_2 g_\alpha - nh)^+ \\ &\leq (m_1 g_\alpha - nf + m_2 g_\alpha - nh)^+ \\ &= ((m_1 + m_2) g_\alpha - n(f+h))^+, \end{aligned}$$

y así $\bar{f}(x) + \bar{h}(x) \geq \overline{f+h}(x)$.

Para la desigualdad inversa, supongamos que $\frac{m_1}{n_1} < \bar{f}(x)$ y $\frac{m_2}{n_2} < \bar{h}(x)$. Esto significa que $(m_1 g_\alpha - n_1 f)^{+''}$ y $(m_2 g_\alpha - n_2 h)^{+''}$ no son elementos de x, para todos α. En consecuencia, para todo α, el polo

$$((m_1 n_2 g_\alpha - n_1 n_2 f)^+ \vee (n_1 m_2 g_\alpha - n_1 n_2 h)^+)'' = ((m_1 n_2 g_\alpha - n_1 n_2 f)^+ + (n_1 m_2 g_\alpha - n_1 n_2 h)^+)''$$

no es un elemento de x. Pero

$$\begin{aligned} &(m_1 n_2 g_\alpha - n_1 n_2 f)^+ + (n_1 m_2 g_\alpha - n_1 n_2 h)^+ \geq \\ &\qquad \geq (m_1 n_2 g_\alpha - n_1 n_2 (f+h))^+ + (n_1 m_2 g_\alpha - n_1 n_2 (f+h))^+ \\ &\qquad \geq ((m_1 n_2 + n_1 m_2) g_\alpha - n_1 n_2 (f+h))^+. \end{aligned}$$

y así $((m_2 n_2 + n_1 m_2) g_\alpha - n_1 n_2 (f+h))^{+''}$ no es un elemento de x. Es decir

$$\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} \leq \overline{f+h}(x)$$

Por lo tanto, $\bar{f}(x) + \bar{h}(x) = \overline{f+h}(x)$. ■

Es una cuestión sencilla para comprobar que el mapeo que hemos definido es uno-a-uno, y un homomorfismo de retículos, de G^+ en $D(X)^+$. Este mapeo admite una extensión única a un ℓ-monomorfismo de G en $D(X)$.

Parte II:

Grupos de Divisibilidad

Capítulo 3

Grupos de Divisibilidad

En este trabajo estudiamos una forma de convertir un anillo conmutativo en un ℓ-grupo tomando en cuenta el aspecto de divisibilidad que estudiamos en la Teoría de Números. Para este efecto, consideramos un anillo conmutativo con identidad y artificialmente definimos una relación de divisibilidad, que más adelante explicaremos. El objetivo es estudiar algunas propiedades de los anillos desde el punto de vista de ℓ-grupos.

Un ℓ-grupo es una terna $(G, *, \leq)$ donde $(G, *)$ es un grupo, $(G, \leq)$ es un retículo y la operación del grupo es compatible con la relación de orden, como ya vimos (detenidamente) en el Capítulo 1.

Una aplicación importante de ℓ-grupos abelianos es la teoría de dominios de integridad, a través de grupos de divisibilidad. En este capítulo vamos a explorar la conexión entre estas dos teorías, que es facilitado por el hecho de que cada ℓ-grupo abeliano se puede obtener como un grupo de divisibilidad de un dominio apropiado (ver Teoremas 3.1 y 3.2 a continuación).

Sea D un dominio de integridad con el grupo de unidades U y el campo cociente K. Si K^* denota el grupo multiplicativo de K, entonces U es un subgrupo de K^* y, por consiguiente, podemos definir el grupo de divisibilidad de D como

$$G(D) = K^*/U.$$

En lo que continua adelante, vamos a suprimir la D en esta notación a menos que sea necesario para mayor claridad. Puesto que G es un grupo abeliano, vamos a abusar de notación y escribir su operación aditiva definiendo esta operación como

$$Ua + Ub = Uab.$$

Ahora podemos equipar a G con un orden parcial llamando

$$Ua \leq Ub \text{ si y solamente si } b/a \in D.$$

Se puede comprobar trivialmente que esta relación satisface las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva propiedades, y así es un orden parcial, y de hecho, que este orden parcial es preservada por la operación de grupo.

Por lo tanto, G es un grupo parcialmente ordenado.

Alternativamente se podría considerar el conjunto

$$\{Dx : x \in K^*\}$$

de todos los D-submodulos cíclicos no triviales de K (estos también se llaman los principales ideales fraccionales de D).

Evidentemente este conjunto es un grupo bajo la operación

$$Dx \cdot Dy = Dxy,$$

con el que podemos hacer un grupo parcialmente ordenado establecido por

$$Dx \leq Dy \text{ si y solamente si } Dx \supseteq Dy.$$

Claramente este grupo parcialmente ordenado es o-isomorfo a G bajo la función $Ux \mapsto Dx$.

A continuación vamos a centrar nuestra atención en aquellos dominios para los que el orden parcial sobre los grupos de divisibilidad descritos anteriormente es una retículo ordenado. Con ese fin, apelamos a la teoría de anillos elementales.

Sean a y b elementos de un dominio D; entonces c es un máximo común divisor (mcd) de a y b si c divide tanto a y b, y si d es cualquier otro común divisor de a y b, entonces d divide c.

Un dominio es un dominio *pseudo-Bezout*, si cada par de elementos tiene un mcd (tales dominios también se llaman mcd -dominios).

Un dominio es un domino de Bezout si todo ideal finitamente generado es principal.

De acuerdo a las anteriores definiciones, podemos ver que un dominio de Bezout es pseudo-Bezout. De hecho.

Notemos, de manera importante que los dominios de Bézout pueden ser caracterizados como aquellos dominios pseudo-Bezout con la propiedad adicional de que el mcd de cualquier conjunto finito se puede expresar como combinación lineal de los elementos del conjunto.

Teorema 3.1 Un dominio es un dominio pseudo-Bezout si y solo si el anterior orden parcial sobre este grupo de divisibilidad es un retículo ordenado.

Demostración. Supongamos que D es un dominio pseudo-Bezout. Para demostrar que $G(D)$ es un ℓ-grupo, solo necesitamos comprobar que dos elementos positivos Ua y Ub tienen una reunión. Podemos así asumir que Ua y Ub son estrictamente positivos, es decir, que a y b no son unidades. Por lo tanto, a y b tienen un mcd c, es entonces evidente que Uc es el mayor limite inferior para Ua y Ub.

El recíproco sigue líneas de razonamiento análogo. ■

En nuestra discusión anterior hemos comenzado con un dominio, y se obtuvo su grupo de divisibilidad del campo cociente. Alternativamente, podemos comenzar con el campo, equipado con una función en un ℓ-grupo, como sigue. Dado un campo K una *demi-valuación* en K es un homomorfismo de grupos w de K^* sobre un ℓ-grupo abeliano G que satisface la siguientes propiedades:

$$w(x+y) \geq w(x) \wedge w(y). \tag{1}$$

Si luego establecemos que

$$D_w = \{x \in K : w(x) \geq 0\} \bigcup \{0\},$$

entonces es evidente que D_w es un dominio pseudo-Bezout, cuyo grupo de divisibilidad es ℓ-isomorfo a G de manera natural.

Ahora vamos a establecer el hecho crucial que permite el traslado de problemas de anillos-teóricos en el lenguaje de ℓ-grupos abelianos, a saber, que cada ℓ-grupo abeliano surge como grupo de divisibilidad de algún dominio.

Teorema 3.2 Cada ℓ-grupo abeliano es el grupo de divisibilidad de un dominio de Bezout.

Demostración. Sea G un ℓ-grupo abeliano. Dado un campo K, ahora vamos a considerar el anillo de grupo $K[G]$ de G sobre K. Ahora $K[G]$ se define como el espacio K-*vectorial* con base que consta de los símbolos formales $\{X^g \mid g \in G\}$, equipadas con una multiplicación de la siguiente manera:

Primero definimos para monomios configurando

$$(aX^g) \cdot (bX^h) = abX^{g+h}, \text{ para todo } a, b \in K,\ g, h \in G$$

y luego extendemos esta definición utilizando la ley distributiva para todos los elementos de $K[G]$. Esto es un ejercicio algebraica estándar para comprobar que está bien definido esta multiplicación, y hace $K[G]$ un anillo. Verificaremos que $K[G]$ es de hecho un dominio. Para $r \in K[G]$, sea $E(r)$ el conjunto de elementos de G que aparecen como exponentes en la expresión (única) para r como combinación lineal de de $X^{g'}s$.

Dado $0 \neq r, s \in K[G]$, debemos demostrar que $rs \neq 0$. Dotamos al grupo abeliano de torsión-libre G con un orden total compatibles $\prec$, y supongamos que g (respectivamente, h) es el elemento más pequeño de $E(r)$ (respectivamente, $E(s)$) con respecto a $\prec$. Pero entonces eso haría a ser un único termino X^{g+h} cuando el producto rs multiplicado fuera, con un coeficiente necesariamente distinto de cero, ya que K es un dominio.

Sea k el campo cociente de $K[G]$. Vamos a obtener una demi-valuación en k definiendo una mapa w de $K[G]$ sobre G^+, que puede entonces obviamente extendido a todo k. Dada una elemento arbitrario

$$r = \sum_{i=1}^{n} a_i X^{g_i}$$

de $K[G]$, sea

$$w(r) = g_1 \wedge g_2 \wedge \cdots \wedge g_n.$$

Esta función, al estar definida sobre G^+, es sujeta a ser extendida, por lo que su extensión a k será sobre G.

Necesitamos ahora comprobar que w satisface la condición (1) en la definición de demi-valuación. Para $r, s \in K[G]$, es evidente que $E(r+s) \subseteq E(r) \cup E(s)$, lo que significa que:

$$w(r+s) = \bigwedge E(r+s) \geq \bigwedge E(r) \wedge \bigwedge E(s) = w(r) \wedge w(s).$$

Por lo tanto la condición (1) se mantiene. También hay que comprobar que w es un homomorfismo de grupos.

Pero porque G es abeliano y por lo tanto representable, podemos suponer que G es un o-grupo.
En este caso, $w(r)$ es el mínimo elemento de $E(r)$, y el argumento que se vio arriba muestra que $K[G]$ es un dominio también muestra que

$$w(rs) = w(r) + w(s) \text{ para todo } r, s \in K[G].$$

Ahora sabemos que el subanillo D_w de k es un dominio pseudo-Bezout cuyo grupo de divisibilidad es G. Queda comprobar que D_w es un dominio de Bezout.

Supongamos que $r, s \in D_w$; vamos a demostrar que el ideal $\langle r, s \rangle$ es principal.

Sea $w(r) = g$; entonces tenemos que $r = tX^g$ donde $w(t) = 0$. De manera similar, tenemos que $s = uX^h$, donde $w(s) = h$ y $w(u) = 0$. Pero entonces,

$$\langle r, s \rangle = \langle X^g, X^h \rangle = \langle X^{g \wedge h} \rangle,$$

que es un ideal principal como se pedía. ■

Observamos que este teorema implica que la distinción entre los dominios pseudo-Bezout y dominios de Bezout se pierde al pasar al grupo de divisibilidad. En consecuencia lo haremos nosotros sin necesidad de restringir nuestra atención a los dominios de Bezout, especialmente porque esto simplificaria algunos de los resultados y sus demostraciones.

Es importante observar que varios de éstos resultados ciertamente tienen contextos más generales.

Vamos a establecer la correspondencia que existe entre supra-anillos de un dominio de Bezout y los ℓ-subgrupos convexos de su grupo de divisibilidad, que a su vez nos permitirá traducir fácilmente desde el lenguaje de los ℓ-grupos al lenguaje de los anillos, y viceversa.

Para este propósito, es necesario recordar un poco más de la terminología de la teoría de dominios. Para un dominio D, un subconjunto S es un *sistema multiplicativo* si no contiene 0, y es cerrado bajo la multiplicación; decimos que S esté *saturado* si contiene todos los divisores de elementos de S; es importante tener en cuenta que esta condición generalmente es inofensivo, ya que claramente cualquier sistema multiplicativo esté contenida en un (único) saturado.

Debemos tener en cuenta que un sistema multiplicativo saturado contiene necesariamente todas las unidades del anillo. La *localización* de D en S, escrito D_s, es el subanillo de el campo cociente K de D dado por:

$$\{d/s \in K \mid d \in D \wedge s \in S\}$$

Por supuesto, un ideal P es exactamente primo si $D \setminus P$ es un sistema multiplicativo; vamos a seguir en la practica habitual de escribir la localización en este caso como D_P.

Ahora, un anillo R entre un dominio D y su campo cociente K se denomina *supra-anillo* de D. Si D es un dominio de Bezout, entonces todos los supra-anillos de D son en realidad localizaciones de D en algún Sistema multiplicativo; este no es necesariamente cierto en el caso de dominios pseudo-Bezout.

Teorema 3.3 Sea D un dominio de Bezout con el campo cociente K y $G(D) = K^*/U$ su grupo de divisibilidad. Entonces hay una correspondencia uno a uno entre los siguientes conjuntos:

(a) los supra-anillos de D,

(b) los sistemas multiplicativos saturados de D,

(c) los ℓ-subgrupos convexos de $G(D)$, y

(d) las imágenes ℓ-homomórficas de $G(D)$.

Las correspondencias entre (a) y (b) y entre (c) y (d) son las más obvias. Dado un ℓ- subgrupo convexo H de $G(D)$, el correspondiente sistema multiplicativo saturado es

$$\{d \in D \mid Ud \in H\}.$$

Por otra parte, teniendo en cuenta un sistema multiplicativo saturado S de D, el grupo de divisibilidad $G(D_S)$ es exactamente la imagen ℓ-homomórfica de $G(D)$ bajo esta correspondencia.

Finalmente, bajo esta correspondencia los subgrupos primos de $G(D)$ corresponden exactamente a los complementos de ideales primos de D.

Demostración. Es evidente que, para establecer las correspondencias uno a uno, solo necesitamos la dirección de vuelta para la correspondencia entre (b) y (c). Dado un ℓ-subgrupo convexo H de $G(D)$, sea

$$S = \{d \in D \mid Ud \in H\};$$

este es un sistema multiplicativo de D. Si $s \in S$ y t divide a s, entonces $Ut \leq Us$ y también $t \in S$; en consecuencia S es saturado. Reciprocamente, si S es un sistema multiplicativo saturado, y establecemos

$$H^+ = \{Us \in G \mid s \in S\},$$

entonces H^+ es un subsemigrupo convexo de G^+, y como tal el cono positivo de un ℓ-subgrupo convexo H de G. Es evidente que estas correspondencias son inversas una de la otra.

Supongamos ahora que S es un sistema multiplicativo saturado. Entonces, el grupo de unidades de D_S claramente contienen a U, y de hecho el subgrupo V de K^* generado por el subsemigrupo S. Pero entonces

$$G(D_S) = K^*/V \cong (K^*/U)/(V/U) = G(D)/H,$$

donde H es exactamente el ℓ-subgrupo convexo de $G(D)$ a la que S corresponde, como se describe arriba.

Finalmente, supongamos que $S = D/P$, donde P es un ideal primo. Entonces S corresponde a el ℓ-subgrupo convexo H de $G(D)$ con el cono positivo $\{Ud \mid d \in P\}$. Supongamos ahora que $Ux \wedge Uy = U1$; entonces 1 es un mcd para x e y y así $1 = ax + by \in \langle x, y \rangle$. Así, tanto x como y no puede pertenecer al ideal propio P, y así Ux o Uy pertenece a H^+, haciendo H un subgrupo primo. Recíprocamente, si H es un subgrupo primo de G, afirmamos que $S = \{d \in D \mid Ud \in H\}$ es el complemento de un ideal primo; claramente, sólo necesitamos demostrar que el complemento de un ideal es un ideal, ya que sabemos que S es un sistema multiplicativo. Así que si $x, y \in D \setminus S$, entonces $Ux, Uy \notin H$. Sea r un mcd de x e y; entonces

$$Ur = Ux \wedge Uy \notin H,$$

y así

$$Ur \leq U(ax + by) \text{ para todos los } a, b \in D,$$

esto significa que

$$ax + by \in D \setminus S.$$

Pero esto implica que $D \setminus S$ es un ideal. ■

El recíproco corresponde entre los ideales primos de un dominio de Bezout y los subgrupos primos de su grupo de divisibilidad pueden ser explotados de un muchas maneras. Nosotros mencionaremos un par de estas aplicaciones de manera informal.

Es interesante puntualizar que historicamente la mas importante de estas aplicaciones es el hecho de que los ideales de un dominio estén totalmente ordenados si, y sólo si su grupo de divisibilidad es un o-grupo. Este es un resultado altamente importante en la teoría de ideales.

Estos dominios son *dominios de valoración*, ya que surgen de las valoraciones en los campos.

La definición original de dominio de valoración afirma que por cada elemento del campo cociente, o bien o su inversa pertenece al dominio; es evidente directamente para la definición del orden parcial para que el grupo de divisibilidad de un dominio tal esté totalmente ordenado. Sin embargo, estamos subrayando aquí que la propiedad de anillo (y la propiedad de grupo) se pueden mirar en términos de los ideales (y ℓ-subgrupos convexos). Recordemos que la esencia de esta discusión en el siguiente corolario; Observamos que omitimos mencionar la hipótesis de Bezout, desde un dominio de valoración es claramente de Bezout.

Corolario 3.4 Un dominio es un dominio de valoración si, y sólo si su grupo de divisibilidad es un grupo totalmente ordenado.

Dado que el grupo de divisibilidad de un dominio de Bezout se puede representar como un producto subdirecto de los grupos totalmente ordenados, el siguiente resultado clásico forma parte de esta teoría y se sigue inmediatamente:

Corolario 3.5 Un dominio de Bezout es una intersección de supra-anillos que son dominios de valoración.

Si el grupo de la divisibilidad de un dominio de valoración tiene rango finito como un o-grupo, es decir, es una suma lexicográfico de n o-grupos arquimedianos, podemos decir que el dominio tiene rango n; en particular, un dominio de valoración tiene rango 1 si su grupo de divisibilidad es un subgrupo de los reales. Vamos a investigar más adelante acerca de la cuestión más general de cuando un dominio de Bezout tiene un grupo Arquimediano de divisibilidad.

Para otra aplicación, observe que ahora es evidente que cualquier árbol (un conjunto parcialmente ordenado donde el subconjunto de los elementos por debajo de un determinado elemento es totalmente ordenado) se produce cuando el conjunto parcialmente ordenado de primos de un dominio de Bezout. Para el orden dual de un árbol es una *sistema de raíces*, y si Γ es cualquier sistema de raíces, el ℓ-grupo $\Sigma(\Gamma, R)$ tiene (una copia isomórfica de) Γ como su sistema de raíces de los números primos. Ahora aplicaremos el Teorema 3.1.

Cualquier propiedad de ℓ-grupos abelianos descriptibles en términos de sus primos ahora se puede traducir o en la propiedad de los dominios Bezout, inversamente. Por lo tanto, un dominio de Bezout tiene dimensión Krull 0 (es decir, cada ideal primo es minimal) si y solo si su grupo de divisibilidad tiene la propiedad de que cada subgrupo primo es maximal.

Para otro ejemplo, consideremos la clase de dominios Bezout para el que cada primo esta contenido en un único maximal primo; esto se traduce en la clase de los ℓ-grupos con la propiedad de "Primos varados": cada primo contiene un único maximal primo. Estos ℓ-grupos son llamados *semiproyectables*. Los anillos proyectables forman una clase elemental en el lenguaje de anillos reticularmente ordenados. Esta clase es cerrada bajo ultraproductos. Por tanto los ultraproductos de anillos proyectables admiten una representación. Es bien conocido que un ℓ-grupo proyectable tiene la propiedad de cadenas estables); sin embargo, la recíproca es falsa. Una discusioń mas amplia y posible objeto de una investigación mas avanzada se encuentra en Bigard (1977) y Guier (2009), ver la bibliografía.

Capítulo 4

Dominio de Bezout

En este capítulo realizamos la descripción de los dominios de Bezout cuyos grupos de divisibilidad son Arquimedianos, lo cual, por supuesto, no se puede describir en términos de una estructura de árbol de elementos primos, ya que al ser Arquimediano este no es descriptible en términos de un sistema raíz de primos.

Para lograr esto, necesitamos la noción de un dominio completo e íntegramente cerrado. Sea D un dominio con el campo cociente K, y supongamos que un $0 \neq a, x \in K$. Supongamos, además que $ax^n \in D$ para todos los enteros positivos n implica que $x \in D$; entonces D es *completo e íntegramente cerrado.*

El siguiente teorema es fundamental:

Corolario 4.1 Un dominio de Bezout esta completa e íntegramente cerrado si y sólo si su grupo de divisibilidad es un ℓ-grupo arquimediano.

Demostración. Primero supongamos que D es completo e íntegramente cerrado. Sea Ua, Ub elementos positivos de $G(D)$, y supongamos que $n(Ua) \leq Ub$, para todo entero positivo n. Entonces $Ub + n(U(1/a)) \geq 0$, lo que significa que $b(1/a)^n \in D$, para todo positiva n. Pero entonces $1/a \in D$, y también $Ua = 0$.

Por lo tanto, $G(D)$ es Arquimediano. Pero entonces $Ua \geq nU\frac{1}{x}$ para todo positivo n, y así $U\frac{1}{x} \leq 0$, ya que $G(D)$ es Arquimediano.

Así, $Ux \geq 0$ y además $x \in D$ como se requería. ∎

Ahora estamos en condiciones de desarrollar la descripción de una interesante interpretación anillo-teorética de la completitud de Dedekind de un ℓ-grupo arquimediano.

Para esto, necesitamos un poco más la terminología de la teoría de anillos:

Un *ideal fraccional* de dominio D es un *D-submodulo* de el campo cociente. (Recordemos en particular, que llamamos módulos Dx ideales fraccionales principales en la discusión previa para el teorema 3.1.) Un ideal fraccional I de un dominio D es *divisorial* (Terminología alternativa: un *v-ideal*) si I es la intersección de todos los ideales principales fraccionales que contienen I. Sea $D_i(D)$ denota el conjunto de todos estos ideales; entonces es evidente a partir de nuestra discusión de el conjunto de ideales fraccionales principales que al principio de este capítulo que contiene $D_i(D)$ (una copia isomórfica de) $G(D)$.

Aunque no vamos a profundizar en los detalles aquí, se puede entonces definir una multiplicación en $D_i(D)$ consistente con la de $G(D)$ que hace $D_i(D)$ un semigrupo conmutativo; Además, $D_i(D)$ es un grupo si y sólo si D es completamente integralmente cerrado. En efecto, $D_i(D)$ es entonces un ℓ-grupo completo de Dedekind, en el que $G(D)$ es grande (ya que el orden en $D_i(D)$ es el orden dual de inclusión). Por lo tanto,

$$G(D) \text{ es completa de Dedekind si y sólo si } G(D) = D_i(D);$$

es decir, el grupo de divisibilidad de un dominio de Bezout es completa de Dedekind si y sólo si cada ideal fraccional es divisor principal.

Los dominios con esta última propiedad han sido llamados *pseudo-principales*.

A continuación apelamos ampliamente la correspondencia entre ℓ-grupos Arquimedianos y dominios completos e íntegramente cerrados:

En primer lugar, observemos que cualquier ℓ-grupo admite una única imagen máxima ℓ-homomórfico Arquimediana: Para un ℓ-grupo G, consideremos el conjunto ℓ-subgrupos normales convexos cuyas correspondientes imágenes ℓ-homomórfico son Arquimedianos (este conjunto incluye G y por lo tanto es no vacío); ya que la clase de los ℓ-grupos arquimedianos obviamente cerrados bajo el producto directo, esto significa que la intersección de estos conjuntos de ℓ-subgrupos convexos proporciona el núcleo de la imagen ℓ-homomórfica máxima arquimediana.

Ahora, si el ℓ-grupo considerado es el grupo de divisibilidad $G(D)$ de un dominio D de Bezout, su máxima imagen ℓ-homomórfica arquimediana proporcionada, según el teorema 3.3, un supra-anillo R mínimo de D es completo e íntegramente cerrado.

Desafortunadamente, el dominio R que acabamos de construir no necesariamente completo e íntegramente cerrado de D, desde la clausura integral completa no necesita ser completo e íntegramente cerrado.

Ténganse en cuenta que lo llevado a cabo anteriormente para ℓ-grupos arquimedianos pueden generalizarse a cualquier clase de ℓ-grupos abelianos que esté cerrado con respecto a productos subdirectos, y en especial cualquier clase de torsión-libre; es decir, una clase de tales da lugar a una clase correspondiente de dominios, tales que cada dominio admite un mínimo supra-anillo único que pertenece a la clase.

Apéndice A

Conceptos básicos de $\ell-$homomorfismo

Definición A.1 Sean G, H $\ell-$grupos. Una función $\tau : G \longrightarrow H$ es un $\ell-$homomorfismo si τ es un homomorfismo de grupos y homomorfismo de retículos.

Teorema A.2 Sean G y H $\ell-$grupos y $\tau : G \longrightarrow H$ un homomorfismo de grupos. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes

a) τ es un $\ell-$homomorfismo.

b) $\tau \mid g \mid = \mid \tau g \mid$

c) $g \wedge h = 0 \Longrightarrow \tau g \wedge \tau h = 0$

d) $\tau g \vee 0 = \tau(g \vee 0)$.

Demostración. $a) \longrightarrow b) \longrightarrow c) \longrightarrow d) \longrightarrow a)$

$a) \longrightarrow b)$

$$\begin{aligned}\tau \mid g \mid = \tau(g^+ + g^-) &= \tau(g^+) + \tau(g^-)\\ &= \tau(g \vee 0) + \tau(-g \vee 0)\\ &= (\tau(g) \vee 0) + (\tau(-g) \vee 0)\\ &= \tau(g)^+ + \tau(g)^-\\ &= \mid \tau g \mid .\end{aligned}$$

$b) \longrightarrow c)$

Sea $\tau \mid g \mid = \mid \tau g \mid$.

Sea $g \wedge h = 0$ por la proposición $g \wedge h = 0 \leftrightarrow g + h = \mid g - h \mid$

$\rightarrow g + h = \mid g - h \mid$

$\tau g + \tau h = \mid \tau g - \tau h \mid$

$\rightarrow \tau g \wedge \tau h = 0.$

$c) \rightarrow d)$

Sea $g \wedge h = 0 \longrightarrow \tau g \wedge \tau h = 0$. P.d. $\tau g \vee 0 = (g \vee 0) \Leftrightarrow \tau g \vee 0 = (\tau g)^+$

$\tau(g \vee 0) = \tau g^+$

$(\tau g)^+ = \tau g^+$

Sea $g \in G$,

$g^+ \wedge g^- = 0$

$\tau g^+ \wedge \tau g^- = 0$

$\tau g^+ \vee \tau g^{-1} = \tau g^+ + \tau g^-,$

Ahora $\tau g^+ = [\tau g^+ \vee \tau g^-] - \tau g^- = [\tau g^+ - \tau g^-] \vee 0$

$= \tau(g^+ - g^-) \vee 0 = \tau g \vee 0.$

$d) \rightarrow a)$

Sea $\tau g \vee 0 = \tau(g \vee 0)$.

Veamos $\tau(g \vee h) = \tau[(g - h \vee 0) + h] = \tau(g - h \vee 0) + h = \tau(g - h \vee 0) + \tau h$ $= \tau(g - h) \vee 0 + \tau h = [\tau(g \vee h) \vee 0] + \tau h = \tau g + \tau h.$

Análogamente para $\tau(g \wedge h) = \tau g \wedge \tau h$.

Remarca: para verificar que τ es un $\ell-$homomorfismo se utiliza la equivalencia del inciso d). τ en un $\ell-$homomorfismo si y solo si $\tau g \vee 0 = \tau\,(g \vee 0)$. ■

Teorema A.3 Sea G y H $\ell-$*grupos* y $\tau : G^+ \longrightarrow H^+$ es un $\ell-$homomorfismo de semigrupos si $\tau 0 = 0$. Entonces existe una única extensión de τ a un $\ell-$homomorfismo de grupos $\bar{\tau} : G \longrightarrow H$.

Demostración. Sea $\tau : G^+ \longrightarrow H^+$ un $\ell-$homomorfismo de grupos. Si $\tau 0 = 0$, definimos $\bar{\tau} : G \longrightarrow H$ como $\bar{\tau} g = \tau g = \tau g^+ - \tau g^-$.
Demostraremos, que $\bar{\tau}(-g) = -(\bar{\tau} g)$.

Veamos $\bar{\tau}(-g) = \bar{\tau} g^- - (\bar{\tau} g^+) = -(\bar{\tau} g^+ - \bar{\tau} g^-) = -(\bar{\tau} g)$.

Además $\tau((g+h) \vee 0) = (\bar{\tau} g + \bar{\tau g}) \vee 0$.

Veamos

$(\tau g^-) + \tau((g+h) \vee 0) + \tau h^- = \tau\left[g^- + (g+h) \vee 0 + h^-\right]$

$= \tau\left\{(g^-) + \left[-g^- + g^+ + h^- \vee 0\right] + h^-\right\}$

$= \tau\left[(g^+ + h^+) \vee (g^- + h^-)\right]$

$= \tau\left(g^+ + h^+\right) \vee \tau\left(g^- + h^-\right) = (\tau g^-) + \left[-(\tau g^-) + \tau g^+ + \tau h^+ - \tau h^- \vee 0\right] + \tau h^-$

$= (\tau g^-) + \left[\bar{\tau} g + \bar{\tau} h \vee 0\right] + \tau h^-$

Entonces

$(\tau((g+h) \vee 0) = (\bar{\tau} g + \bar{\tau} h) \vee 0$.

Así

$$\begin{aligned}
\bar{\tau}(g+h) &= \{\tau(g+h)^+\} + \{\tau(g+h)^-\} \\
&= \left[\tau(g+h)^+ \vee 0\right] - \left[\tau(g+h)^- \vee 0\right] \quad = -\left[\bar{\tau} g + \bar{\tau} h\right]^+ - \left[\bar{\tau} g + \bar{\tau} h\right]^- \\
&= \bar{\tau} g + \bar{\tau} h
\end{aligned}$$

$\bar{\tau}$ es un homomorfismo de grupos.

Como $\bar{\tau}(g \vee 0) = \tau(g \vee 0) = \tau g \vee 0 = \bar{\tau} \vee 0$,$\bar{\tau}$ es un $\ell-$homomorfismo.
La unicidad es obvia. ■

Teorema A.4 (Homomorfismo inducido)
Sean A, B, C y D ℓ-grupos

$\delta : A \longrightarrow D$ un $\ell-$homomorfismo suryectivo y

$\alpha : A \longrightarrow B$ un $\ell-$homomorfismo

$\beta : B \longrightarrow C$ un $\ell-$homomorfismo si $\alpha(\ker \delta) \subseteq \ker \beta$.

Entonces existe un único $\ell-$homomorfismo $\alpha^* : D \longrightarrow C$ con $\alpha^*\delta = \beta\alpha$.
Más un α^* es un $\ell-$isomorfismo si $\alpha^{-1}(\ker \beta) \subseteq \ker \delta$.

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, dashed, "\alpha^*"] & C \\
A \arrow[u, "\delta"] \arrow[r, "\alpha"'] & B \arrow[u, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

Definimos, $\alpha^* : D \to C$.

Veamos como δ es sobreyectiva

$\to \forall d \in D,\ \exists a \in A \to \delta a = d$

Ahora $\alpha^*(\delta a) = \alpha^* d = \beta\alpha a$

$\to \alpha^*\delta = \beta\alpha$.

Por otro lado

$\alpha^*(d \vee 0) = \alpha^*(\delta a \vee 0) = \alpha^*\delta(a \vee 0)$

$= \beta\alpha(a \vee 0) = \beta(\alpha a \vee 0) = \beta\alpha a \vee 0 = \alpha^*\delta a \vee 0 = \alpha^*\boldsymbol{d} \vee 0.$ ∎

Definición A.5 Un $\ell-$homomorfismo $\tau : G \longrightarrow H$ es completo si siempre que $\vee g_\alpha$ y $\wedge h_\beta$ existen en G,$\tau(\vee g_\alpha) = \vee \tau g_\alpha)$ y $\tau(\vee h_\beta) = \vee(\tau h_\beta)$.

No todo $\ell-$homomorfismo es completo.

Ejemplo A.6 Sea $H = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ donde $(x, y) \geq (0, 0)$ si $y > 0$ o si $y = 0$ y $x \geq 0$. H es un grupo totalmente ordenado. Definimos $\tau : \mathbb{R} \longrightarrow H$ si $x \longmapsto (0, x)$.
$\sqrt{2} = \wedge \left\{q \in \mathbb{Q} : q > \sqrt{2}\right\}$.
Ahora si τ fuera completa, $\left(0, \sqrt{2}\right)$ seria igual a $\wedge \left\{(0, q) : q \in \mathbb{Q} \wedge q > \sqrt{2}\right\}$.
Si $x > 0$, $(0, \sqrt{2}) < (x, \sqrt{2}) < (0, q)$ para cualquier racional $q > \sqrt{2}$, pero $\wedge \left\{(0, q) : q \in \mathbb{Q} \wedge q > \sqrt{2}\right\}$ no existe en H.

Teorema A.7 Un $\ell-$homomorfismo $\tau : G \longrightarrow H$ es completo si y solo si $V g_\alpha$ existe en G y $\tau\left(\vee g_\alpha\right) = \vee \tau g_\alpha$.

Demostración. $\rightarrow$) Obvio.

$\leftarrow$) Por demostrar, que hay $\wedge h_\beta$ en G y $\tau(\wedge h_\beta) = \wedge(\tau h_\beta)$

supongamos que existe $\wedge h_\beta$ en G,

ahora $\tau(\wedge h_\beta) = \tau\left(\vee - h_\beta\right) = [\tau \vee -h_\beta] = \vee \tau - h_\beta = \vee - \tau h_\beta = \wedge \tau h_\beta$. ■

A.1. ℓ-subgrupos

Definición A.8 Sea L un retículo y $A \subseteq L$. El conjunto A es un subreticulo de L si para todo $a, b \in A$, $a \vee b \in A$ y $a \wedge b \in A$.

Definición A.9 Un subgrupo A de un $\ell-$grupo G es un $\ell-$subgrupo de G si A es también un subreticulo de G.

Ejemplo A.10 De un subgrupo de un $\ell-$grupo que no es un $\ell-$subgrupo.

Sea $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ bajo la relación y orden usual . Entonces G es un $\ell-$grupo y sea el conjunto $\{(m, -m), m \in \mathbb{Z}\}$ es un subgrupo, mientras que $(1, -1) \vee (0, 0) = (1 \vee 0, -1 \vee 0) = (1, 0) \notin \{(m, -m)/m \in \mathbb{Z}\}$ no esta en este subgrupo.

El siguiente teorema da un criterio importante para un subgrupo que es un $\ell-$subgrupo.

Teorema A.11 Sea A un subgrupo de G $\ell-$grupo. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.

a) A es un $\ell-$subgrupo de G

b) $\forall a, b \in A,\ a \vee b \in A$

c) $\forall a, b \in A,\ a \wedge b \in A$

d) $\forall a \in A,\ a \wedge 0 \in A$

e) $\forall a \in A,\ a \vee 0 \in A$.

Demostración. $a) \longrightarrow b)$ Por definición.

$b) \longrightarrow c)$ $a \wedge b = -(-a \vee -b) \in A$.

$c) \longrightarrow d)$ Es obvio.

$d) \longrightarrow e)$ Sea $a \vee 0 \in A$.

$e) \longrightarrow a)$ Si $a, b \in A$, $a \vee b = (a - b \vee 0) + b \in A$

$a \wedge b = (a - b \wedge 0) + b \in A$

$= -(a - b \vee 0) + b \in A$.

Remarca. Para verificar un $\ell-$subgrupo, utilizar el inciso e). ■

Corolario A.12 Si B es un $\ell-$subgrupo de A y A es $\ell-$subgrupo de G , entonces B es un $\ell-$subgrupo de G.

Demostración. Sea $B \overset{\ell}{\leq} A$ y $A \overset{\ell}{\leq} G$. Por demostrar $B \overset{\ell}{\leq} G \Leftrightarrow b \vee 0 \in B$.

Sea $b \in B$,$b \in A$. Como $A \overset{\ell}{\leq} G \longrightarrow b \vee 0 \in A$ con $b \in B$. Por tanto $b \vee 0 \in B$. Concluimos $B \overset{\ell}{\leq} G$. ■

Teorema A.13 Sea L un conjunto parcialmente ordenado. Si todo subconjunto tiene un supremo y un ínfimo, entonces L es un retículo completo.

Demostración. Sea $\{g_\lambda\}_\Lambda \subseteq L$ y sea $\{h_\beta\}_B$, el conjunto de los supremos del conjunto $\{g_\lambda\}_\Lambda$. Sea $x = \wedge h_\beta$. como para todo $\lambda,\ g_\lambda \leq h_\beta$ para cualquier β , $x \geq g_\lambda$para todo λ. Así $x = \vee g_\lambda$ y L es un subreticulo completo. ■

Teorema A.14 La intersección de $\ell-$subgrupo de G $\ell-$grupo, es un $\ell-$subgrupo de G . Así los $\ell-$subgrupos forman un retículo completo bajo la inclusión .

Demostración. Sea $\{A_\lambda\}_\Lambda$una colección de $\ell-$subgrupos de G, $\forall\lambda$. Entonces $A_\lambda$es un $\ell-$subgrupo de G. Así $g \wedge 0\ \in A_\lambda, \forall\lambda$. Entonces $g \wedge 0\ \in \bigcap A_\lambda$. Por lo tanto $\bigcap A_\lambda$ es un $\ell-$grupo. Por otro lado , los $\ell-$subgrupos forman un retículo completo bajo la inclusión. ■

Teorema A.15 Si G es un $\ell-$grupo , el centro de G es un $\ell-$subgrupo.

Demostración. Sea G un grupo.

$$\begin{aligned}(z \vee 0) + x &= (z + x) \vee (0 + x)\\ &= (z + 0) + x\\ &= x + (z \vee 0)\,.\end{aligned}$$

■

Teorema A.16 El kernel de un $\ell-$homomorfismo τ es un $\ell-$subgrupo.

Demostración. Sea $\tau : G \longrightarrow H$.

$\tau\,(g \vee 0) = \tau\,(g) \vee \tau\,(0) = \tau\,(g) + 0 = 0 \vee 0 = 0.$ ■

Definición A.17 Sea G un $\ell-$grupo y $S \subseteq G$. $\langle S\rangle$ denota el menor $\ell-$subgrupo de G que contiene a S, el cual se lee generado por S.

Teorema A.18 Sea A un subgrupo de un $\ell-$grupo G. Entonces $\langle A\rangle = \{\vee_I \wedge_J a_{ij} : I, J \textit{ son subconjuntos finitos y } a_{ij} \in A,\ \forall i \in I,\ j \in J\}$; donde $\langle A\rangle$ son subconjuntos finitos es un $\ell-$subgrupo de G generado por A.

Demostración. P.d. i) un subgrupo de G, ii) es particular.

Veamos i) Sean I, J, K y H conjuntos finitos y $\{a_{ij}\}_{I,J}$y $\{b_{km}\}_{K,M}$ subconjunto de A. Entonces

$$\begin{aligned}(\vee_I \wedge_J a_{ij}) + (\vee_K \wedge_M b_{km}) &= \vee_K \wedge_M [(\vee_I \wedge_J a_{ij}) + b_{km}] \\ &= \vee_K \wedge_M \vee_I \wedge_J (a_{ij} + b_{km}) \\ &= \vee_K \wedge_I \wedge_{IM} \wedge_J \left(a_{ij} + b_{k,f(i)}\right)\end{aligned}$$

y

$$-(\vee_I \wedge_J a_{ij}) = \wedge_I \vee_J -a_{ij} = \vee_J \wedge_{J_I} - \left(a_{f(J),J}\right).$$

Como $\langle A\rangle$ es un subgrupo de G y claramente es un subreticulo. Análogamente este conjunto esta contenido en algún subreticulo de G que contenga A.

Esto es, siempre verdadero si L es un retículo distributivo y $A \subseteq L$, entonces el subreticulo de L generado por A es el conjunto

$$\{\vee_I \wedge_J a_{ij} : I, J \text{ finitos y } a_{i,j} \in A,\ \forall i \in I,\ j \in J\}.$$

Así el teorema anterior es actualmente el subreticulo generado por un subgrupo es un subgrupo. ■

Corolario A.19 Si A es un subgrupo abeliano de un $\ell-$grupo G, entonces $\langle A\rangle$ es también abeliano.

Demostración.

$$\begin{aligned}(\vee_I \wedge_J a_{ij}) + (\vee_K \wedge_M b_{km}) &= \vee_I \wedge_J \vee_K \wedge_M (a_{ij} + b_{km}) \\ &= \vee_K \wedge_M \vee_I \wedge_J (b_{km} + a_{ij}) \\ &= (\vee_K \wedge_M b_{km}) + (\vee_I \wedge_J a_{ij}) .\end{aligned}$$

■

Corolario A.20 Si A es un subgrupo normal de un $\ell-$grupo G, entonces $\langle A\rangle$ es un subgrupo normal de G.

Demostración. $-g + (+\vee_I \wedge_J a_{ij}) + g = \vee_I \wedge_J (-g + a_{ij} + g)$. ■

Definición A.21 Sea G un $\ell-$grupo y A un $\ell-$subgrupo de G.

i) A es denso en G , si para todo $0 < g \in G$, existe $0 < a \in A$, $a \leq g$

ii) A es largo en G , si para todo $0 < g \in G$, existe un entero positivo n y $0 < a \in A$, $a \leq ng$.

Se observa que un $\ell-$subgrupo denso es un $\ell-$subgrupo largo.

Un ejemplo de un $\ell-$grupo con un $\ell-$subgrupo que no es largo es el $\ell-$grupo $H = \overrightarrow{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}$ donde $(x, y) \geq (0, 0)$, si $y > 0$ o si $y = 0$ y $x \geq 0$.
Sea $A = \{(0, y) : y \in R\}$. Entonces A no es largo en H.

Un ejemplo de un $\ell-$subgrupo largo que no es denso : $\mathbb{Z}$ es largo en $\mathbb{R}$ pero no es denso.

Teorema A.22 Si A de un $\ell-$subgrupo largo de un $\ell-$subgrupo G y $\{a_\lambda\}$ es un subconjunto de A tal que $\vee a_\lambda$ existe en A, entonces la unión de $\{a_\lambda\}$ existe en G y estas uniones son iguales.

Definición A.23 Sea G un $\ell-$subgrupo y $g, x \in G$. El elemento x es una componente de g , si $\mid x \mid \wedge \mid g - x \mid = 0$.

Lema A.24 Si x es un componente de g, entonces $\mid x \mid \leqslant \mid g \mid$.

Demostración. Sea x una componente de g.

$\mid x \mid \wedge \mid s \mid = \mid x \mid \wedge \mid s - x + x \mid = \mid x \mid \wedge (\mid s - x \mid + \mid x \mid)$

$= (\mid x \mid \wedge \mid s - x \mid) + (\mid x \mid \wedge \mid x \mid) = 0 + \mid x \mid = \mid x \mid.$ ■

Teorema A.25 Si z es una componente de y e y componente de g, entonces z es componente de g.

Demostración. Sean

$$\begin{aligned} \mid z \mid \wedge \mid y - z \mid &= 0 \\ \mid y \mid \wedge \mid g - y \mid &= 0. \end{aligned}$$

Entonces $\mid z \mid \wedge \mid y - z \mid = \mid y \mid \wedge \mid g - y \mid = 0.$

Como
$$\begin{aligned} 0 \leq \mid z \mid \wedge \mid g - z \mid &= \mid z \mid \wedge \mid g - y + y - z \mid \\ &\leq \mid z \mid \wedge (\mid g - y \mid + \mid y - z \mid + \mid y - g \mid) \\ &\leq (\mid z \mid \wedge \mid g - y \mid) + \left(\cancelto{0}{\mid z \mid \wedge \mid y - z \mid}\right)(\mid z \mid \wedge \mid g - y \mid) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto $\mid z \mid \wedge \mid g - z \mid = 0$. ■

Teorema A.26 g^+ y g^- son componentes de g.

Demostración. Sean $g = g^+ - g^-$.

Ahora

$$\begin{aligned} \mid g^+ \mid \wedge \mid g - g^+ \mid &= \mid g^+ \mid \wedge \mid g^+ - g^- - g^+ \mid \\ &= \mid g^+ \mid \wedge \mid -g^- \mid \\ &= g^+ \wedge g^- = 0. \end{aligned}$$

■

Teorema A.27 Si x es componente positivo de g, entonces $0 \leqslant x \leqslant g^{+}$ y si y es componente negativo de g , entonces $-g^{-} \leq y \leq 0$.

Demostración.
$$\begin{aligned} x = x\wedge \mid g \mid \ &= x \wedge (g^{+} - g^{-}) \\ &= (x \wedge g^{+}) + (x \wedge g^{-}) \end{aligned}$$

Sea $s = x \wedge g^{+}$ y $t = x \wedge g^{-}$

Entonces
$$\begin{aligned} 0 = x\wedge \mid g - x \mid \ &= (s + t) \wedge \mid g^{+} - g^{-} - s - t \mid \\ &= (s + t) \wedge \mid g^{+} - s + g^{-} + t \mid \\ &= (s + t) \wedge (g^{+} - s \vee g^{-} + t) \\ &= (s \wedge g^{+} - g^{-}) \vee (t \wedge g^{-} + t) \geq t \geq 0 \end{aligned}$$

y $t = 0$. Así $x \leq g^{+}$. De manera análoga se demuestra que $y \geq -g^{-}$. ■

Lema A.28 Si x es componente de g , entonces $\mid x \mid$ es componente de $\mid g \mid$.

Demostración. Sea x componente de g . Entonces $\mid x \mid \wedge \mid g - x \mid = 0$.

Recordemos que si $a \wedge b = 0$ entonces $a + b = a \vee b = b + c$

$$\begin{aligned} \mid g - x \mid + \mid x \mid \ &= \mid x \mid + \mid g - x \mid \\ \mid g \mid = \mid g - x + x \mid \ &= \mid g - x \mid + \mid x \mid . \end{aligned}$$

Ahora
$$\begin{aligned} \mid x \mid \wedge \mid\mid g \mid - \mid x \mid\mid \ &= \mid x \mid \wedge \mid\mid g - x \mid + \cancelto{0}{\mid x \mid - \mid x \mid} \mid \\ &= \mid x \mid \wedge \mid g - x \mid \\ &= \mid x \mid \wedge \mid g - x \mid = 0. \end{aligned}$$

■

Teorema A.29 Si x es componente de g, entonces x^{+} es componente de g^{+} y x^{-} es componente de g^{-}.

Inversamente si a es componente de g^+ y b es componente de g^- entonces $a-b$ es componente de g.

Demostración. Sabemos que $x^+ \leq g^+$ y $x^- \geq -g^-$.

Así $0 \leq x^+ \wedge g^+ - x^+ \leq x^+ \wedge \mid g \mid -x^+ = 0$

y $0 \leq x^- \wedge g^- - x^- \leq \mid g \mid -x^- = 0$.

Recíprocamente

$$
\begin{aligned}
&\mid a-b \mid \wedge \mid g+b-a \mid \\
&= (a+b) \wedge \mid (g^+ - g^-) + b - a \mid \\
&= (a+b) \wedge \mid (g^+ - a) + (-g^- + b) \mid \\
&= (a+b) \wedge \mid g^+ - a \mid + \mid -g^- + b \mid \\
&= (a+b) \wedge g^+ - a - b + g^- \\
&= (a \wedge g^+ - a) \vee (a \wedge (-b + g^-)) \vee (b \wedge g^+ - a) \vee b \wedge (-b + g^-) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

■

Teorema A.30 Si $g \geq 0$, toda componente de g es positivo.

Definición A.31 Sea G un $\ell-$grupo y $g \in G$. Las componentes absolutos de g, son los componentes de $\mid g \mid$.

Definición A.32 Un retículo L es un retículo complementario, si L tiene un elemento mayor $\overline{1}$ y un elemento menor $\overline{0}$ y si para todo $y \in L$, hay un $k \in L$, tales que $g \wedge k = 0$ y $g \vee k = \overline{1}$.

Un retículo complementario distributivo es llamado *Algebra de boole*.

Teorema A.33 Los componentes absolutas de g forman un subálgebra Booleana de G^+.

Demostración. Sin perdida de generalidad, sea $g \geq 0$. Así si x y y son componentes de g,

$$
\begin{aligned}
&(x \vee y) \wedge g - (x \vee y) \wedge g - (x \vee y) \\
&= (x \vee y) \wedge g\,(-x \wedge -y) \\
&= (x \vee y) \wedge ((g - x) \wedge g - y) \\
&= (x \wedge (g - x) \wedge (g - y)) \vee (y \wedge (g - x) \wedge (g - y)) \\
&= (0 \wedge (g - x)) \vee (0 \wedge (g - x)) \\
&= 0 \vee 0 = 0,
\end{aligned}
$$

y de manera análoga $x \wedge y$ es una componente de g . El elemento 0 es el menor elemento de este subretículo y g es el mayor, la distributividad y la complementación son obvios. ■

A.2. $\ell-$subgrupos convexos

Sea G un $\ell-$grupo con elemento identidad $e = 0$

Definición A.34 Un subconjunto S de un grupo parcialmente ordenado T es convexo, si $s, t \in S \wedge s \leq g \leq t$ en T, entonces $g \in S$.

Definición A.35 El conjunto de $\ell-$subgrupos convexos de G, es denotado por $C\,(G)$.

Teorema A.36 Para un subgrupos de G. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) S es un $\ell-$subgrupo convexo de G

b) S es convexo y dirigido

c) Si $\mid g \mid \leq \mid s \mid$ para algún $s \in S$, entonces $g \in S$

d) S es un $\ell-$subgrupo de G y si $0 \leq g \leq s$ en S, entonces $g \in S$.

Demostración. *a)* $\rightarrow$ *b)*

Sea S un $\ell-$subgrupo convexo de G.

Entonces S es convexo y como S es un $\ell-$subgrupo, cada par en S es acotado superior e inferior mente por tanto, S es dirigido.

b)$\rightarrow$c)

Sea S subgrupo de G, convexo y dirigido.

Además, sea $\mid g \mid \leq \mid s \mid$ para algún $s \in S$.

Sea $x \in S$ tales que $x \geq s \ \wedge \ x \geq -s$, entonces $x \geq s \vee -s$. Implica $x \geq \mid s \mid$.

Luego $s \leq \mid s \mid \leq x\,;\, s, x \in S$. Entonces $\mid s \mid \in S$, S convexo.
Como $0 \leq \mid g \mid \leq \mid s \mid \leq x$, $0, x \in S$. Entonces $\mid g \mid \in S$. Ahora como

$$\begin{aligned} \mid g \mid = g^{+} \vee g^{-} &\geq g^{+},\ g^{-} \geq 0 \\ g = g^{+} + g^{-} &\geq 0, \end{aligned}$$

entonces $0 \leq g \leq \mid g \mid$, luego $g \in S$ pues S es convexo.

c)$\rightarrow$d)

d)$\rightarrow$a)

Sea S un $\ell-$subgrupo de G y $0 \leq g \leq s \in S$, entonces $g \in S$.

Sean $s_1, s_2 \in S$ y $g \in G$ tal que $s_1 \leq g \leq s_2$ en G.

Entonces $0 \leq g - s_1 \leq s_2 - s_1$. Luego $g - s_1 \in G$, así $s \in S$. ■

Teorema A.37 Sea $\{C_\lambda\} \subseteq C\,(G)$. Entonces $\bigcap C_\lambda \in C\,(G)$.

Demostración. Sea $\{C_\lambda\} \subseteq C\,(G)$

a) Sea $g \in C_\lambda$,$\forall\lambda$. Como $C_\lambda$es un $\ell-$subgrupo de G, entonces $g \vee 0 \in C_\lambda,\ \forall\lambda$. Luego $g \vee 0 \in \bigcap C_\lambda$. Por tanto C_λ es un $\ell-$subgrupo de G .

b) Sea $a \in \bigcap G_\lambda$ y $0 \leq g \leq a \in \bigcap C_\lambda$.Entonces $0 \leq g \leq a \in C_\lambda, \forall\lambda$, luego $g \in C_\lambda, \forall\lambda$. Entonces $g \in \bigcap C_\lambda$. ■

Corolario A.38 Sea $S \subseteq G$, entonces existe un $\ell-$subgrupo convexo minimal de G que contiene a S. Este, es denotado por $G(S)$.

Teorema A.39 Sea $C_\lambda \subseteq C(G)$ y sea $[\bigcup C_\lambda]$ denota el grupo de G que es generado por $\bigcup C_\lambda$. Entonces $[\bigcup C_\lambda] \in C(G)$.

Demostración. Sea $C_\lambda \subseteq C(G)$ y $[\bigcup C_\lambda]$ un subgrupo de G. Veamos que es convexo:

Sea $g = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ donde $a_i \in \bigcup C_\lambda$, $\forall i$.

Entonces

$$\begin{aligned} 0 \leq g \vee 0 &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \vee 0 \\ &\leq (a_1 \vee 0) + (a_2 \vee 0) + \cdots + (a_n \vee 0) \end{aligned}$$

por el teorema de Riesz: hay $0 \leq b_i \leq a_i \vee 0$ tal que $g = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, $b_i \in \bigcup C_\lambda, \forall i$, como $a_i \vee 0 \in \bigcup C_\lambda$. Por tanto $g \in [\bigcup C_\lambda]$. ■

Teorema A.40 $C(G)$ es un subretículo completo de los retículos de subgrupos de G.

Corolario A.41 Si $\{A_\lambda\} \subseteq C(G)$ y $g \in (\bigvee A_\lambda)^+$, entonces existen $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ en $\bigcup \left(A_\lambda^+\right)$, tal que $g = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Corolario A.42 Si $\{C_\lambda\} \subseteq C(G)$ es dirigido hacia arriba por inclusión, entonces $\bigcup C_\lambda$ es $\ell-$subgrupo conexo de G.

Demostración. Sea $\{C_\lambda\} \subseteq C(G)$, dirigido hacia arriba. La $\bigcup C_\lambda$ ya es un grupo convexo de G.

Demostremos que $\bigcup C_\lambda$ es un subgrupo de G.

Sean $a,\ b \in \bigcup C_\lambda$.

Entonces $\exists C_\mu\ y\ C_\nu\ tal\ que\ a \in C_\mu\ y\ b \in C_\nu$ luego $\exists C_\alpha\ tal\ que\ C_\mu,\ C_\nu \subseteq C_\alpha$, entonces $a - b \in C_\alpha \subseteq \bigcup C_\alpha$. ■

Teorema A.43 Si A es un $\ell-$subgrupo convexo de C y C es un $\ell-$subgrupo convexo de G, entonces A es un $\ell-$subgrupo convexo de G.

Demostración. La transitividad de subgrupos es claro.

Sabemos que A es un $\ell-$subgrupo de G.

Sea $g \in G$, $0 \leq g \leq a$ en A. Como $A \subseteq C$, entonces $0 \leq g \leq a$ en C, como C es convexo $g \in C$. Ahora como A es un $\ell-$subgrupo de G, entonces $0 \leq g \leq a$ en A. Luego $g \in A$. ■

Teorema A.44 Si $C \in C\,(G)$, entonces C^+ es un subsemigrupo convexo de G^+ que contiene 0. Inversamente si A es un subsemigrupo convexo de G^+ que contiene 0, entonces $[A]$ es un $\ell-$subgrupo convexo de G. Así existen un orden-preservador biyectivo entre los subsemigrupos convexos de G^+ que contiene 0 y los $\ell-$subgrupo convexos de G.

Demostración. Sea $C \in C\,(G)$. Entonces claramente C^+ es un subsemigrupo convexo de G^+ que contiene 0.

Nuevamente, si A en subsemigrupo convexo, sea $T = \{g - h : g, h \in A\}$.

Entonces $A \subseteq T \subseteq [A]$ y T es cerrado bajo diferencias. Sea $x - y$ y $g - h \in T$. Entonces $g = (g \wedge y) + \overline{g}$ y $y = (g \wedge y) + \overline{y}$, donde $\overline{g} + \overline{y} = 0$.

Por la convexidad de A, $\overline{g}$ y $\overline{y}$ están en A. Como $\overline{g} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{g}$ y $-(\overline{y} + \overline{g}) = -(\overline{y}) - (\overline{g})$, $x - y + g - h = x - (\overline{y}) - (g \wedge y) + (g \wedge y) + \overline{g} - h = x + \overline{g} - (\overline{y}) - h \in T$. Así $T = [A]$. Ahora si $0 \leq g \leq x - y \in T$, entonces $0 \leq g \leq x$ implica $g \in A$ y así T es convexo, ya que T es directo, $T \in C\,(G)$ y claramente $T^+ \subseteq A \subseteq T^+$.

Esto muestra la correspondencia : $G\,(A)^+ = A$ y $C = G(C^+)$. ■

Teorema A.45 $C(G)$ es un retículo distributivo *Brouwerian*.

Demostración. Si $g \in \bigvee(A \bigcap B_\lambda)$, entonces $g \in A$ y $g \in [\bigcup B_\lambda]$. Así $\bigvee(A \bigcap B_\lambda)$ esta contenido en $A \bigcap \bigvee B_\lambda$. Por otro lado, sea $0 \leq a \in A \bigcap \bigvee B_\lambda$. Entonces $a \in A \wedge a \in \bigvee B_\lambda$, luego $a \in \langle \bigcup B_\lambda \rangle$. Implica $a = \sum q_i$, $\forall q_i \in \bigcup B_\lambda^+$. Entonces $0 \leq q_i \leq a$, $\forall i$. Como A es un $\ell-$grupo convexo. Entonces $q_i \in A$, $\forall i$. Luego $a \in \bigvee(A \bigcap B_\lambda)$. ■

A.3. $\ell-$ideales y cociente ordenado

Teorema A.46 Sea G un po-grupo y S un subgrupo convexo de G. Sea $R(S)$ que denota el conjunto de clases laterales derechos de S.

Sobre $R(S)$ definimos $Sx \geq Sy$ si existe $s \in S$ tal que $x \geq sy$.

Entonces $\geq$ es una relación de orden parcial de $R(S)$ y es llamado el cociente ordenado de $R(S)$.

Demostración. Veamos si $\geq$ esta bien definido.

Sean $Sa = Sx$ y $Sb = Sy$. Entonces $\exists\ s_1, s_2 \in S$ tal que $x = s_1 a$ y $y = s_2 b$.

Si $Sx \geq Sy$, entonces $\exists s \in S$, $x \geq sy$ por definición $s_1 a \geq s s_2 b$.

Así $a \geq s_1^{-1} s s_2 b$ entonces $Sa \geq Sb$.

Veamos que la relación esta parcialmente ordenado.

Reflexividad $Sx \geq Sx$.

Anti simétrica

Si $Sx \geq Sy\ \wedge\ Sx \geq Sx$, entonces $\exists\ s_1, s_2 \ni x \geq s_1 y\ \wedge\ y \geq s_2 x$.

Ahora $s_2^{-1} \geq xy^{-1} \geq s_1$ por la convexidad de S, $xy^{-1} \in S$, $x = ys$, así $Sx = Sy$.

Transitividad

$Sx \geq Sy\ \wedge\ Sy \geq Sz$

$\exists s_1$ y s_2 en S tal que $x \geq s_1 y$ y $y \geq s_2 z$, entonces $x \geq s_1 s_2 z$. Por tanto $Sx \geq Sz$.

Remarca.- Es llamado el anillo cociente ordenado. Similar definición para cocientes izquierdos. ■

Teorema A.47 Un subgrupo S de G es un $\ell-$subgrupo convexo si y sólo si $R(S)$ es un retículo distributivo bajo el cociente ordenado.

Demostración. Sea S un $\ell-$subgrupo convexo de G.
Entonces $S(x \vee y) \geq Sx$ y $S(x \vee y) \geq Sy$.

Supongamos que $Sd \geq Sx \wedge Sd \geq Sy$, entonces $\exists s_1$y s_2 en S tal que $d \geq s_1 x \wedge d \geq s_2 y$, y $d \geq s_2 x \wedge d \geq s_1 y$, entonces $d \geq (s_1 \wedge s_2)\, x$ pero $d \geq (s_1 \wedge s_2)\, y$ luego $d \vee d \geq (s_1 \wedge s_2)(x \vee y)$, implica $d \geq (s_1 \wedge s_2)(x \vee y)$, por tanto $sd \geq s(x \vee y)$.

Pero como $Sx \vee Sy \geq S(x \vee y)$. Por tanto $S(x \vee y) = Sx \vee Sy$.

Análogamente para $S(x \wedge y) = Sx \wedge Sy$.

Probaremos que $R(S)$ es un retículo distributivo

$$\begin{aligned} Sx \wedge (Sy \vee Sz) &= (Sx \wedge Sy) \vee (Sx \wedge Sz) \\ &= S(x \wedge y) \vee S(x \wedge z) \\ &= S((x \wedge y) \vee (x \wedge z)) \\ &= S(x \wedge y) \vee S(x \wedge z) \\ &= (Sx \wedge Sy) \vee (Sx \wedge Sz)\,. \end{aligned}$$

Inversamente

Si $R(S)$ es un retículo distributivo p.d. S es un $\ell -$ subgrupo convexo.

Supongamos que

$\mid g \mid \leq \mid s \mid$ donde $s \in S$. Entonces $s \wedge -s \leq - \mid s \mid \leq g \leq \mid s \mid = s \vee -s$

$s \wedge -s \leq - \mid s \mid \leq g \leq \mid g \mid \leq \mid s \mid = s \vee -s$. Por tanto $g \in S$.

Así S es un $\ell -$ subgrupo convexo. ■

Teorema A.48 Sea $A \subseteq B$, $\ell-$subgrupo convexos de G. Entonces la función $\tau : R(A) \longrightarrow R(B)$ tal que $Ax \longrightarrow Bx$ es un homomorfismo reticular de $R(A)$ sobre $R(B)$.

Demostración. $\tau([Ax \vee Ay]) = \tau(A(x \vee y)) = B(x \vee y) = Bx \vee By = \tau(Ax) \vee \tau(By)$. ■

Definición A.49 Un $\ell-$ ideal de G es un $\ell-$ subgrupo normal convexo.

$L(G)$ denota el conjunto $\ell-$ideal de G parcialmente ordenado por la inclusión.

Teorema A.50 Sea L un $\ell-$ideal de G. Entonces $\frac{G}{L}$ bajo el cociente ordenado en un $\ell-$ideal y el homomorfismo natural de G sobre $\frac{G}{L}$ es un $\ell-$homomorfismo.

Demostración. - Demostraremos que $\frac{G}{L}$ es un ℓ-grupo Sea $Lx \geq Ly$ $\exists a_1 \in L$ tal que $x \geq a_1 y$. Ahora sean $g, h \in G$, $gxh \geq ga_1yh = a_2gyh$ para algún $a_2 \in L$. Entonces $L(gxh) \geq L(gyh)$, $L(g)L(x)L(h) \geq L(g)L(y)L(h)$, así $\frac{G}{L}$ es un ℓ-grupo.

Finalmente, $L(g \vee 0) = Lg \vee L$ es un $\ell-$homomorfismo. ■

Corolario A.51 Un subgrupo C es un $\ell-$ideal de G si y sólo si C es el kernel de un $\ell-$homomorfismo de G.

Demostración. Sea $C \in L(G)$ Si C el kernel de $\ell-$homomorfismo natural sobre $\frac{G}{C}$, es decir de $G \longrightarrow \frac{G}{C}$ (el kernel es un *ideal*).

Inversamente, sea $\tau : G \longrightarrow \frac{G}{C}$ un $\ell-$homomorfismo de G entonces $\ker\tau$ es claramente normal, veamos que $\ker\tau$ es convexo.

Si $0 \leq g \leq h \in \ker\tau$, $0 \leq \tau g \leq 0$, entonces $g \in \ker\tau$, así $\tau g = 0$, por tanto $\ker\tau$ es convexo. ■

Teorema A.52 (Primer teorema de isomorfismo)
Sea G y H, $\ell-$grupos y $\tau : G \longrightarrow H$ un $\ell-$homomorfismo suryectivo entonces $\frac{G}{\ker \tau} \cong H$.

Teorema A.53 (Segundo teorema de isomorfismo)
Sea A un $\ell-$subgrupo de G y sea B un $\ell-$ideal de G . Entonces AB es un $\ell-$subgrupo de G y $\frac{AB}{B} \cong \frac{A}{A \cap B}$.

Teorema A.54 (Tercer teorema de isomorfismo)
Sea $A \subseteq B$, $\ell-$ideal de G. Entonces $\frac{B}{A}$ es un $\ell-$ideal de $\frac{G}{A}$ y $\frac{G}{B}$ es $\ell-$isomorfismo a $\frac{\frac{G}{A}}{\frac{B}{A}}$.

BIBLIOGRAFÍA

[1] M. Artin *Algebra*, Massachusets Institute of Technology, Prentice Hall (2011)

[2] M. Anderson, T. Feil *Lattice-Ordered Groups*, Reidel Texts in the Mathematical Sciences, D. Reidel Publishing Company (1988)

[3] A. Bigard, K. Keimel y S. Wolfenstein. *Groupes et Anneaux Réticulés*. Libro editado por Springer (1977)

[4] V. V. Bludov: *Completion of Linearly Ordered Groups*, Algebra and Logic, Vol. 44, No. 6, (2005), 370-380

[5] P. Conrad: *The Group of Order Preserving Automorphisms of an Ordered Abelian Group*, Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958), 382-389

[6] M. Darnell *Theory of Lattice-Ordered Groups*, Monographs and textbooks in pure and applied mathematics, Marcel Dekker Inc. (1995)

[7] D. Dummit, R. Foote *Abstract Algebra* 3d. Edition, John Wiley and Sons Publishers (2004)

[8] Guier, Jorge. (2009). *Ultraproductos de f-anillos proyectables*. Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones. 6. 107. 10.15517/rmta.v6i2.172.

[9] O. Hölder: *Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maβ*, Ber. Verh. Sachs. Ges. Wiss. Leipzig, Math-Phys Cl. (1901), 1-64

[10] W. C. Holland: *Transitive Lattice-Ordered Permutation Groups*, Math. Zeitschr, 87 (1965), 420-433

[11] V. Kopytov, N. Medvedev: *The Theory of Lattice-Ordered Groups*, Kluwer Academic Publishers (1994)

[12] R. Lafuente-Rodríguez: *Divisibility in Certain Automorphism Groups*, Czechoslovak Mathematical Journal, 57 - 132 (2007), 865-875

[13] Mott J.L. (1989) Groups of Divisibility: A Unifying Concept for Integral Domains and Partially Ordered Groups. In: Glass A.M.W., Holland W.C. (eds) Lattice-Ordered Groups. Mathematics and Its Applications, vol 48. Springer, Dordrecht.