UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS

FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES

CARRERA DE MATEMÁTICA

TEOREMAS DE DESCOMPOSICIÓN DE WEYL Y LEVI (COHOMOLOGÍA DE ÁLGEBRAS DE LIE)

Proyecto de Grado presentado para la obtención del Grado de Licenciatura

POR: GABRIELA CLAUDIA CALAMANI MAMANI

TUTOR: DR. GUILLERMO FERNANDO VERA HURTADO

LA PAZ - BOLIVIA

Noviembre, 2020

Dedicatoria

Dedicado a mis padres y hermanos, que me apoyaron.

Agradecimientos

A mis padres, por su amor, apoyo incondicional y por estar siempre a mi lado.

Al Dr. Guillermo Fernando Vera Hurtado, por su paciencia, sus conocimientos y sobre todo sus consejos y profesionalismo como tutor.

A todos los docentes de la Carrera de Matemática que me brindaron sus valiosos conocimientos.

Índice General

Resumen

El origen de la teoría de Cohomologíade álgebras de Lie radica en la topología algebraica. Chevalley -Eilenberg han demostrado que la cohomología real del espacio topológico subyacente de un grupo de Lie compacto es isomorfo a la cohomología real de su álgebra de Lie.
Se darán pruebas cohomológicas de los dos teoremas principales en la teoría de álgebras de Lie sobre un campo de característica 0. El primero de estos teoremas es que las representaciones de dimensiones finitas de un álgebra de Lie semi-simple son completamente reducibles. El paso principal en esa prueba será demostrar que el primer grupo de cohomología de una álgebra de Lie semisimple de dimensión finita es trivial. Esto es conocido como el primer Whitehead Lemma. Luego se demostrará que cada álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión finita es la extensión dividida de un álgebra de Lie semi-simple por el radical de $\mathfrak{g}$: el paso principal en la prueba de este resultado será mostrar que el segundo grupo de cohomología de un álgebra de Lie semisimple de dimensión finita es trivial. Esto se conoce como el segundo Lema de Whitehead.

Introducción

Las álgebras de Lie forman el aparato básico de lo que se conoce genéricamente por la teoría de Lie. Esta teoría tuvo su origen alrededor de 1870 a partir de la idea, aparentemente simple, abordar ecuaciones diferenciales desde el mismo punto de vista que el adoptado por Galois para las ecuaciones algebraicas. El programa, lanzado por Sophus Lie y Felix Klein, consistió en estudiar las ecuaciones diferenciales a través de sus simetrías. Este programa destacó los continuos grupos de transformaciones para lo cual se ha creado una extensa teoría a lo largo de los años con ramificaciones en las áreas más diversas de las matemáticas y sus aplicaciones.

La palanca básica en la creación de este vasto cuerpo de conocimiento matemático fue la descubierta por S. Lie, de los grupos infinitesimales o, como se dice hoy, de las álgebras de Lie. Los resultados pioneros de la teoría, que luego se llamaron teoremas de Lie, establecen la relación entre los grupos de transformaciones, actualmente llamados grupos de Lie, y álgebras de Lie, a través de la aplicación de exponencial. Estos teoremas mostraron tempranamente una de las características de la teoría de Lie que es la de contrarrestar los conceptos complementarios de Lie de grupos y álgebras. Los grupos de Lie tienen una naturaleza geométrica, mientras que las álgebras de Lie son objetos algebraicos por excelencia.

Es difícil hablar de una justificación para el estudio de las álgebras de Lie, sería más conveniente hablar de justificaciones por las múltiples aplicaciones que puede tener en la ciencia moderna.

Como ya se ha indicado anteriormente, entendemos que la enorme trascendencia de la obra de Lie, tanto sobre los fundamentos de la Matemática actual como por su extensa aplicación a otras ciencias, tales como Física, Ingenierías y economía y finanzas por ejemplo, le hacen merecedora de ser un poco más conocida y estudiada.

Como una muestra de la aplicación del trabajo de Lie a la Física Moderna, destaca que los grupos y las álgebras de Lie son muy utilizadas actualmente como herramientas en el estudio de las simetrías, no sólo de las clásicas en el espacio-tiempo, sino en las nuevas asociadas con los grados de libertad interna de las partículas y de los campos, así como también en la moderna teoría de las súpercuerdas.

El objetivo de este trabajo es demostrar los teoremas descomposición de Weyl y Levi haciendo uso de conceptos elementales de la teoría de álgebras de Lie, sus principales resultados (teoremas, proposiciones), clasificándolos según sus propiedades para después introducirlos en el contexto de la cohomología de álgebras de Lie y establecer la relación entre el espacio de cohomología y la existencia de complementares. Para esto, se ha estructurado en cuatro capítulos en los cuales se pretende abordar y desglosar la teoría necesaria para el desarrollo sistemático de la investigación, comenzando desde una introducción de la teoría de las álgebras de Lie hasta llegar a los resultados buscados en la cohomología de álgebras de Lie.

En el primer capítulo se estudian y analizan con bastante detenimiento las álgebras de Lie, definiendo formalmente una álgebra de Lie mostrando ejemplos que ilustran sus características y diversidad de contextos, asimismo algunos resultados relevantes en la teoría. Posteriormente se estudian ideales, homomorfismos, derivaciones, representaciones y series de composición sobre estas álgebras.

En el capítulo 2 se definen unos casos especiales de álgebras de Lie como lo son las álgebras de Lie nilpotentes y las álgebras de Lie solubles, tiene como principal objetivo estudiar estas álgebras de Lie agregando conceptos sobre los mismos, como la noción de nilrepresentaciones, espacios de peso, también se presentan resultados acerca de una descomposición en espacios de peso y existencia de un ideal nilpotente maximal llamado nilradical. Además se presentan el teorema de Lie y el teorema de Engel sobre álgebras de Lie de solubles de transformaciones lineales. Se termina la temática abordando las álgebras de Lie simples y semisimples y presentando resultados importantes sobre ellas.

Luego, en el capítulo 3, se introducen las definiciones de espacio de aplicaciones multilineales alternadas, operador diferencial exterior y cohomología de álgebras de Lie, además de algunas propiedades, resultados generales y ejemplos, se determinan las relaciones entre el anulamiento de los espacios de cohomología y la existencia de complementares,las cuales serán fundamentales para realizar construcciones y entender los resultados del capítulo siguiente.

Concluyendo en el último capítulo, se darán pruebas cohomológicas de los dos teoremas principales del trabajo en la teoría de las álgebras de Lie, los teoremas de descomposición de Weyl y Levi. El primero de estos teoremas afirma que las representaciones de dimensión finita de una álgebra de Lie semisimple son completamente reducibles. El paso principal en esa prueba será mostrar que el primer espacio de cohomología de una representación arbitraria de una álgebra de Lie semisimple es trivial, esto es conocido como el primer Lema de Whitehead. Luego se demostrará que cada álgebra de Lie de dimensión finita $\mathfrak{g}$ es la suma directa de un álgebra de Lie semisimple por el radical soluble de $\mathfrak{g}$. El paso principal en la prueba de este resultado será mostrar que el segundo espacio de cohomología de una representación arbitraria de un álgebra de Lie semisimple es trivial, esto se conoce como el segundo Lema Whitehead.

Existe una relación muy estrecha entre la cohomologia de Algebras de Lie (un concepto algebraico) y la cohomologia de Grupos de Lie (un concepto topologico), por lo cual la tesis también apoya el estudio de los grupos de Lie.

El teorema de Weyl reduce el estudio de las representaciones arbitrarias de un algebra semisimple al estudio de sus representaciones completamente reducibles, ademas implica que los grupos de cohomología de orden superior a 2 también se anulan en el caso de algebras semisimples y representaciones irreducibles no triviales.

El teorema de Levi tiene gran importancia dentro de las algebras de Lie, ya que da un entendimiento profundo acerca de estas estructuras algebraicas.

Capítulo 1

Álgebras de Lie

Este es un capítulo introductorio, formado en su mayor parte por las definiciones de conceptos que forman el lenguaje básico de la teoría de las álgebras de Lie. Estos conceptos se ilustran abundantemente con ejemplos que deberían guiar la lectura de capítulos posteriores. Los resultados (proposiciones, teoremas, etc.) incluidos aquí no tienen un carácter profundo y sirven principalmente para continuar la exposición y articulan entre sí los diferentes conceptos.

1.1. Definición y ejemplos

Definición 1.1. *Una álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *consiste en un espacio vectorial dotado de un producto (corchete o conmutador)*

$$[\ ,\ ]:\ \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

con las siguientes propiedades:

1. *Es bilineal.*
2. *Antisimetrico, es decir,* $[X,X]=0$*, para todo* $X\in\mathfrak{g}$ *(lo que implica* $[X,Y]=-[Y,X]$*, para todo* $X,Y\in\mathfrak{g}$ *y es equivalente si el cuerpo de escalares no es de característica dos).*
3. *Satisface la identidad de Jacobi, es decir, para todo* $X,Y,Z\in\mathfrak{g}$*,*

$$[X,[Y,Z]]+[Z,[X,Y]]+[Y,[Z,X]]=0$$

Esta igualdad puede ser escrita alternativamente de una de las siguientes formas:

a) $[X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]]$.

b) $[[X,Y],Z] = [[X,Z],Y] + [X,[Y,Z]]$.

En general, una álgebra es un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ dotado de un producto, es decir, una aplicación de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ a valores en $\mathfrak{g}$. Cualquier aplicación de este tipo que merezca el nombre de producto debe ser bilineal. La antisimetría y la identidad de Jacobi son características de las álgebras de Lie.

Definición 1.2. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie. Una subálgebra de Lie es un subespacio vectorial $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ que es cerrado por el corchete, es decir, $[X,Y] \in \mathfrak{h}$ si $X, Y \in \mathfrak{h}$.*

Evidentemente, una subálgebra de Lie es una álgebra de Lie con la estructura heredada por la estructura de $\mathfrak{g}$.

Ejemplos:

1. Todo espacio vectorial es una álgebra de Lie con el corchete nulo.

2. $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$: el espacio de todas las transformaciones lineales de un espacio vectorial de dimension n sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ que es lo mismo que el espacio de matrices $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$. El corchete es dado por

$$[X,Y] = XY - YX$$

con X y Y matrices.

3. *Álgebras de Lie provenientes de álgebras asociativas*: Sea $\mathcal{A}$ una álgebra asociativa y defina en $\mathcal{A}$ el corchete por el conmutador

$$[x,y] = xy - yx \qquad x, y \in \mathcal{A}.$$

Este corchete define en $\mathcal{A}$ una estructura de álgebra de Lie.

4. *Álgebras abelianas :*$[\ ,\ ] = 0$. En este caso la estructura de álgebra de Lie no enriquece nada a la estructura de espacio vectorial.

Ejemplos de álgebras abelianas:

a) Si $\dim \mathfrak{g} = 1$, $\mathfrak{g}$ es abeliana.

b) Todo subespacio de dimensión 1 de una álgebra de Lie cualquiera es una subálgebra abeliana.

c) El espacio de las matrices diagonales es una subálgebra abeliana de $\mathfrak{g}l\,(n, \mathbb{K})$.

5. *Subálgebras de* $\mathfrak{gl}\,(n, \mathbb{K})$:

a) $\mathfrak{so}\,(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}\,(n, \mathbb{K}) : X + X^t = 0\}$, donde X^t indica la transpuesta de la matriz X.

b) $\mathfrak{sl}\,(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}\,(n, \mathbb{K}) : \operatorname{tr} X = 0\}$.

c) El espacio de las matrices triangulares superiores con ceros en la diagonal:

$$\{X \in \mathfrak{gl}\,(n, \mathbb{K}) : X = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}\}$$

es una subálgebra.

d) El espacio de las matrices triangulares superiores:

$$\{X \in \mathfrak{gl}\,(n, \mathbb{K}) : X = \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}\}$$

es una subálgebra.

6. *Álgebras de dimensión* ≤ 2:

a) Si $\dim \mathfrak{g} = 1$. Entonces $\mathfrak{g}$ es abeliana.

b) Si $\dim \mathfrak{g} = 2$. Existen dos posibilidades:

i) $\mathfrak{g}$ es abeliana.

ii) Existe una base $\{X, Y\}$ de $\mathfrak{g}$ tal que

$$[X, Y] = Y$$

el corchete de dos elementos cualquiera de $\mathfrak{g}$ es dado por:

$$[aX + bY, cX + dY] = (ad - bc)[X, Y] = (ad - bc) Y.$$

En efecto, suponga que $\mathfrak{g}$ no sea abeliana y tome una base $\{X', Y'\}$ de $\mathfrak{g}$. Entonces $[X', Y'] \neq 0$, pues caso contrario seria abeliana. Sea $Y'' = [X', Y']$ y escoja X'' tal que $\{X'', Y''\}$ sea base de $\mathfrak{g}$. Entonces $X'' = aX' + bY', Y'' = cX' + dY'$ y

$$[X'', Y''] = \alpha Y''$$

con $\alpha \neq 0$ (pues $\{X'', Y''\}$ es base y si $\alpha = 0$, la álgebra sería abeliana). Los elementos $X = \frac{1}{\alpha} X'', Y = Y''$ forman la base requerida.

Las álgebras:

$$\mathfrak{g} = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{K}\} \quad \text{y} \quad \mathfrak{g} = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{K}\}$$

son ejemplos concretos de álgebras bidimensionales no abelianas.

□

1.2. Generalidades algebraicas

1.2.1. Morfismos

Definición 1.3. *Una transformación lineal $\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ (con $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ álgebras de Lie) es un:*

- *homomorfismo si $\psi [X, Y] = [\psi X, \psi Y]$.*
- *isomorfismo si es un homomorfismo invertible.*
- *automorfismo si es isomorfismo y $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$.*

Las álgebras $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ son isomorfas si existe un isomorfismo $\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$.

Ejemplos:

1. Los homomorfismos entre las álgebras abelianas son las transformaciones lineales.

2. Si $\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ es un homomorfismo y $\mathfrak{h}$ es abeliana entonces $\ker \psi$ contiene todos los elementos de la forma $[X, Y]$, $X, Y \in \mathfrak{g}$, pues $\psi [X, Y] = [\psi X, \psi Y] = 0$.

3. La aplicación traza:
$$\mathrm{tr} : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$
Es un homomorfismo, pues $\mathrm{tr}(XY - YX) = 0$ para cualesquiera transformaciones lineales X, Y y por tanto $\mathrm{tr}[X, Y] = 0 = [\mathrm{tr}\, X, \mathrm{tr}\, Y]$, ya que $\mathbb{K}$ por ser de dimensión uno, es una álgebra abeliana.

4. Sea P una transformación lineal invertible del espacio vectorial V. Entonces la conjugación por P:
$$A \in \mathfrak{gl}(V) \longmapsto PAP^{-1} \in \mathfrak{gl}(V)$$
es un automorfismo de $\mathfrak{gl}(V)$.

1.2.2. Constantes de estructura

Una forma de verificar que álgebras de Lie de dimensión finita son isomorfas es a través del corchete entre elementos de sus bases. Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie y $\{X_1, \ldots, X_n\}$ una base de $\mathfrak{g}$. Tomando dos elementos X_i, X_j de esta base, el corchete entre ellos $[X_i, X_j]$ puede ser escrito como combinación lineal
$$[X_i, X_j] = \sum_k c_{ij}^k X_k.$$
Los coeficientes c_{ij}^k son denominados *constantes de estructura* de la álgebra en relación a la base. Estas constantes determinan la álgebra, a menos de isomorfismos. En efecto, sea $\mathfrak{h}$ una álgebra de Lie con una base $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ con las mismas constantes de estructura c_{ij}^k que $\mathfrak{g}$. Sea también la transformación lineal $\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ tal que $\psi(X_i) = Y_i$. Entonces
$$\psi [X, Y] = \sum_{ijk} a^i b^j c_{ij}^k \psi(X_k) = \sum_{ij} a^i b^j [Y_i, Y_j] = [\psi X, \psi Y]$$
donde a^i y $b^j; i, j = 1, \ldots, n$ son las coordenadas de X y Y respectivamente en relación a la base de $\mathfrak{g}$. Esto muestra que ψ es un isomorfismo, y por tanto, $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ son isomorfas.
Las constantes de estructura satisfacen las igualdades para toda terna i, j, k, m:

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k$$
$$\sum_{l,m}\left(c_{ij}^l c_{lk}^m + c_{jk}^l c_{li}^m + c_{ki}^l c_{lj}^m\right) = 0$$

la primera de ellas es debido a la antisimetría del corchete y la segunda la identidad de Jacobi. Recíprocamente, se puede verificar que dadas constantes c_{ij}^k que satisfacen esas dos igualdades, ellas son las constantes de estructura de una álgebra de Lie, es decir, partiendo de una base $\{X_1, \ldots, X_n\}$ de un espacio vectorial, definiendo $[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k$ y extendiendo por bilinealidad, se obtiene una álgebra de Lie en el espacio vectorial cuyas constantes de estructura son c_{ij}^k. Estos hechos muestran que para conocer una álgebra de Lie, a menos de isomorfismos, es suficiente conocer los corchetes de los elementos de una base.

1.2.3. Ideales

Definición 1.4. *Un subespacio* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ *es un ideal si:*

$$\forall Y \in \mathfrak{h}, X \in \mathfrak{g} \qquad [X, Y] \in \mathfrak{h}$$

es decir,

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] = \operatorname{span}\{[X, Y] : X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{h}\} \subset \mathfrak{h}$$

Es claro que todo ideal es una subálgebra. Sin embargo, no toda subálgebra es un ideal. Por ejemplo, el subespacio de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ generado por: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ es una subálgebra por ser unidimensional, pero no es un ideal, pues:

$$[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplos:

1. Todo subespacio de una álgebra abeliana es un ideal.

2. Dada una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, los subespacios $\{0\}$ y $\mathfrak{g}$ son ejemplos triviales de ideales en $\mathfrak{g}$.

3. Dada una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, el *centro* de $\mathfrak{g}$, definido por

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} : [X, Y] = 0 \text{ para todo } Y \in \mathfrak{g}\}.$$

es un ideal de $\mathfrak{g}$. En efecto, $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ y $Y, Z \in \mathfrak{g}$, entonces

$$[[X,Y], Z] = [X, [Y,Z]] + [[Y,Z], X] = 0$$

por lo tanto $[X,Y] \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ □

Las propiedades de la suma y de la intersección de ideales y subálgebras están catalogadas en la proposición:

Proposición 1.5. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie.*

1. *La intersección de subálgebras o ideales de $\mathfrak{g}$ es una subálgebra o ideal, respectivamente.*
2. *Si $\mathfrak{h}_1$ es un ideal y $\mathfrak{h}_2$ una subálgebra, entonces $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ y $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ son subálgebras de $\mathfrak{g}$.*
3. *Si $\mathfrak{h}_1$ y $\mathfrak{h}_2$ son ideales de $\mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ es un ideal de $\mathfrak{g}$.*

Demostración. 1. La primera parte es inmediata.

2. Si $\mathfrak{h}_1$ y $\mathfrak{h}_2$ son un ideal y una subálgebra, respectivamente, es claro que $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ y $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ son subespacios vectoriales de $\mathfrak{g}$. Ahora, si $X, Y \in \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$, se pueden escribir como $X = X_1 + X_2$ y $Y = Y_1 + Y_2$, donde $X_1, Y_1 \in \mathfrak{h}_1$ y $X_2, Y_2 \in \mathfrak{h}_2$, entonces:

$$[X,Y] = [X_1 + X_2, Y_1 + Y_2] = [X_1, Y_1] + [X_1, Y_2] + [X_2, Y_1] + [X_2, Y_2] \in \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$$

pues los tres primeros términos de la suma están en $\mathfrak{h}_1$ y el cuarto está en $\mathfrak{h}_2$. Esto prueba que $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$.
La prueba de que $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ es una subálgebra, es consecuencia de item anterior, ya que $\mathfrak{h}_1$ es también una subálgebra.

3. Para ver que $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ es un ideal se procede como sigue: si $X \in \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ con $X = X_1 + X_2$, donde $X_1 \in \mathfrak{h}_1$ y $X_2 \in \mathfrak{h}_2$ y tomando $Y \in \mathfrak{g}$, se tiene

$$[X,Y] = [X_1 + X_2, Y] = [X_1, Y] + [X_2, Y] \in \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$$

pues $\mathfrak{h}_1$ y $\mathfrak{h}_2$ son ideales. Por lo tanto $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ es un ideal de $\mathfrak{g}$.

□

La suma de subálgebras no es, en general, una subálgebra. Una situación típica es la suma de dos subespacios unidimensionales. Cada uno de ellos es una subálgebra y sin embargo el corchete entre ellos puede salir del subespacio de dimensión dos que los contiene. Por ejemplo, sean $\mathfrak{h}_1$ y $\mathfrak{h}_2$ los subespacios de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ generados por $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ respectivamente.
Como:

$$[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ no es subálgebra.
Sea $\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ un homomorfismo. Las siguientes afirmaciones son de verificación inmediata:

- $\ker\ \psi$ es un ideal.
- $\mathrm{im}\ \psi$ es una subálgebra.

1.2.4. Cocientes y teoremas de isomorfismo

Definición 1.6. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie y $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ un ideal. Se define la álgebra de Lie cociente como $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, el espacio vectorial cociente, dotado de un corchete definido por:*

$$[\overline{X}, \overline{Y}] = \overline{[X, Y]}$$

donde $\overline{X}$ denota la clase $X + \mathfrak{h}$.

La definición del corchete en la álgebra de Lie cociente no depende de los representantes elegidos. En efecto, sean $X, X', Y, Y' \in \mathfrak{g}$ con $\overline{X} = \overline{X'}$ y $\overline{Y} = \overline{Y'}$, entonces $X - X' \in \mathfrak{h}$ y $Y - Y' \in \mathfrak{h}$.
Ya que el corchete de Lie es bilineal,

$$\begin{aligned} [X, Y] &= [X' + (X - X'), Y' + (Y - Y')] \\ &= [X', Y'] + [X - X', Y'] + [X', Y - Y'] + [X - X', Y - Y'] \end{aligned}$$

puesto que $\mathfrak{h}$ es un ideal, $[X - X', Y'], [X', Y - Y'], [X - X', Y - Y'] \in \mathfrak{h}$. Por lo tanto $\overline{[X, Y]} = \overline{[X', Y']}$, de esta forma $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ con la operación definida es un álgebra de Lie.
Relacionados con los homomorfismos de álgebras de Lie cocientes, existen los

Teoremas de isomorfismo

1. Sea $\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ un homomorfismo, entonces,

$$\mathfrak{g}/\ker\ \psi \approx \mathrm{im}\ \psi.$$

2. Sean $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie y $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}$ ideales de $\mathfrak{g}$, entonces,

$$\left(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2\right)/\mathfrak{h}_1 \approx \mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2.$$

El isomorfismo es obtenido pasando al cociente el homomorfismo

$$x_1 + x_2 \in \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2 \longmapsto \bar{x}_2 \in \mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2.$$

Ejemplos:

1. Suponga que $\mathfrak{g}$ se escribe como suma directa

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$$

con $\mathfrak{h}_1$ ideal y $\mathfrak{h}_2$ subálgebra, entonces $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_1 \approx \mathfrak{h}_2$. El isomorfismo es dado por $X \in \mathfrak{h}_2 \longmapsto \bar{X} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}_1$.

2. El subconjunto

$$\mathfrak{z} = \{a1 \in \mathfrak{gl}\left(n, \mathbb{K}\right) : a \in \mathbb{K}\}$$

es un ideal de $\mathfrak{gl}\left(n, \mathbb{K}\right)$, pues la identidad conmuta con todas las matrices. Además, $\mathfrak{gl}\left(n, \mathbb{K}\right) = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{sl}\left(n, \mathbb{K}\right)$ y por el ejemplo anterior, $\mathfrak{gl}\left(n, \mathbb{K}\right)/\mathfrak{z} \approx \mathfrak{sl}\left(n, \mathbb{K}\right)$.

3. Sean

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}\left(3, \mathbb{K}\right) : X = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\}$$

y

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{gl}\left(3, \mathbb{K}\right) : X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\}$$

$\mathfrak{h}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$, pues para todo $X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{g}, [X, Y] = 0$. El cociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ es una álgebra abeliana pues dados $X, Y \in \mathfrak{g}$, $[X, Y] \in \mathfrak{h}$. La álgebra $\mathfrak{g}$ es conocida como *álgebra de Heisenberg*.

1.2.5. Suma directa

Definición 1.7. *Sean* $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n$ *álgebras de Lie y*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$$

su suma como espacios vectoriales. es decir, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \cdots \times \mathfrak{g}_n$ *con la estructura vectorial producto. Para* $X = (X_1, \ldots X_n)$ *y* $Y = (Y_1, \ldots Y_n)$ *la expresión*

$$[X, Y] = ([X_1, Y_1], \ldots, [X_n, Y_n])$$

define en $\mathfrak{g}$ *una estructura de álgebra de Lie.*

1.2.6. Extensión del cuerpo de escalares

Sean $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $\overline{\mathbb{K}}$ una extensión de $\mathbb{K}$. Sea también $\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}$ el espacio vectorial sobre $\overline{\mathbb{K}}$ extensión de $\mathfrak{g}$. Los elementos de $\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}$ son de la forma: $X = \sum a_i X_i$ con $a_i \in \overline{\mathbb{K}}, X_i \in \mathfrak{g}$. Para $X = \sum a_i X_i, Y = \sum b_j Y_j \in \mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}$, defina

$$[X, Y] = \sum a_i b_j [X_i, Y_j] \in \mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}.$$

Este corchete define en $\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}$ una álgebra de Lie, como puede ser verificado fácilmente.

1.3. Representaciones

Definición 1.8. *Sea* V *un espacio vectorial y* $\mathfrak{gl}(V)$ *la álgebra de Lie de transformaciones lineales de* V*. Sea también* $\mathfrak{g}$ *una álgebra de Lie (sobre el mismo campo de escalares que* V*). Una representación de* $\mathfrak{g}$ *en* V *es un homomorfismo:*

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

V se denomina el *espacio de representación* y su dimensión es la *dimensión de la representación*.

Se dice que la representación es fiel si $\ker\ \rho = \{0\}$.

Ejemplos:

1. Si $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ es una subálgebra, la inclusión define, trivialmente, una representación de $\mathfrak{g}$ en V denominada representación canónica.

2. Sea $\mathfrak{g}$ la álgebra de Lie de dimensión dos no abeliana y tome una base $\{X, Y\}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $[X, Y] = Y$. La transformación lineal $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(2, \mathbb{K})$ que satisface:
$$\rho(X) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \qquad \rho(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
define una representación fiel de $\mathfrak{g}$. Su imagen es:
$$\mathrm{im}\,\rho = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{K}\}.$$

3. La aplicación
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}) \longmapsto \begin{pmatrix} 2a & -2b & 0 \\ -c & 0 & b \\ 0 & 2c & -2a \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{K})$$
es una representación de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$. En efecto, sea $\{X, H, Y\}$ la base de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ donde
$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Sus constantes de estructura son dadas por:
$$[H, X] = 2X \quad [H, Y] = -2Y \quad [X, Y] = H.$$
Las imágenes de los elementos de esta base forman una base de $\mathrm{im}\,\rho$ que tiene las mismas constantes de estructura.

1.3.1. Representación adjunta

Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie. Para $X \in \mathfrak{g}$, considere la transformación lineal:
$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ad}(X): & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ & Y & \longmapsto & \mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y] \end{array}$$

La aplicación:

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}: \quad \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ X &\longmapsto \mathrm{ad}(X) \end{aligned}$$

define una representación de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}$, pues la linealidad proviene de la bilinealidad de corchete. Además,

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}[X,Y](Z) &= [[X,Y],Z] = [X,[Y,Z]] + [[X,Z],Y] \\ &= [X,[Y,Z]] - [Y[X,Z]] \\ &= \mathrm{ad}(X)[Y,Z] - \mathrm{ad}(Y)[X,Z] \\ &= \mathrm{ad}\, X\, \mathrm{ad}\, Y\,(Z) - \mathrm{ad}\, Y\, \mathrm{ad}\, X\,(Z) \\ &= [\mathrm{ad}\, X, \mathrm{ad}\, Y](Z) \end{aligned}$$

para todo $Z \in \mathfrak{g}$. Esta representación es denominada *representación adjunta*.

El núcleo de la representación adjunta es el centro de $\mathfrak{g}, \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

Antes de ver algunos ejemplos, vale la pena hacer una observación sobre las notaciones: si $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ es una subálgebra y $X \in \mathfrak{h}$, la notación $\mathrm{ad}(X)$ puede significar tanto una transformación lineal de $\mathfrak{g}$ como de $\mathfrak{h}$. Muchas veces es necesario distinguir esos dos casos. Cuando eso ocurre, lo usual es indicar la álgebra con un subíndice. Por ejemplo, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(X)$, es una transformación lineal de $\mathfrak{h}$.

Ejemplos:

1. La representación adjunta de una álgebra abeliana $\mathfrak{g}$ es trivial, es decir, para todo $X \in \mathfrak{g}, \mathrm{ad}(X) = 0$

2. La representación considerada en el ejemplo 3 de la anterior sección, es la representación adjunta de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$: las matrices de $\mathrm{ad}(X), \mathrm{ad}(H)$ y $\mathrm{ad}(Y)$ en la base $\{X,H,Y\}$ son, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Sea
$$\mathfrak{g} = \{\mathfrak{gl}\,(3,\mathbb{K}) : X : \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\}$$
la álgebra de Heisenberg. Tome la base $\beta = \{X, Y, Z\}$ con
$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Sus constantes de estructura son dadas por $[X, Y] = Z$ y los otros corchetes son todos nulos. De ahí que $\mathrm{ad}\,(Z) = 0$ y las matrices de $\mathrm{ad}\,(X)$ y $\mathrm{ad}\,(Y)$ en la base dada son:
$$[\mathrm{ad}\,(X)]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad [\mathrm{ad}\,(Y)]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
El centro $\mathfrak{z}\,(\mathfrak{g})$ es el subespacio generado por Z que coincide con el ideal del ejemplo 3 presentado en la sección de cocientes. Como fue mencionado en aquel ejemplo, $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}\,(\mathfrak{g})$ es una álgebra abeliana. Este hecho puede ser verificado a partir de los corchetes descritos arriba.

4. Sea $\mathfrak{g}$ la álgebra no abeliana bidimensional y $\beta = \{X, Y\}$ una base de $\mathfrak{g}$ tal que $[X, Y] = Y$. En esta base, las matrices de $\mathrm{ad}\,(X)$ y $\mathrm{ad}\,(Y)$ son:
$$[\mathrm{ad}\,(X)]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [\mathrm{ad}\,(Y)]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
Por tanto, la representación es dada por:
$$[\mathrm{ad}\,(aX + bY)]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & a \end{pmatrix}$$
que es una representación fiel, es decir, su centro es trivial.

1.3.2. Construcciones con representaciones

Representaciones equivalentes

Sea ρ_1 y ρ_2 dos representaciones de una misma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ en los espacios V_1 y V_2 respectivamente, estas representaciones se dicen *equivalentes* si existe un isomorfismo lineal $P : V_1 \longrightarrow V_2$ tal que:

$$\rho_2\left(X\right) \circ P = P \circ \rho_1\left(X\right) \tag{1.1}$$

para cualquier $X \in \mathfrak{g}$. Recíprocamente, dados una representación ρ_1 y un isomorfismo lineal P, definiendo ρ_2 a partir de la expresión (1.1), se obtiene una representación equivalente a ρ_1. El isomorfismo P que realiza la equivalencia entre las representaciones es denominada *operador de intercambio* entre ρ_1 y ρ_2.
De manera más general, si ρ_1 y ρ_2 satisfacen (1.1) con P no invertible, se dice que P es una aplicación entre las representaciones ρ_1 y ρ_2.

Suma directa de representaciones

Sean $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie y $\rho_1, \ldots, \rho_n$ representaciones de $\mathfrak{g}$ en $V_1, \ldots, V_n$ respectivamente. Defina:

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}\left(V_1 \oplus \cdots \oplus V_n\right)$$

por $\rho\left(X\right) = \rho_1\left(X\right) \oplus \cdots \oplus \rho_n\left(X\right)$. Puesto que cada ρ_i es una representación, ρ define una representación de $\mathfrak{g}$ en $V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$ denominada suma directa de las representaciones ρ_i.

Producto tensorial de representaciones

Sean $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie y $\rho_i, i = 1, \ldots, n$ representaciones de $\mathfrak{g}$ en V_i. Defina

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}\left(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n\right)$$

por

$$\rho\left(X\right) = \rho_1\left(X\right) \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 + \ \cdots \ + 1 \otimes \cdots \otimes \rho_n\left(X\right) \tag{1.2}$$

donde 1 representa la identidad en cada uno de los espacios. Entonces, ρ define una representación de $\mathfrak{g}$ en $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$. Este es el producto tensorial de representaciones.

En el caso particular en que $n = 2$ el producto tensorial es:

$$\rho(X)(u \otimes v) = \rho_1(X)u \otimes v + u \otimes \rho_2(X)v$$

Vale la pena observar que la aplicación $\rho(X) = \rho_1(X) \otimes \rho_2(X)$ no define una representación ya que no es lineal.

La representación ρ definida será denotada por $\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_n$. Esta notación, a pesar de permitir una interpretación equivocada, es más compacta que la notación al pie de la letra:

$$\rho_1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 + \ \cdots \ + 1 \otimes \cdots \otimes \rho_n$$

y no debe generar confusión si queda claro que se trata de representaciones de álgebras de Lie.

Representaciones duales

Dada una representación ρ de $\mathfrak{g}$ en V, se puede tomar la representación ρ^* de $\mathfrak{g}$ en el dual V^* de V dada por la fórmula

$$\rho^*(X)(\lambda) = -\lambda \circ \rho(X) \qquad \lambda \in V^*$$

ρ^* define una representación de $\mathfrak{g}$ en V^*. En efecto,

$$\begin{aligned}
\rho^*[X,Y]\lambda &= -\lambda \circ \rho[X,Y] = -\lambda \circ (\rho(X)\rho(Y) - \rho(Y)\rho(X)) \\
&= (\rho^*(X)\lambda)(\rho(Y)) - (\rho^*(Y)\lambda)(\rho(X)) \\
&= (\rho^*(X)\rho^*(Y))\lambda - (\rho^*(Y)\rho^*(X))\lambda \\
&= (\rho^*(X)\rho^*(Y) - \rho^*(Y)\rho^*(X))\lambda = [\rho^*(X), \rho^*(Y)]\lambda
\end{aligned}$$

El signo negativo que aparece en esa definición es necesario para que los corchetes aparezcan en el orden correcto.

La representación ad^* en $\mathfrak{g}^*$ dual de la representación adjunta es denominada representación *coadjunta*.

Restricción de representaciones

Sea ρ una representación de $\mathfrak{g}$ en V y suponga que W es un subespacio invariante por ρ, es decir,

$$\forall X \in \mathfrak{g}, \qquad \rho(X)W \subset W.$$

La aplicación:

$$\rho\big|_W : X \in \mathfrak{g} \longmapsto \rho(X)\big|_W \in \mathfrak{gl}(W)$$

define una representación de $\mathfrak{g}$ en W.

La suma e intersección de espacios invariantes también son invariantes.

Cociente de representaciones

Sea ρ una representación de $\mathfrak{g}$ en V y $W \subset V$ un subespacio invariante por ρ. La aplicación:

$$\bar{\rho}_W : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V/W)$$

definida por $X \mapsto \overline{\rho(X)}$ es una representación.

Extensión del cuerpo de escalares

Dada una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, es posible extender ese cuerpo de escalares para todas las representaciones de $\mathfrak{g}$ por el proceso mas usual de extensión: sean ρ una representación de $\mathfrak{g}$ en V y $\overline{\mathbb{K}}$ una extensión de $\mathbb{K}$. Denotando por $\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}$ y $V_{\overline{\mathbb{K}}}$ las extensiones de $\mathfrak{g}$ y V respectivamente, se puede definir para cada $X \in \mathfrak{g}$ la extensión de $\rho(X)$ a $V_{\overline{\mathbb{K}}}$. Como los elementos de $\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}$ son combinaciones lineales, con coeficientes en $\overline{\mathbb{K}}$, de elementos de $\mathfrak{g}$, este proceso define, como es fácil verificar una representación de $\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}$ en $V_{\overline{\mathbb{K}}}$. Estas extensiones son bastante útiles cuando se desea trabajar con cuerpos algebraicamente cerrados.

Ejemplos:

1. El producto tensorial de una representación con la representación dual coincide con (mejor dicho, es equivalente) a la representación adjunta en la álgebra de las transformaciones lineales del espacio de representación. Para ver esto, tome una representación ρ de $\mathfrak{g}$ en V. El espacio $\mathfrak{gl}(V)$ de las transformaciones lineales de V es naturalmente isomorfo al producto tensorial $V \otimes V^*$. El isomorfismo es definido en los elementos de $V \otimes V^*$ de la forma $v \otimes \lambda$, $v \in V$ y $\lambda \in V^*$ por $v \otimes \lambda \mapsto f \in \mathfrak{gl}(V)$, donde $f(w) = \lambda(w)v,\ w \in V$. Tomando la representación $\sigma = \rho \otimes 1 + 1 \otimes \rho^*$ en $V \otimes V^*$,

$$\begin{aligned}\sigma(X) f_{v,\lambda}(u) &= f_{\rho(X)v,\lambda}(u) + f_{v,\rho^*(X)\lambda}(u) = \lambda(u)\rho(X)v + \rho^*(X)\lambda(u)v \\ &= \lambda(u)\rho(X)v - \lambda(\rho(X)u)v = \rho(X) f_{v,\lambda} - f_{v,\lambda}(\rho(X)u)\end{aligned}$$

y, para cualquier $f \in \mathfrak{gl}(V)$,

$$\sigma(X) f = \rho(X) f - f\rho(X)$$

donde f es la transformación lineal asociada a $v \otimes \lambda$, es decir, σ es equivalente a la representación adjunta de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{gl}(V)$ inducida por ρ.

2. Sea

$$\mathfrak{g} = \{(a,b,c) = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{K}\}$$

la álgebra de Heisenberg y ρ la representación de $\mathfrak{g}$ en $\mathbb{K}^3$ dada por la inclusión. Si $\{e_1, e_2, e_3\}$ denota una base canónica de $\mathbb{K}^3$, los subespacios W_1 y W_2 generados por $\{e_1\}$ y $\{e_1, e_2\}$ respectivamente son invariantes por ρ.

Restricciones

a) $\rho\big|_{W_1} = 0$

b) $\rho\big|_{W_2}$ evaluado en (a,b,c) es la transformación lineal que, respecto a la base $\{e_1, e_2\}$, tiene por matriz $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Cocientes

a) $\bar{\rho}_{W_1}$ evaluado en (a,b,c) tiene por matriz $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en la base $\{\bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.

b) $\bar{\rho}_{W_2} = 0$

3. Un subespacio $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ es invariante por la representación adjunta si y sólo si $\mathfrak{h}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$. En ese caso la imagen de la representación cociente es la representación adjunta de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

4. Sean $\rho_1, \ldots, \rho_s$ representaciones de $\mathfrak{g}$ en $V_1, \ldots, V_s$, interpretando los elementos del producto tensorial

$$V = V_1 \otimes \cdots \otimes V_s$$

como funcionales multilineales definidos en $V_1^* \times \cdots \times V_s^*$, para $f = v_1 \otimes \cdots \otimes v_s \ \in V$ y $X \in \mathfrak{g}$, se tiene,

$$\rho(X) f(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) = -f(\rho_1^*(X)\alpha_1, \ldots, \alpha_s) - \cdots - f(\alpha_1, \ldots, \rho_s^*(X)\alpha_s)$$

donde $\rho = \rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_s$ y $\alpha_i \ \in V_i^*$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\rho(X)f(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) &= \rho(X)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_s)(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \\
&= \rho_1(X)v_1 \otimes \cdots \otimes v_s + \cdots + v_1 \otimes \cdots \otimes \rho_s(X)v_s(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \\
&= \alpha_1(\rho_1(X)v_1) \cdots \alpha_s(v_s) + \cdots + \alpha_1(v_1) \cdots \alpha_s(\rho_s(X)v_s) \\
&= -\rho_1^*(X)\alpha_1(v_1) \cdots \alpha_s(v_s) - \cdots - \alpha_1(v_1) \cdots \rho_s^*(X)\alpha_s(v_s) \\
&= -(v_1 \otimes \cdots \otimes v_s)(\rho_1^*(X)\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s) - \cdots \\
&\quad - (v_1 \otimes \cdots \otimes v_s)(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \rho_s^*(X)\alpha_s) \\
&= -f(\rho_1^*(X)\alpha_1, \ldots, \alpha_s) - \cdots - f(\alpha_1, \ldots, \rho_s^*(X)\alpha_s)
\end{aligned}$$

1.3.3. Descomposición de representaciones

Una representación ρ de $\mathfrak{g}$ en V se dice *irreducible* si los únicos subespacios invariantes por ρ son los triviales $\{0\}$ y V.

La representación se dice *completamente reducible* si V se descompone como

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$$

con cada V_i invariante y tal que la restricción de ρ a V_i es irreducible. Dicho de otra manera, ρ es completamente reducible si ella es isomorfa a la suma directa $\oplus \rho|_{V_i}$ de representaciones irreducibles. En general la descomposición de V en componentes irreducibles no es única, como será visto en los ejemplos a seguir. A pesar de los nombres, una representación irreducible es siempre completamente reducible. Las representaciones completamente reducibles son denominadas también como representaciones *semisimples*.

La afirmación contenida en la siguiente proposición proporciona un criterio, utilizado frecuentemente, para verificar si una representación es completamente reducible.

Proposición 1.9. *Sea ρ una representación de dimensión finita de $\mathfrak{g}$ en V, entonces ρ es completamente reducible si y sólo si todo subespacio invariante admite un complementar invariante, es* *decir,*

$(*)$ *para todo $W \subset V$ invariante, existe W_1 también invariante tal que*

$$V = W \oplus W_1$$

Demostración. Asumiendo $(*)$, suponga que V no es irreducible (caso contrario no existe nada que demostrar) y tome un subespacio invariante, no trivial W. Existe, entonces W_1 invariante tal que:

$$V = W \oplus W_1.$$

Esta suma directa es la descomposición deseada si tanto W como W_1 fueran irreducibles. Suponga, por tanto, que uno de ellos, por ejemplo W, es reducible. Entonces, es posible *quebrar* W a través de la siguiente afirmación crucial

$(**)$ W también satisface $(*)$.

En efecto, sea $W' \subset W$ invariante. Entonces

$$W' \oplus W_1 \subset V$$

es invariante pues la suma de subespacios invariantes es invariante. Como V satisface $(*)$, existe W_2 invariante tal que

$$V = (W' \oplus W_1) \oplus W_2.$$

El subespacio $(W_1 \oplus W_2) \cap W$ es invariante pues la intersección de subespacios invariantes también es invariante. Por eso, para verificar $(**)$ es suficiente mostrar que

$$W = ((W_1 \oplus W_2) \cap W) \oplus W'. \tag{1.3}$$

Sea $x \in W'$ y suponga que $x \in W_1 \oplus W_2$. Entonces $x = y + z$ con $y \in W_1$ y $z \in W_2$. Como $x - y \in W' \oplus W_1$, de la igualdad $x - y = z$ se tiene que $x - y = z = 0$ y de ahí que $x \in W' \cap W_1$, de donde se concluye que $x = 0$. Eso muestra que la suma del segundo miembro de (1.3) es directa. Ahora, dado $x \in W$, se puede escribir

$$x = x_1 + x_2 + x_3$$

con $x_1 \in W', x_2 \in W_1, x_3 \in W_2$. Entonces $x_2 + x_3 = x - x_1 \in W$, mostrando que W es realmente la suma de los subespacios en (1.3) y, por tanto, $(**)$.

A partir de ahora, la descomposición de V en subespacios invariantes e irreducibles se obtiene por inducción, descomponiendo sucesivamente los subespacios que aparecen en las descomposiciones. Como V es de dimensión finita, este procedimiento es realizable.
Para la recíproca se usará inducción sobre la dimensión de V.
Si $\dim V = 1$ no hay nada que demostrar. Para dimensiones mayores, escriba

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$$

con cada V_i invariante e irreducible. Sea $W \subset V$ invariante. Cada $W \cap V_i$ es invariante y como los subespacios V_i son irreducibles, $W \cap V_i = \{0\}$ o V_i para todo i. Existen dos posibilidades:

Caso 1) Para algún i, por ejemplo $i = 1, W \cap V_1 = V_1$, esto es, $V_1 \subset W$. Entonces

$$W = V_1 \oplus (W \cap (V_2 \oplus \cdots \oplus V_n)) .$$

En efecto, tome $x \in W$ y escriba $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in V_1$ y $x_2 \in V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$. Como $V_1 \subset W, x_1 \in W$ y, por tanto, que $x_2 \in W$. de ahí que

$$W = V_1 + W \cap (V_2 \oplus \cdots \oplus V_n)$$

Esta suma es directa pues $V_1 \cap (V_2 \oplus \cdots \oplus V_n) = 0$. Usando ahora el paso de inducción, existe W' tal que

$$V_2 \oplus \cdots \oplus V_n = (W \cap (V_2 \oplus \cdots \oplus V_n)) \oplus W'$$

y W' complementa a W en V ya que $V_1 \subset W$.

Caso 2) Para todo $i, W \cap V_i = 0$. Entonces, $W \oplus V_1$ está en las condiciones del primer caso y, por tanto, existe W' invariante tal que

$$V = (W \oplus V_1) \oplus W'$$

es decir, $V = W \oplus (V_1 \oplus W')$.

Con estos dos casos se concluye la demostración de la recíproca. $\square$

Ejemplos:

1. La representación canónica de la álgebra de Heisenberg

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

en $\mathbb{K}^3$ no es irreducible, pues los subespacios generados por $\{e_1\}$ y por $\{e_1, e_2\}$ son invariantes. Tampoco es completamente reducible ya que $\langle e_1 \rangle$, que es subespacio invariante, no admite complementar invariante. Esto es consecuencia de que para todo $x \in \mathbb{K}^3 - \langle e_1 \rangle$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x \in \langle e_1 \rangle - \{0\}.$$

2. Sea la subálgebra abeliana de $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{K})$

$$\mathfrak{g} = \{\mathrm{diag}\{a, a, b, b\} : a, b \in \mathbb{K}\}.$$

Denotando por $\{e_1, \ldots, e_4\}$ la base canónica, la descomposición

$$\mathbb{K}^4 = \langle e_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle e_4 \rangle = V_1 \oplus \cdots \oplus V_4 \tag{1.4}$$

es una descomposición en subespacios invariantes irreducibles. El subespacio $W = \langle e_1 + e_2 \rangle$ es invariante, pues restricto a $\langle e_1, e_2 \rangle$, todo elemento de $\mathfrak{g}$ es un múltiplo de la identidad. Como $W \cap V_i = \{0\}$ para todo i, W no es una suma de los elementos de la descomposición (1.4).

La descomposición en invariantes irreducibles, en este caso no es única:

$$\mathbb{K}^4 = \langle e_1 + e_2 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle \oplus \langle e_3 \rangle \oplus \langle e_4 \rangle$$

también es una descomposición en invariantes irreducibles.

3. Las representaciones canónicas de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$, $\mathfrak{so}(n, \mathbb{K})$, $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{K})$ y $\mathfrak{su}(n)$ son irreducibles.

1.4. Derivaciones y productos semidirectos

1.4.1. Derivaciones

Definición 1.10. *Una aplicación lineal* $D : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ *es una derivación de la álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *si satisface:*

$$D\,[X,Y] = [DX,Y] + [X,DY] \qquad \textit{para todo} \;\; X,Y \in \mathfrak{g}.$$

La colección de todas las derivaciones de $\mathfrak{g}$ *se lo denotará por* $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$ *y es un subespacio vectorial de* $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

La composición de derivaciones no es una derivación. Sin embargo, si $D, D' \in \operatorname{Der}\mathfrak{g}$, entonces $[D,D'] = DD' - D'D$ es de nuevo una derivación. En efecto,

$$\begin{aligned}
[D,D']\,[X,Y] &= DD'\,[X,Y] - D'D\,[X,Y] \\
&= D\,([D'X,Y] + [X,D'Y]) - D'\,([DX,Y] + [X,DY]) \\
&= D\,[D'X,Y] + D\,[X,D'Y] - D'\,[DX,Y] - D'\,[X,DY] \\
&= [DD'X,Y] + [D'X,DY] + [DX,D'Y] + [X,DD'Y] \\
&\quad - [D'DX,Y] - [DX,D'Y] - [D'X,DY] - [X,D'DY] \\
&= [(DD' - D'D)\,X,Y] + [X,(DD' - D'D)\,Y] \\
&= [[D,D']\,X,Y] + [X,[D,D']\,Y]
\end{aligned}$$

por lo tanto, el conjunto de todas las derivaciones de $\mathfrak{g}$, $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$, es una subálgebra del álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

Un tipo de derivación que aparece con frecuencia en la teoría son las adjuntas de los elementos de $\mathfrak{g}$. Una de las formas de la identidad de Jacobi muestra que

$$\operatorname{ad}(X)\,[Y,Z] = [X,[Y,Z]] = [[X,Y]\,,Z] + [Y,[X,Z]]$$

o

$$\operatorname{ad}(X)\,[Y,Z] = [\operatorname{ad}(X)\,Y,Z] + [Y,\operatorname{ad}(X)\,Z]$$

es decir, $\operatorname{ad}(X)$ es una derivación. Derivaciones de este tipo son denominadas *derivaciones internas*. El conjunto de estas derivaciones coincide con la imagen de la representación adjunta. El espacio de derivaciones internas es, por tanto, una subálgebra de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

No toda derivación es interna. Un ejemplo trivial es el caso de las álgebras abelianas en el que toda transformación lineal es una derivación, sin embargo, existe una unica interna, que es la transformacion idénticamente nula.

Ejemplos:

1. Como ya fue mencionado, toda transformación lineal de una álgebra abeliana es una derivación.

2. Sea $\mathfrak{g}$ la álgebra de Lie bidimensional no abeliana y $\{X, Y\}$ una base con $[X, Y] = Y$. Sea $D : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ lineal que en esta base se escribe como

$$D = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Para encontrar las relaciones entre a, b, c y d para que D sea derivación, es suficiente ver la relación $D\,[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY]$ con X y Y elementos de la base dada (la relación en general es obtenida por bilinealidad). La igualdad

$$DY = D\,[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY]$$

es equivalente a

$cX + dY = [aX + bY, Y] + [X, cX + dY] = a\,[X, Y] + d\,[X, Y] = (a + d)\,Y$

y de ahí que D es una derivación si y solo si $c = 0$ y $d = a + d$, es decir, $a = 0$. Por tanto, las matrices de las derivaciones D de $\mathfrak{g}$ son de la forma

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Estas matrices tienen la misma forma que las matrices que aparecen en la representación adjunta de $\mathfrak{g}$. Por tanto, toda derivación de $\mathfrak{g}$ es una derivación interna.

$\square$

1.4.2. Productos semidirectos

Representando una álgebra de Lie en otra por derivaciones, se puede construir una álgebra de Lie en el producto cartesiano de dos álgebras. Este producto, llamado producto semidirecto, es bastante semejante al producto semidirecto de grupos y generaliza el producto directo visto anteriormente. Los detalles de esta construcción son dados por la siguiente proposición.

Proposición 1.11. *Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ álgebras de Lie y ρ una representación de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{h}$. Suponga que para todo $X \in \mathfrak{g}, \rho(X)$ es una derivación de $\mathfrak{h}$ y defina en $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ el corchete*

$$[(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)] = ([X_1, X_2], \rho(X_1) Y_2 - \rho(X_2) Y_1 + [Y_1, Y_2]). \tag{1.5}$$

Con este corchete, $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ es una álgebra de Lie que se descompone en suma directa

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{h} = (\mathfrak{g} \times 0) \oplus (0 \times \mathfrak{h})$$

de una subálgebra isomorfa a $\mathfrak{g}$ por un ideal isomorfo a $\mathfrak{h}$.

Demostración. El corchete en $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ es evidentemente antisimétrico. En cuanto a la identidad de Jacobi, ella vale en la primera coordenada de por valer en $\mathfrak{g}$. Escribiendo $v_i = (X_i, Y_i)$, la segunda coordenada de $[[v_1, v_2], v_3]$ se descompone en las cuatro partes

$$\begin{gathered}
\rho[X_1, X_2] Y_3 - \rho(X_3)(\rho(X_1) Y_2 - \rho(X_2) Y_1) \\
-\rho(X_3)[Y_1, Y_2] \\
[\rho(X_1) Y_2 - \rho(X_2) Y_1, Y_3] \\
[[Y_1, Y_2], Y_3].
\end{gathered}$$

Sumando las permutaciones cíclicas, los términos correspondientes a la primera parte se anulan por el hecho de que ρ es una representación. Los correspondientes a la última parte se anulan por la identidad de Jacobi en $\mathfrak{h}$ y los términos correspondientes a las segundas y terceras partes se cancelan entre sí por el hecho de que $\rho(X_i)$ es una derivación. Esto muestra la identidad de Jacobi del corchete. A partir de ahí, las otras afirmaciones son inmediatas. □

La notación para el producto semidirecto es $\mathfrak{g} \times_s \mathfrak{h}$ o $\mathfrak{g} \times_\rho \mathfrak{h}$. Esta última notación es usada cuando se desea resaltar la representación que define el producto semidirecto. Cualquiera de las notaciones distingue $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{h}$, ya que el papel que estas álgebras desempeñan en el producto semidirecto son distintos.

El producto directo de dos álgebras puede ser visto como un caso particular de un producto semidirecto. Para esto, basta tomar la representación nula de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{h}$. En este caso, $\mathfrak{g}$ pasa a ser un

ideal del producto y no sólo una subálgebra como ocurre con el producto semidirecto en general. Además, un producto semidirecto es un producto directo si y sólo si $\mathfrak{g}$ (o más exactamente $\mathfrak{g} \times 0$) es un ideal de $\mathfrak{g} \times_s \mathfrak{h}$ y, es claro, en este caso ρ es la representación idénticamente nula. Este hecho puede ser verificado directamente a partir de (1.5), que define el producto semidirecto, o usando el hecho de que si dos ideales $\mathfrak{i}_1$ y $\mathfrak{i}_2$ de una álgebra satisfacen $\mathfrak{i}_1 \cap \mathfrak{i}_2 = 0$, entonces $[X, Y] = 0$ para $X \in \mathfrak{i}_1$ y $Y \in \mathfrak{i}_2$, ya que el corchete está tanto en $\mathfrak{i}_1$ como en $\mathfrak{i}_2$.
La última afirmación de la proposición 1.11 garantiza que un producto semidirecto se escribe como la suma directa de un ideal por una subálgebra. La recíproca de esta afirmación también es verdadera. Si una álgebra $\mathfrak{s}$ es la suma directa de un ideal $\mathfrak{h}$ por una subálgebra $\mathfrak{g}$, también ella es isomorfa al producto semidirecto $\mathfrak{g} \times_s \mathfrak{h}$. La representación de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{h}$ es dada por la restricción a $\mathfrak{g}$ de la representación adjunta de $\mathfrak{s}$, lo que es posible por el hecho de que $\mathfrak{h}$ es un ideal. El isomorfismo de $\mathfrak{s}$ con $\mathfrak{g} \times_s \mathfrak{h}$ es dado por la descomposición de $\mathfrak{s}$.

Ejemplo: Sea V un espacio vectorial y denote por $\mathfrak{af}(V)$ el espacio de las transformaciones afines de V, es decir, el espacio de las transformaciones de V de la forma $Tw = Aw + v$ con A lineal y $v \in V$. El espacio $\mathfrak{af}(V)$ es dado por el producto $\mathfrak{gl}(V) \times V$. El corchete

$$[(A, v), (B, u)] = ([A, B], Au - Bv)$$

define en $\mathfrak{af}(V)$ una estructura de álgebra de Lie que es el producto semidirecto de $\mathfrak{gl}(V)$ por V con la representación dada por la representación canónica. Un caso particular de estas álgebras es la álgebra $\mathfrak{af}(1)$ de las transformaciones afines de un espacio unidimensional. Observe que $\mathfrak{af}(1)$ tiene dimensión dos y no es abeliana y, por tanto esta es otra realización de la álgebra bidimensional no abeliana.

1.5. Series de composición

1.5.1. Serie derivada

Tomando, como siempre, $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie, para dos subconjuntos A y B de $\mathfrak{g}$ será usada la notación $[A, B]$ para indicar el subespacio generado por

$$\{[X, Y] : X \in A, Y \in B\}.$$

Se define por inducción, los siguientes subespacios de $\mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}^{(0)} &= \mathfrak{g} \\
\mathfrak{g}' &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \\
&\vdots \\
\mathfrak{g}^{(k)} &= \left[\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}\right].
\end{aligned}$$

Proposición 1.12. *$\mathfrak{g}^{(k)}$ es ideal de $\mathfrak{g}$ para todo $k \geq 0$. En particular $\mathfrak{g}^{(k)}$ es subálgebra y, por tanto, la secuencia es decreciente: $\mathfrak{g}^{(k+1)} \subset \mathfrak{g}^{(k)}$.*

Demostración. Por inducción sobre k: $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$ es evidentemente un ideal.
Asumiendo que $\mathfrak{g}^{(k-1)}$ es ideal, sean $X \in \mathfrak{g}$ y $Y \in \mathfrak{g}^{(k)}$. Y se puede escribir como

$$Y = \sum_i [Z_i, W_i]$$

con $Z_i, W_i \in \mathfrak{g}^{(k-1)}$. Por la identidad de Jacobi,

$$[X, Y] = \sum_i [X, [Z_i, W_i]] = \sum_i [[X, Z_i,], W_i] + [Z_i, [X, W_i]]$$

y ésta última suma está en $\mathfrak{g}^{(k)}$, pues cada factor de los corchetes está en $\mathfrak{g}^{(k-1)}$. Por tanto $\mathfrak{g}^{(k)}$ es ideal.
Ahora, como $\mathfrak{g}^{(k)}$ es ideal para todo $k \geq 0$,

$$\mathfrak{g}^{(k+1)} = \left[\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(k)}\right] \subset \left[\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}\right] \subset \mathfrak{g}^{(k)}.$$

Por tanto la serie es decreciente. $\square$

Ejemplos:

1. $\mathfrak{g}$ es abeliana si y sólo si $\mathfrak{g}' = 0$.
2. $\mathfrak{g} = \{ \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \}$; $\mathfrak{g}' = \{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \}$; $\mathfrak{g}'' = \{0\}$ y $\mathfrak{g}^{(k)} = \{0\}$ si $k \geq 2$.

3. Sea $\mathfrak{g}$ la álgebra de las matrices triangulares superiores con ceros en la diagonal

$$\mathfrak{g} = \{ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n\times n} \}.$$

   Entonces $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$ se k es suficientemente grande.

4. $\mathfrak{g} = \{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \}; \mathfrak{g}' = \{ \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \}; \mathfrak{g}'' = \{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \}; \mathfrak{g}^{(k)} = 0$ si $k \geq 3$.

5. Sea $\mathfrak{g}$ la álgebra de las matrices triangulares superiores

$$\mathfrak{g} = \{ \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & * \end{pmatrix}_{n\times n} \}.$$

   Entonces $\mathfrak{g}'$ es la álgebra de las matrices triangulares superiores con ceros en la diagonal, por tanto, $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$ si $k \geq k_0$ para algún k_0 suficientemente grande.

6. Sea $\mathfrak{g}$ la álgebra bidimensional no abeliana y $\{X, Y\}$ base con $[X, Y] = Y$. Entonces, $\mathfrak{g}'$ es el espacio generado por Y y $\mathfrak{g}^{(k)} = \{0\}$ si $k \geq 2$.

7. Para la álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$ y por tanto $\mathfrak{g}^{(k)} = \mathfrak{g}$ para todo $k \geq 0$. En efecto, sean

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Entonces,

$$[H, X] = 2X \quad [H, Y] = -2Y \quad [X, Y] = H$$

   y, por tanto, $X, H, Y \in \mathfrak{g}'$ y como $\{X, H, Y\}$ es una base de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$. La misma afirmación vale para $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ si $\mathbb{K}$ es un cuerpo de característica diferente de dos. Si la característica es dos, $\mathfrak{g}'$ es el subespacio generado por H y, por tanto, $\mathfrak{g}'' = \{0\}$.

8. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(2, \mathbb{K})$. Como $\operatorname{tr}(XY - YX) = 0, \mathfrak{g}' \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$. Por el ejemplo anterior $\mathfrak{g}' = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ y de ahí que $\mathfrak{g}^{(k)} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ para $k \geq 2$.

Las observaciones sobre la serie derivada, contenidas en las siguientes proposiciones, serán utilizadas frecuentemente.

Proposición 1.13. *El cociente $\mathfrak{g}^{(k-1)}/\mathfrak{g}^{(k)}$ es una álgebra abeliana.*

Demostración. Sean $X, Y \in \mathfrak{g}^{(k-1)}$, entonces $[X, Y] \in \left[\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}\right] = \mathfrak{g}^{(k)}$. Luego,

$$\left[\overline{X}, \overline{Y}\right] = \overline{0} = \left[\overline{Y}, \overline{X}\right] \qquad \text{para todo } \overline{X}, \overline{Y} \in \mathfrak{g}^{(k-1)}/\mathfrak{g}^{(k)}$$

por tanto $\mathfrak{g}^{(k-1)}/\mathfrak{g}^{(k)}$ es una álgebra de Lie abeliana. □

Proposición 1.14. *Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ álgebras de Lie y $\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ un homomorfismo sobreyectivo. Entonces*

$$\psi\left(\mathfrak{g}^{(k)}\right) = \mathfrak{h}^{(k)}.$$

Demostración. Por inducción sobre k. Es claro que $\psi\left(\mathfrak{g}^{(0)}\right) = \mathfrak{h}^{(0)}$. Asumiendo que la igualdad se cumple para $k-1$, se tiene

$$\begin{aligned}
\psi\left(\mathfrak{g}^{(k)}\right) &= \psi\left[\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}\right] \\
&= \left[\psi\left(\mathfrak{g}^{(k-1)}\right), \psi\left(\mathfrak{g}^{(k-1)}\right)\right] \\
&= \left[\mathfrak{h}^{(k-1)}, \mathfrak{h}^{(k-1)}\right] \\
&= \mathfrak{h}^{(k)},
\end{aligned}$$

lo que muestra la igualdad del enunciado. □

Corolario 1.15. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie y $\mathfrak{h}$ ideal. Sea también $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ el homomorfismo canónico. Entonces,*

$$\pi\left(\mathfrak{g}^{(k)}\right) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k)}.$$

Proposición 1.16. *Si $\mathfrak{g}$ es una álgebra de Lie y $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ es subálgebra, entonces,*

$$\mathfrak{h}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{(k)}.$$

Demostración. Por inducción sobre k. Es claro que $\mathfrak{h}^{(0)} \subset \mathfrak{g}^{(0)}$. Ahora, suponiendo que la igualdad se cumple para $k-1$,

$$\mathfrak{h}^{(k)} = \left[\mathfrak{h}^{(k-1)}, \mathfrak{h}^{(k-1)}\right] \subset \left[\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}\right] = \mathfrak{g}^{(k)}.$$

□

Proposición 1.17. *Sea* $\mathfrak{g}$ *una álgebra de Lie. Para todo* $m, n \geq 0$ *se tiene* $\left(\mathfrak{g}^{(m)}\right)^{(n)} = \mathfrak{g}^{(m+n)}$.

Demostración. Cuando $n = 0$, para $m \geq 0$ se tiene que $\left(\mathfrak{g}^{(m)}\right)^{(0)} = \mathfrak{g}^{(m)}$ por definición. Por otro lado, si $n \geq 0$ y suponiendo que $\left(\mathfrak{g}^{(m)}\right)^{(n)} = \mathfrak{g}^{(m+n)}$ para todo $m \geq 0$, entonces

$$\left(\mathfrak{g}^{(m)}\right)^{(n+1)} = \left[\left(\mathfrak{g}^{(m)}\right)^{(n)}, \left(\mathfrak{g}^{(m)}\right)^{(n)}\right] = \left[\mathfrak{g}^{(m+n)}, \mathfrak{g}^{(m+n)}\right] = \mathfrak{g}^{(m+n+1)}.$$

□

1.5.2. Serie central descendente

La *serie central descendente* de la álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es definida por inducción, como

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}^1 &= \mathfrak{g} \\
\mathfrak{g}^2 &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}' \\
&\vdots \\
\mathfrak{g}^k &= \left[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}\right].
\end{aligned}$$

Proposición 1.18. *Si* $\mathfrak{g}$ *es una álgebra de Lie,*

1. $[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j] \subset \mathfrak{g}^{i+j}$.

2. $\mathfrak{g}^k$ *es el subespacio generado por los posibles corchetes que implican* k *elementos de* $\mathfrak{g} : [X_1, \ldots, [X_{k-1}, X_k] \ldots]$.

(por ejemplo:

producto de dos elementos : $[X, Y]$

producto de tres elementos : $[X, [Y, Z]]$

producto de cuatro elementos : $[[X, Y], [Z, W]]$ *o* $[X, [Y, [Z, W]]]$)

Demostración. 1. Por inducción sobre j. Para $j = 1$ la inclusión es la definición de $\mathfrak{g}^{i+1}$. Asumiendo el resultado para j,

$$\begin{aligned}
\left[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^{j+1}\right] = \left[\mathfrak{g}^i, \left[\mathfrak{g}^j, \mathfrak{g}\right]\right] &\subset \left[\left[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j\right], \mathfrak{g}\right] + \left[\mathfrak{g}^j, \left[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}\right]\right] \\
&\subset \left[\mathfrak{g}^{i+j}, \mathfrak{g}\right] + \left[\mathfrak{g}^j, \mathfrak{g}^{i+1}\right] \\
&\subset \mathfrak{g}^{i+j+1}.
\end{aligned}$$

2. Para $k = 1$ o 2, es inmediato a partir de la definición.

   Para $k \geq 2$, se usará inducción sobre k. Asuma el resultado para $k-1$. Los elementos de , $\mathfrak{g}^{k-1}$ son entonces de la forma $\sum_i Z_i$ con Z_i producto de $k-1$ elementos de $\mathfrak{g}$. De ahí que $\mathfrak{g}^k$ es generado por elementos de la forma

   $$\sum_i [X_i, Z_i],$$

   es decir, por productos de k elementos.

   Recíprocamente, todo elemento de $\mathfrak{g}$ que puede ser escrito como producto de k elementos está en $\mathfrak{g}^k$ como sigue del item anterior.

□

Los siguientes hechos resultan de la caracterización de $\mathfrak{g}^k$ dada en esta proposición:

1. $\mathfrak{g}^{k+1} \subset \mathfrak{g}^k$, pues un producto de $k+1$ elementos también en un producto de k elementos.

2. $\mathfrak{g}^k$ es un ideal para todo $k \geq 1$, pues $\left[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k\right] = \mathfrak{g}^{k+1} \subset \mathfrak{g}^k$. De donde se concluye que la serie central descendente es, de hecho, descendente:

   $$\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}^2 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}^k \supset \cdots$$

Ejemplos:

1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 = \{\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\}; \mathfrak{g}^2 = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\}; \mathfrak{g}^3 = 0$, así $\mathfrak{g}^k = 0$ para $k \geq 3$.

2. $\mathfrak{g} = \{\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}\}; \mathfrak{g}^2 = \{\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\}; \mathfrak{g}^k = \mathfrak{g}^2$, si $k \geq 3$.

3. Para la álgebra no abeliana $\mathfrak{g}$ de dimensión dos, con base $\{X, Y\}$ con $[X, Y] = Y$, $\mathfrak{g}^k$ es el subespacio generado por Y para todo $k \geq 2$.

4. $\mathfrak{g} = \{\begin{pmatrix} a & * & * \\ 0 & a & * \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}\}; \mathfrak{g}^2 = \{\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\}; \mathfrak{g}^3 = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\}$, y $\mathfrak{g}^k = 0$ para todo $k \geq 4$.

Así como para la serie derivada, los cocientes sucesivos de los elementos de la serie central descendente son abelianos y la serie central descendente de la imagen sobreyectiva de una álgebra coincide con la imagen de la serie central descendente de la álgebra. Estos hechos están contenidos en las proposiciones siguientes. Sus demostraciones son semejantes a las correspondientes para la serie derivada.

Proposición 1.19. $\mathfrak{g}^k/\mathfrak{g}^{k+1}$ *es una álgebra abeliana.*

Proposición 1.20. *Sea* $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ *un homomorfismo sobreyectivo. Entonces,*

$$\phi\left(\mathfrak{g}^k\right) = \mathfrak{h}^k.$$

La siguiente afirmación proporciona una comparación entre la serie derivada y la serie central descendente.

Proposición 1.21. *La serie derivada decrece más rápido que la serie central descendente:*

$$\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{k+1}$$

Demostración. Por inducción sobre k. Es claro que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(0)} \subset \mathfrak{g}^{0+1} = \mathfrak{g}$. Suponiendo que $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{k+1}$, entonces

$$\mathfrak{g}^{(k+1)} = \left[\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(k)}\right] \subset \left[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k+1}\right] = \mathfrak{g}^{k+2},$$

lo que muestra el enunciado. □

Capítulo 2

Álgebras nilpotentes, solubles, simples y semisimples

Los principales resultados de este capítulo son los teoremas de Engel y Lie, que describen a las álgebras nilpotentes y solubles siendo, esencialmente, álgebras de matrices triangulares superiores. Estos teoremas surgen en cualquier contexto que implique álgebras nilpotentes o solubles. En particular, el teorema de Engel, que tiene como consecuencia, la caracterización de las representaciones de álgebras nilpotentes es una parte fundamental en el estudio de las subálgebras de Cartan (que no será visto en este trabajo), que forman la base para el clasificación de álgebras semisimples.

2.1. Álgebras Nilpotentes

Definición 2.1. *Una álgebra de Lie es nilpotente si su serie central descendente se anula en algún momento, esto es,*

$$\mathfrak{g}^{k_0} = \{0\}$$

para algún $k_0 \geq 1$ *y, por tanto,* $\mathfrak{g}^{k_0} = 0$ *para todo* $k \geq k_0$.

Ejemplos:

1. Las álgebras abelianas son nilpotentes.

2. Las siguientes subálgebras de matrices son nilpotentes

   a) $\mathfrak{g} = \{ \begin{pmatrix} 0 & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{n\times n} \}$

   b) $\mathfrak{g} = \{ \begin{pmatrix} a & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a \end{pmatrix}_{n\times n} \}$.

3. La álgebra de las matrices triangulares superiores

$$\mathfrak{g} = \{ \begin{pmatrix} * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & * \end{pmatrix}_{n\times n} \}$$

   no es nilpotente.

4. La álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ no es nilpotente, pues

$$[\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K}), \mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})] = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$$

   luego $\mathfrak{g}^k = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ para todo k. Sin embargo, si la característica del cuerpo $\mathbb{K}$ fuera igual a 2, esta álgebra sería nilpotente.

Proposición 2.2. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra nilpotente.*

1. Si $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ es una subálgebra, entonces $\mathfrak{h}$ es nilpotente.

2. Si $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ es un homorfismo de álgebras de Lie, entonces $\phi(\mathfrak{g})$ también es nilpotente.

Demostración. Para la primera parte suponga que $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{h}^k \subset \mathfrak{g}^k$ para todo k. Dado que $\mathfrak{g}$ es nilpotente, existe $k \geq 1$ tal que $\mathfrak{g}^k = 0$, entonces $\mathfrak{h}^k = 0$. Por lo tanto $\mathfrak{h}$ es nilpotente.
Para la segunda parte se tiene que si $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ es un homomorfismo, entonces

$$\phi\left(\mathfrak{g}^k\right) = \phi(\mathfrak{g})^k$$

para todo k. Por lo que si $\mathfrak{g}^k = 0$ para algún $k \geq 1$, entonces $\phi(\mathfrak{g})^k = 0$, es decir, $\phi(\mathfrak{g})$ es nilpotente. □

La implicación recíproca de la última afirmación de la proposición 2.2 no es cierta, un ejemplo de esto es la álgebra no abeliana $\mathfrak{g}$ de dimensión dos con $[X, Y] = Y$. El subespacio $\mathfrak{h} = \langle Y \rangle$ es un ideal. Como tanto $\mathfrak{h}$ como el cociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ son álgebras de Lie de dimensión 1, ambos son álgebras abelianas y, por lo tanto, nilpotentes. Sin embargo, $\mathfrak{g}$ no es nilpotente.

Proposición 2.3. *El centro de una álgebra de Lie nilpotente no es trivial.*

Demostración. Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie nilpotente, entonces existe $k \geq 1$ de manera que $\mathfrak{g}^k \neq 0$ y $\mathfrak{g}^{k+1} = 0$. Entonces,

$$\mathfrak{g}^k \subset \mathfrak{z}\left(\mathfrak{g}\right)$$

pues

$$\left[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k\right] = \mathfrak{g}^{k+1} = 0.$$

Por lo tanto $\mathfrak{z}\left(\mathfrak{g}\right)$ no es el subespacio nulo. □

Proposición 2.4. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie. Si el cociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}\left(\mathfrak{g}\right)$ es nilpotente, entonces $\mathfrak{g}$ es nilpotente.*

Demostración. Suponiendo que el cociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}\left(\mathfrak{g}\right)$ es nilpotente, sea $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{z}\left(\mathfrak{g}\right)$ la proyección canónica. Para cada $i \geq 0$ se tiene $\left(\mathfrak{g}/\mathfrak{z}\left(\mathfrak{g}\right)\right)^i = \pi\left(\mathfrak{g}^i\right)$, así que existe $k \geq 0$ tal que $\left(\mathfrak{g}/\mathfrak{z}\left(\mathfrak{g}\right)\right)^{k+1} = \pi\left(\mathfrak{g}^{k+1}\right) = 0$, lo que implica que $\mathfrak{g}^{k+1} \subset \mathfrak{z}\left(\mathfrak{g}\right)$. Entonces

$$\mathfrak{g}^{k+2} = \left[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k+1}\right] \subset \left[\mathfrak{g}, \mathfrak{z}\left(\mathfrak{g}\right)\right] = 0$$

De donde $\mathfrak{g}$ es nilpotente. □

Proposición 2.5. *$\mathfrak{g}$ es nilpotente si y solo si $\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}$ es nilpotente.*

Demostración. Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$ y $\overline{\mathbb{K}}$ una extensión de $\mathbb{K}$. Como $\mathfrak{g}^n_{\mathbb{K}}$ y $\mathfrak{g}^n_{\overline{\mathbb{K}}}$ son generados por productos de n elementos de $\mathfrak{g}$, es válida la igualdad

$$\left(\mathfrak{g}^n\right)_{\overline{\mathbb{K}}} = \left(\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}\right)^n.$$

De donde se concluye la afirmación del enunciado. □

Si $\mathfrak{g}$ es una álgebra nilpotente, existe k tal que todos los corchetes que implican k elementos de $\mathfrak{g}$ se anulan. En particular

$$[X, \ldots, [X, Y] \ldots] = 0$$

si X aparece $k-1$ veces, $\operatorname{ad}(X)^{k-1} = 0$, para todo $X \in \mathfrak{g}$. En otras palabras, en las álgebras nilpotentes las adjuntas de sus elementos son transformaciones lineales nilpotentes. La recíproca de esta afirmación también es verdadera: si $\mathfrak{g}$ es una álgebra de dimensión finita tal que $\operatorname{ad}(X)$es nilpotente para todo $X \in \mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{g}$ es nilpotente. Este es el contenido del teorema de Engel que será visto en la próxima sección.

2.1.1. Representaciones nilpotentes

Definición 2.6. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie. Una representación ρ de $\mathfrak{g}$ en el espacio vectorial V es una representación nilpotente o una nilrepresentación si $\rho(X)$ es nilpotente para todo $X \in \mathfrak{g}$. Esto significa que dado X, existe un entero positivo k (dependiente de X) tal que $\rho(X)^k = 0$.*

Ejemplos:

1. Como ya fue mencionado, la representación adjunta de una álgebra nilpotente es una nilrepresentación.

2. La representación adjunta de la álgebra bidimensional no abeliana no es nilpotente. Este hecho puede ser visto tomando una base $\{X, Y\}$ con $[X, Y] = Y$. Como $\operatorname{ad}(X)^k Y = Y$ para todo k, $\operatorname{ad}(X)$ no es nilpotente.

Proposición 2.7. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $A \in \mathfrak{gl}(V)$. Si A es nilpotente, entonces, $\operatorname{ad}(A)$ también es nilpotente. Por tanto, si $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ es una nilrepresentación, entonces $X \mapsto \operatorname{ad}(\rho(X))$ también es una nilrepresentación.*

Demostración. Primero se mostrará que $\operatorname{ad}(A)^n B$ es una suma de términos de la forma $A^r B A^s$ con $r + s = n$, es decir,

$$\operatorname{ad}(A)^n B = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (-1)^m A^{n-m} B A^m$$

En efecto, si $n = 1$, se tiene $\operatorname{ad}(A)\, B = AB - BA$.

Suponiendo que el resultado es cierto para n,

$$\begin{aligned}
\operatorname{ad}(A)^{n+1} B &= \operatorname{ad}(A) \operatorname{ad}(A)^n B \\
&= [A, \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (-1)^m A^{n-m} B A^m] \\
&= A \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (-1)^m A^{n-m} B A^m - \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (-1)^m A^{n-m} B A^m A \\
&= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (-1)^m A^{n+1-m} B A^m + \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (-1)^{m+1} A^{n-m} B A^{m+1}
\end{aligned}$$

Sustituyendo m por $m-1$, se tiene,

$$\begin{aligned}
\operatorname{ad}(A)^{n+1} B &= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (-1)^m A^{n+1-m} B A^m + \sum_{m=1}^{n+1} \binom{n}{m-1} (-1)^m A^{n-m+1} B A^m \\
&= \binom{n}{0} (-1)^0 A^{n+1} B A^0 + \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} (-1)^m A^{n+1-m} B A^m + \\
&\quad + \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m-1} (-1)^m A^{n-m+1} B A^m + \binom{n}{n} (-1)^{n+1} A^0 B A^{n+1} \\
&= A^{n+1} B + \sum_{m=1}^{n} \binom{n+1}{m} (-1)^m A^{n-m+1} B A^m + (-1)^{n+1} B A^{n+1} \\
&= \sum_{m=0}^{n+1} \binom{n+1}{m} (-1)^m A^{n+1-m} B A^m
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\operatorname{ad}(A)^n B = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (-1)^m A^{n-m} B A^m \qquad \text{para todo } n.$$

Ahora, como A es nilpotente, existe $k \geq 1$ tal que $A^k = 0$. Entonces, para $n = 2k$, se tiene que $m \geq k$ o $n - m > k$, por tanto, en cada sumando alguno de los factores se anula. Esto prueba, por supuesto, que $\operatorname{ad}(A)$ es nilpotente. $\square$

El siguiente teorema es el resultado de donde se siguen todas las informaciones sobre las representaciones nilpotentes.

Teorema 2.8. *Sea $V \neq 0$ un espacio vectorial de dimensión finita y $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ una subálgebra tal que todo $X \in \mathfrak{g}$ es nilpotente. Entonces, existe $v \in V, v \neq 0$ tal que $Xv = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.*

Demostración. Por inducción sobre la dimensión de $\mathfrak{g}$.

Si $\dim \mathfrak{g} = 1$, sea $X \in \mathfrak{g}, X \neq 0$. Como X es nilpotente, existe $k \geq 1$ tal que $X^k = 0$ y $X^{k-1} \neq 0$. Sea $w \in V$ tal que $X^{k-1}w \neq 0$. Entonces, existe $v = X^{k-1}w \neq 0$, y $Xv = 0$, lo que muestra el resultado para álgebras de dimensión uno.

Para mostrar el paso de inducción, suponga que el resultado es cierto para toda álgebra de dimensión estrictamente mayor que 1 y menor que r y sea $\mathfrak{g}$ de dimensión r. Con esta hipótesis, primero se mostrará es que existe un ideal $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ de codimensión uno. En efecto, $\mathfrak{g}$ admite subálgebras no triviales, es decir, diferentes de 0 y de $\mathfrak{g}$, pues subespacios de dimensión uno son subálgebras. Sea $\mathfrak{h}$ una subálgebra no trivial, cuya dimensión es la máxima entre las dimensiones de las subálgebras no triviales de $\mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{h}$ es un ideal de codimensión uno. Para ver esto, considere la representación $\rho : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ definida por $\rho(X) \mapsto \mathrm{ad}(X)$. Como $\mathfrak{h}$ es subálgebra, $\mathfrak{h}$ es invariante por ρ, lo que implica que ρ induce una representación

$$\begin{array}{rccl} \overline{\rho}: & \mathfrak{h} & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \\ & X & \longmapsto & \overline{\rho}(X) = \overline{\rho(X)} = \overline{\mathrm{ad}(X)} \end{array}$$

Por la proposición anterior, $\rho(X)$ es nilpotente para todo $X \in \mathfrak{h}$, lo que implica que $\overline{\rho}$ es una nilrepresentación. Entonces $\overline{\rho}(\mathfrak{h})$ es una subálgebra que satisface las hipótesis del teorema y tiene dimensión estrictamente menor que r. Luego, por la hipótesis de inducción, existe $\overline{v} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}, \overline{v} \neq \overline{0}$ tal que $\overline{\rho}(X)\overline{v} = \overline{0}$ para todo $X \in \mathfrak{h}$. Esta última afirmación significa que existe $X_0 \in \mathfrak{g} - \mathfrak{h}$ tal que $[X_0, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$, pues

$$\overline{\rho}(X)\overline{X_0} = \overline{\rho(X)X_0} = \overline{\mathrm{ad}(X)X_0} = \overline{[X, X_0]} = \overline{0} \qquad \text{para todo } X \in \mathfrak{h}$$

El subespacio $\langle \mathfrak{h} \rangle \oplus \langle X_0 \rangle$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$ de dimensión estrictamente mayor que la dimensión de $\mathfrak{h}$, es decir, $\dim \mathfrak{h} + 1 > \dim \mathfrak{h}$, pero $\mathfrak{h}$ fue escogido de manera que su dimensión sea máxima, de donde $\dim \mathfrak{h} + 1 = r = \dim \mathfrak{g}$, lo que muestra que $\mathfrak{h}$ es de codimensión uno, el hecho de que sea ideal se debe a que si $X \in \mathfrak{h}$ y $Y \in \mathfrak{g}$,

$$[X, Y] = [X, \alpha_1 Z_1 + \cdots + \alpha_k Z_k + \alpha_0 X_0] = [X, \alpha_1 Z_1] + \cdots + [X, \alpha_k Z_k] + [X, \alpha_0 X_0]$$

donde cada $[X, \alpha_i Z_i] \in \mathfrak{h}$ con $i = 1, \ldots, k$ y $[X, \alpha_0 X_0] \in \mathfrak{h}$.

Ahora, aplicando la hipótesis de inducción a $\mathfrak{h}$ como subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$, el subespacio

$$W = \{v \in V : Xv = 0 \text{ para todo } X \in \mathfrak{h}\ \}$$

es no nulo. Como los elementos de W se anulan para los elementos de $\mathfrak{h}$, para concluir la demostración es suficiente mostrar que existe $v \in W$ tal que $X_0 v = 0$, para ver esto observe que W es invariante por X_0, ya que si $X \in \mathfrak{h}$ y $w \in W$, entonces

$$XX_0 w = [X, X_0]\, w + X_0 X w = 0$$

pues $X, [X, X_0] \in \mathfrak{h}$, eso muestra que $X_0 w \in W$ y que W es invariante por X_0. Sin embargo, X_0 es nilpotente y, por tanto, su restricción a W también es nilpotente, de donde, aplicando el argumento usado en el caso en que $\dim \mathfrak{g} = 1$ al subespacio generado por X_0, permite concluir la demostración del teorema. $\square$

Teorema 2.9. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ una subálgebra tal que todo $X \in \mathfrak{g}$ es nilpotente, entonces existen subespacios*

$$0 = V_0 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

tal que $XV_i \subset V_{i-1}, i = 1, \ldots, n$. Estos subespacios pueden ser definidos inductivamente por

$$\begin{aligned} V_0 &= 0 \\ V_i &= \{v \in V : Xv \in V_{i-1} \textit{ para todo } X \in \mathfrak{g}\} \end{aligned}$$

En particular, extendiendo sucesivamente las bases de los subespacios V_i, se llega a una base β de V tal que la matriz de X en relación a β es una triangular superior con ceros en la diagonal para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Demostración. Sea:

$$\begin{aligned} V_0 &= 0 \\ V_1 &= \{v \in V : Xv = 0 \text{ para todo } X \in \mathfrak{g}\} \end{aligned}$$

Por el teorema anterior, $V_1 \neq 0$. Además, V_1 es $\mathfrak{g}$-invariante, pues para todo $X \in \mathfrak{g}$ y $v \in V_1$, se tiene $Xv = 0$, lo que implica que $Xv \in V_1$. Por tanto, la representación canónica pasa al cociente definiendo una representación de $\mathfrak{g}$ en V/V_1 dada por

$$\begin{array}{rccclccc} \rho: & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(V/V_1) & & & & \\ & X & \longmapsto & \rho(X) = \overline{X}: & V/V_1 & \longrightarrow & V/V_1 \\ & & & & \overline{v} & \longmapsto & \overline{Xv} \end{array}$$

Como cada $X \in \mathfrak{g}$ es nilpotente, entonces ρ es una nilrepresentación. Aplicando el teorema anterior a $\rho(\mathfrak{g})$, existe $\overline{w} \in V/V_1,\ \overline{w} \neq \overline{0}$ tal que $\rho(X)\overline{w} = \overline{0}$, para todo $X \in \mathfrak{g}$. Esto significa que existe $v \in V - V_1$ tal que $Xv \in V_1$, para todo $X \in \mathfrak{g}$, lo que garantiza que el subespacio

$$V_2 = \{v \in V : Xv \in V_1 \text{ para todo } X \in \mathfrak{g}\}$$

que contiene a V_1 y es distinto a V_1. Con el mismo argumento se construye sucesivamente,

$$V_i = \{v \in V : Xv \in V_{i-1} \text{ para todo } X \in \mathfrak{g}\}$$

que contiene y es diferente a V_{i-1}. Como la dimensión de V es finita, entonces algún $V_i = V$, esto mostrando la primera parte del teorema. En cuanto a las segunda parte de teorema, sea

$$\beta = \{v_{1_1}, v_{1_2}, \ldots, v_{1_{j_1}}, v_{2_1}, \ldots, v_{2_{j2}}, \ldots, v_{n_1}, \ldots, v_{n_{j_n}}\}$$

base de V, con $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_{j_i}}\}$ base de V_i $i = 1, \ldots, n$. Como $XV_i \subset V_{i-1}$, los elementos de $\mathfrak{g}$ se representan todos, en relación a la base β, como matrices triangulares superiores con ceros en los bloques diagonales correspondientes a las dimensiones de los subespacios V_i. □

Corolario 2.10. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ una subálgebra tal que todo $X \in \mathfrak{g}$ es nilpotente. Entonces, $\mathfrak{g}$ es nilpotente. En particular, $\rho(\mathfrak{h})$ es una álgebra nilpotente si ρ es una nilrepresentacion de la álgebra $\mathfrak{h}$ en V.*

Demostración. Por el teorema anterior, existe una base β de V tal que para cada $X \in \mathfrak{g}$, la matriz $[X]_\beta$ es una matriz triangular superior con ceros en la diagonal. En otras palabras, el homomorfismo de álgebras de Lie $X \in \mathfrak{g} \longmapsto [X]_\beta \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ tiene imagen en la subálgebra de las matrices triangulares superiores con ceros en la diagonal. Como ese homomorfismo es inyectivo, $\mathfrak{g}$ es isomorfa a una subálgebra de las matrices triangulares superiores con ceros en la diagonal y, como esta última es nilpotente, se tiene que $\mathfrak{g}$ es nilpotente. □

Teorema 2.11 (Engel)**.** *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de dimensión finita tal que para todo $X \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}(X)$ es nilpotente. Entonces $\mathfrak{g}$ es nilpotente.*

Demostración. Suponiendo que vale la condición del enunciado y que la representación adjunta $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ toma valores que son endomorfismos nilpotentes de $\mathfrak{g}$. Del Corolario anterior se sigue entonces que la álgebra $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ es nilpotente. Como el núcleo de la representación adjunta es precisamente el centro de $\mathfrak{g}$, entonces el cociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ es nilpotente y, en vista de la Proposición 2.4, se concluye que $\mathfrak{g}$ es nilpotente. □

2.1.2. Descomposición de Jordan de representaciones

Para analizar estas descomposiciones, sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $A : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. El teorema de descomposición primaria descompone V en subespacios A-invariantes

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$$

que son los autoespacios generalizados

$$V_i = \{v \in V : p_i(A)^k v = 0, \text{ para algún } k \geq 1\}$$

donde los polinomios irreducibles $p_i, i = 1, \ldots, s$, son componentes primas del polinomio minimal $p = p_1^{m_1} \ldots p_s^{m_s}$ de A. En el caso de que el cuerpo de escalares fuera algebraicamente cerrado, $p_i(A) = A - \lambda_i$ con λ_i autovalor de A y los subespacios de la descomposición primaria se escriben como

$$V_i = \{v \in V : (A - \lambda_i)^k v = 0. \text{ para algún } k \geq 1\}$$

Para enfatizar la relación de estos subespacios con los autovalores de A, ellos serán denotados por V_{λ_i}.

Cuando se estudia representaciones de álgebras de Lie, es interesante verificar la manera como actúa una u otra transformación lineal B en los espacios de descomposición primaria de A. Para eso, las siguientes fórmulas de conmutación en álgebras asociativas son esenciales.

Proposición 2.12. *Sea A una álgebra asociativa y tome $x, y \in A$*

1. *Denotando $\mathrm{ad_e}(x)\, y = xy - yx$, se tiene, para todo $n \geq 1$, la fórmula de conmutación por la izquierda*

$$x^n y = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \left(\mathrm{ad_e}(x)^{n-p}\, y\right) x^p.$$

2. *La fórmula de conmutación por la derecha es dada por*

$$yx^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p \left(\mathrm{ad_d}(x)^{n-p}\, y\right)$$

donde $\mathrm{ad_d}(x)\, y = yx - xy$ es la adjunta derecha.

Demostración. Por inducción. Para $n = 1$,

$$xy = yx + [x, y]$$

Suponiendo que el resultado es válido para n. Para $n + 1$ se tiene,

$$\begin{aligned} x^{n+1}y &= x\,(x^n y) \\ &= \mathrm{ad_e}\,(x)\,(x^n y) + (x^n y)\,x \\ &= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \left(\mathrm{ad_e}\,(x)^{n-p+1}\,y\right) x^p + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \left(\mathrm{ad_e}\,(x)^{n-p}\,y\right) x^{p+1} \end{aligned}$$

Sustituyendo p por $p + 1$ en la segunda suma de la desigualdad, se tiene

$$\begin{aligned} x^{n+1}y &= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \left(\mathrm{ad_e}\,(x)^{n-p+1}\,y\right) x^p + \sum_{p=1}^{n+1} \binom{n}{p-1} \left(\mathrm{ad_e}\,(x)^{n+1-p}\,y\right) x^p \\ &= \mathrm{ad_e}\,(x)^{n+1}\,y + yx^{n+1} + \sum_{p=1}^{n} \left(\binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}\right) \left(\mathrm{ad_e}\,(x)^{n+1-p}\,y\right) x^p \\ &= \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} \left(\mathrm{ad_e}\,(x)^{n+1-p}\,y\right) x^p \end{aligned}$$

La fórmula de conmutación por la derecha se sigue de forma análoga. □

Proposición 2.13. *Suponga que el cuerpo de escalares es algebraicamente cerrado. Sean A y B transformaciones lineales de V y V_{λ_i} los autoespacios generalizados de A. Entonces, $BV_{\lambda_i} \subset V_{\lambda_i}$, para todo i si y solo si $\mathrm{ad}\,(A)^q\,B = 0$ para algún $q \geq 1$.*

Demostración. Dado i, sea $A_i = A - \lambda_i I$. Como λ_i es múltiplo de la identidad, se tiene que $\mathrm{ad}\,(A)^q\,B = 0$ si y solo si $\mathrm{ad}\,(A_i)^q\,B = 0$. En efecto. Por inducción. Para $n = 1$,

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}\,(A_i)\,B &= \mathrm{ad}\,(A - \lambda_i I)\,B \\ &= \mathrm{ad}\,(A)\,B - \mathrm{ad}\,(\lambda_i)\,B = \mathrm{ad}\,(A)\,B \end{aligned}$$

Suponiendo que el resultado es válido para q, para $q + 1$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}\,(A_i)^{q+1}\,B &= \mathrm{ad}\,(A_i)^q\,\mathrm{ad}\,(A_i)\,B \\ &= \mathrm{ad}\,(A)^q\,\mathrm{ad}\,(A)\,B \\ &= \mathrm{ad}\,(A)^{q+1}\,B \end{aligned}$$

por lo tanto, $\operatorname{ad}(A)^q B = 0$ si y solo si $\operatorname{ad}(A_i)^q B = 0$.

Ahora, suponiendo que $\operatorname{ad}(A_i)^q B = 0$, tome $v \in V_{\lambda_i}$. Por la forma como este espacio está descrito, existe un exponente k, tal que $A_i v = 0$. Fijando los exponentes q y k, tome $n > q + k$. Entonces para $0 \leq p \leq n$ se tiene que $n - p \leq q$ o $n - p > q$.

Si $n - p \leq q$, entonces $k \leq p$, luego $A_i^p = 0$.

Si $n - p > q$, entonces $\operatorname{ad}(A_i)^{n-p} B = 0$.

Y, por tanto, en la fórmula de conmutación para $A_i^n B$ todos los términos aplicados a v se anulan. Eso muestra que $A_i^n B v = 0$ y, por lo tanto, $BV_{\lambda_i} \subset V_{\lambda_i}$.

Recíprocamente, como la restricción de A_i a V_{λ_i} es nilpotente, por la proposición 2.7 se tiene que $\operatorname{ad}(A_i)^{q_i} B_i = 0$, para algún q_i, donde B_i es la restricción de B a V_{λ_i}. Lo que muestra que existe $q = \text{máx}\{q_1, \ldots, q_s\}$ tal que $\operatorname{ad}(A)^q B = 0$. □

Volviendo a las representaciones, la proposición anterior permite descomponer el espacio de representación en autoespacios generalizados con un refinamiento de que ellos son autoespacios simultáneos para todos los elementos de la álgebra. En efecto, sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie nilpotente y ρ una representación de dimensión finita de $\mathfrak{g}$ en V. Como $\mathfrak{g}$ es nilpotente, dados $X, Y \in \mathfrak{g}$, $\operatorname{ad}(X)^q(Y) = 0$ para algún $q \geq 1$. Aplicando ρ a esa desigualdad, se tiene que, para $X, Y \in \mathfrak{g}$,

$$\operatorname{ad}(\rho(X))^q \rho(Y) = 0$$

para algún $q \geq 1$. Asumiendo que el cuerpo de escalares es algebraicamente cerrado, la proposición anterior se aplica entonces para todo par de elementos de $\mathfrak{g}$. De esa forma, fijando $X \in \mathfrak{g}$, considere la descomposición primaria de V dada por $\rho(X)$

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$$

Cada V_i es invariante por $\rho(Y)$ para todo $Y \in \mathfrak{g}$ y, por tanto, esos subespacios son $\mathfrak{g}$-invariantes y como tal, $\mathfrak{g}$ se representa en cada uno de ellos. Se puede pensar entonces en tomar la descomposición primaria de V_i en relación a las restricciones de $\rho(Y)$, con $Y \in \mathfrak{g}$. Ahora, si para todo $Y \in \mathfrak{g}, i = 1, \ldots, s$, la descomposición primaria de $\rho(Y)$ en V_i se constituye de un único elemento, entonces cada V_i es un autoespacio generalizado de las correspondientes restricciones de $\rho(Y)$ para todo $Y \in \mathfrak{g}$. Eso significa que dados $Y \in \mathfrak{g}$ e $i = 1, \ldots, s$, existe un autovalor $\lambda_i(Y)$ para $\rho(Y)$ tal que V_i está contenido en el autoespacio generalizado asociado a $\lambda_i(Y)$,

esto es, $(\rho(Y) - \lambda_i(Y))^k v = 0$, para algún $k \geq 1$ si $v \in V_i$.
Por otro lado, si algún V_i se descompone por algún $\rho(Y)$, se puede tomar una nueva descomposición de V y repetir el argumento. Como las dimensiones de los subespacios disminuyen, se obtiene, de esta forma, por inducción una descomposición en subespacios $\mathfrak{g}$-invariantes

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_t$$

tal que para todo $Y \in \mathfrak{g}$ e $i = 1, \ldots, t$, existe $\lambda_i(Y)$ autovalor de $\rho(Y)$ con $(\rho(Y) - \lambda_i(Y))^k v = 0$, para algún $k \geq 1$ si $v \in W_i$.

Teorema 2.14. *Suponga que el cuerpo de escalares es algebraicamente cerrado. Sea ρ una representación de dimensión finita de $\mathfrak{g}$ en V, con $\mathfrak{g}$ nilpotente. Entonces, existen funcionales lineales $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ tal que si*

$$V_{\lambda_i} = \{v \in V : \forall X \in \mathfrak{g}, \exists n \geq 1, (\rho(Y) - \lambda_i(Y))^n v = 0\}$$

entonces V_{λ_i} es $\mathfrak{g}$ invariante, $i = 1, \ldots, s$ y

$$V = V_{\lambda_i} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}.$$

Demostración. La discusión anterior garantiza la existencia de subespacios $\mathfrak{g}$-invariantes W_1, $\ldots, W_s$ y aplicaciones $\lambda_i : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$$

y $W_i \subset V_{\lambda_i}$ con V_{λ_i} como en el enunciado. Además, se tiene que λ_i es lineal. En efecto, sea ρ_i la restricción de la representación a V_{λ_i}. Por la forma como V_{λ_i} está definida se tiene que $\rho_i(X) - \lambda_i(X)$ es nilpotente para todo $X \in \mathfrak{g}$. Por lo tanto, $\operatorname{tr}(\rho_i(X) - \lambda_i(X)) = 0$, entonces

$$\lambda_i(X) = \frac{\operatorname{tr} \rho_i(X)}{\dim V_{\lambda_i}}$$

de donde λ_i es lineal debido a la linealidad de la traza.
Si $i \neq j$, $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$, entonces es posible tomar $X \in \mathfrak{g}$ tal que $\lambda_i(X) \neq \lambda_j(X)$ para todo $i \neq j$. Para X de esta forma, cada $\lambda_i(X)$ es un autovalor de $\rho(X)$. Entonces se puede considerar el autoespacio generalizado asociado, o sea $V_{\lambda_i(X)}$. Como los autovalores son distintos, la suma

$$V_{\lambda_i(X)} + \cdots + V_{\lambda_s(X)}$$

es directa. Además, como $W_i \subset V_{\lambda_i(X)}$, entonces

$$V = V_{\lambda_i(X)} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s(X)}$$

Así $W_i = V_{\lambda_i(X)},\ i = 1, \ldots, s$. Además, de la definición de V_{λ_i} se tiene que $V_{\lambda_i} \subset V_{\lambda_i(X)}$, lo que muestra que $W_i = V_{\lambda_i}$, lo que concluye la demostración. □

Definición 2.15. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie y ρ una representación de $\mathfrak{g}$ en V. Un peso de ρ es una funcional lineal $\lambda : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que el subespacio V_λ de V definido por*

$$V_\lambda = \{v \in V : \forall X \in \mathfrak{g}, \exists n \geq 1, (\rho(X) - \lambda(X))^n v = 0\}$$

satisface $V_\lambda \neq 0$. El subespacio V_λ es llamado subespacio de peso asociado a λ. La dimensión de V_λ es llamada multiplicidad de λ.

Los pesos de una representación son, por lo tanto, los autovalores de los elementos de la álgebra. El teorema 2.14 garantiza que representaciones de dimensión finita de álgebras nilpotentes admiten pesos en el caso de que el cuerpo de escalares es algebraicamente cerrado.

Ejemplos:

1. Sea $\mathfrak{g}$ la álgebra de las matrices diagonales en relación a la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ los funcionales $\lambda_i, i = 1 \ldots, n$ definidos por

   $$\lambda_i\left(\mathrm{diag}\{a_1, \ldots, a_n\}\right) = a_i$$

   son pesos de la representación canónica de $\mathfrak{g}$. En este caso, $V_{\lambda_i}, i = 1, \ldots, n$ es un subespacio generado por e_i.

2. Para la álgebra

   $$\mathfrak{g} = \{\begin{pmatrix} \lambda & \ldots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix}\},$$

   el único peso de la representación canónica es dado por el funcional

   $$\begin{pmatrix} \lambda & \ldots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix} \longrightarrow \lambda.$$

   El subespacio de peso asociado, en este caso, es todo el espacio de representación.

3. Si ρ es una nilrepresentación de dimensión finita, entonces 0 es el único peso de ρ y V_0 coincide con el espacio de representación. En efecto, si ρ es una nilrepresentación, entonces $\forall X \in \mathfrak{g}\ \exists n \geq 1$ tal que $\rho(X)^n = 0$, de donde 0 es un peso de ρ y $V = V_0$.

Proposición 2.16. *Sea ρ una representación de dimensión finita de $\mathfrak{g}$ en V y suponga que exista $\lambda : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $\rho(X) - \lambda(X)$ sea nilpotente para todo $X \in \mathfrak{g}$. Entonces λ es lineal y $\tilde{\rho} = \rho - \lambda$ es una representación.*

Demostración. Si $\rho(X) - \lambda(X)$ es nilpotente para todo $X \in \mathfrak{g}$, se tiene que

$$\lambda(X) = \frac{\operatorname{tr} \rho(X)}{\dim V}$$

lo que muestra que λ es lineal. Esta fórmula muestra también $\lambda[X,Y] = 0$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$, ya que la traza del corchete se anula. Por esta razón, $\tilde{\rho}[X,Y] = \rho[X,Y]$.

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}[X,Y] &= \rho[X,Y] - \lambda[X,Y] \\
&= \rho[X,Y] - \frac{\operatorname{tr} \rho[X,Y]}{\dim V} \\
&= \rho[X,Y]
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
[\tilde{\rho}(X), \tilde{\rho}(Y)] &= [\rho(X) - \lambda(X), \rho(Y) - \lambda(Y)] \\
&= (\rho(X) - \lambda(X))(\rho(Y) - \lambda(Y)) - (\rho(Y) - \lambda(Y))(\rho(X) - \lambda(X)) \\
&= \rho(X)\rho(Y) - \lambda(X)\rho(Y) - \rho(X)\lambda(Y) + \lambda(X)\lambda(Y) \\
&\quad - (\rho(Y)\rho(X) - \lambda(Y)\rho(X) - \rho(Y)\lambda(X) + \lambda(Y)\lambda(X)) \\
&= [\rho(X), \rho(Y)] = \rho[X,Y] = \tilde{\rho}[X,Y]
\end{aligned}$$

pues los múltiplos de la identidad conmutan con todas las transformaciones lineales. Por lo tanto $\tilde{\rho}$ es una representación. $\square$

Teorema 2.17. *Suponga que el cuerpo de escalares es algebraicamente cerrado y sea ρ una representación de la álgebra nilpotente $\mathfrak{g}$ sobre el espacio de dimensión finita V. Entonces, existe una base β de V tal que en esa base ρ se escribe como*

$$[\rho(X)]_\beta = \begin{pmatrix} [\rho_1(X)] & & \\ & \ddots & \\ & & [\rho_s(X)] \end{pmatrix} \quad X \in \mathfrak{g}$$

con los bloques diagonales $[\rho_i(X)]$ de la forma

$$[\rho_i(X)] = \begin{pmatrix} \lambda_i(X) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i(X) \end{pmatrix} \quad X \in \mathfrak{g}$$

donde λ_i es el peso de la representación.

Demostración. Como $\mathfrak{g}$ es nilpotente, del teorema 2.14 se sigue que

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$$

con λ_i peso de la representación, $i = 1, \ldots, s$. Tome la base de V

$$\beta = \{v_1, \ldots, v_{j_1}, v_{j_1+1}, \ldots, v_{j_2}, \ldots, v_{j_{s-1}+1}, \ldots, v_{j_s}\}$$

con $\beta_i = \{v_{j_{i-1}+1}, \ldots, v_{j_i}\}$ base de $V_{\lambda_i},\ i = 1, \ldots, s$. Además, como V_{λ_i} es $\mathfrak{g}$-invariante para todo $i = 1, \ldots, s$, $\rho(X)\, v_k \subset V_{\lambda_i}$ si $v_k \in \beta_i$, entonces

$$[\rho(X)]_\beta = \begin{pmatrix} [\rho_1(X)]_{\beta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & [\rho_s(X)]_{\beta_s} \end{pmatrix}$$

Por otra parte, por la definición de V_{λ_i}, se tiene que $\rho_i(X) - \lambda_i(X)$ es nilpotente para todo $X \in \mathfrak{g}$. Por lo que $\tilde{\rho}_i = \rho_i - \lambda_i$ es una nilrepresentación, entonces, por el teorema 2.9, $[\tilde{\rho}_i(X)]_{\beta i}$ es una matriz triangular superior con ceros en la diagonal principal

$$[\tilde{\rho}_i(X)]_{\beta i} = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad X \in \mathfrak{g}$$

Como $\tilde{\rho}_i(X) = \rho_i(X) - \lambda_i(X)$, entonces $\rho_i(X) = \tilde{\rho}_i(X) + \lambda_i(X)$. Por tanto

$$[\rho_i(X)]_{\beta i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i \end{pmatrix} \quad X \in \mathfrak{g}$$

lo que concluye la demostración. □

2.2. Álgebras solubles

Definición 2.18. *Una álgebra de Lie es soluble si alguna de sus álgebras derivadas se anula, es decir,*

$$\mathfrak{g}^{(k_0)} = 0$$

para algún $k_0 \geq 1$ (y por tanto, $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$ para todo $k \geq k_0$).

Ejemplos:

1. Las álgebras abelianas son solubles, pues para esta clase de álgebras $\mathfrak{g}' = 0$.

2. Si $\dim \mathfrak{g} = 2$, entonces $\mathfrak{g}$ es soluble independientemente de si $\mathfrak{g}$ es abeliana o no. Esto porque existen sólo dos clases de álgebras bidimensionales. Las abelianas son solubles y las no abelianas tienen su álgebra derivada de dimensión uno y, por tanto, la segunda derivada se anula.

3. La álgebra de matrices triangulares superiores

$$\mathfrak{g} = \{ \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & * \end{pmatrix}_{n \times n} \}$$

   son solubles.

4. La álgebra $\mathfrak{sl}(2)$ no es soluble, pues su álgebra derivada coincide con ella misma.

Subálgebras e imágenes homomórficas de álgebras solubles tambiém son solubles. Esta afirmación es garantizada por la siguiente proposición.

Proposición 2.19. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie.*

1. *Si $\mathfrak{g}$ es soluble y no nula, entonces $\mathfrak{g}'$ es un ideal propio de $\mathfrak{g}$.*

2. *Si $\mathfrak{g}$ es soluble y $\mathfrak{h}$ es una subálgebra, entonces $\mathfrak{h}$ es soluble.*

3. *Si $\mathfrak{g}$ es soluble, entonces imágenes homomórficas de $\mathfrak{g}$ son solubles.*

Demostración. 1. Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$, entonces claramente $\mathfrak{g}^{(k)} = \mathfrak{g}$ para todo $k \geq 0$ y, por lo tanto, la única forma en que $\mathfrak{g}$ sea soluble es que sea nula.

2. Si $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$, entonces para cada k se tiene, $\mathfrak{h}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{(k)}$. Por tanto $\mathfrak{h}$ es soluble si $\mathfrak{g}$ lo es.

3. Si $\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ es un homomorfismo sobreyectivo, entonces $\psi\left(\mathfrak{g}^{(k)}\right) = \mathfrak{h}^{(k)}$ y esto implica claramente que si $\mathfrak{g}$ es soluble, entonces $\psi(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h}$ también lo es.

□

Un caso particular de la segunda afirmación de esta proposición es que los ideales de álgebras solubles son también solubles. Como una consecuencia de la tercera afirmación, cocientes por ideales son también solubles, la siguiente proposición complementa a la anterior.

Proposición 2.20. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie y $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ un ideal. Si tanto $\mathfrak{h}$ como el cociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ son solubles, entonces $\mathfrak{g}$ es soluble.*

Demostración. Sea $\mathfrak{h}$ un ideal y suponga que $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ son solubles, entonces existe $k_1 \geq 1$ tal que $\pi\left(\mathfrak{g}^{(k_1)}\right) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k_1)} = 0$, esto significa que $\mathfrak{g}^{(k_1)}$ está contenido en $\mathfrak{h}$. Como $\mathfrak{h}$ es soluble, existe k_2 tal que $\mathfrak{h}^{(k_2)} = 0$. De ahí,

$$\mathfrak{g}^{(k_1+k_2)} = \left(\mathfrak{g}^{(k_1)}\right)^{(k_2)} \subset \mathfrak{h}^{(k_2)} = 0$$

Por tanto, $\mathfrak{g}$ es soluble. □

Proposición 2.21. *$\mathfrak{g}$ es soluble si y sólo si $\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}$ es soluble.*

Demostración. Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$ y $\overline{\mathbb{K}}$ una extensión de $\mathbb{K}$. Las álgebras derivadas tanto de $\mathfrak{g}$ como de $\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}$ son generadas por corchetes de elementos de $\mathfrak{g}$; las álgebras derivadas de $\mathfrak{g}$ son obtenidas por combinaciones lineales con coeficientes en $\mathbb{K}$ y las de $\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}$ por por combinaciones lineales con coeficientes en $\overline{\mathbb{K}}$. De ahí que

$$\left(\mathfrak{g}^{(n)}\right)_{\overline{\mathbb{K}}} = \left(\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}\right)^{(n)}$$

para todo $n \geq 0$. De donde se concluye la afirmación del enunciado. □

Proposición 2.22. *Si $\mathfrak{g}$ es una álgebra de Lie soluble de dimensión finita, entonces existe un ideal $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ de codimensión 1.*

Demostración. Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie soluble de dimensión finita, entonces

$$\dim \mathfrak{g}' < \dim \mathfrak{g}$$

Ahora, se puede tomar $\beta = \{v_1, \ldots, v_m\}$ una base de $\mathfrak{g}'$ y tomar r vectores para completar esta base, $\{v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_r\}$ para $\mathfrak{g}$. Sea $\mathfrak{h} = span\{v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_{r-1}\}$, $\mathfrak{h}$ es un ideal, pues si $X \in \mathfrak{h}$ y $Y \in \mathfrak{g}$, entonces $Y = Z + \alpha w_r$, con $Z \in \mathfrak{h}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces

$$[X, Y] = [X, Z + \alpha w_r] = [X, Z] + \alpha[X, w_r] \ \in \mathfrak{g}' \subset \mathfrak{h}$$

Por tanto, existe $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ideal de codimensión 1. $\square$

Proposición 2.23. *Si $\mathfrak{g}$ es nilpotente, entonces es soluble.*

Demostración. Si $\mathfrak{g}$ es nilpotente, entonces existe $k \geq 1$ tal que $\mathfrak{g}^k = 0$, entonces el ideal $\mathfrak{g}^{(k-1)}$, que está contenido en $\mathfrak{g}^k$, es nulo. Esto significa que $\mathfrak{g}$ es soluble. $\square$

Como en el caso de las álgebras nilpotentes, los elementos de una álgebra soluble tambiém pueden ser expresados en forma de una matriz triangular. Esa es la afirmación del teorema de Lie, que será mostrado más adelante. La diferencia aquí es que no se tiene, como en el caso nilpotente, una descomposición del tipo e Jordan, en bloques diagonales múltiplos de la identidad. Para construir una base que triangulice los elementos de una álgebra soluble, el primer paso consiste en garantizar la existencia de un autovector común para los elementos de la álgebra. Eso es hecho en el siguiente teorema.

Teorema 2.24. *Sean $V \neq 0$ un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado y $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ una subálgebra soluble. Entonces, existe $v \in V,\ v \neq 0$ y una funcional lineal $\lambda : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que*

$$Xv = \lambda(X)\, v \quad \textit{para todo } X \in \mathfrak{g}.$$

es decir, v es un autovector común a $X \in \mathfrak{g}$ con autovalor $\lambda(X)$.

Demostración. Por inducción sobre la dimensión de $\mathfrak{g}$.
Si $\dim \mathfrak{g} = 1$, $\mathfrak{g}$ es generada por X. El hecho de que el cuerpo es algebraicamente cerrado garantiza la existencia de un autovector $v \in V$ con autovalor μ para X, es decir,

$$\exists v \in V, v \neq 0 \text{ tal que } Xv = \mu v$$

Sea $\lambda : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $\lambda(Y) = \lambda(\alpha X) = \alpha\mu$. Si $Y \in \mathfrak{g},\ Y = \alpha X$ con $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces

$$Yv = (\alpha X)v = \alpha(Xv) = \alpha\mu v = \lambda(Y)v$$

Por tanto, existe $v \in V, v \neq 0$ y $\lambda : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que

$$Xv = \lambda(X)v \quad \text{para todo } X \in \mathfrak{g}.$$

Suponiendo que el resultado es cierto para toda subálgebra $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{gl}(V)$ con $\dim \mathfrak{g} < n$. Sea $\mathfrak{g}$ subálgebra soluble de $\mathfrak{gl}(V)$ con $\dim \mathfrak{g} = n > 1$, entonces $\mathfrak{g}$ admite un ideal $\mathfrak{h}$ de codimensión 1. Por la hipótesis de inducción aplicada a $\mathfrak{h}$, existe $w \in V, w \neq 0$, tal que

$$Xw = \lambda(X)w \quad X \in \mathfrak{h}$$

Como $\mathfrak{h}$ es de codimensión uno, existe $X_0 \in \mathfrak{g} - \mathfrak{h}$ tal que X_0 y $\mathfrak{h}$ generan $\mathfrak{g}$.
Ahora, sea $W = span\{X_0^i w, i \geq 0\} \neq 0$ que satisface:

1. W es invariante por X_0 y
2. todo $v \in W, v \neq 0$ es autovector de todo $Y \in \mathfrak{h}$.

En efecto, si $v \in W$, entonces $v = \sum a_i X_0^i w$ y $Xv = \sum a_i X_0^{i+1} w \in W$.
Para ver que todo elemento de W es autovector de $Y \in \mathfrak{h}$, observe que, si el polinomio minimal de X_0 en w tiene grado $p+1$, entonces $\beta = \{w, X_0 w, \ldots, X_0^p w\}$ es base de W. Dado $Y \in \mathfrak{h}$, su valor en los elementos de la base es dado por la fórmula de conmutación derecha como

$$YX_0^k w = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} X_0^j \left(\mathrm{ad_d}(X_0)^{k-j} Y\right) w \qquad 0 \leq k \leq p.$$

Como $\mathfrak{h}$ es ideal, $\mathrm{ad_d}(X_0)^{k-j} Y \in \mathfrak{h}$ y w es autovector para los elementos de $\mathfrak{h}$, se tiene que

$$\begin{aligned} YX_0^k w &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda\left(\mathrm{ad_d}(X_0)^{k-j} Y\right) X_0^j w \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \left(\binom{k}{j} \lambda\left(\mathrm{ad_d}(X_0)^{k-j} Y\right) X_0^j w\right) + \lambda(Y) X_0^k w. \end{aligned}$$

Estas igualdades muestran que W es invariante por $\mathfrak{h}$, ellas muestran también que, en relación a la base β, la restricción de Y a W es una matriz triangular superior, con los elementos de la diagonal principal iguales a $\lambda(Y)$.

$$\left[Y\big|_W\right]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda(Y) & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda(Y) \end{pmatrix}$$

Entonces, $\lambda(Y) = \dfrac{\operatorname{tr}\left(Y\big|_W\right)}{\dim W}$, pues $\operatorname{tr}\left(Y\big|_W\right) = \lambda(Y)\dim W$.
Como todo corchete de transformaciones lineales tiene traza cero, se sigue que

$$\lambda\left(\operatorname{ad_d}(X_0)^{k-j}\, Y\big|_W\right) = 0 \qquad \text{si } k-1 \geq 1$$

Asi,

$$YX_0^k w = \lambda(Y)\, X_0^k w \qquad , Y \in \mathfrak{h}, k = 0, \ldots, p.$$

Por tanto, todo vector $v \in W, v \neq 0$ es autovector común de los elementos de $\mathfrak{h}$.
Ahora, el argumento usado en el caso de que $\dim \mathfrak{g} = 1$ aplicado a X_0, permite concluir que existe $v, v \neq 0 \in W \subset V$ tal que

$$Xv = \lambda(X)\, v \qquad \text{para todo } X \in \mathfrak{g}.$$

lo que concluye la demostración. □

A partir de este teorema, se puede mostrar a través de cocientes sucesivos, la existencia de una base que trianguliza simultáneamente los elementos de una álgebra soluble. Este es el enunciado del teorema de Lie:

Teorema 2.25 (Teorema de Lie)**.** *Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado y $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ una álgebra soluble. Entonces, existe una base $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V y funcionales lineales $\lambda_1, \ldots, \lambda_n : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que, en relación a $\beta,\ X \in \mathfrak{g}$ se escribe como*

$$[X]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1(X) & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n(X) \end{pmatrix}$$

Demostración. Sea v_1 autovector común a los elementos de $\mathfrak{g}$ con autovalor $\lambda_1(X)$, por el teorema anterior, λ_1 es lineal. Sea $V_1 = span\{v_1\}$ y ρ la representación canónica de $\mathfrak{g}$ en V. Entonces V_1 es $\mathfrak{g}$-invariante y la aplicación

$$\overline{\rho}_{V_1} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V/V_1)$$

define una representación. Como $\mathfrak{g}$ es soluble y $\overline{\rho}_{V_1}$ un homomorfismo , entonces $\overline{\rho}_{V_1}(\mathfrak{g})$ es soluble. Aplicando el teorema anterior, existe $\overline{w} \in V/V_1, \overline{w} \neq 0$ y $\overline{\lambda}_2 : \overline{\rho}_{V_1}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que

$$\overline{X}\overline{w} = \overline{\lambda}_2\left(\overline{X}\right)\overline{w} \qquad \text{para todo } \overline{X} \in \overline{\rho}_{V_1}(\mathfrak{g})$$

Ahora, sea $\lambda_2 = \overline{\lambda_2} \circ \overline{\rho}_{V_1} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $\lambda_2(X) = \overline{\lambda}_2\left(\overline{X}\right)$, para todo $X \in \mathfrak{g}$. Tomando v_2 como representante de w en V, se tiene que existe $v_2 \in V - V_1, v_2 \neq 0$ y $\lambda_2 : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que

$$\overline{Xv_2} = \lambda_2(X)\overline{v}_2 \qquad \text{para todo } X \in \mathfrak{g}.$$

de donde

$$Xv_2 = \lambda_2(X)v_2 + u_1 \quad \text{con } u_1 \in V_1, \text{ para todo } X \in \mathfrak{g}.$$

Como $v_2 \in V - V_1$, $\{v_1, v_2\}$ es linealmente independiente. Sea $V_2 = span\{v_1, v_2\}$, V_2 es $\mathfrak{g}$-invariante, entonces $\overline{\rho}_{V_2} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V/V_2)$ es una representación y $\overline{\rho}_{V_2}(\mathfrak{g})$ es soluble, de donde, existe $\overline{w}' \in V/V_2, \overline{w}' \neq 0$ y $\overline{\lambda}_3 : \overline{\rho}_{V_2}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que

$$\overline{X}\overline{w}' = \overline{\lambda}_3\left(\overline{X}\right)\overline{w}' \qquad \text{para todo } \overline{X} \in \overline{\rho}_{V_2}(\mathfrak{g})$$

Tomando $\lambda_3 = \overline{\lambda}_3 \circ \overline{\rho}_{V_2}$, con $\lambda_3(X) = \overline{\lambda}_3\left(\overline{X}\right)$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, existe $v_3 \in V - V_2, v_3 \neq 0$ y $\lambda_3 : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que

$$\overline{Xv_3} = \lambda_3(X)\overline{v}_3 \qquad \text{para todo } X \in \mathfrak{g}.$$

luego,

$$Xv_3 = \lambda_3(X)v_3 + u_2 \quad \text{con } u_2 \in V_2, \text{ para todo } X \in \mathfrak{g}.$$

Repitiendo este proceso, se llega a obtener $V = V_n = span\{v_1, \ldots, v_n\}$, con $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V tal que

$$Xv_i = \lambda_i(X)v_i + u_{i-1} \quad \text{con } u_{i-1} \in V_{i-1}$$

Por tanto, existe una base $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V y funcionales lineales $\lambda_1, \ldots, \lambda_n : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que, en relación a β, $X \in \mathfrak{g}$ se escribe como

$$[X]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1(X) & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n(X) \end{pmatrix}.$$

□

Proposición 2.26. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie de dimensión finita. Entonces, $\mathfrak{g}$ es soluble si y sólo si la álgebra derivada $\mathfrak{g}'$ es nilpotente.*

Demostración. Si $\mathfrak{g}'$ es nilpotente, ella es, en particular, soluble. Como $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ es abeliana, entonces es soluble. Por tanto, $\mathfrak{g}$ es soluble.

Recíprocamente, asumiendo que $\mathfrak{g}$ es soluble, para mostrar que $\mathfrak{g}'$ es nilpotente, se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que el campo de escalares es algebraicamente cerrado. En efecto, la extensión algebraica de la álgebra derivada es la derivada de la extensión algebraica y una álgebra es nilpotente si y sólo si sus extensiones son nilpotentes.

Suponiendo que el cuerpo de escalares es algebraicamenete cerrado, se tiene que existe una base β de $\mathfrak{g}$ y funcionales lineales $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tales que

$$[\mathrm{ad}(X)]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1(X) & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n(X) \end{pmatrix} \qquad \text{para todo } X \in \mathfrak{g}$$

es decir, se escriben como matrices triangulares superiores. Como el corchete de dos matrices triangulares superiores es una matriz triangular superior con ceros en la diagonal, los elementos de $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})'$ se escriben como matrices triangulares superiores con ceros en la diagonal, esto es, $\mathrm{ad}(Y)$ es nilpotente para todo $Y \in \mathfrak{g}'$. Como $\mathfrak{g}'$ es un ideal, $\mathrm{ad}(X)\,\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}'$, para todo $X \in \mathfrak{g}'$, entonces $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'} : \mathfrak{g}' \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}')$ es una nilrepresentación. Lo que muestra, junto al teorema de Engel, que $\mathfrak{g}'$ es nilpotente. □

2.3. Radicales solubles

Proposición 2.27. *Sean $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie y $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}$ ideales solubles. Entonces $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ también es ideal soluble.*

Demostración. El hecho de que $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ es un ideal es consecuencia de que la suma de ideales es un ideal. Por uno de los teoremas de isomorfismo, se tiene,

$$(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2) / \mathfrak{h}_2 \approx \mathfrak{h}_1 / \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$$

Como $\mathfrak{h}_1$ es soluble, $\mathfrak{h}_1 / \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ es soluble y de ahí que $(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2) / \mathfrak{h}_2$ es soluble. Como $\mathfrak{h}_2$ es soluble, $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ es soluble por la proposición 2.20. □

Proposición 2.28. *Sea $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie de dimensión finita, entonces existe en $\mathfrak{g}$ un único ideal soluble $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$ que contiene todos los ideales solubles de $\mathfrak{g}$.*

Demostración. Sea n el máximo de las dimensiones de los ideales solubles de $\mathfrak{g}$ y sea $\mathfrak{r}$ un ideal soluble con $\dim \mathfrak{r} = n$. Entonces todo ideal soluble está contenido en $\mathfrak{r}$. En efecto, si $\mathfrak{h}$ es ideal soluble, $\mathfrak{r} + \mathfrak{h}$ también lo es. Por la maximalidad de la dimensión, $\dim (\mathfrak{r} + \mathfrak{h}) = \dim \mathfrak{r}$ y de ahí que $\mathfrak{r} + \mathfrak{h} \subset \mathfrak{r}$ y $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{r}$. Por tanto, $\mathfrak{r}$ contiene todos los ideales solubles de $\mathfrak{g}$.
Para la unicidad de $\mathfrak{r}$, suponga que $\mathfrak{h}$ es otro ideal soluble que contiene todos los ideales, entonces $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{h}$, también se tiene que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{r}$, por tanto $\mathfrak{r} = \mathfrak{h}$. □

Definición 2.29. *El ideal $\mathfrak{r}$ de la proposición anterior es llamado radical soluble (o simplemente radical) de $\mathfrak{g}$. Para el radical de $\mathfrak{g}$ será utilizada la notación $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$.*

Ejemplos:

1. $\mathfrak{g}$ es soluble si y solo si $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$.

2. El radical de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ es
$$\mathfrak{z} = \{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \ a \in \mathbb{R} \}.$$
En efecto, $\mathfrak{z}$ es ideal abeliano de $\mathfrak{g}$ y, por tanto, soluble. Además, es el único ideal soluble, pues los ideales de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ son $\mathfrak{z}$ y $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, además de los triviales. Para ver eso, observe que
$$\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{z}$$
y, por tanto, $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) / \mathfrak{z} \approx \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Sea $\mathfrak{h}$ un ideal no trivial de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$, entonces $\mathfrak{h}/\mathfrak{z}$ es un ideal de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Como los únicos ideales de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ son los triviales (eso porque $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ es una álgebra simple como será visto más adelante), $\mathfrak{h} = \mathfrak{z}$ o $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ es no nulo. En este último caso, $\mathfrak{h}$ contiene a $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ y, por tanto, debe ser $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ o $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$.

2.4. Radicales nilpotentes

Como fue visto, la suma de ideales solubles de una álgebra es también un ideal soluble. Ese hecho es lo que garantiza la existencia de ideales que contienen todos los ideales solubles de una álgebra, esto es, de los radicales solubles. Para los ideales nilpotentes, se tiene,

Proposición 2.30. *Sean $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie de dimensión finita y $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ ideales nilpotentes de $\mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ es un ideal nilpotente y su representación adjunta en $\mathfrak{g}$ es una nilrepresentación.*

Demostración. Se puede asumir, sin pérdida de generalidad, que el cuerpo de escalares es algebraicamente cerrado. Asumiendo eso, sean

$$\mathrm{ad}_1 : \mathfrak{h}_1 :\longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \quad \text{y} \quad \mathrm{ad}_2 : \mathfrak{h}_2 :\longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

representaciones adjuntas de $\mathfrak{h}_1$ y $\mathfrak{h}_2$ en $\mathfrak{g}$. La primera observación que se hace es que las representaciones ad_1 y ad_2 son nilpotentes. En efecto, dado que $\mathfrak{h}_1$ es ideal nilpotente, para todo $X \in \mathfrak{h}_1$ existe $n \geq 1$ tal que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}_1}(X)^n = 0$, se tiene que, para todo $X \in \mathfrak{h}_1$ existe $n \geq 1$ tal que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)^{n+1} = 0$, de ahí que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ es nilpotente en $\mathfrak{g}$, para todo $X \in \mathfrak{h}_1$, por lo que ad_1 es una nilrepresentación. Análogamente, ad_2 es una representación nilpotente.

Ahora, considere $\mathrm{ad} : \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2 \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, como $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ es un ideal soluble de $\mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)$ es soluble. Por el teorema de Lie, existe una base β de $\mathfrak{g}$ y operadores lineales $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$: $\mathrm{ad}(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2) \longrightarrow \mathbb{K}$ tales que

$$[\mathrm{ad}(X)]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1(\mathrm{ad}(X)) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k(\mathrm{ad}(X)) \end{pmatrix} \quad \text{para todo } X \in \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$$

Sean $\mu_i = \lambda_i \circ \mathrm{ad} : \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2 \longrightarrow \mathbb{K}$, con $\mu_i(X) = \lambda_i(\mathrm{ad}(X))$, para todo $X \in \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2, i = 1, \ldots, k$, entonces

$$[\mathrm{ad}(X)]_\beta = \begin{pmatrix} \mu_1(X) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_k(X) \end{pmatrix} \quad \text{para todo } X \in \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$$

Como para $X \in \mathfrak{h}_1 \cup \mathfrak{h}_2$, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ es nilpotente, existe $n \geq 1$ tal que $\mu_i(X) = 0,\ i = 1, \ldots, k$ de donde se concluye, por el hecho de que μ_i son lineales, que $\mathrm{ad} : \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2 \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ es una representación nilpotente.
Como $\mathrm{ad}(X)\, \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$, para todo $X \in \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$, se tiene que $\mathrm{ad}\big|_{\mathfrak{h}_1+\mathfrak{h}_2} : \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2 \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)$ es una nilrepresentación. Por tanto $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ es nilpotente. □

A partir de la proposición anterior se muestra con el mismo argumento utilizado en el caso de los radicales solubles, que en una álgebra de Lie de dimensión finita existe un ideal nilpotente que contiene todos los ideales nilpotentes.

Proposición 2.31. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de dimensión finita. Entonces existe un ideal de $\mathfrak{g}$, denotado por $\mathfrak{rn}(\mathfrak{g})$ y denominado radical nilpotente o nilradical de $\mathfrak{g}$ que contiene todo ideal nilpotente de $\mathfrak{g}$.*

Proposición 2.32. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie soluble y D una derivación de $\mathfrak{g}$. Entonces $\mathrm{im}\, D \subset \mathfrak{rn}(\mathfrak{g})$. En particular, $\mathfrak{rn}(\mathfrak{g})$ es invariante por D.*

Demostración. Sea $\mathbb{K}$ el cuerpo de escalares visto como una álgebra de Lie abeliana de dimensión uno. La transformación lineal

$$\begin{array}{rccc} \rho : & \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ & t & \longmapsto & \rho(t) = tD \end{array}$$

es una representación, pues $\mathbb{K}$ es abeliana. Como tD es una derivación de $\mathfrak{g}$ para todo $t \in \mathbb{K}$, entonces esa representación define el producto semidirecto $\mathfrak{h} = \mathbb{K} \times \mathfrak{g}$ con el corchete dado por

$$\begin{aligned} [(s, X), (t, Y)] &= [[s, t], \rho(s)Y - \rho(t)X + [X, Y]] \\ &= [0, sDY - tDX + [X, Y]] \end{aligned}$$

A partir de este corchete, se tiene que $\mathfrak{h}' \subset 0 \times \mathfrak{g} \approx \mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}' \subset 0 \times \mathrm{im}\, D + \mathfrak{g}' \approx \mathrm{im}\, D + \mathfrak{g}'$. Además, $0 \times \mathrm{im}\, D \subset \mathfrak{h}'$, pues $(0, DX) = [(1, X), (0, X)]$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, también $0 \times \mathfrak{g}' \subset \mathfrak{h}'$, pues $(0, \sum [X_i, Y_i]) = \sum [(0, X_i,), (0, Y_i,)]$ para todo $X_i, Y_i \in \mathfrak{g}$, luego, $0 \times \mathrm{im}\, D + \mathfrak{g}' \subset \mathfrak{h}'$. Así

$$\mathfrak{h}' = 0 \times \mathrm{im}\, D + \mathfrak{g}' \approx \mathrm{im}\, D + \mathfrak{g}'$$

Como $\mathfrak{h}' \subset 0 \times \mathfrak{g} \approx \mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{h}'$ es soluble, lo que implica que $\mathfrak{h}$ también es soluble. De la proposición se tiene que $\mathfrak{h}'$ es ideal nilpotente de $\mathfrak{h}$, en particular de $\mathfrak{g}$. De ahí que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{rn}(\mathfrak{g})$ de donde se concluye que $\mathrm{im}\, D \subset \mathfrak{rn}(\mathfrak{g})$. En particular, $\mathfrak{rn}(\mathfrak{g})$ es invariante por D. □

Corolario 2.33. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie con radical soluble $\mathfrak{r}$. Entonces*

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{rn}(\mathfrak{g}).$$

En particular, si $\mathfrak{g}$ es soluble, entonces $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{rn}(\mathfrak{g})$.

Demostración. Como $\mathfrak{r}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$, $\operatorname{ad}(X)\big|_{\mathfrak{r}} : \mathfrak{r} \longrightarrow \mathfrak{r}$ es una derivación de $\mathfrak{r}$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, por la proposición anterior, $\operatorname{ad}(X)\big|_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{r}) \subset \mathfrak{rn}(\mathfrak{g})$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. De donde $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{rn}(\mathfrak{g})$. □

2.5. Álgebras simples y álgebras semisimples

Definición 2.34. *Una álgebra de Lie es semisimple si*

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = 0$$

es decir, $\mathfrak{g}$ no tiene ideales solubles distintos de 0.

Definición 2.35. *Una álgebra de Lie es simple si*

1. *Los únicos ideales de $\mathfrak{g}$ son 0 y $\mathfrak{g}$ y*

2. $\dim \mathfrak{g} \neq 1$

Vale la pena observar que las álgebras de dimensión 1 no poseen ideales no triviales. Estas álgebras no son consideradas simples, esto para que exista compatibilidad entre los conceptos de álgebras simples y semisimples. Como es inmediato a partir de la definición, las álgebras unidimensionales no son semisimples. Sin embargo, las álgebras que no poseen ideales no triviales son semisimples. En efecto, sea $\mathfrak{g}$ una álgebra que no posee ideales no triviales. Como $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ es un ideal, este debe ser 0 o $\mathfrak{g}$. En el primer caso, $\mathfrak{g}$ es semisimple. Si $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{g}$ es soluble. El segundo caso no puede ocurrir si $\dim \mathfrak{g} \geq 2$, eso porque si $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{g}$ es soluble y por tanto $\mathfrak{g}' \neq \mathfrak{g}$. Como $\mathfrak{g}'$ también es un ideal, $\mathfrak{g}' = 0$, es decir, $\mathfrak{g}$ es abeliana. Pero eso no puede suceder si $\dim \mathfrak{g} \geq 2$, pues todo subespacio de una álgebra abeliana es un ideal. En otras palabras, las álgebras simples son semisimples.

Ejemplo

1. $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ es simple. Para verificar esto sean

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Los corchetes entre estos elementos son dados por $[H,X] = 2X, [H,Y] = -2Y$ y $[X,Y] = H$. Si $\mathfrak{h} \neq 0$ es un ideal de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, tome $Z = aX + bH + CY \ \in \mathfrak{h}$, entonces $[X,Z] = -2bX + cH \in \mathfrak{h}$ y $[X\,[X,Z]] = -2cX \in \mathfrak{h}$, por tanto, si $Z \neq 0$ entonces $Z, [X,Z]$ o $[X\,[X,Z]]$ es múltiplo no nulo de X. De donde se concluye que si $\mathfrak{h}$ es un ideal no nulo entonces, $X \in \mathfrak{h}$. Como $H = [X,Y]$ y $Y = -1/2\,[H,Y]\,, Y, H \in \mathfrak{h}$. Por tanto $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$.

El centro de una álgebra es un ideal abeliano y, por tanto, soluble. Así, el centro de una álgebra semisimple es necesariamente nulo. Como el centro de una álgebra de Lie coincide con el núcleo de la representación adjunta entonces la representación adjunta de una álgebra semisimple, es fiel. Por eso toda álgebra semisimple puede ser visto como una álgebra de transformaciones lineales.

Proposición 2.36. *Sean $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie que no es soluble y $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ un ideal soluble, entonces $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ es semisimple si y solo si $\mathfrak{h} = \mathfrak{r}(\mathfrak{g})$.*

Demostración. Suponga que $\mathfrak{h} = \mathfrak{r}(\mathfrak{g})$. Sea $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ el homomorfismo canónico y tome un ideal soluble $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$. Entonces $\pi^{-1}(\mathfrak{i})$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ que contiene a $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$. En efecto, sean $X \in \mathfrak{g}$ y $Y \in \pi^{-1}(\mathfrak{i})$, entonces $\pi(Y) \in \mathfrak{i}$ y $\pi(X) \in \pi(\mathfrak{g})$. Dado que

$$[\pi(X), \pi(Y)] = \pi[X,Y] \in \mathfrak{i}$$

se tiene que $[X,Y] \in \pi^{-1}(\mathfrak{i})$, por lo que es un ideal. Para ver que contiene a $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$, tome $X \in \mathfrak{r}(\mathfrak{g})$, entonces $\pi(X) = 0 \in \mathfrak{i}$. Además, $\mathfrak{i} \approx \pi^{-1}(\mathfrak{i})/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$, luego $\pi^{-1}(\mathfrak{i})$ es soluble, pues $\mathfrak{i}$ y $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ son solubles. Por tanto está contenido en $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$, es decir, $\mathfrak{i} = 0$.
Recíprocamente, si $\mathfrak{h}$ es un ideal soluble de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ y $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})/\mathfrak{h}$ es un ideal soluble de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. La hipótesis de que $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ es semisimple implica que $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})/\mathfrak{h} = 0$, es decir, $\mathfrak{h} = \mathfrak{r}(\mathfrak{g})$. □

Capítulo 3

Cohomología

La intensión de este capítulo es dar una introducción a la cohomología de álgebras de Lie. El término introducción aquí debe tomarse literalmente, ya que después de las definiciones se darán interpretaciones concretas para los dos primeros espacios de cohomología que serán utilizados en el último capítulo.

3.1. Aplicaciones multilineales alternadas

Definición 3.1. *Sean E y V espacios vectoriales y $n \in \mathbb{N}$. Una aplicación n-lineal $f : E^n \longrightarrow V$. Es una aplicación multilineal alternada si satisface, para toda permutación σ de n elementos,*

$$f\left(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}\right) = (-1)^{|\sigma|} f\left(v_1, \ldots, v_n\right)$$

donde $|\sigma|$ denota el grado de la permutación σ, que es 0 o 1 dependiendo si σ es producto de una cantidad par o impar de transposiciones.

El conjunto de todas las aplicaciones multilineales alternadas de E^n en V es un espacio vectorial que se denotará por $\mathfrak{A}_{\mathfrak{n}}(E, V)$.

Ejemplos:

1. Toda aplicación lineal $f : E \longrightarrow V$ es trivialmente alternada, ya que no es posible quebrar la condición de alternabilidad. Así, $\mathfrak{A}_{\mathfrak{1}}(E, V) = \mathcal{L}(E, V)$.

2. Si $f : \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \longrightarrow V$ es n-lineal entonces $f(t_1, \ldots, t_n) = t_1 \cdot t_2 \cdot \ldots \cdot t_n \cdot v$, donde $v = f(1, \ldots, 1) \in V$. Por tanto, cuando $n > 1$, f sólo puede ser alternada si $v = 0$, es decir, f es idénticamente nula. Así $\mathfrak{A}_{\mathfrak{n}}(\mathbb{R}, V) = 0$ para $n > 1$.

3. La aplicación bilineal $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(u, v) = u^1 v^2 - u^2 v^1$, donde $u = (u^1, u^2)$ y $v = (v^1, v^2)$, es alternada.

Proposición 3.2. *Una aplicación $f : E^n \longrightarrow V$ es una aplicación multilineal alternada si y solo si se anula cada vez que, por lo menos, dos argumentos consecutivos entre $v_1, \ldots, v_n$ se repiten, es decir, $f(v_1, \ldots, v_n) = 0$ si sólo si existe $i \in$ tal que $v_i = v_{i+1}$.*

Demostración. Por inducción sobre el entero m, número mínimo de transposiciones de dígitos consecutivos cuyo producto es σ, pues toda permutación puede representarse como producto de transposiciones de dígitos consecutivos.

Si $m = 1, \sigma$ es una transposición de dígitos consecutivos, digamos $\sigma = (i, i+1)$ con $1 \leq i \leq n-1$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i + v_{i+1}, v_i + v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots v_n) \\ &= f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_i, v_{i+2}, \ldots v_n) + f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots v_n) \\ &\quad + f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots v_n) + f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, v_i, v_{i+2}, \ldots v_n) \end{aligned}$$

o sea

$$f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots v_n) = -f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, v_i, v_{i+2}, \ldots v_n)$$

Suponiendo que $m \geq 2$ y el resultado probado para $m - 1$.

Sea $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_{m-1} \tau_m$, donde $\tau_1, \cdots, \tau_m$ son transposiciones de dígitos consecutivos y m es el entero mínimo para el cual tal representación sea posible. Tome $\delta = \tau_1 \cdots \tau_{m-1},\ m - 1$ es el mínimo entero para el cual la representación de δ es posible, entonces se tiene que $\sigma = \delta \tau_m$.

$$\begin{aligned} f\left(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}\right) &= f\left(v_{\delta\tau_m(1)}, \ldots, v_{\delta\tau_m(n)}\right) \\ &= f\left(v_{\delta(\tau_m(1))}, \ldots, v_{\delta(\tau_m(n))}\right) \\ &= (-1)^{|\delta|} f\left(v_{\tau_m(1)}, \ldots, v_{\tau_m(n)}\right) \end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción

$$f\left(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}\right) = (-1)^{|\delta|} f\left(v_{\tau_m(1)}, \ldots, v_{\tau_m(n)}\right)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} f\left(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}\right) &= (-1)^{|\delta|}(-1)^{|\tau_m|} f(v_1, \ldots, v_m) \\ &= (-1)^{|\delta|+|\tau_m|} f(v_1, \ldots, v_m) \\ &= (-1)^{|\sigma|} f(v_1, \ldots, v_m) \end{aligned}$$

Recíprocamente, si f es alternada, tomando $\sigma = (i, i+1)$, como $|\sigma| = 1$, entonces

$$f(v_1, \ldots, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n) = -f(v_1, \ldots, v_{i+1}, v_i, \ldots, v_n)$$

y si $v_i = v_{i+1}$,

$$f(v_1, \ldots, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n) = f(v_1, \ldots, v_{i+1}, v_i, \ldots, v_n)$$

entonces

$$f(v_1, \ldots, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n) = 0$$

□

Corolario 3.3. *Sea* $f \in \mathfrak{A}_\mathfrak{n}(E, V)$*. Si existe* $1 \leq i, j \leq n$; $i \neq j$ *tal que* $v_i = v_j$*, entonces* $f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = 0$.

Demostración. Como f es multilineal alternada,

$$f(v_1, \ldots, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n) = -f(v_1, \ldots, v_{i+1}, v_i, \ldots, v_n)$$

Entonces, si $v_i = v_j$, con $i < j$ se tiene

$$\begin{aligned} f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_{j-1}, v_j, \ldots, v_n) &= -f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_{j-2}, v_j, v_{j-1} \ldots, v_n) \\ &= f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_{j-3}, v_j, v_{j-2} \ldots, v_n) \\ &\vdots \\ &= \pm f(v_1, \ldots, v_i, v_j, v_{i+1} \ldots, v_n) \end{aligned}$$

que es igual a cero porque dos argumentos consecutivos son iguales. □

Proposición 3.4. *Sea* $f \in \mathfrak{A}_\mathfrak{n}(E, V)$*. Si* $v_1, \ldots, v_n \in E$ *son linealmente dependientes, entonces* $f(v_1, \ldots, v_n) = 0$.

Demostración. Si los vectores $v_1, \ldots, v_n \in E$ son linealmente dependientes, existe i tal que el vector v_i es combinación lineal de los demás, o sea,

$$v_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j v_j \quad \text{con } \alpha_j \in \mathbb{K}$$

De ahí

$$\begin{aligned} f(v_1, \ldots, v_n) &= f(v_1, \ldots, v_{i-1}, \sum_{j \neq i} \alpha_j v_j, v_{i+1}, \ldots v_n) \\ &= \sum_{j \neq i} \alpha_j f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \ldots v_n) \end{aligned}$$

En cada término de la derecha hay dos argumentos iguales. Por el corolario precedente, todos estos términos son nulos, entonces

$$f(v_1, \ldots, v_n) = 0$$

□

Corolario 3.5. *Si $n > \dim E$, entonces, para todo espacio vectorial V,*

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{n}}(E, V) = 0$$

Demostración. Si $v_1, \ldots, v_n \in E$, entonces alguno de ellos es combinación lineal de los otros, es decir, son linealmente dependientes, entonces $f(v_1, \ldots, v_n) = 0$. □

Una consecuencia del corolario anterior, es que la cantidad de los espacios $\mathfrak{A}_{\mathfrak{n}}(E, V)$ es finita.

Proposición 3.6. *Sea $\wedge : E^n \longrightarrow \wedge^n E$ un producto exterior. Para toda aplicación multilineal alternada $f : E^n \longrightarrow V$, existe una única aplicación lineal $\hat{f} : \wedge^n E \longrightarrow V$ tal que $\hat{f} \circ \wedge = f$, es decir,*

$$f(v_1, \ldots, v_n) = \hat{f}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)$$

Demostración. Sea $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ una base ordenada en E. Dada $f : E^n \longrightarrow V$ multilineal alternada, defina una aplicación lineal $\hat{f} : \wedge^n E \longrightarrow V$ por $\hat{f}(e_J) = f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n})$ para todo $J = \{j_1 < \cdots < j_n\} \subset I_m$ donde $e_J = e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_n}$. Como f es alternada, $\hat{f} \circ \wedge$ coincide con f en todas las secuencias $(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n})$ de elementos básicos. De ahí que $\hat{f} \circ \wedge = f$. Para la unicidad, suponga que existe otra aplicación lineal $\tilde{f} : \wedge^n E \longrightarrow V$ tal que $\tilde{f}(e_J) = f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n})$ para todo $J = \{j_1 < \cdots < j_n\} \subset I_m$. Ya que una aplicación lineal $\wedge^n E \longrightarrow V$ está totalmente determinada por los valores sobre la base de $\wedge^n E$, se tiene que $\hat{f} = \tilde{f}$. □

Corolario 3.7. *La aplicación lineal $f \longmapsto \hat{f}$, de la proposición anterior, establece un isomorfismo lineal $\mathfrak{A}_n(E,V) \approx \mathcal{L}(\wedge^n E, V)$.*

3.2. Cohomología de álgebras de Lie

Definición 3.8. *Sean $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie y $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ una representación de $\mathfrak{g}$ en el espacio vectorial V y, asociados a $\mathfrak{g}$ y V, los espacios $\mathcal{A}^n$ de aplicaciones multilineales alternadas de $\mathfrak{g}^n$ en V. La cohomología de $\mathfrak{g}$ en relación a ρ es definida a partir del operador de diferenciación exterior $d_n : \mathcal{A}^n \longrightarrow \mathcal{A}^{n+1}$, $n \geq 0$, que a su vez, es definido por la fórmula*

$$\begin{aligned} d_n f(X_1, \ldots, X_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \rho(X_i) f\left(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_{n+1}\right) \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{i+j} f\left([X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_{n+1}\right) \end{aligned}$$

En esta fórmula, el símbolo $\widehat{}$ significa que lo que está de bajo de el debe ser omitido.

En el caso de que tanto $\mathfrak{g}$ como V son de dimensión finita, $\mathcal{A}^n$ también es de dimensión finita y su dimensión es dada por

$$\dim \mathcal{A}^n = \binom{m}{n} d$$

donde d es la dimensión de V y m es la dimensión de $\mathfrak{g}$. Esto por el isomorfismo entre $\mathcal{A}^n$ y $\mathcal{L}(\wedge^n \mathfrak{g}, V)$. Además, $\mathcal{A}^0 = V$ es interpretado como el espacio de las aplicaciones constantes $f_v : \mathfrak{g} \longrightarrow V$,$f_v(X) = v$.

En este capítulo se estudiarán principalmente las cohomologias de orden baja que envuelven d_n apenas para $n \leq 2$. Las expresiones de d para esos valores de n son:

$$d_0 v(X) = \rho(X) v$$

si $v \in V$ y $X \in \mathfrak{g}$,

$$d_1 f(X,Y) = \rho(X) f(Y) - \rho(Y) f(X) - f([X,Y])$$

si $f \in \mathcal{A}^1$ y $X, Y \in \mathfrak{g}$ y

$$\begin{aligned} d_2 f(X,Y,Z) &= \rho(X) f(Y,Z) - \rho(Y) f(X,Z) + \rho(Z) f(X,Y) \\ &- f([X,Y], Z) + f([X,Z], Y) - f([Y,Z], X) \end{aligned}$$

si $f \in \mathcal{A}^2$ y $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Proposición 3.9. *Si $f \in \mathcal{A}^n$, entonces $d_n f \in \mathcal{A}^{n+1}$ para todo $n \geq 0$.*

Demostración. Es claro que $d_n f$ es multilineal, se mostrará que además es alternada, de manera que se trata de un elemento de $\mathcal{A}^{n+1}$.

Sean entonces $X_1, \ldots, X_{n+1} \in \mathfrak{g}$ y $k \in \{1, \ldots, n\}$, suponga que $X_k = X_{k+1}$. Como $f \in \mathcal{A}^n$, se tiene que $f\left(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_{n+1}\right) = 0$ si $1 \leq i < k$ o si $k+1 < i \leq n+1$, ya que dos de los argumentos son iguales, entonces

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \rho(X_i) f\left(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_{n+1}\right) \\
&\qquad = (-1)^{k+1} \rho(X_k) f\left(X_1, \ldots, \widehat{X_k}, X_{k+1}, \ldots, X_{n+1}\right) \\
&\qquad\quad + (-1)^{k} \rho(X_{k+1}) f\left(X_1, \ldots, X_k, \widehat{X}_{k+1}, \ldots, X_{n+1}\right) \\
&\qquad = 0
\end{aligned}$$

De manera similar, $f\left([X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_{n+1}\right) = 0$ si $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ son tales que $i < j$ y $\{i, j\} \cap \{k, k+1\} = \emptyset$, entonces

$$\begin{aligned}
&\sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{i+j} f\left([X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_{n+1}\right) \\
&\quad = \sum_{j=k+2}^{n+1} (-1)^{k+j} f\left([X_k, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X_k}, X_{k+1}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_{n+1}\right) \\
&\quad + \sum_{j=k+2}^{n+1} (-1)^{k+1+j} f\left([X_{k+1}, X_j], X_1, \ldots, X_k, \widehat{X}_{k+1}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_{n+1}\right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+k} f\left([X_i, X_k], X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_k}, X_{k+1}, \ldots, X_{n+1}\right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+k+1} f\left([X_i, X_{k+1}], X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_k, \widehat{X}_{k+1}, \ldots, X_{n+1}\right) \\
&\quad + (-1)^{k+k+1} f\left([X_k, X_{k+1}], X_1, \ldots, \widehat{X_k}, \widehat{X}_{k+1}, \ldots, X_{n+1}\right)
\end{aligned}$$

La primera y la segunda de las sumas que aparecen en el lado derecho se cancelan mutuamente, como lo hacen la tercera y la cuarta, y, finalmente el último término se anula porque $[X_k, X_{k+1}] = 0$. Así, $d_n f \in \mathcal{A}^{n+1}$. $\square$

Proposición 3.10. *Para todo $n > 0$, se tiene que $d_n d_{n-1} = 0$.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{A}^{n-1}$, $X_1, \ldots, X_{n+1} \in \mathfrak{g}$. Por simplicidad y consideraciones de espacio, se escribirá $\left(X_1, \widehat{X_i}, X_{n+1}\right) := \left(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_{n+1}\right)$, entonces

$$\begin{aligned} d_n d_{n-1} f\left(X_1, \ldots, X_{n+1}\right) &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \rho\left(X_i\right) d_{n-1} f\left(X_1, \widehat{X_i}, X_{n+1}\right) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{i+j} d_{n-1} f\left(\left[X_i, X_j\right], X_1, \widehat{X_i}, \widehat{X_j}, X_{n+1}\right) \\ &= d^2 f \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} d^2 f = &\sum_{r<i} (-1)^{i+r} \rho\left(X_i\right) \rho\left(X_r\right) f\left(X_1, \widehat{X_r}, \widehat{X_i}, X_{n+1}\right) && (3.1)\\ &+ \sum_{i<r} (-1)^{i+r+1} \rho\left(X_i\right) \rho\left(X_r\right) f\left(X_1, \widehat{X_i}, \widehat{X_r}, X_{n+1}\right) && (3.2)\\ &+ \sum_{r<s<i} (-1)^{i+r+s+1} \rho\left(X_i\right) f\left(\left[X_r, X_s\right] X_1, \widehat{X_r}, \widehat{X_s}, \widehat{X_i}, X_{n+1}\right) && (3.3)\\ &+ \sum_{r<i<s} (-1)^{i+r+s} \rho\left(X_i\right) f\left(\left[X_r, X_s\right] X_1, \widehat{X_r}, \widehat{X_i}, \widehat{X_s}, X_{n+1}\right) && (3.4)\\ &+ \sum_{i<r<s} (-1)^{i+r+s+1} \rho\left(X_i\right) f\left(\left[X_r, X_s\right] X_1, \widehat{X_i}, \widehat{X_r}, \widehat{X_s}, X_{n+1}\right) && (3.5)\\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j+1} \rho\left[X_i, X_j\right] f\left(X_1, \widehat{X_i}, \widehat{X_j}, X_{n+1}\right) && (3.6)\\ &+ \sum_{r<i<j} (-1)^{i+j+r} \rho\left(X_r\right) f\left(\left[X_i, X_j\right], X_1, \widehat{X_r}, \widehat{X_i}, \widehat{X_j}, X_{n+1}\right) && (3.7)\\ &+ \sum_{i<r<j} (-1)^{i+j+r+1} \rho\left(X_r\right) f\left(\left[X_i, X_j\right], X_1, \widehat{X_i}, \widehat{X_r}, \widehat{X_j}, X_{n+1}\right) && (3.8)\\ &+ \sum_{i<j<r} (-1)^{i+j+r} \rho\left(X_r\right) f\left(\left[X_i, X_j\right], X_1, \widehat{X_i}, \widehat{X_j}, \widehat{X_r}, X_{n+1}\right) && (3.9)\\ &+ \sum_{s<i<j} (-1)^{i+j+s} f\left(\left[\left[X_i, X_j\right], X_s\right], X_1, \widehat{X_s}, \widehat{X_i}, \widehat{X_j}, X_{n+1}\right) && (3.10)\\ &+ \sum_{i<s<j} (-1)^{i+j+s+1} f\left(\left[\left[X_i, X_j\right], X_s\right], X_1, \widehat{X_i}, \widehat{X_s}, \widehat{X_j}, X_{n+1}\right) && (3.11)\\ &+ \sum_{i<j<s} (-1)^{i+j+s} f\left(\left[\left[X_i, X_j\right], X_s\right], X_1, \widehat{X_i}, \widehat{X_j}, \widehat{X_s}, X_{n+1}\right) && (3.12)\\ &+ \sum_{r<s<i<j} (-1)^{i+j+r+s} f\left(\left[X_r, X_s\right], \left[X_i, X_j\right], X_1, \widehat{X_r}, \widehat{X_s}, \widehat{X_i}, \widehat{X_j}, X_{n+1}\right) && (3.13) \end{aligned}$$

$$+\sum_{r<i<s<j}(-1)^{i+j+r+s+1} f\left(\left[X_r, X_s\right],\left[X_i, X_j\right], X_1, \widehat{X_r}, \widehat{X_i}, \widehat{X_s}, \widehat{X_j}, X_{n+1}\right) \tag{3.14}$$

$$+\sum_{r<i<j<s}(-1)^{i+j+r+s} f\left(\left[X_r, X_s\right],\left[X_i, X_j\right], X_1, \widehat{X_r}, \widehat{X_i}, \widehat{X_j}, \widehat{X_s}, X_{n+1}\right) \tag{3.15}$$

$$+\sum_{i<r<s<j}(-1)^{i+j+r+s} f\left(\left[X_r, X_s\right],\left[X_i, X_j\right], X_1, \widehat{X_i}, \widehat{X_r}, \widehat{X_s}, \widehat{X_j}, X_{n+1}\right) \tag{3.16}$$

$$+\sum_{i<r<j<s}(-1)^{i+j+r+s+1} f\left(\left[X_r, X_s\right],\left[X_i, X_j\right], X_1, \widehat{X_i}, \widehat{X_r}, \widehat{X_j}, \widehat{X_s}, X_{n+1}\right) \tag{3.17}$$

$$+\sum_{i<j<r<s}(-1)^{i+j+r+s} f\left(\left[X_r, X_s\right],\left[X_i, X_j\right], X_1, \widehat{X_i}, \widehat{X_j}, \widehat{X_r}, \widehat{X_s}, X_{n+1}\right) \tag{3.18}$$

Se tiene que las líneas (3.1) y (3.2) cancelan la línea (3.6), pues $[X_i, X_r] = X_iX_r - X_rX_i$. Las líneas (3.3) y (3.9) se cancelan mutuamente, al igual que lo hacen las líneas (3.4) y (3.8), y las líneas (3.5) y (3.7). Dado que

$$\left[\left[X_i, X_j\right], X_s\right]=\left[\left[X_i, X_s\right], X_j\right]-\left[\left[X_j, X_s\right], X_i\right]=\left[\left[X_i, X_s\right], X_j\right]+\left[\left[X_s, X_j\right], X_i\right].$$

las líneas (3.10) y (3.12) cancelan la línea (3.11). Además, las líneas (3.13) y (3.18) se cancelan; como lo hacen las líneas (3.15) y (3.16) y las líneas (3.14) y (3.17). De donde se concluye $d^2 = 0$. □

Ejemplo: Sea $f : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ dada por el corchete, $f(X,Y) = [X,Y]$. Dado que el corchete es bilineal y antisimétrica, $f \in \mathcal{A}^2$. Tomando la representación adjunta $\rho = \operatorname{ad}$, $d_1 f = 0$. Esta igualdad puede ser verificada directamente, pues es equivalente a la identidad de Jacobi, o por el hecho de que $f = d_1 h$ donde h es la identidad de $\mathfrak{g}$. En efecto,

$$\begin{aligned} d_1 h(X, Y) & =\rho(X) h(Y)-\rho(Y) h(X)-h[X, Y] \\ & =[X, Y]-[Y, X]-[X, Y] \\ & =[X, Y] \\ & =f(X, Y) \end{aligned}$$

y, por tanto, $df = d^2 h = 0$.

Definición 3.11. *1.* $\mathcal{C}^n = \ker d_n \subset \mathcal{A}^n$.

2. $\mathcal{F}^n = \operatorname{im} d_{n-1}$. *Se tiene que* $\mathcal{F}^n \subset \mathcal{C}^n$.

3. $\mathcal{H}^n = \mathcal{C}^n / \mathcal{F}^n$ *para* $n \geq 1$.

Los elementos de $\mathcal{C}^n$ *son llamados cociclos y los de* $\mathcal{F}^n$ *cofronteras y* $\mathcal{H}^n$, $n \geq 1$ *son los espacios de cohomología de la representación. Con rigor,* $\mathcal{H}^n$ *debería ser escrito como* $\mathcal{H}^n(\mathfrak{g}, \rho)$ *así como* $\mathcal{A}^n, \mathcal{C}^n, \mathcal{F}^n$. *Se debe resaltar que* $\mathcal{H}^n$ *y* $\mathcal{C}^n$ *se anulan si* $n > \dim \mathfrak{g}$.

Ejemplos:

1. Sean $\mathfrak{g}$ una álgebra abeliana de dimensión finita, $V = \mathbb{K}$, el cuerpo de escalares y ρ una representación en V, es decir, ρ es una funcional lineal en $\mathfrak{g}$. Como $\mathfrak{g}$ es abeliana,

$$d_n f(X_1, \ldots, X_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \rho(X_i) f\left(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_{n+1}\right).$$

Se distinguen dos casos:

a) $\rho = 0$. En este caso, $d = 0$, y por tanto, $\mathcal{F}^n = 0$, $\mathcal{C}^n = \mathcal{A}^n$ y $\mathcal{H}^n = \mathcal{A}^n$ y su dimensión es dada por $\binom{\dim \mathfrak{g}}{n}$.

b) $\rho \neq 0$. Para encontrar $\mathcal{H}^1$ en este caso, sea $f = d_0 v \in \mathcal{F}^1$, entonces $f(X) = \rho(X) v$ con $v \in \mathbb{K}$ y, por tanto,

$$\mathcal{F}^1 = \{f : f = v\rho, v \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}\rho,$$

es decir, $\mathcal{F}^1$ es el subespacio de $\mathfrak{g}^*$ generado por ρ. Sea $f \in \mathcal{A}^1$, entonces $d_1 f(X, Y) = \rho(X) f(Y) - \rho(Y) f(X)$ y, por tanto, $f \in \mathcal{C}^1$ si y solo si $\rho(X) f(Y) = \rho(Y) f(X)$. Tomando Y tal que $\rho(Y) \neq 0$,

$$f(X) = \frac{f(Y)}{\rho(Y)} \rho(X)$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$. De ahí que $\mathcal{F}^1 = \mathcal{C}^1$ y, por tanto, $\mathcal{H}^1 = 0$.

2. Sean $\mathfrak{g}$ la álgebra de Heisenberg con base $\{X, Y, Z\}$, $[X, Y] = Z$. Considere la representación trivial $\rho = 0$ unidimensional. Entonces,

$$\mathcal{F}^1 = \{f : f(W) = \rho(W) v = 0 \text{ para todo } W\} = 0$$

En cuanto a $\mathcal{C}^1$, $f \in \mathcal{C}^1$ si y solo si para todo $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$,

$$\rho(X_1) f(X_2) - \rho(X_2) f(X_1) - f[X_1, X_2] = 0$$

es decir, $f\left[X_1, X_2\right] = 0$ con X_1 y X_2 arbitrarios. Esta igualdad es equivalente a $f\left(Z\right) = 0$. Por tanto,

$$\mathcal{C}^1 = \{f : f\left(Z\right) = 0\}$$

de ahí que $\dim \mathcal{C}^1 = 2$, como $\mathcal{H}^1 = \mathcal{C}^1$, $\dim \mathcal{H}^1 = 2$.

Ahora, en cuanto a $\mathcal{H}^2$, si $f \in \mathcal{A}^2$, para encontrar $d_2 f$ es suficiente encontrar $df\left(X, Y, Z\right)$. El cual a su vez está dado por

$$\begin{aligned} d_2 f\left(X, Y, Z\right) &= -f\left(\left[X, Y\right], Z\right) + f\left(\left[X, Z\right], Y\right) - f\left(\left[Y, Z\right], X\right) \\ &= -f\left(Z, Z\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

y de ahí que $\mathcal{C}^2 = \mathcal{A}^2$. Para encontrar $\mathcal{F}^2$, sea $\beta \in \mathcal{F}^2$, entonces $\beta\left(X_1, X_2\right) = f\left[X_1, X_2\right]$ para algún $f \in \mathcal{A}^1$. Como $\left[X_1, X_2\right]$ es un múltiplo de Z, se concluye que β es un múltiplo de γ donde

$$\gamma\left(X_1, X_2\right) = f_0\left[X_1, X_2\right]$$

donde $f_0\left(X\right) = f_0\left(Y\right) = 0$ y $f_0\left(Z\right) = 1$. De ahí que $\dim \mathcal{F}^2 = 1$ y por tanto, $\dim \mathcal{H}^2 = 2$.

También se tiene que $\mathcal{H}^3 = \mathcal{A}^3$. Esto por que $\mathcal{F}^3 = 0$, pues $d_2 = 0$ como fue verificado y $\mathcal{C}^3 = \mathcal{A}^3$ pues $d_3 = 0$ ya que $\mathcal{A}^4 = 0$.

3. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}\left(2, \mathbb{R}\right)$ y ρ la representación trivial de dimensión uno. Usando la base $\{X, H, Y\}$ de siempre.

   - $d_0 v\left(W\right) = \rho\left(W\right) = 0$
   - $d_1 f\left(X, H\right) = -f\left[X, H\right] = 2f\left(X\right)$
   - $d_1 f\left(X, Y\right) = -f\left[X, Y\right] = -f\left(H\right)$
   - $d_1 f\left(H, Y\right) = -f\left[H, Y\right] = 2f\left(X\right)$

     De esas igualdades se tiene que $\dim \mathcal{F}^2 = 3 = \dim \mathcal{A}^2$, es decir, $\mathcal{F}^2 = \mathcal{A}^2$. En efecto, variando f en la base $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ dual de $\{X, H, Y\}$, $d_1 f$ recorre la base $\{\alpha \wedge \beta, \alpha \wedge \gamma, \beta \wedge \gamma\}$ de $\wedge^2 \mathfrak{g} \approx \mathcal{A}^2$

     $d_1 \alpha = 2\alpha \wedge \beta$

$d_1\beta = \alpha \wedge \gamma$

$d_1\gamma = 2\beta \wedge \gamma$

Esto implica que $\mathcal{F}^2 = \langle \alpha \wedge \beta, \alpha \wedge \gamma, \beta \wedge \gamma \rangle$.

- $d_2 = 0$, pues

$$\begin{aligned} d_2 f(X, Y, Z) &= -f([X, H], Y) + f([X, Y], H) - f([H, Y], X) \\ &= 2f(X, Y) + 2f(Y, X) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- $d_3 = 0$, pues $\mathcal{A}^4 = 0$.

De estas observaciones sobre d, se tiene que $\mathcal{H}^1 = 0, \mathcal{H}^2 = 0, \mathcal{H}^3 = \mathcal{A}^3$ y $\mathcal{H}^n = 0$ para $n \geq 4$.

El hecho de que $\mathcal{H}^1$ y $\mathcal{H}^2$ se anulan será generalizado más adelante para representaciones arbitrarias de álgebras semisimples cualquiera, como es el caso de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

4. Sean W un espacio vectorial y $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(W)$ una subálgebra de Lie y considere el espacio vectorial $V = \mathfrak{h} \oplus W$. Sea $\mathfrak{g} = W$ visto como álgebra abeliana. Sea también ρ la representación de $\mathfrak{g}$ en V dada por

$$\rho(u)(A, v) = (0, Au) \qquad u \in W, A \in \mathfrak{h}, v \in W. \tag{3.19}$$

El hecho de que ρ sea una representación, se sigue de las igualdades

$$\rho[u, v] = 0 \qquad \text{pues } \mathfrak{g} \text{ es abeliana}$$

y

$$\begin{aligned} [\rho u, \rho v](A, w) &= (\rho u)\rho(v)(A, w) - \rho(v)\rho(v)(A, w) \\ &= (\rho u)(0, Av) - (\rho v)(0, Au) \\ &= 0 \end{aligned}$$

pues $\rho(u)(0, w) = 0$.

Para encontrar $\mathcal{H}^1$ de esta representación, sea $f : W \longrightarrow \mathfrak{h} \oplus W = V$ y escriba $f =$

(f_1, f_2) con $f_1 : W \longrightarrow \mathfrak{h}$ y $f_2 : W \longrightarrow W$. A partir de esta descomposición de elementos de $\mathcal{A}^1$, se tiene la siguiente descomposición de $\mathcal{A}^1$: definiendo

$$\mathcal{A}_1^1 = \{f \in \mathcal{A}^1 : f_1 = 0\} = \mathfrak{gl}(W)$$

y

$$\mathcal{A}_2^1 = \{f \in \mathcal{A}^1 : f_2 = 0\} = \mathcal{L}(W, \mathfrak{h})$$

Evidentemente

$$\mathcal{A}^1 = \mathcal{A}_1^1 \oplus \mathcal{A}_2^1$$

Con esta descomposición es posible encontrar d:

Para d_0, sea $f = (A, v) \in V = \mathfrak{h} \oplus W$, entonces,

$$(d_0 f)(u) = \rho(u)(A, v) = (0, Au) \quad A \in \mathfrak{h}, u \in W.$$

Por tanto, $\mathcal{F}^1 \subset \mathcal{A}_1^1$ y, como $A \in \mathfrak{h}, \mathcal{F}^1 = \mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(W)$.

Para d_1, tome en primer lugar $f \in \mathcal{A}_1^1$, entonces.

$$(d_1 f)(u, v) = \rho(u) f(v) - \rho(v) f(u) = 0,$$

pues tanto $f(u)$ como $f(v)$ son de la forma $(0, *)$ y $\rho(u)$ y $\rho(v)$ se anulan cuando se aplica a un elemento de este tipo. Eso muestra que $\mathcal{A}_1^1 \subset \mathcal{C}^1$ y, como $\mathcal{F}^1 \subset \mathcal{A}_1^1$, la primera cohomologia $\mathcal{H}^1 = (\mathcal{A}^1 \cap \mathcal{C}^1) / (\mathcal{F}^1 \cap \mathcal{A}^1)$ se descompone como

$$\mathcal{H}^1 = \left(\mathcal{A}_1^1 \cap \mathcal{C}^1 \oplus \mathcal{A}_2^1 \cap \mathcal{C}^1\right) / \mathcal{F}^1 = \left(\mathcal{A}_1^1 / \mathcal{F}^1\right) \oplus \left(\mathcal{A}_2^1 \cap \mathcal{C}^1\right)$$

El cociente que aparece en el primer término de esta suma es $\mathfrak{gl}(W) / \mathfrak{h}$, pues $\mathcal{A}_1^1 = \mathfrak{gl}(W)$ y $\mathcal{F}^1 = \mathfrak{h}$, como ya fue visto. El segundo término de la suma es dado por los cociclos en $\mathcal{A}_2^1$. Para encontrarlos, tome $f \in \mathcal{A}_2^1$, entonces, $f = (f_1, 0)$ con $f_1 : W \longrightarrow \mathfrak{h}$, se tiene,

$$\begin{aligned} d_1 f(u, v) &= \rho(u)(f_1(v), 0) - \rho(v)(f_1(u), 0) \\ &= f_1(v) u - f_1(u) v \end{aligned} \tag{3.20}$$

y, por tanto,

$$\mathcal{C}^1 \cap \mathcal{A}_2^1 = \{f : W \longrightarrow \mathfrak{h} : f(u) v = f(v) u \quad \text{para todo } u, v \in W\}.$$

Se $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de $\mathfrak{gl}(W)$, el espacio de las aplicaciones $f : W \longrightarrow \mathfrak{h}$ que son cociclos, como en (3.20), es denominado prolongación de $\mathfrak{h}$ y es denotado por $\mathfrak{h}_{(1)}$. La cohomología $\mathcal{H}^1$, de la representación (3.19, es, por tanto $(\mathfrak{gl}(W) / \mathfrak{h}) \oplus \mathfrak{h}_{(1)}$.

3.3. Interpretaciones de $\mathcal{H}^1$ y $\mathcal{H}^2$

En general, el anulamiento de alguno de los espacios $\mathcal{H}^n$ está ligado a la existencia de subespacios complementares de subespacios en espacios de representaciones, como será visto más adelante.

3.3.1. Existencia de complementares y $\mathcal{H}^1$

Sean ρ una representación de $\mathfrak{g}$ en V, de dimensión finita, y W un subespacio de V que sea invariante por $\mathfrak{g}$. Sea también $\mathcal{P}$ el conjunto de las proyecciones de V cuya imagen es W. Esto es,

$$\mathcal{P} = \{P \in \mathfrak{gl}(V) : P^2 = P \text{ y } \operatorname{im} P = W\}$$

El núcleo de cada proyección $P \in \mathcal{P}$ es un subespacio complementar a W, pues el núcleo y la imagen de una proyección son complementares. Recíprocamente dada una descomposición $V = W \oplus W'$, la aplicación $P : V \longrightarrow W$ dada por $Pv = P(v_1 + v_2) = v_1$, con $v_1 \in W$ y $v_2 \in W'$, define una proyección con núcleo W' e imagen W. Por tanto, los complementares W' de W son descritos por las proyecciones con imagen en W.

Proposición 3.12. *Sean ρ una representación de dimensión finita de $\mathfrak{g}$ en V, y $W \subset V$ un subespacio invariante por $\mathfrak{g}$. Entonces, un complementar W' de W es invariante por $\mathfrak{g}$ si y sólo si la proyección correspondiente conmuta con todos los elementos de ρ, es decir, $[\rho(X), P] = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.*

Demostración. Sean $v \in \ker P = W'$ y $X \in \mathfrak{g}$, suponiendo que $[\rho(X), P] = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, se tiene que $P\rho(X)v = \rho(X)Pv + [P, \rho(X)] = 0$ y, por tanto $\rho(X)v \in \ker P = W'$. Recíprocamente, si $\ker P$ es invariante por $\mathfrak{g}$, tome $w = w_1 + w_2 \in V$ con $w_1 \in W$ y $w_2 \in W'$, entonces $Pw_1 = w_1$ y $\rho(X)w_1 \in W$, de ahí que

$$\begin{aligned}
[P, \rho(X)]w &= P\rho(X)(w_1 + w_2) - \rho(X)P(w_1 + w_2) \\
&= P\rho(X)w_1 - \rho(X)w_1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

De donde $[\rho(X), P] = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. $\square$

De la proposición anterior, se tiene que la existencia de un complementar invariante es descrito por la conmutatividad de la proyección con los elementos de la imagen de la representación de la álgebra.

Proposición 3.13. *El conjunto $\mathcal{P}$ de las proyecciones sobre W es un subespacio afín del espacio de endomorfismos de V y su subespacio vectorial paralelo es el espacio de transformaciones cuya imagen es W y que se anula en W:*

$$\mathcal{E} = \{T \in \mathfrak{gl}(V) : T(W) = 0 \text{ y } T(V) \subset W\}$$

Demostración. Para ver esto, sean $P, Q \in \mathcal{P}$, entonces $P - Q$ se anula en W, pues si $v \in (P - Q)(W)$, $v = (P - Q)w$ con $w \in W$, entonces $v = Pw - Qw = 0$ y como la imagen de ambos está en W, $P - Q \in \mathcal{E}$. Eso muestra que $\mathcal{P}$ está contenido en un subespacio afín paralelo a $\mathcal{E}$.

Por otro lado, dados $P \in \mathcal{P}, T \in \mathcal{E},\ P + T \in \mathcal{P}$, pues su imagen está en W, además, su restricción a W es la identidad por el hecho de que T se anula en W y

$$(P + T)^2 = P^2 + PT + TP + T^2 = P + T$$

pues $P^2 = P, T^2 = 0, TP = 0$ y $PT = T$, esto es consecuencia de que la imagen de T está contenida en W y la restricción de P a W es la identidad.

En resumen, para cualquier proyección $P \in \mathcal{P}$, $\mathcal{P} = P + \mathcal{E}$. $\square$

De esa forma, los subespacios complementares a W son descritos por los elementos de $\mathcal{E}$ una vez que se haya fijado una proyección $P_0 \in \mathcal{P}$.

Proposición 3.14. *Sean ρ una representación de dimensión finita de $\mathfrak{g}$ en V, y $W \subset V$ un subespacio invariante por $\mathfrak{g}$. Defina $\tilde{\rho} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathcal{E})$ la aplicación dada por*

$$\tilde{\rho}(X)T = [\rho(X), T]. \tag{3.21}$$

Entonces, W admite subespacio invariante complementar si $\mathcal{H}^1(\mathfrak{g}, \tilde{\rho}) = 0$.

Demostración. Observe en primer lugar, que la aplicación $\tilde{\rho}$ define una representación de $\mathfrak{g}$ en $\mathcal{E}$. En efecto, $\tilde{\rho}$ es la restricción a $\mathcal{E}$ de la composición de la representación adjunta de $\mathfrak{gl}(V)$, $\mathrm{ad} : \mathfrak{gl}(V) \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(V))$, por la representación $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$. esto es, $\tilde{\rho} = \rho'|_{\mathcal{E}}$ con

$\rho' = \operatorname{ad} \circ \rho$. El hecho de que esta aplicación es una representación es garantizada porque la composición de homomorfismos es un homomorfismo y la restricción a $\mathcal{E}$ es posible debido a que $\mathcal{E}$ es invariante por las adjuntas de $\rho(X), X \in \mathfrak{g}$, ya que la imagen de la aplicación $\rho(X)T - T\rho(X)$ es un subespacio que está contenido en W, y el núcleo de esa aplicación contiene a W, pues este subespacio es invariante por $\rho(X)$.

Teniendo esta representación, fije $P_0 \in \mathcal{P}$, y tome $T \in \mathcal{E}$, entonces el subespacio complementar a W asociado a $P = P_0 + T$ es invariante si y sólo si $[\rho(X), P] = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$ lo que, a su vez, ocurre si y sólo si

$$[\rho(X), T] = [\rho(X), -P_0] \tag{3.22}$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$. Esta igualdad puede ser interpretada como la igualdad que garantiza que un cierto cociclo de la representación de $\tilde{\rho}$ es una cofrontera. En efecto, de las igualdades (3.21) y (3.22), se tiene

$$\tilde{\rho}(X)T = [\rho(X), -P_0]$$

Como $T \in \mathcal{A}^0 = \mathcal{E}$, $d_0T(X) = \tilde{\rho}(X)T$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, el primer miembro de la igualdad es una cofrontera y el segundo miembro es $f(X)$ donde $f : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{E}$ es dada por $f(X) = [\rho(X), -P_0]$, esta f es lineal y, por tanto, un elemento de $\mathcal{A}^1$. Además de eso, f es un cociclo ya que

$$\begin{aligned} d_1 f(X,Y) &= \tilde{\rho}(X) f(Y) - \tilde{\rho}(Y) f(X) - f[X,Y] \\ &= [\rho(X), [\rho(Y), -P_0]] - [\rho(Y), [\rho(X), -P_0]] - [[\rho(X), \rho(Y)], -P_0] \\ &= 0 \end{aligned}$$

por la identidad de Jacobi en $\mathcal{E}$.

En resumen, el subespacio complementar asociado a T es invariante si d_0T coincide con el cociclo $f(X) = [\rho(X), -P_0]$, lo que ocurre en el caso de que la representación $\tilde{\rho}$ tiene $\mathcal{H}^1 = 0$. □

Por tanto, para verificar si el subespacio invariante W admite o no un complementar invariante es suficiente verificar si un cierto cociclo es o no una cofrontera.

Más adelante será mostrado que si $\mathfrak{g}$ es semisimple, entonces, para todas sus representaciones de dimensión finita, $\mathcal{H}^1 = 0$. Eso, junto a la proposición anterior, garantiza que las representaciones de dimensión finita de álgebras semisimples son completamente reducibles.

3.3.2. Extensiones abelianas y $\mathcal{H}^2$

Definición 3.15. *Una extensión de una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ consiste en una álgebra $\overline{\mathfrak{g}}$ junto con un homomorfismo sobreyectivo $\pi : \overline{\mathfrak{g}} \longrightarrow \mathfrak{g}$. En otras palabras, una extensión de $\mathfrak{g}$ es cualquier álgebra que admite $\mathfrak{g}$ como cociente $\mathfrak{g} \approx \overline{\mathfrak{g}}/\ker\pi$*

Una de las preguntas que se hace sobre las extensiones de $\mathfrak{g}$ es la de la existencia o no de una subálgebra $\mathfrak{h} \subset \overline{\mathfrak{g}}$ tal que $\mathfrak{h} \approx \mathfrak{g}$ y $\overline{\mathfrak{g}} = \ker\pi \oplus \mathfrak{h}$. Es decir, si $\mathfrak{g}$ puede o no ser realizada como subálgebra de $\overline{\mathfrak{g}}$.

No serán consideradas aquí extensiones arbitrarias, sino apenas extensiones abelianas, es decir, extensiones para las cuales $\ker\pi$ es un ideal abeliano de $\overline{\mathfrak{g}}$.

Para estudiar la realización de $\mathfrak{g}$ en la extensión abeliana de dimensión finita $\overline{\mathfrak{g}}$, la primera observación que se hace es que los subespacios de $\overline{\mathfrak{g}}$ complementares a $\ker\pi$ son descritos por las secciones $\sigma : \mathfrak{g} \longrightarrow \overline{\mathfrak{g}}$ que son transformaciones lineales que satisfacen $\pi\sigma = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$. En efecto, dado un subespacio $W \subset \overline{\mathfrak{g}}$ complementar a $\ker\pi$, se tiene que si $\pi : \overline{\mathfrak{g}} = \ker\pi \oplus W \longrightarrow \mathfrak{g}$ es sobreyectiva, entonces $\mathfrak{g} = \pi(W) = \pi|_W(W)$, además si $x \in W,$ es tal que $\pi|_W(x) = \pi(x) = 0$, entonces $x = 0$, en consecuencia la restricción de π a W es invertible y su inversa define una sección de $\mathfrak{g}$ en $\overline{\mathfrak{g}}$. Recíprocamente, si σ es una sección de $\mathfrak{g}$ en $\overline{\mathfrak{g}}$, tome $v \in \mathrm{im}\,\sigma \cap \ker\pi$, entonces $v = \sigma(w)\,,\ w \in \mathfrak{g}$ y $0 = \pi(v) = \pi\sigma(w) = w$, de donde $v = 0$, es decir, la imagen de σ intercepta a $\ker\pi$ apenas en 0. Por otro lado,

$$\begin{aligned}\dim\overline{\mathfrak{g}} &= \dim\mathfrak{g} + \dim\ker\pi\\ &= \dim\mathrm{im}\,\sigma + \dim\ker\sigma + \dim\ker\pi\\ &= \dim(\mathrm{im}\,\sigma \oplus \ker\pi)\end{aligned}$$

ya que σ es inyectiva (por admitir inversa por la izquierda).

Por tanto, la imagen de una sección es un subespacio que complementa a $\ker\pi$.

Con el objetivo de describir los complementares que son subálgebras en términos de σ, se tiene la siguiente proposición:

Proposición 3.16. *Denote por V al núcleo de π. Sea $f_\sigma : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow V$ una aplicación dada por*

$$f_\sigma(X,Y) = [\sigma X, \sigma Y] - \sigma[X,Y]$$

Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $f_\sigma = 0$

ii) σ *es un homomorfismo.*

iii) *La imagen de* σ *es una subálgebra.*

Demostración. Observe en primer lugar que el hecho de que f_σ, definida de esa forma, asume valores en V, se debe a que

$$\pi f_\sigma (X, Y) = \pi [\sigma X, \sigma Y] - \pi\sigma [X, Y] = 0$$

Esta igualdad permite probar la equivalencia de las afirmaciones del enunciado:
i)⇒ ii) Si $f_\sigma = 0$, entonces $f_\sigma (X, Y) = [\sigma X, \sigma Y] - \sigma [X, Y] = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$, de donde

$$[\sigma X, \sigma Y] = \sigma [X, Y] .$$

Por lo tanto, σ es un homomorfismo.
ii)⇒ iii) es inmediata, ya que la imagen de un homomorfismo es una subálgebra.
iii)⇒ i) Si la imagen de σ es una subálgebra, el segundo miembro en la definición de f_σ pertenece a esa imagen, y por tanto, es necesariamente nulo. □

En vista de la proposición anterior, la cuestión de encontrar un complementar que sea subálgebra se reduce a la cuestión de encontrar una sección σ tal que $f_\sigma = 0$.
Ahora, dada una sección σ, todas las otras secciones son descritas como $\sigma' = \sigma - p$ donde $p : \mathfrak{g} \longrightarrow V$ es una transformación lineal arbitraria, En efecto, dada una sección σ', $\sigma - \sigma'$ asume valores en V, pues $\pi (\sigma - \sigma') = 0$ y, por tanto, $\sigma' = \sigma - p$ con $p = \sigma - \sigma'$. Recíprocamente, $\sigma - p$ es una sección, pues $\pi (\sigma - p) = \pi\sigma = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$.

Proposición 3.17. *Dada una sección* σ*, sea* $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ *una representación de* $\mathfrak{g}$ *en* V *definida por*

$$\rho (X) v = [\sigma (X) , v]$$

donde el corchete es tomado en $\overline{\mathfrak{g}}$*. Entonces, existe una subálgebra* $\mathfrak{h} \subset \overline{\mathfrak{g}}$ *tal que* $\overline{\mathfrak{g}} = \ker \pi \oplus \mathfrak{h}$*, si* $\mathcal{H}^2 (\rho)$ *se anula.*

Demostración. Observe que $\rho\left(X\right)v \in V$, pues V es un ideal de $\overline{\mathfrak{g}}$. Entonces, ρ define una representación, pues

$$\begin{aligned}\rho\left[X,Y\right]v &= \left[\sigma\left[X,Y\right],v\right]\\ &= \left[\sigma\left[X,Y\right]+\left[\sigma X,\sigma Y\right]-\sigma\left[X,Y\right],v\right]\end{aligned}$$

ya que $\left[\sigma X,\sigma Y\right]-\sigma\left[X,Y\right] \in V$ y V es una subálgebra abeliana. De ahí que

$$\begin{aligned}\rho\left[X,Y\right]v &= \left[\sigma X,\left[\sigma Y,v\right]\right]+\left[\left[\sigma X,v\right],\sigma Y\right]\\ &= \left[\rho X,\rho Y\right]v\end{aligned}$$

y, por tanto, ρ es un homomorfismo. Observe que la definición de la representación es independiente de la sección fijada, pues $\left[\sigma'\left(X\right)-\sigma\left(Y\right),v\right]=0$ ya que V es una álgebra abeliana, $\left[\sigma'\left(X\right),v\right]=\left[\sigma\left(Y\right),v\right]$.

Por otra parte, f_σ claramente pertenece $\mathcal{A}^2$, ya que es antisimétrica,

$$\begin{aligned}f_\sigma\left(X,Y\right) &= \left[\sigma\left(X\right),\sigma\left(Y\right)\right]-\sigma\left[X,Y\right]\\ &= -\left[\sigma\left(Y\right),\sigma\left(X\right)\right]+\sigma\left[Y,X\right]\\ &= -f_\sigma\left(Y,X\right)\end{aligned}$$

Además, es un cociclo de la representación ρ, pues

$$\begin{aligned}d_2f_\sigma\left(X,Y,Z\right) &= \rho\left(X\right)f_\sigma\left(Y,Z\right)-\rho\left(Y\right)f_\sigma\left(X,Z\right)+\rho\left(Z\right)f_\sigma\left(X,Y\right)\\ &\quad -f_\sigma\left(\left[X,Y\right],Z\right)+f_\sigma\left(\left[X,Z\right],Y\right)-f_\sigma\left(\left[Y,Z\right],X\right)\\ &= \left[\sigma X,\left[\sigma Y,\sigma Z\right]\right]-\left[\sigma Y,\left[\sigma X,\sigma Z\right]\right]+\left[\sigma Z,\left[\sigma X,\sigma Y\right]\right]\\ &\quad -\left[\sigma\left[X,Y\right],\sigma Z\right]+\left[\sigma\left[X,Z\right],\sigma Y\right]-\left[\sigma\left[Y,Z\right],\sigma X\right]\\ &\quad -\left[\sigma X,\sigma\left[Y,Z\right]\right]+\left[\sigma Y,\sigma\left[X,Z\right]\right]-\left[\sigma Z,\sigma\left[X,Y\right]\right]\\ &\quad +\sigma\left[\left[X,Y\right],Z\right]-\sigma\left[\left[X,Z\right],Y\right]+\sigma\left[\left[Y,Z\right],X\right]\end{aligned}$$

y esta expresión se anula de la siguiente forma: los tres primeros y los tres últimos por la identidad de Jacobi y los seis intermedios se cancelan dos a dos. Si además de cociclo, f_σ es una cofrontera, lo que ocurre cuando $\mathcal{H}^2\left(\rho\right)=0$, entonces $f_\sigma=dp$ para algún $p:\mathfrak{g}\longrightarrow V$. Tome la sección $\sigma' = \sigma - p$, entonces, por ser V álgebra abeliana,

$$\begin{aligned}
f_{\sigma'}(X,Y) &= [\sigma'(X), \sigma'(Y)] - \sigma'[X,Y] \\
&= [(\sigma - p)(X), (\sigma - p)(Y)] - (\sigma - p)[X,Y] \\
&= [\sigma(X), \sigma(Y)] - [\sigma(X), p(Y)] - [p(X), \sigma(Y)] - \sigma[X,Y] + p[X,Y] \\
&= f_\sigma(X,Y) - ([\sigma X, pY] - [\sigma Y, pX] - p[X,Y]) \\
&= f_\sigma(X,Y) - dp(X,Y) \\
&= 0
\end{aligned}$$

y σ' está asociada a una subálgebra complementar de $\ker \pi$. $\square$

3.3.3. Representaciones Afines

La álgebra afín $\mathfrak{af}(V)$ del espacio vectorial V es la álgebra que tiene que tiene por espacio subyacente al producto $\mathfrak{gl}(V) \times V$ donde el corchete viene dado por

$$[(A,v), (B,w)] = ([A,B], Aw - Bv) \quad A, B \in \mathfrak{gl}(V); v, w \in V$$

Eso significa que $\mathfrak{af}(V)$ es el producto semidirecto de $\mathfrak{gl}(V)$ por V, dado por por la representación canónica.

Definición 3.18. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie. Una representación afín de $\mathfrak{g}$ en V es un homomorfismo $\alpha : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{af}(V)$.*

Escribiendo α en coordenadas como $\alpha = (\rho(X), v(X))$ con $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ y $v : \mathfrak{g} \longrightarrow V$ aplicaciones lineales, observe que la condición para que α sea un homomorfismo viene de las igualdades

$$\alpha[X,Y] = (\rho[X,Y], v[X,Y])$$

y

$$\begin{aligned}
[\alpha X, \alpha Y] &= [(\rho(X), v(X)), (\rho(Y), v(Y))] \\
&= ([\rho(X), \rho(Y)], \rho(X)v(Y) - \rho(Y)v(X))
\end{aligned}$$

De ahí que α es una representación afín si y sólo si $\rho[X,Y] = [\rho X, \rho Y]$, es decir, que ρ es una representación lineal usual y

$$v[X,Y] = \rho(X)v(Y) - \rho(Y)v(X)$$

Esta igualdad, a su vez, es equivalente a

$$\rho(X)\,v(Y) - \rho(Y)\,v(X) - v[X,Y] = 0$$

lo que significa que v es un cociclo para ρ. Por tanto, una representación afín consiste en un par formado por una representación lineal y por un cociclo de la representación.

Definición 3.19. *Dos representaciones afines $\alpha_1, \alpha_2 : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{af}(V)$ son equivalentes si existe un automorfismo de ψ de $\mathfrak{af}(V)$ tal que*

$$\alpha_1(X) = \psi(\alpha_2(X)).$$

Proposición 3.20. *Dos representaciones afines $\alpha_1, \alpha_2 : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{af}(V)$ son equivalentes si y sólo si ρ_1 y ρ_2 lo son como representaciones lineales, es decir, si existe $P : V \longrightarrow V$ lineal invertible tal que para todo $X \in \mathfrak{g}$, $\rho_1(X)\,P = P^{-1}\rho_2(X)$ y tal que v_1 y Pv_2 sean cohomólogos.*

Demostración. Los automorfismos de $\mathfrak{af}(V)$ son de la forma

$$\psi(A,v) = \left(PAP^{-1}, Pv - PAP^{-1}a\right)$$

con $P : V \longrightarrow V$ lineal inversible y $a \in V$. Por tanto, escribiendo las representaciones en coordenadas como $\alpha_i = (\rho_i, v_i)$, las representaciones son equivalentes si y sólo si, existen P y a tal que para todo $X \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}
\rho_1(X) &= P\rho_2(X)\,P^{-1} \\
v_1(X) &= Pv_2(X) - P\rho_2(X)\,P^{-1}a
\end{aligned}$$

La primera igualdad ocurre si y sólo si ρ_1 y ρ_2 son equivalentes como representaciones lineales. En cuanto la segunda igualdad, observe primero que Pv_2, al igual que v_1, es también un cociclo para ρ_1, pues

$$\begin{aligned}
d_1 Pv_2(X,Y) &= \rho_1(X)\,Pv_2(Y) - \rho_1(Y)\,Pv_2(X) - Pv_2[X,Y] \\
&= P\rho_2(X)\,v_2(Y) - P\rho_2(Y)\,v_2(X) - Pv_2[X,Y] \\
&= P\left(\rho_2(X)\,v_2(Y) - \rho_2(Y)\,v_2(X) - v_2[X,Y]\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

entonces, de la segunda igualdad se tiene v_1 y Pv_2 son cociclos cohomólogos para ρ_1, ya que último termino, $P\rho_2(X)\,P^{-1}a = \rho_1(X)\,a = d_0 a(X)$ es una cofrontera. $\square$

Esta proposición permite distinguir las representaciones afines a través de la primera cohomología de las representaciones lineales.

En el caso en que $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, dos cociclos v_1 y v_2 definen representaciones equivalentes si y sólo si, existe $P : V \longrightarrow V$ con $\rho(X) = P\rho(X)P^{-1}$ tal que v_1 y Pv_2 sean cohomólogos. En particular, si $\mathcal{H}^1 = 0$, entonces todas las representaciones afines con parte lineal ρ son equivalentes entre sí y equivalentes a ρ, que es corresponde al cociclo nulo.

Para analizar, en general, al grupo de transformaciones P que conmutan con la imagen de ρ y hallar sus órbitas en el espacio proyectivo de $\mathcal{H}^1(\rho)$, sea $GL(V)$ el conjunto de las transformaciones lineales invertibles $P : V \longrightarrow V$ y denote por

$$Z(\rho) = \{P \in GL(V) : \forall X \in \mathfrak{g},\ P\rho(X)P^{-1} = \rho(X)\}$$

el centralizador de $\rho(\mathfrak{g})$ en $GL(V)$. Algunas de sus propiedades serán descritas en la siguiente proposición:

Proposición 3.21. *Sea ρ una representación de $\mathfrak{g}$ en V y $Z(\rho)$, el conjunto de las transformaciones que conmutan con la imagen de ρ. Entonces,*

1. *$Z(\rho)$ es un grupo.*
2. *$Z(\rho)$ contiene al subgrupo de las transformaciones escalares $P = x\,\mathrm{id},\ x \in \mathbb{K},\ x \neq 0$.*
3. *Si $\alpha \in \mathcal{A}^n$ y $P \in Z(\rho)$, entonces $P\alpha$ es un nuevo elemento de $\mathcal{A}^n$ y esa expresión define acciones de $Z(\rho)$ en cada uno de los espacios $\mathcal{A}^n$.*
4. *Tanto $\mathcal{C}^n = \ker d_n$ como $\mathcal{F}^n = \operatorname{im} d_{n-1}$ son invariantes por cada $P \in Z(\rho)$. Por tanto, cada $P \in Z(\rho)$ induce una aplicación lineal en $\mathcal{H}^n(\rho)$, el cual define una acción de $Z(\rho)$ en $\mathcal{H}^n(\rho)$.*

Demostración. 1. Para probar que $Z(\rho)$ es un grupo es suficiente mostrar que si $P, Q \in Z(\rho)$, entonces PQ y P^{-1} también están en $Z(\rho)$. Primero se tiene que

$$\begin{aligned}(PQ)\rho(X)(PQ)^{-1} &= (PQ)\rho(X)\left(Q^{-1}P^{-1}\right) = P\left(Q\rho(X)Q^{-1}\right)P^{-1} \\ &= P\rho(X)P^{-1} = \rho(X)\end{aligned}$$

De manera similar, $P^{-1}\rho(X)\left(P^{-1}\right)^{-1} = \rho(X)$.

2. Sean $P = x\,\mathrm{id},\ x \in \mathbb{K},\ x \neq 0$ con $P^{-1} = x^{-1}\,\mathrm{id}$ y $v \in V$, entonces

$$P\rho\left(X\right)P^{-1}v = x\,\mathrm{id}\,\rho\left(X\right)x^{-1}\,\mathrm{id}\,v = \rho\left(X\right)v \quad \text{para todo } X \in \mathfrak{g}$$

   Por tanto, $P = x\,\mathrm{id}, \in Z\left(\rho\right)$.

3. Sean $\alpha \in \mathcal{A}^n,\ X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{g}, P \in Z\left(\rho\right)$ y σ una permutación de los índices $i = 1, \ldots n$, entonces

$$\begin{aligned} P\alpha\left(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}\right) &= P\left(\alpha\left(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}\right)\right) \\ &= P\left(\left(-1\right)^{|\sigma|}\alpha\left(X_1, \ldots, X_n\right)\right) \\ &= \left(-1\right)^{|\sigma|}P\alpha\left(X_1, \ldots, X_n\right) \end{aligned}$$

   De donde $P\alpha \in \mathcal{A}^n$.

   Ahora, sea $\varphi : Z\left(\rho\right) \times \mathcal{A}^n \longrightarrow \mathcal{A}^n$, dada por $(P, \alpha) \longmapsto P\alpha$, que define una acción de $Z\left(\rho\right)$ en $\mathcal{A}^n$, pues, para todo $\alpha \in \mathcal{A}^n$,

   - $(\mathrm{id}, \alpha) = \alpha$
   - $(Q, P\alpha) = Q\left(P\alpha\right) = \left(QP\right)\alpha = \left(QP, \alpha\right)$ para todo $P, Q \in Z\left(\rho\right)$.

4. Sean $P \in Z\left(\rho\right)$ y $\alpha \in \mathcal{A}^n$, usando la conmutatividad $P\rho\left(X\right) = \rho\left(X\right)P$, se tiene que,

$$\begin{aligned} d_nP\alpha\left(X_1, \ldots, X_{n+1}\right) &= \sum_{i=1}^{n+1}\left(-1\right)^{i+1}\rho\left(X_i\right)P\alpha\left(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_{n+1}\right) \\ &\quad + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}P\alpha\left(\left[X_i, X_j\right], X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_{n+1}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1}\left(-1\right)^{i+1}P\rho\left(X_i\right)\alpha\left(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_{n+1}\right) \\ &\quad + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}P\alpha\left(\left[X_i, X_j\right], X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_{n+1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= P\sum_{i=1}^{n+1}\left(-1\right)^{i+1}\rho\left(X_i\right)\alpha\left(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_{n+1}\right) \\ &\quad + P\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\alpha\left(\left[X_i, X_j\right], X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_{n+1}\right) \\ &= Pd_n\alpha\left(X_1, \ldots, X_{n+1}\right) \end{aligned}$$

lo que muestra $d_n P\alpha = P d_n \alpha$. Esta igualdad muestra que $\mathcal{C}^n$ y $\mathcal{F}^n$ son invariantes por cada $P \in Z(\rho)$. Por tanto cada $P \in Z(\rho)$ induce una aplicación lineal en $\mathcal{H}^n(\rho)$, lo que define la acción $\phi : Z(\rho) \times \mathcal{H}^n(\rho) \longrightarrow \mathcal{H}^n(\rho)$ dada por $(P, \overline{v}) \longmapsto \overline{Pv}$. La buena definición de ϕ esta garantizada por el hecho de que $\mathcal{C}^n$ y $\mathcal{F}^n$ son invariantes por cada $P \in Z(\rho)$.

□

Proposición 3.22. *Denote por $\mathbb{P}\mathcal{H}^1(\rho)$ al espacio proyectivo de $\mathcal{H}^1(\rho)$. Entonces, el conjunto de las clases de equivalencia de las representaciones afines cuya parte lineal es ρ está en biyección con el conjunto de órbitas de $Z(\rho)$ en $\mathbb{P}\mathcal{H}^1(\rho)$ junto con $\{0\}$, que corresponde a la propia ρ.*

Demostración. Sea $\mathbb{P}\mathcal{H}^1(\rho)$ el espacio proyectivo de $\mathcal{H}^1(\rho)$. Los elementos de $\mathbb{P}\mathcal{H}^1(\rho)$, son los conjuntos de vectores,

$$r = [\overline{v}] = \{\lambda\overline{v} : \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0\} \quad \overline{v} \in \mathcal{H}^1(\rho) - \{0\}.$$

Si $r = [\overline{v}]$ se dice $\overline{v}$ genera a r. Sea $f : \mathbb{P}\mathcal{H}^1(\rho) \longrightarrow \mathfrak{af}(\rho)$ que a cada $r \in \mathbb{P}\mathcal{H}^1(\rho)$ le asigna la representación afín definida por el cociclo que representa al generador de r. La aplicación f está bien definida pues, si r_1 es equivalente a r_2, entonces existe $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$ tal que $\overline{v}_1 = \lambda\overline{v}_2$, donde $\overline{v}_1$ y $\overline{v}_2$ generan a r_1 y r_2 respectivamente, lo que significa que los representantes de $\overline{v}_1$ y $\overline{v}_2$ son cohomólogos, de donde determinan representaciones afines equivalentes, es decir $f(r_1)$ es equivalente a $f(r_2)$.
Ahora, observe que la aplicación $f : \mathbb{P}\mathcal{H}^1(\rho) \longrightarrow \mathfrak{af}(\rho)$ satisface $f(r_1) = f(r_2)$ si y sólo si, existe $P \in Z(\rho)$ tal que $r_2 = P(r_1)$. En efecto, sea la acción

$$\begin{array}{rccc} \theta : & Z(\rho) \times \mathbb{P}\mathcal{H}^1(\rho) & \longrightarrow & \mathbb{P}\mathcal{H}^1(\rho) \\ & (P, r) & \longmapsto & Pr \end{array}$$

Dada la acción θ, considere la relación de equivalencia

$$r_1 \sim r_2 \Leftrightarrow \exists P \in Z(\rho) \text{ tal que } r_1 = Pr_2$$

Entonces la órbita de $Z(\rho)$ sobre $\mathbb{P}\mathcal{H}^1(\rho)$ consiste en todas las clases de equivalencia de la relación anterior.
A partir de esa observación se tiene que si existe $P \in Z(\rho)$ tal que $r_1 = Pr_2$, entonces existe

$\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$ tal que $\overline{v}_1 = \lambda \overline{Pv}_2$ donde $\overline{v}_1$ y $\overline{v}_2$ generan a r_1 y r_2 respectivamente, de ahí que los cociclos no nulos $\overline{v}_1$ y $\overline{v}_2$ definen representaciones afines equivalentes, es decir $f(r_1) = f(r_2)$. Recíprocamente, si $f(r_1) = f(r_2)$, entonces, existe $P \in Z(\rho)$ tal que $\overline{v}_1 = \overline{Pv}_2$, de donde $r_1 = Pr_2$.

En resumen, el conjunto de las clases de equivalencia de las representaciones afines con parte lineal ρ esta en biyección con el conjunto de órbitas de $Z(\rho)$ sobre $\mathbb{P}\mathcal{H}^1(\rho)$, que es lo que se quería probar. $\square$

Capítulo 4

Teoremas de Weyl y Levi

En este capítulo, se demostrarán dos teoremas fundamentales de la teoría, que son los Teoremas de descomposición de Weyl y Levi. El teorema de Weyl asegura que toda representación de dimensión finita de una álgebra de Lie semisimple es completamente reducible. El teorema de descomposición de Levi asegura que una álgebra de Lie cualquiera es el producto semidirecto de una subálgebra semisimple por el radical soluble. El contexto en el que deben ubicarse estos teoremas es el de la teoría de la cohomología de álgebras de Lie donde se obtienen como consecuencia de los lemas de Whitehead sobre la cohomología de álgebras semisimples.

4.1. Lemas de Whitehead

Los lemas mencionados en el título de esta sección, están descritos en el siguiente teorema. El plural es para cada una de las cohomologias $\mathcal{H}^1$ y $\mathcal{H}^2$.

Teorema 4.1. *Sean $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie semisimple de dimensión finita y ρ una representación de $\mathfrak{g}$ en V también de dimensión finita. Entonces $\mathcal{H}^1(\rho)$ y $\mathcal{H}^2(\rho)$ se anulan.*

Demostración. La demostración de este teorema será hecha en dos partes; una para cada uno de los espacios de cohomología.
Para $\mathcal{H}^1$, sea $\tilde{\rho}$ el producto tensorial de ρ con la representación coadjunta de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}^*$ que, a su vez, define una representación de $\mathfrak{g}$ en $\mathcal{A}^1\,(=\mathcal{L}(\mathfrak{g},V))$ vista como el espacio $V\otimes\mathfrak{g}^*$. Sea $f\in\mathcal{A}^1$

asociada a $v \otimes w$ dada por $f(u) = w(u)\, v$, entonces,

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(X)\, f_{v,w}(u) &= f_{\rho(X)v,w}(u) + f_{v,\mathrm{ad}^*(X)w}(u)\\ &= w(u)\,\rho(X)\, v + (\mathrm{ad}^*(X)\, w)(u)\, v\\ &= w(u)\,\rho(X)\, v - w(\mathrm{ad}(X)\, u)\, v\\ &= \rho(X)\, f_{v,w}(u) - f_{v,w}\,\mathrm{ad}(X)(u)\end{aligned}$$

Asi, para $f \in \mathcal{A}^1$, y $X \in \mathfrak{g}$, $\tilde{\rho}(X)\, f$ es dada por

$$(\tilde{\rho}(X))\, f(Y) = \rho(X)\, f(Y) - f[X,Y]$$

El objetivo es mostrar que $\mathcal{C}^1 = \mathcal{F}^1$, siendo que estos dos espacios son subespacios de $\mathcal{A}^1$, es decir, el espacio de representación de $\tilde{\rho}$. Si $f \in \mathcal{C}^1$, $d_1 f(X,Y) = \rho(X)\, f(Y) - \rho(Y)\, f(X) - f[X,Y] = 0$, entonces $\rho(X)\, f(Y) - f[X,Y] = \rho(Y)\, f(X)$, esto muestra que $\tilde{\rho}(X)\, f(Y) = \rho(Y)\, f(X) = d_0(f(X))\, Y$, y por tanto, $\tilde{\rho}(X)\, f$ es una cofrontera. Eso significa que $\tilde{\rho}(X)\,\mathcal{C}^1 \subset \mathcal{F}^1$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. Como $\mathcal{F}^1 \subset \mathcal{C}^1$, eso muestra que $\mathcal{C}^1$ es invariante por $\tilde{\rho}$. Ahora, denote por $\overline{\rho}$ la restricción de $\tilde{\rho}$ a $\mathcal{C}^1$. El hecho de que $\tilde{\rho}(X)\,\mathcal{C}^1 \subset \mathcal{F}^1$, para todo $X \in \mathfrak{g}$, muestra que

$$\sum_{X \in \mathfrak{g}} \mathrm{im}\,\overline{\rho}(X) \subset \mathcal{F}^1.$$

Por otro lado, se tiene que para cualquier representación de una álgebra semisimple, el espacio de representación es suma de la intersección de los núcleos de los elementos de $\mathfrak{g}$ con la suma de sus imágenes [1]. En particular para $\overline{\rho}$,

$$\mathcal{C}^1 = \bigcap_{X \in \mathfrak{g}} \ker \overline{\rho}(X) + \sum_{X \in \mathfrak{g}} \mathrm{im}\,\overline{\rho}(X)$$

Note que $\bigcap_{X \in \mathfrak{g}} \ker \overline{\rho}(X) = 0$. En efecto, sea $f \in \mathcal{C}^1$ tal que $\tilde{\rho}(X)\, f(Y) = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Entonces, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$, $\rho(Y)\, f(X) = 0$, lo que proporciona, al revertir las posiciones de X e Y, que $f[X,Y] = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$, es decir, f se anula en la álgebra derivada $\mathfrak{g}'$ de $\mathfrak{g}$. Dado que $\mathfrak{g}$ es semisimple, $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$ lo que muestra que $f = 0$. Además, como el segundo término de la suma está contenido en $\mathcal{F}^1$, se concluye que $\mathcal{H}^1 = 0$.

[1] [8] San Martin, L. A. Álgebras de Lie. Unicamp, 2010. Pág. 93.

Antes de pasar al segundo lema, se debe observar que el anulamiento de $\mathcal{H}^1$ será usado para demostrar el teorema de descomposición de Weyl y una consecuencia inmediata de dicho teorema es que el espacio V de cualquier representación ρ de $\mathfrak{g}$ se descompone en suma directa como:

$$V = \bigcap_{X\in\mathfrak{g}} \ker \rho\left(X\right) \oplus \sum_{X\in\mathfrak{g}} \operatorname{im} \rho\left(X\right)$$

Este hecho será demostrado en la siguiente sección. Sin embargo, será necesaria para la demostración del anulamiento de $\mathcal{H}^2$.

Considerando ahora $\mathcal{H}^2$, sea, de la misma forma, $\tilde{\rho} = \rho \otimes \rho'$, la representación de $\mathfrak{g}$ en $\mathcal{A}^2$ visto como el espacio $V \otimes \wedge^2\mathfrak{g}^*$, donde $\rho' = \operatorname{ad}^* \otimes \operatorname{ad}^*$ es el producto tensorial de la representación coadjunta de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}^*$. Para describir de manera explícita a $\tilde{\rho}$, tome $f \in \mathcal{A}^2$ asociada a $v \otimes w$ con $v \in V$ y $w \in \wedge^2\mathfrak{g}^* \subset \otimes^2\mathfrak{g}^*$ dada por $f\left(Y, Z\right) = w\left(Y, Z\right) v$, entonces,

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}\left(X\right) f_{v,w}\left(Y, Z\right) &= f_{\rho(X)v,w}\left(Y, Z\right) + f_{v,\rho'(X)w}\left(Y, Z\right)\\
&= w\left(Y, Z\right) \rho\left(X\right) v + \left(\rho'\left(X\right) w\right)\left(Y, Z\right) v\\
&= w\left(Y, Z\right) \rho\left(X\right) v - w\left(\operatorname{ad}\left(X\right) Y, Z\right) v - w\left(Y, \operatorname{ad}\left(X\right) Z\right) v\\
&= \rho\left(X\right) f_{v,w}\left(Y, Z\right) - f_{v,w}\left(\operatorname{ad}\left(X\right) Y, Z\right) - f_{v,w}\left(Y, \operatorname{ad}\left(X\right) Z\right)
\end{aligned}$$

Por tanto, $\tilde{\rho}$ es dada por

$$\left(\tilde{\rho}\left(X\right) f\right)\left(Y, Z\right) = \rho\left(X\right) f\left(Y, Z\right) - f\left(\left[X, Y\right], Z\right) - f\left(Y, \left[X, Z\right]\right)$$

Como en el caso de la primera cohomología, $\tilde{\rho}\left(X\right) f \in \mathcal{F}^2$ si f es un cociclo. En efecto, sea $f \in \mathcal{C}^2$,

$$\begin{aligned}
d_2 f\left(X, Y, Z\right) = \rho\left(X\right) f\left(Y, Z\right) - \rho\left(Y\right) f\left(X, Z\right) + \rho\left(Z\right) f\left(X, Y\right) - f\left(\left[X, Y\right], Z\right)\\
+ f\left(\left[X, Z\right], Y\right) - f\left(\left[Y, Z\right], X\right) = 0
\end{aligned}$$

Como

$$\tilde{\rho}\left(X\right) f\left(Y, Z\right) = \rho\left(X\right) f\left(Y, Z\right) - f\left(\left[X, Y\right], Z\right) - f\left(Y, \left[X, Z\right]\right)$$

Se tiene,

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}\left(X\right) f\left(Y, Z\right) &= \rho\left(Y\right) f\left(X, Z\right) - \rho\left(Z\right) f\left(X, Y\right) - f\left(X, \left[Y, Z\right]\right)\\
&= d_1 f_X\left(Y, Z\right)
\end{aligned}$$

donde $f_X(Y) = f(X,Y)$. Por tanto, $\tilde{\rho}(X)\mathcal{C}^2 \subset \mathcal{F}^2$ lo que muestra, en particular que, $\mathcal{C}^2$ es invariante por $\tilde{\rho}$. Denotando por $\overline{\rho}$ la restricción de $\tilde{\rho}$ a $\mathcal{C}^2$, se tiene también que

$$\sum_{X\in\mathfrak{g}} \operatorname{im}\overline{\rho}(X) \subset \mathcal{F}^2$$

Por tanto, para concluir que $\mathcal{C}^2 = \mathcal{F}^2$ es suficiente, de la misma manera que para la primera cohomología, mostrar que $\cap_{X\in\mathfrak{g}} \ker\overline{\rho}(X) \subset \mathcal{F}^2$ pues

$$\mathcal{C}^2 = \bigcap_{X\in\mathfrak{g}} \ker\overline{\rho}(X) \oplus \sum_{X\in\mathfrak{g}} \operatorname{im}\overline{\rho}(X)$$

Sea entonces $f \in \mathcal{C}^2$ tal que para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, $\tilde{\rho}(X) f(Y,Z) = 0$. Lo que se desea mostrar es que $f \in \mathcal{F}^2$, es decir, $f = d_1 g$ para algún $g \in \mathcal{A}^1$, para eso será usada la primera parte del teorema. Para $X \in \mathfrak{g}$, sea $f_X(Y) = f(X,Y)$, que evidentemente pertenece a $\mathcal{A}^1$.
Se tiene, además, que $f_X \in \mathcal{C}^1$. En efecto,

$$\begin{aligned} d_2 f(X,Y,Z) &= \rho(X) f(Y,Z) - \rho(Y) f(X,Z) + \rho(Z) f(X,Y) - f([X,Y],Z) \\ &\quad + f([X,Z],Y) - f([Y,Z],X) \\ &= \overline{\rho}(X) f(Y,Z) - d_1 f_X(Y,Z) \end{aligned}$$

y, como f es un cociclo, $d_1 f_X = 0$. Como $\mathcal{H}^1 = 0$ por la primera parte, $f_X \in \mathcal{F}^1$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. Por tanto, dado $X \in \mathfrak{g}$, existe $v(X) \in V$ tal que $f_X = d_0(v(X))$, es decir,

$$f(X,Y) = \rho(Y) v(X) \quad \text{para todo } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

La idea ahora es mostrar que

a) Se puede escoger $v(X)$ de tal forma que $X \longmapsto v(X)$ es lineal, es decir, $v \in \mathcal{A}^1$ y

b) v satisface la igualdad $\rho(X) v(Y) = v[X,Y]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Para mostrar estas afirmaciones sobre v, tome todas las permutaciones cíclicas de $\overline{\rho}(X) f(Y,Z)$, entonces,

$$0 = \overline{\rho}(X) f(Y,Z) = \rho(X) f(Y,Z) - f([X,Y],Z) - f(Y,[X,Z])$$

$$0 = \overline{\rho}(Z) f(X,Y) = \rho(Z) f(X,Y) - f([Z,X],Y) - f(X,[Z,Y])$$

$$0 = \overline{\rho}\,(Y)\, f\,(Z, X) = \rho\,(Y)\, f\,(Z, X) - f\,([Y, Z]\,, X) - f\,(Z, [Y, X])$$

Sumando esas tres igualdades y tomando en cuenta que $d_2 f = 0$, se tiene,

$$-f\,([X, Y]\,, Z) - f\,(Y, [X, Z]) = -f\,(X, [Y, Z])$$

Por otro lado,

$$(\tilde{\rho}\,(X)\, f)\,(Y, Z) = \rho\,(X)\, f\,(Y, Z) - f\,([X, Y]\,, Z) - f\,(Y, [X, Z]) = 0$$

De donde,

$$\rho\,(X)\, f\,(Y, Z) = f\,(X, [Y, Z]) \tag{4.1}$$

Con esta igualdad es posible mostrar las propiedades de v enunciadas anteriormente. Para eso, la primera observación que se hace es que, como $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$, todo elemento de $\mathfrak{g}'$ puede ser escrito como combinación lineal de corchetes y, por tanto, f asume valores en

$$V_I = \sum_{X \in \mathfrak{g}} \operatorname{im} \rho\,(X)$$

Como este subespacio es invariante por ρ, es posible definir una representación $\gamma : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}\,(V_I)$, que es la restricción de ρ a V_I. Ya que f asume valores en este subespacio, ella puede ser vista como una cocadena para la representación γ. Esa cocadena es, en realidad, un cociclo, como puede ser visto considerando $d_1 f$ como una aplicación a valores en V_I, es decir,

$$\begin{aligned} d_2 f\,(X, Y, Z) = \gamma\,(X)\, f\,(Y, Z) - \gamma\,(Y)\, f\,(X, Z) + \gamma\,(Z)\, f\,(X, Y) - f\,([X, Y]\,, Z) \\ + f\,([X, Z]\,, Y) - f\,([Y, Z]\,, X) = d_1 f_X\,(Y, Z) = 0 \end{aligned}$$

Así, de la misma forma anterior, el anulamiento de la primera cohomología garantiza que $v\,(X)$ puede ser escogido en V_I.

Ahora, suponga que existen $v_1, v_2 \in V_I$ tales que $f\,(X, Y) = \rho\,(Y)\, v_1\,(X) = \rho\,(Y)\, v_2\,(X)$ para todo $Y \in \mathfrak{g}$, entonces $v_1\,(X) - v_2\,(X) \in V_N = \bigcap_{X \in \mathfrak{g}} \ker \rho\,(X)$ y como $V_I \cap V_N = 0$,$v_1 = v_2$ eso muestra que $v\,(X)$ puede ser escogido de manera única en V_I. De esa unicidad se tiene la linealidad de $X \longmapsto v\,(X) \in V_I$, pues $\lambda f\,(X, Y) + f\,(Z, Y) = f\,(\lambda X + Z, Y)$, entonces $\lambda\rho\,(Y)\, v\,(X) + \rho\,(Y)\, v\,(Z) = \rho\,(Y)\, v\,(\lambda X + Z)$, luego $\lambda v\,(X) + v\,(Z) = v\,(\lambda X + Z)$, mostrando así la afirmación (a).

Uniendo (4.1) con el hecho de que $f_X = d_0\left(v\left(X\right)\right)$, se obtiene,

$$\begin{aligned}\rho\left(X\right)\rho\left(Y\right)v\left(Z\right) &= \rho\left(X\right)f\left(Z,Y\right)\\ &= f\left(X,\left[Z,Y\right]\right)\\ &= f\left(\left[Y,Z\right],X\right)\\ &= \rho\left(X\right)\left(v\left[Y,Z\right]\right)\end{aligned}$$

Eso implica que

$$\rho\left(X\right)\left(\rho\left(Y\right)v\left(Z\right)-v\left[Y,Z\right]\right)=0 \quad \text{para todo } X,Y,Z\in\mathfrak{g}.$$

Por tanto, $\rho\left(Y\right)v\left(Z\right)-v\left[Y,Z\right]\in V_N$ para todo $Y,Z\in\mathfrak{g}$ y $\rho\left(Y\right)v\left(Z\right),v\left[Y,Z\right]\in V_I$. Usando nuevamente el hecho de que $V_I\cap V_N=0$, se tiene que $\rho\left(Y\right)v\left(Z\right)=v\left[Y,Z\right]$ para todo $Y,Z\in\mathfrak{g}$, lo que demuestra (b).

Las dos afirmaciones anteriores implican, por un lado que

$$\begin{aligned}d_1v\left(X,Y\right) &= \rho\left(X\right)v\left(Y\right)-\rho\left(Y\right)v\left(X\right)-v\left[X,Y\right]\\ &= v\left[X,Y\right]\end{aligned}$$

por (b). Por otro lado,

$$\begin{aligned}f\left(X,Y\right) &= \rho\left(Y\right)v\left(X\right)\\ &= -v\left[X,Y\right]=-d_1v\left(X,Y\right)\end{aligned}$$

Por tanto, $f=-d_1v$, es decir $f\in\mathcal{F}^2$. De donde $\mathcal{H}^2=0$. $\square$

4.2. Teoremas de Weyl y Levi

4.2.1. Teorema de descomposición de Weyl

Teorema 4.2. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie semisimple de dimensión finita y ρ una representación de dimensión finita $\mathfrak{g}$ en V, entonces ρ es completamente reducible, es decir, V se descompone como*

$$V=V_1\oplus\cdots\oplus V_k$$

con cada V_i invariante e irreducible.

Demostración. Sea $W \subset V$ subespacio invariante por ρ. Dado que $\mathfrak{g}$ es semisimple, la primera cohomología de una representación cualquiera se anula, por lo que W admite subespacio invariante complementar. De donde se concluye que ρ es completamente reducible. $\square$

Una consecuencia del teorema de descomposición de Weyl es el siguiente hecho que fue utilizado en la demostración del segundo lema de Whitehead.

Corolario 4.3. *Sea ρ una representación finita de la álgebra semisimple $\mathfrak{g}$ en V, entonces*

$$V = \bigcap_{X\in\mathfrak{g}} \ker\rho(X) \oplus \sum_{X\in\mathfrak{g}} \operatorname{im}\rho(X).$$

Demostración. Primero, suponga que ρ es irreducible y no nula, entonces V coincide con el segundo término del segundo miembro, pues la suma de imágenes de los elementos de $\mathfrak{g}$ es un subespacio invariante y no nulo.
Para el caso general, considere la descomposición de V garantizada por el teorema de Weyl, pues $\mathfrak{g}$ es semisimple.

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$$

con V_i invariante y $\rho|_{V_i}$ irreducible. Sea V^1 la suma de las componentes irreducibles de V cuya dimensión es 1 y V^2 la suma de las componentes irreducibles de V con dimensión mayor que 1. Ahora, observe que si V_i es una componente de V^2, entonces $\rho|_{V_i} \neq 0$, pues de lo contrario $\rho|_{V_i}$ no seria irreducible, de donde

$$V_i = \sum_{X\in\mathfrak{g}} \operatorname{im}\rho|_{V_i}(X) \quad \text{y} \quad \bigcap_{X\in\mathfrak{g}} \ker\rho|_{V_i}(X) = 0$$

lo que muestra que

$$V^2 = \sum_{X\in\mathfrak{g}} \operatorname{im}\rho(X)$$

Por otro lado, $\bigcap_{X\in\mathfrak{g}} \ker\rho(X) = \{v \in V : \rho(X)v = 0 \text{ para todo } X \in \mathfrak{g}\}$ es la suma de las componentes irreducibles de dimensión 1. En efecto, sean I, J los conjuntos de indices de las componentes irreducibles de V^1 y V^2 respectivamente. Entonces, si $v \in V^1, v = \sum_{k\in I} v_k$ con $v_k \in V_k$, luego $\rho(X)(v) = \sum_{k\in I}\rho(X)(v_k) = \sum_{k\in I}\rho|_{V_k}(X)(v_k) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, ya que $\mathfrak{g}$ es semisimple y la única representación de dimensión 1 es la idénticamente nula [2], entonces $v \in$

[2] [8] San Martin, L. A. Álgebras de Lie. Unicamp, 2010. Pág. 89.

$\bigcap_{X\in\mathfrak{g}} \ker\rho(X)$. Recíprocamente, si $v \in \bigcap_{X\in\mathfrak{g}} \ker\rho(X)$, $\rho(X)(v) = \rho(X)(v^1) + \rho(X)(v^2) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, con $v^1 \in V^1$ y $v^2 \in V^2$. Luego $\rho(X)(v^2) = \sum_{j\in J}\rho(X)(v_j) = 0$, para todo $X \in \mathfrak{g}$, con $v_j \in V_j$, como V_j es invariante por ρ, para todo $j \in J$, se tiene que $\rho(X)v_j = 0$, para todo $X \in \mathfrak{g}$ y $j \in J$, entonces $v^2 = 0$, eso muestra que $v \in V^1$. Por tanto, $\bigcap_{X\in\mathfrak{g}} \ker\rho(X) = V^1$. De donde se concluye que

$$V = V^1 \oplus V^2 = \bigcap_{X\in\mathfrak{g}} \ker\rho(X) \oplus \sum_{X\in\mathfrak{g}} \operatorname{im}\rho(X)$$

□

4.2.2. Teorema de descomposición de Levi

Teorema 4.4. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de dimensión finita y $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ su radical soluble, entonces existe una subálgebra $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$. Como $\mathfrak{s} \approx \mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{s}$ es semisimple.*

Demostración. En el caso en el que el radical $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ sea abeliana, la existencia del complementar isomorfo a $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ es consecuencia del anulamiento de la segunda cohomología de una representación de $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$, que, en este caso, es semisimple. En efecto, considere la proyección canónica $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$, que es un homomorfismo sobreyectivo de álgebras de Lie, entonces $\mathfrak{g}$ junto a π es una extensión de $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$. Dado que $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ es semisimple, $\mathcal{H}^2$ se anula para cualquier representación, entonces existe una subálgebra $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = \ker\pi \oplus \mathfrak{s} = \mathfrak{r}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$.

Para el caso general, se mostrará el procedimiento para reducir al caso en que el radical es abeliano. Para eso, observe que como la derivada $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})'$ de $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ es un ideal de $\mathfrak{g}$, el radical de $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})'$ es isomorfo a $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})'$. En efecto, sea $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})'$ la proyección canónica y tome $\mathfrak{r}\left(\mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})'\right)$, el radical soluble de $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})'$. Entonces $a = \pi^{-1}\left(\mathfrak{r}\left(\mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})'\right)\right)$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ que contiene a $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})'$ y $a/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})' \approx \mathfrak{r}\left(\mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})'\right)$, de ahí que a es soluble, pues $a/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})'$ y $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})'$ son solubles. Por tanto está contenido en $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$. Además, $\pi(\mathfrak{r}(\mathfrak{g})) \subset \mathfrak{r}\left(\mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})'\right)$, pues es un ideal soluble y, por tanto, $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) \subset a$. De donde se concluye que $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})' \approx \mathfrak{r}\left(\mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})'\right)$.

De esta observación se tiene que $\mathfrak{r}\left(\mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})'\right)$ es abeliano, entonces, los resultados anteriores se aplican a $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})'$ y de ahí que existe una subálgebra $\mathfrak{s}_0$ de $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})'$ tal que $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})' = \mathfrak{r}(\mathfrak{g})/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})' \oplus \mathfrak{s}_0$. Considere nuevamente la proyección canónica $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})'$ y tome $q = \pi^{-1}(\mathfrak{s}_0)$, que es una subálgebra de $\mathfrak{g}$ que contiene a $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})'$ y $q/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})'$ es isomorfo a $\mathfrak{s}_0$. Como

$\mathfrak{s}_0$ es semisimple y $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})'$ soluble, $0 = \mathfrak{r}\left(q/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})'\right) \approx \mathfrak{r}(q)/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})'$, entonces $\mathfrak{r}(q) = \mathfrak{r}(\mathfrak{g})'$. Ahora, existen dos posibilidades: si $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})'$ es abeliano , entonces q se descompone como $q = \mathfrak{r}(\mathfrak{g})' \oplus \mathfrak{s}$ con $\mathfrak{s} \approx q/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})'$ semisimple, de donde $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$. Si $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})'$ no es abeliano, tome $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})''$ que es un ideal de q y $\mathfrak{r}\left(q/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})''\right) \approx \mathfrak{r}(q)/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})''$ es abeliano, entonces existe $\mathfrak{s}'$ tal que $q/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})'' = \left(\mathfrak{r}(q)/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})''\right) \oplus \mathfrak{s}'$ y considere ahora $p = \pi^{-1}(\mathfrak{s}')$, que es una subálgebra que contiene a $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})''$ y $p/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})'' \approx \mathfrak{s}'$, lo que muestra que es semisimple y $\mathfrak{r}(p) = \mathfrak{r}(\mathfrak{g})''$. En el caso de que $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})''$ fuera abeliano, al igual que en el caso anterior, p se descompone como $p = \mathfrak{r}(\mathfrak{g})'' \oplus \mathfrak{s}''$, entonces $q = \mathfrak{r}(\mathfrak{g})' \oplus \mathfrak{s}''$, de donde $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}''$. En el caso de que $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})''$ no fuera abeliano, se repite el procedimiento sustituyendo la álgebra q por p. Como $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})^{(n)} = 0$ para algún n, el proceso termina en algún momento. $\square$

4.3. Álgebras reducibles

Definición 4.5. *Una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es llamada reducible si puede ser escrita como*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$$

donde $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ es el centro de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{s}$ es semisimple.

Proposición 4.6. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de dimensión finita y $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$ una descomposición de Levi de $\mathfrak{g}$, entonces*

$$\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}(\mathfrak{g})]$$

Demostración. Observe antes que la álgebra derivada de $\mathfrak{g}$ se escribe como

$$\mathfrak{g}' = [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}(\mathfrak{g})]$$

En efecto, sea $Z \in \mathfrak{g}',\ Z = \sum [X_i, Y_i]$ con $X_i, Y_i \in \mathfrak{g} = \mathfrak{r}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$, es decir, $X_i = A_i + B_i, Y_i = C_i + D_i$, donde $A_i, C_i \in \mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ y $B_i, D_i \in \mathfrak{s}$. Luego,

$$\begin{aligned} Z &= \sum [X_i, Y_i] = \sum [A_i + B_i, C_i + D_i] \\ &= \sum ([A_i, C_i] + [A_i, D_i] + [B_i, C_i] + [B_i, D_i]) \end{aligned}$$

de donde $\mathfrak{g}' \subset [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] + [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}(\mathfrak{g})]$. Dado que $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$ y $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}(\mathfrak{g})]$ están contenidos en $\mathfrak{g}'$, se tiene que $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] + [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}(\mathfrak{g})] \subset \mathfrak{g}'$. Esta suma es directa por el hecho de que $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}$ y $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}(\mathfrak{g})] \subset \mathfrak{r}(\mathfrak{g})$.

Ahora, si $X \in \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{r}(\mathfrak{g}) \subset [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}(\mathfrak{g})]$, entonces $X = Y + Z$ con $Y \in [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$ y $Z \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}(\mathfrak{g})]$, como $Y = X - Z \in [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}(\mathfrak{g})]$, se tiene que $Y = 0$ y de ahí que $X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}(\mathfrak{g})]$, mostrando que $\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{r}(\mathfrak{g}) \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}(\mathfrak{g})]$ y junto al hecho de que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}(\mathfrak{g})] \subset \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{r}(\mathfrak{g})$, se obtiene

$$\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}(\mathfrak{g})]$$

que es lo que se quería probar. □

Proposición 4.7. *Sea $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ una álgebra de Lie, entonces X es nilpotente para todo $X \in \mathfrak{n} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}(\mathfrak{g})]$.*

Demostración. Se puede suponer sin pérdida de generalidad que el cuerpo de escalares es algebraicamente cerrado. Asumiendo eso, denote por ρ la representación canónica de $\mathfrak{n}$ en V, ya que $\mathfrak{n}$ es nilpotente por estar contenido en $\mathfrak{rn}(\mathfrak{g})$, V se descompone en subespacios de pesos que son invariantes por ρ. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ los pesos de ρ y V_{λ_i} los correspondientes subespacios de pesos. Como $\rho(X) V_{\lambda_i} \subset V_{\lambda_i}$, $\mathfrak{n}$ se representa en cada uno de los subespacios V_{λ_i}, sea ρ_i tal representación. Por la forma en la que V_{λ_i} está definida, se tiene que $\rho_i(X) - \lambda_i(X)$ es nilpotente para todo $X \in \mathfrak{n}$, por tanto, $\operatorname{tr}(\rho_i(X) - \lambda_i(X)) = 0$, entonces,

$$\lambda_i(X) = \frac{\operatorname{tr}\rho_i(X)}{\dim V_{\lambda_i}} = 0$$

pues $X \in \mathfrak{g}'$. Por tanto, $\lambda_i(X) = 0$ lo que muestra que el único peso de la representación ρ es el peso nulo. Esto es, si $v \in V$, entonces, para todo $X \in \mathfrak{n}$, existe $n \geq 1$ tal que $X^n v = 0$. Por tanto, X es nilpotente para todo $X \in \mathfrak{n}$. □

Proposición 4.8. *Sea $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ una subálgebra de Lie y suponga que su representación canónica en V es irreducible, entonces $\mathfrak{g}$ es reducible.*

Demostración. Como la representación de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}(\mathfrak{g})]$ en V es nilpotente, el subespacio

$$W = \{v \in V : Xv = 0 \text{ para todo } X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}(\mathfrak{g})]\}$$

es diferente de cero. Además, invariante por la representación canónica, pues si $Y \in \mathfrak{g}, v \in W$ y $X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}(\mathfrak{g})]$, entonces,

$$XYv = YXv + [X, Y]v = 0$$

Como la representación canónica es irreducible y el subespacio $W \neq 0$ invariante, se concluye que $V = W$, lo que implica $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}(\mathfrak{g})] = 0$, entonces $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Ahora, por la descomposición de Levi $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{r}(\mathfrak{g})$, pero $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Así, $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, de ahí que $\mathfrak{g}$ es reducible. $\square$

Apéndice A

Álgebra

A.1. Álgebra tensorial

Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$. El producto tensorial entre V y W, $V \otimes W$. es el espacio vectorial (sobre $\mathbb{K}$) de las aplicaciones bilineales

$$f : V^* \times W^* \longrightarrow \mathbb{K}$$

donde V^* y W^* son duales de V y W. Dados $v \in V$ y $w \in W$, su producto tensorial $v \otimes w$ es el funcional lineal cuyo valor en $(\alpha, \beta) \in V^* \times W^*$ es dado por

$$(v \otimes w)(\alpha, \beta) = \alpha(v)\,\beta(w)$$

El conjunto

$$\{v \otimes w : v \in V w \in W$$

genera $V \otimes W$ y si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\{w_1, \ldots, w_m\}$ son bases de V y W respectivamente, entonces

$$\{v_i \otimes w_j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

es base de $V \otimes W$ y, por tanto, $\dim(V \otimes W) = \dim V \dim W$.

De manera más general, si $V_1, \ldots, V_s$ son espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, el producto tensorial

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_s$$

es el espacio de las aplicaciones multilineales definidas en $V_1^* \times \cdots \times V_s^*$ y valores en $\mathbb{K}$ y, de la misma forma, si $v_i \in V_i, i = 1, \ldots, s$, entonces su producto tensorial $v_1 \otimes \cdots \otimes v_s$ es el funcional dado por

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_s)(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) = \alpha_1(v_1) \cdots \alpha_s(v_s)$$

el conjunto de estos productos tensoriales genera el producto tensorial entre los espacios. Además, a partir de las bases $v_j^i, j = 1, \ldots, n_i$, $V_i, i = 1, \ldots, s$, se construye base de $V_1 \otimes \cdots \otimes V_s$ tomando todos los productos posibles de la forma

$$v_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes v_{i_s}^s$$

Asimismo, la dimensión del producto tensorial es el producto de las dimensiones de los factores. La propiedad principal del producto tensorial es que toda aplicación multilineal

$$f : V_1 \times \cdots \times V_s \longrightarrow W$$

donde W es un espacio vectorial cualquiera, se factoriza en una aplicación lineal del producto tensorial, es decir, existe una aplicación lineal $\tilde{f} : V_1 \otimes \cdots \otimes V_s \longrightarrow W$ tal que

$$\tilde{f} \circ \pi = f$$

donde π es la aplicación canónica

$$\pi(v_1, \ldots .v_s) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_s$$

Cuando los factores del producto tensorial son todos iguales a, por ejemplo V, el producto de s de sus copias es denotado por

$$\otimes^s V \quad \text{o} \quad V^{\otimes s}$$

donde $V^{\otimes 0}$ es el cuerpo de escalares y $V^{\otimes 1}$ es el propio espacio V.
Existen diversos isomorfismos naturales entre diferentes productos tensoriales y otros espacios vectoriales. Algunos de ellos son:

- El producto tensorial es asociativo

  $$(V \otimes W) \otimes U \approx V \otimes (W \otimes U) \approx V \otimes W \otimes U$$

  con los isomorfismos dados por (con la notación evidente)

  $$(v \otimes w) \otimes u \longleftrightarrow v \otimes (w \otimes u) \longleftrightarrow v \otimes w \otimes u$$

- El producto tensorial es conmutativo

$$V \otimes W \approx W \otimes V$$

con el isomorfismo dado por $v \otimes w \leftrightarrow w \otimes v$

- El espacio de las transformaciones lineales : $V \to W,\ \mathcal{L}(V, W)$ es isomorfo a $V^* \otimes W$. El isomorfismo es obtenido asociando a $\alpha \otimes w \in V^* \otimes W$ la transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ definida por

$$T(u) = \alpha(u)\, w$$

Fijando bases β y γ de V y W, ese isomorfismo es dado por un producto de matrices. En efecto, la matriz $[\alpha]_\beta$ es una matriz fila con $n = \dim V$ columnas y la matriz $[w]_\gamma$ es una matriz columna con $m = \dim W$ filas. Tiene sentido, por tanto, realizar el producto $[\alpha]_\beta [w]_\gamma$ que es una matriz $m \times n$. Esa es exactamente la matriz

$$[T]_\gamma^\beta = [\alpha]_\beta [w]_\gamma$$

Estos isomorfismos son llamados naturales, pues ellos dependen apenas de las definiciones de los espacios envueltos y no requieren ninguna elección adicional.
Dos subespacios de $\otimes^s V$ que deben ser destacados son los espacios de tensores simétricos y el de los tensores antisimétricos. Un tensor $f \in \otimes^s V$ es un funcional multilineal en el dual V^*. Entonces, f es un tensor simétrico si para toda permutación σ de los índices $i = 1, \ldots, s$ se tiene, para $\alpha_i \in V^*$,

$$f\left(\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(s)}\right) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$$

y es un tensor antisimétrico si

$$f\left(\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(s)}\right) = (-1)^{|\sigma|} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$$

donde $|\sigma|$ es la orden de la permutación, que es par o impar dependiendo si σ puede ser escrita como el producto de un número par o impar de transposiciones.
El espacio de los tensores simétricos de orden s es denotado por $\odot^s V$, en cuanto al de los antisimétricos de la misma orden por $\wedge^s V$. Esos espacios son obtenidos por las proyecciones

$$\mathcal{S} : \otimes^s V \longrightarrow \odot^s V \quad \text{y} \quad \mathcal{A} : \otimes^s V \longrightarrow \wedge^s V.$$

La proyección $\mathcal{S}$, denominada simetrizador de tensores, es dada por

$$\mathcal{S}f(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) = \frac{1}{s!}\sum_{\sigma} f\left(\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(s)}\right)$$

cuando el tensor f es visto como un funcional multilineal en V^*, o incluso por

$$\mathcal{S}(v_1 \otimes \cdots, \otimes v_s) = \frac{1}{s!}\sum_{\sigma} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(s)}.$$

En ambos casos, la suma se extiende a todas las permutaciones de s elementos.

El antisimetrizador $\mathcal{A}$ es definido por

$$\mathcal{A}f(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) = \frac{1}{s!}\sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} f\left(\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(s)}\right)$$

o por

$$\mathcal{A}(v_1 \otimes \cdots, \otimes v_s) = \frac{1}{s!}\sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(s)}.$$

En estas fórmulas el coeficiente normalizador es colocado para garantizar que tanto $\mathcal{S}$ como $\mathcal{A}$ sean proyecciones, es decir, que sus restricciones a los espacios de tensores simétricos y antisimétricos, respectivamente, sean la identidad. Sin estas normalizaciones, se obtiene incluso aplicaciones sobre los tensores simétricos y antisimétricos, pero no proyecciones.

Con esos operadores, se puede definir el producto simétrico,

$$v_1 \odot \cdots \odot v_s = \mathcal{S}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_s)$$

y el producto exterior (antisimétrico)

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_s = \mathcal{A}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_s)$$

Como en el caso del producto tensorial, $\odot^s V$ es generado por los productos simétricos y $\wedge^s V$ es generado por los productos exteriores. De esta forma, si $\{v_1, \ldots, v_s\}$ es una base de V, entonces el conjunto formado por

$$v_{i_1} \odot \cdots \odot v_{i_s} \qquad i_1 \leq \cdots \leq i_s$$

es base de $\odot^s V$, mientras que el conjunto formado por

$$v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_s} \qquad i_1 < \cdots < i_s$$

es base de $\wedge^s V$.Además,

$$\dim \wedge^s V = \binom{\dim V}{s}$$

.

A.2. Producto Exterior

Dada una aplicación r-lineal alternada $f : E \times \cdots \times E \longrightarrow F$, sea m la dimensión de E, cada elemento de la imagen $f(E \times \cdots \times E)$ es combinación lineal de vectores $w_J \in F$ cuyo número no excede $\binom{m}{r}$. Por tanto el subespacio de F generado por $f(E \times \cdots \times E)$ tiene una dimensión máxima igual a $\binom{m}{r}$. Esta dimensión máxima ocurre, naturalmente, cuando los vectores $w_J = f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_r})$ son linealmente independientes.

Proposición A.1. *Sea $\varphi : E \times \cdots \times E \longrightarrow F$ una aplicación r-lineal alternada. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Existe una base ordenada $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ en E tal que los vectores $\varphi(e_{j_1}, \ldots, e_{j_r})$ con $1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq m$ forman una base de F.*

2. *$\varphi(E \times \cdots \times E)$ genera F y $\dim F = \binom{m}{r}$.*

3. *Para todas las bases de E vale la condición 1).*

Demostración. Es claro que $1) \Rightarrow 2)$ y $3) \Rightarrow 1)$. Para probar que $2) \Rightarrow 3)$, basta observar que dada la base $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ en E, como φ es multilineal alternada, los vectores $\varphi(e_{j_1}, \ldots, e_{j_r})$ con $1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq m$ generan el mismo subespacio vectorial de F que el el conjunto $\varphi(E \times \cdots \times E)$, o sea, genera F. Como el número de esos vectores es $\leq \binom{m}{r} = \dim F$, se sigue que ellos forman una base de F. $\square$

Cuando una de las condiciones anteriores se cumple (y por tanto todas), se dice que φ es un *producto exterior* en E. Entonces F se escribe como $\wedge^r E$ y se dice que F es una *potencia exterior r-ésima* de E.

La aplicación φ será, en este caso, sustituida por la notación

$$\wedge : E \times \cdots \times E \longrightarrow \wedge^r E$$

también se escribirá $\varphi(v_1, \ldots, v_r) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$.

Como el producto exterior es una aplicación multilineal alternada, se tiene que $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r = 0$ si $v_i = v_j$ con $i \neq j$. Equivalentemente:

$$v_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(r)} = |\sigma| \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$$

para toda permutación $\sigma \in S_r$.

Ejemplos:

1. Sea $\phi : V^* \times V^* \longrightarrow \mathfrak{A}_2(V, \mathbb{K})$, definida por

$$\phi(f,g)(v_1,v_2) = f(v_1)\,g(v_2) - f(v_2)\,g(v_2)$$

es un producto exterior y $\phi(f,g) = f \wedge g$ es llamado producto exterior de f con g.

2. Considere el espacio vectorial E y la aplicación $r-$lineal $\pi : V \times \cdots \times V \longrightarrow V \otimes \cdots \otimes V$ que asocia a $v_1, \ldots, v_r \in V$ su producto tensorial, conforme a lo definido en la sección de álgebra tensorial. Componiendo π con el operador de antisimetrización, se obtiene la aplicación r-lineal

$$\varphi = \mathcal{A} \circ \pi : V \times \cdots \times V \longrightarrow \wedge^r V$$

Dadas $v_1, \ldots, v_r \in V$, se tiene

$$\varphi(v_1, \ldots, v_r) = \mathcal{A}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_s) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_s$$

Como ya fue mencionado en la sección anterior, φ es, en efecto, un producto tensorial.

Ahora se mostrará que las varias construcciones de productos exteriores que puedan ser imaginadas están ligadas unas con otras por isomorfismos canónicos, de modo que pueden ser consideradas como una sola. Se comenzará con una propiedad fundamental del producto exterior.

Proposición A.2. *Sea $\wedge : E \times \cdots \times E \longrightarrow \wedge^r E$ un producto exterior. Para toda aplicación multilineal alternada $f : E \times \cdots \times E \longrightarrow F$, existe una única aplicación lineal $\hat{f} : \wedge^n E \longrightarrow F$ tal que $\hat{f} \circ \wedge = f$, es decir,*

$$f(v_1, \ldots, v_r) = \hat{f}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r)$$

Demostración. Sea $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ una base ordenada en E. Dada $f : E \times \cdots \times E \longrightarrow V$ multilineal alternada, defina una aplicación lineal $\hat{f} : \wedge^r E \longrightarrow F$ por $\hat{f}(e_J) = f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_r})$ para todo $J = \{j_1 < \cdots < j_r\} \subset I_m$ donde $e_J = e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_r}$. Como f es alternada, $\hat{f} \circ \wedge$ coincide con f en todas las secuencias $(e_{j_1}, \ldots, e_{j_r})$ de elementos básicos. De ahí que $\hat{f} \circ \wedge = f$. Para la unicidad, suponga que existe otra aplicación lineal $\tilde{f} : \wedge^r E \longrightarrow F$ tal que $\tilde{f}(e_J) = f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_r})$ para todo $J = \{j_1 < \cdots < j_r\} \subset I_m$. Ya que una aplicación lineal $\wedge^r E \longrightarrow F$ está totalmente determinada por sus valores sobre la base de $\wedge^r E$, se tiene que $\hat{f} = \tilde{f}$. $\square$

Corolario A.3 (Unicidad del producto exterior)**.** *Sean* $\wedge : E \times \cdots \times E \longrightarrow \wedge^r E$ *y* $\cap : E \times \cdots \times E \longrightarrow \cap^r E$ *productos exteriores (de la misma orden* r*) en* E*. Existe un único isomorfismo* $\xi : \wedge^r E \longrightarrow \cap^r E$ *tal que* $\xi \circ \wedge = \cap$*. Es decir,* $\xi\left(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r\right) = v_1 \cap \cdots \cap v_r$ *para cualquier* $v_1, \ldots, v_r \in E$*.*

En efecto, considerando $\wedge$ como un producto exterior y $\cap$ apenas como una aplicación r-lineal alternada, por la Proposición A.2 existe una aplicación lineal $\xi : \wedge^r E \longrightarrow \cap^r E$ tal que $\xi \circ \wedge = \cap$. Cambiando los papeles de $\wedge$ y $\cap$, se obtiene una aplicación lineal $\eta : \cap^r E \longrightarrow \wedge^r E$ tal que $\eta \circ \cap = \wedge$. Sean $v_1, \ldots, v_r \in E$, se tiene entonces $\left(\xi \circ \eta\right)\left(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r\right) = \eta\left(v_1 \cap \cdots \cap v_r\right) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$, de modo que $\eta \circ \xi : \wedge^r E \longrightarrow \wedge^r E$ coincide con la aplicación identidad. Análogamente $\xi \circ \eta = \mathrm{id}$, de modo que ξ es un isomorfismo y $\eta = \xi^{-1}$.

Corolario A.4. *La correspondencia* $f \longmapsto \hat{f}$*, establecida en la Proposición A.2, establece un isomorfismo* $\mathfrak{A}_r\left(E, F\right) \approx \mathcal{L}\left(\wedge^r E, F\right)$*.*

Observación El hecho de que $\wedge^r E$ y $\cap^r E$ sean isomorfos no tiene mucha importancia, pues se sabe desde el comienzo que estos espacios vectoriales tienen la misma dimensión. Lo interesante del Corolario A.3 es la existencia de un (único) isomorfismo $\xi : \wedge^r E \longrightarrow \cap^r E$ tal que

$$\xi\left(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r\right) = v_1 \cap \cdots \cap v_r$$

esta relación expresa la unicidad del producto exterior.
En virtud de la unicidad, desde ahora en adelante se dirá " *el producto exterior*" en lugar de "*un producto exterior*".

A.3. Descomposición Primaria

Sean V un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. El polinomio característico de T es

$$p_T\left(\lambda\right) = \det\left(T - \lambda\right)$$

donde 1 denota la aplicación identidad. Ese polinomio es de la forma

$$p_T\left(\lambda\right) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0$$

donde n es la dimensión de V. El teorema de Cayley-Hamilton garantiza que p_T se anula en T, es decir,

$$p_T(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_1 T + a_0 1 = 0$$

Sea $p_T = p_1^{m_1} \cdots p_s^{m_s}$ la descomposición prima de p_T. En esta descomposición, cada p_i es un polinomio irreducible. Defina

$$V_i = \ker p_i^{m_i}(T) = \{v \in V : p_i^{m_i}(T)\, v = 0\}$$

Los polinomios $q_i = p_T/p_i$ son primos entre sí y, por tanto, existen polinomios $r_1, \ldots, r_s$ tal que

$$1 = r_1 q_1 + \cdots + r_s q_s$$

Aplicando esta igualdad a T, se obtiene una descomposición de la aplicación identidad en polinomios en T. A partir de esa descomposición se puede mostrar que V se descompone en suma directa como

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s.$$

Esa es la descomposición primaria de V en relación a T. los elementos de esa descomposición son invariantes por T y el polinomio minimal de la restricción $T|_{V_i}$ de T a V_i es $p_i^{m_i}$.

En el caso de que el cuerpo de escalares fuera algebraicamente cerrado, los polinomios irreducibles son de la forma $p_i = \lambda - a_i$. De esta forma

$$V_i = \{v \in V : (T - a_i 1)^{m_i}\, v = 0\}$$

a_i es un autovalor de T y V_i contiene el autoespacio asociado a a_i.

A.4. Permutaciones

Una permutación de un conjunto X es una biyección $\sigma : X \longrightarrow X$, por tanto cada permutación admite una inversa $\sigma^{-1} : X \longrightarrow X$, definida por la condición

$$\sigma^{-1}(y) = x \Leftrightarrow \sigma(x) = y.$$

se tiene que $\sigma^{-1} \circ \sigma = \sigma \circ \sigma^{-1} = \mathrm{id}$.

El conjunto de las permutaciones de X, junto a la operación de composición, constituye un grupo, llamado el *grupo de las permutaciones de* X o el *grupo simétrico de* X, que se denotará por $S(X)$. Cuando X es finito y posee n elementos, el grupo simétrico de X tiene $n!$ elementos. Se usará la notación

$$I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$$

para indicar el conjunto de los enteros de 1 hasta n, los elementos de I_n, o sea los enteros $1, \ldots, n$, se llamarán dígitos. El grupo de permutaciones del conjunto I_n será representado por el símbolo S_n y llamado grupo simétrico de grado n.

Sea $n \geq 2$. Si $x_1, \ldots, x_r$ son r dígitos (elementos de I_n) distintos, se llama ciclo $(x_1, \ldots, x_r)$ a la permutación $\gamma \in S_n$ tal que:

$$\begin{cases} \gamma(x_k) & = x_{k+1} \quad \forall k \in \{1, \ldots, r-1\} \\ \gamma(x_r) & = x_1 \\ \gamma(x) & = x \qquad \text{si } x \notin \{x_1, \ldots, x_r\} \end{cases}$$

Si γ es el ciclo $(x_1, \ldots, x_r)$, se designará por $\{\gamma\}$ el conjunto de elementos $\{x_1, \ldots, x_r\}$. Esta definición es unívoca, o sea el conjunto $\{\gamma\}$ depende solamente del ciclo γ pues $\{\gamma\} = \{x \in I_n : \gamma(x) \neq x\}$.

Una familia finita de ciclos $(\gamma_1, \ldots, \gamma_N)$ se dice *ajena* si los correspondientes subconjuntos $\{\gamma_1\}, \ldots, \{\gamma_N\}$ de I_n son disjuntos a pares.

Lema A.5. *Ciclos ajenos conmutan.*

Demostración. Basta probar que si $\gamma_1,\ \gamma_2$ son dos ciclos ajenos, entonces:

$$\gamma_1\gamma_2 = \gamma_2\gamma_1$$

Si $x \notin \{\gamma_1\}$ y $x \notin \{\gamma_2\}$ se tiene

$$(\gamma_1\gamma_2)(x) = (\gamma_2\gamma_1)(x) = x$$

Suponga ahora $x \in \{\gamma_1\}$. Entonces $\gamma_1 x \neq x$, luego $\gamma_2 x = x$ y en consecuencia:

$$\gamma_1\gamma_2(x) = \gamma_1(x) \tag{A.1}$$

Pero siendo $\gamma_1(x) \in \{\gamma_1\}$ vale también:

$$\gamma_2\gamma_1(x) = \gamma_1(x) \tag{A.2}$$

Por (A.1) y (A.2) vale:

$$(\gamma_1\gamma_2)(x) = (\gamma_2\gamma_1)(x) \tag{A.3}$$

Análogamente se tiene que (A.3) se cumple si $x \in \{\gamma_2\}$. Así, $\gamma_1\gamma_2 = \gamma_2\gamma_1$ es cierto. $\square$

Proposición A.6. *Toda permutación $\sigma \in S_n$, $\sigma \neq \mathrm{id}$ puede representarse como producto (conmutativo) de una familia finita de ciclos ajenos. Tal representación es única a menos del orden de los factores.*

Demostración. Sea $\sigma \in S_n$, $\sigma \neq \mathrm{id}$.

1. En el conjunto I_n considere la relación "$\sim$" dada por:

   $$y \sim x \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} \text{ tal que } y = \sigma^m x$$

   Se tiene que:

   a) $x \sim x \; \forall x \in I_n$ pues $x = \sigma^0 x$.

   b) $y \sim x \Rightarrow x \sim y$ pues $y = \sigma^m x$ implica $x = \sigma^{-m} y$.

   c) Las relaciones $y \sim x$ y $z \sim y$ implican $z \sim x$, pues $y = \sigma^p x$ y $z = \sigma^q y$ implican $z = \sigma^{p+q} x$.

   De ahí se sigue que "$\sim$" es una relación de equivalencia en I_n. Las correspondientes clases de equivalencia se llaman las *órbitas* de la permutación σ.
   La órbita de un dígito $x \in I_n$ se reduce a $\{x\}$ si y sólo si $\sigma x = x$ o, como se dice, x "es invariante por σ".
   Una órbita de σ reducida a un sólo punto es llamado *órbita trivial* . Puesto que $\sigma \neq \mathrm{id}$, σ posee por lo menos una órbita no trivial.

2. Sea B una órbita no trivial de σ. Fije arbitrariamente $x \in B$. $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma^m x = x$, pues, de lo contrario si $p,\, q \in \mathbb{N}$ y $p \neq q$ sería $\sigma^p x \neq \sigma^q x$, lo que es imposible por ser I_n un conjunto finito.
   Sea $r =: \min\{m \in \mathbb{N} \mid \sigma^m x = x\}$. r es un entero ≥ 2. $\forall m \in \mathbb{Z}$ se obtiene, por el algoritmo de la división, enteros q y t tales que $m = rq + t$ y $0 \leq t \leq r-1$, de donde:

   $$\sigma^m x = \sigma^t \, \sigma^{rq} x = \sigma^t x$$

luego B contiene solamente los elementos x, σx, $\sigma^2 x, \ldots, \sigma^{r-1}x$ y, por minimalidad de r, éstos son distintos a pares. El entero r depende solamente de B, pues es la cardinalidad de B. También el ciclo $\gamma =: (x, \sigma x, \ldots, \sigma^{r-1}x)$ depende solamente de B pues γ es la restricción de σ a B: $\sigma\big|_B$. A su vez $B = \{\gamma\}$.

3. Sea $(B_1, \ldots, B_N)$ la familia de todas las órbitas no triviales de σ. $\forall\, k \in I_n$ sea γ_k el ciclo definido por B_k o sea $\gamma_k = \sigma\big|_{B_k}$. Puesto que $\{\gamma_k\} = B_k$, los ciclos $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ son ajenos. Se tiene que:

$$\sigma = \gamma_1 \cdots \gamma_N \tag{A.4}$$

En efecto:

i. Si $x \notin B_k \;\forall\, k \in I_n$ vale $\sigma x = x$ y también $(\gamma_1 \cdots \gamma_N)(x) = x$, pues, $\gamma_k(x) = x \;\forall\, k \in I_n$.

ii Suponga que $x \in B_k$ para algún $k \in I_n$ (este k es único). Entonces $\gamma_k(x) = \sigma x$ y $\gamma_i(x) = x$ si $i \neq k$. Aplicando el lema A.5, se obtiene:

$$(\gamma_1 \cdots \gamma_N)(x) = \gamma_k(\gamma_1 \cdots \widehat{\gamma_k} \cdots \gamma_N)(x) = \gamma_k(x) = \sigma x$$

De (i) y (ii), se tiene que la relación (A.4) es cierta.

4. Para probar la unicidad de la representación (A.4) (la cual, por cierto, no será usada más adelante) suponga una relación

$$\sigma = \gamma'_1 \cdots \gamma'_{N'} \tag{A.5}$$

donde $\gamma'_1 \cdots \gamma'_{N'}$ son ciclos ajenos. Si $x \notin \{\gamma'_k\} \;\forall\, k \in [\![1, N']\!]$ se verifica:

$$\sigma x = x$$

Suponga que para algún $k \in I_{N'}$ se cumple $x \in \{\gamma'_k\}$. Entonces, por el lema A.5:

$$\sigma x = \gamma'_k(\gamma'_1 \cdots \widehat{\gamma'_k} \cdots \gamma'_{N\prime})(x) = \gamma'_k(x) \in \{\gamma'_k\}$$

de donde inmediatamente por inducción:

$$\sigma^m x = (\gamma'_k)^m(x) \in \{\gamma'_k\} \;\; \forall m \in \mathbb{N}$$

Esto prueba que $\{\gamma_k'\}$ es una órbita no trivial de σ y $\gamma_k' = \sigma\,\big|_{\{\gamma_k'\}}$.

Finalmente, sea B una órbita no trivial de σ. Si $x \in B$, entonces $x \neq \sigma x$, luego $\exists k \in I_{N'}$ tal que $x \in \{\gamma_k'\}$. De ahí $B = \{\gamma_k'\}$ o sea B figura entre las órbitas no triviales $\{\gamma_1'\}, \ldots, \{\gamma_{N'}'\}$. por tanto, la representación (A.5) es la misma que (A.4).

□

Un ciclo γ tal que $\{\gamma\}$ es de cardinalidad 2 se llama *transposición*. En otras palabras, si $i,\ j$ son dígitos distintos, la transposición $\tau = (i, j)$ es la permutación que satisface:

$$\begin{aligned} &\tau(i) = j\,,\ \tau(j) = i && \text{y} \\ &\tau(k) = k\,,\ \forall k \in I_n && \text{tal que } k \neq i \text{ y } k \neq j \end{aligned}$$

Proposición A.7. *Si $n \geq 2$, toda permutación de grado n puede representarse como producto de una familia finita de transposiciones.*

Demostración. Sea $\sigma \neq \mathrm{id}$. En virtud de la proposición A.6, basta probar que todo ciclo puede representarse como producto de una familia finita de transposiciones. Esto se sigue de que si $r \geq 2$ y si $x_1, x_2, \ldots, x_r$ son dígitos distintos a pares, rige la fórmula:

$$(x_1,\, x_2,\, x_3, \cdots, x_r) = (x_1,\, x_r)(x_1,\, x_{r-1}) \cdots (x_1,\, x_3)(x_1,\, x_2)$$

□

La representación de una permutación como producto de transposiciones está lejos de ser única. Por ejemplo, si $n \geq 3$ se tiene:

$$\mathrm{id} = (1,2)^2 = (1,3)^2 = (1,2)^2(1,3)^2 = (1,2)^2(1,3)^2(2,3)^2$$

Una permutación de grado n se dice *transposición de dígitos consecutivos* si es de la forma $(k, k+1)$ con $k \in I_{n-1}$.

La proposición A.7 puede mejorarse como sigue:

Proposición A.8. *Si $n \geq 2$, toda permutación puede representarse como producto de una familia finita de transposiciones de dígitos consecutivos.*

Demostración. En virtud de la proposición A.7, basta probar que toda transposición puede expresarse como producto de transposiciones de dígitos consecutivos. Considere dos dígitos: a y $a+r$ con $r \in \mathbb{N}$. Observe que la permutación

$$\sigma =: (a+r-1, a+r)(a+r-2, a+r-1)\cdots(a+1, a+2)(a, a+1)$$

transforma a en $a+r$ y los dígitos $a+1, a+2, \ldots, a+r-1; a+r$ respectivamente en $a, a+1, \ldots, a+r-2; a+r-1$. A su vez la permutación

$$\tau =: (a, a+1)(a+1, a+2)\cdots(a+r-3, a+r-2)(a+r-2, a+r-1)$$

transforma los dígitos $a, a+1, \ldots, a+r-2; a+r-1$ respectivamente en $a+1, a+2, \ldots, a+r-1; a$ y no desplaza a $a+r$. Luego la permutación $\tau\sigma$ intercambia $a+r$ con a y no desplaza ningún otro dígito, o sea:

$$(a, a+r) = \tau\sigma$$

Pero $\tau\sigma$ es patentemente un producto de transposiciones de dígitos consecutivos. $\square$

Se dice que una permutación $\sigma \in S_n$ es *par* cuando es producto de un número par de transposiciones e *impar* en caso contrario. Se usará el signo $|\sigma|$ para representar la paridad de la permutación σ: $|\sigma| = 0$ si σ fuera una permutación par y $|\sigma| = 1$ si σ fuera impar.

Evidentemente, el producto de dos permutaciones pares es par, el producto de dos impares también es par, el producto de una par por una impar es impar y la inversa de σ tiene la misma paridad que σ. Estos hechos se traducen por las igualdades:

$$|\sigma\rho| = |\sigma| + |\rho|, \quad |\sigma^{-1}| = |\sigma|.$$

Conclusiones

Existe una relación muy estrecha entre la cohomología de álgebras de Lie, un concepto algebraico y cohomología de grupo de Lie (topología): si un grupo de Lie es compacto, entonces su cohomología de De Rham coincide con la cohomología de su álgebra de Lie en representación trivial ($\rho = 0$ en dimensión uno).

La demostración del teorema de Weyl usando la cohomología de álgebras de Lie no es la original debido a H. Weyl. Originalmente, Weyl demostró que una representación de una álgebra semisimple compleja es completamente reducible usando el método llamado trascendental, que consiste en utilizar el truco unitario de Weyl, que asocia a una álgebra semisimple compleja, un grupo de Lie compacto; las representaciones de una álgebra semisimple compleja coinciden con las representaciones de un grupo compacto. La demostración cohomológica (algebraica) presentada en el trabajo no se limita al cuerpo de los complejos.

La descomposición de Levi es una herramienta muy general para estudiar la estructura de las álgebras de Lie, ya que aplicable a todas las álgebras de Lie de dimensión finita y, de alguna manera, justifica la búsqueda de una clasificación de las álgebras de Lie de dimensión finita semisimples y solubles; y luego proceder a calcular todas las posibles extensiones determinadas por ellas. También es útil para analizar la dinámica de los sistemas de control cuántico.

Se concluye este trabajo, esperando haber dado una motivación para acercarse a la teoría de álgebras de Lie, encontrando en esta área un buen lugar para aplicar muchos de los conocimientos adquiridos en los cursos de álgebra abstracta y álgebra lineal.

Bibliografía

[1] De Graaf, W. A., Lie Álgebras: Theory and Algorithms. North - Holland, 2000.

[2] Erdmann K., Wildon M. J., Introduction to Lie Algebras. Springer, 2006

[3] Hoffman, K., Kunze, R., Algebra Lineal. Prentice Hall Inc., 1973.

[4] Humpreys, J. E., Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. Springer - Verlag, 1980.

[5] Jacobson, N., Lie Algebras. Dover Puplications Inc. New York, 1979.

[6] Knapp, A. W. Lie groups, lie algebras, and cohomology. Princeton University Press, 1988.

[7] Lages Lima, E. Álgebra Exterior. Impa, 1998.

[8] San Martin, L. A. Álgebras de Lie. Unicamp, 2010.