

Universidad Mayor de San Andrés
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Carrera de Matemática



PROYECTO DE GRADO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE
LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

CONTROLABILIDAD DE SISTEMAS DISCRETOS

(Teoría de Control Discreto)

AUTOR: Tomas Pedro Mariaca Intipampa

TUTOR: Dr. Efraín Cruz Mullisaca

La Paz - Bolivia
2019

*A mis padres
Rosa Intipampa (QEPD) y Felix Mariaca
con mucho afecto y estima.*

Agradecimientos

A Dios, por darme vida, salud, sabiduría y fortaleza en los momentos más difíciles, guiando siempre mi camino.

A mis padres, por su paciencia y comprensión, que sin ellos no hubiera logrado una meta más en vida profesional. Papá, gracias por tu apoyo moral y por el entusiasmo que me brindaste para seguir adelante en mis propósitos. Mamá (QEPD) por el tiempo que estuviste conmigo compartiendo tus lecciones de vida, consejos y por tu amor, gracias, porque es algo que sin tus desvelos no hubiera podido ser.

Un especial agradecimiento al Dr. Efrain Cruz Mullisaca, tutor de esta Tesis, por su valiosa guía, dedicación, asesoramiento científico y estímulo para seguir creciendo intelectualmente.

Con mucha consideración expreso mi agradecimiento al Proyecto Dinámicas de Control que esta a cargo de los profesores Efrain Cruz, Miguel Yucra y Willy Condori, por brindarme el apoyo, la orientación y las sugerencias constructivas al trabajo realizado.

También una mención especial al Dr. Fernando Vera, por la revisión y corrección del texto.

A todos los profesores de la carrera de Matemática quienes contribuyeron en mi formación académica.

Tomas Pedro Mariaca
Septiembre, 2019.

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	v
Introducción	VI
1. Preliminares	1
1.1. Cálculo de diferencias finitas	1
1.2. Ecuaciones en diferencia	7
2. Sistemas de ecuaciones en diferencia	14
2.1. Sistemas de ecuaciones en diferencia	14
2.2. Sistemas lineales en diferencia	19
2.3. Sistemas homogéneos	19
2.4. Sistemas no homogéneos	30
3. Sistemas de control discreto	33
3.1. Definiciones fundamentales	33
3.2. Sistemas de control en diferencia	37
3.3. Controlabilidad y Alcanzabilidad	40
3.4. Sistemas invariantes en el tiempo	44
4. Conclusiones y recomendaciones	54
A. Diagonalización y forma canónica de Jordan	55
A.1. Nociones básicas	55
A.2. Forma canónica de Jordan	56

Resumen

La Teoría de Control en tiempo discreto ha ganado importancia como disciplina para ingenieros, matemáticos, economistas y otros investigadores. Estas dinámicas se describen mediante la teoría de las ecuaciones en diferencia, por tanto, es prescindible estudiar estas ecuaciones.

En este trabajo se estudia uno de los tres problemas de controlabilidad para sistemas lineales de la forma

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad x(k) \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, u(k) \in \mathbb{R}^m,$$

esto es, si bajo este sistema de control es posible controlar o dirigir un estado inicial dado a cualquier estado arbitrario en un periodo de tiempo finito; es decir, determinar si se puede lograr un objetivo deseado manipulando las variables de control elegidas. Para ello Rudolf E. Kalman establece un criterio de controlabilidad para este tipo de sistemas, la cual implica analizar el rango de la matriz de controlabilidad $[B \ AB \ A^2B \ \cdots \ A^{n-1}B]$. Con este criterio garantizamos la controlabilidad de clase de sistemas discretos.

Introducción

Los fenómenos dinámicos que se presentan en nuestra vida cotidiana o en la investigación científica se producen en tiempo continuo y discreto. El tiempo discreto consiste en una secuencia ordenada de puntos en lugar de un continuo. En términos de aplicaciones es conveniente introducir este tipo de tiempo cuando los eventos y las consecuencias ocurren o se contabilizan solo en períodos de tiempo discreto, como diarios, mensuales, anuales, entre otros. Esto es ventajoso en el ámbito de programación de estos sistemas discretos en un ordenador, cuyas entradas son secuencias numéricas, el cual no abordaremos en este trabajo. Sin embargo, esto es una motivación extra para estudiar este tipo de sistemas.

El trabajo se enmarca dentro de la Teoría de Control en tiempo discreto, la cual a ganado importancia como disciplina. Ejemplos de problemas de control incluyen: Aterrizar un vehículo en la luna, controlar la economía de una nación, fabricar robots, controlar la propagación de una epidemia, entre otros.

Hasta 1960 los métodos de transformación fueron la principal herramienta en el análisis y diseño de sistemas controlados. Tales métodos se denominan en la actualidad Teoría de Control clásica. En 1960, el Matemático, ingeniero suizo R.E.Kalman estableció los cimientos de la moderna Teoría de Control mediante la introducción de los métodos espaciales de estado. Por consiguiente, las matrices han reemplazado gradualmente las transformadas (por ejemplo, la transformada z , y la transformada de Laplace).

El problema que se plantea y se pretende desarrollar en la tesis es el siguiente:
¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para que el sistema control lineal discreto $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$, sea completamente controlable?

Como objetivo principal de la tesis, que responde al problema planteado es el criterio de controlabilidad de Kalman, el cual se resume en el siguiente resultado:

El sistema de control lineal n -dimensional es completamente controlable si y solo si el rango de la matriz de controlabilidad $[B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$ es n .

Para esto, la tesis esta estructurado de la siguiente manera:

En el primer capítulo revisaremos el cálculo de diferencias finitas y con ello definiremos lo que son las ecuaciones en diferencia como una relación de recuencia.

En el segundo capítulo se generaliza las ecuaciones en diferencia a sistemas de ecuaciones, donde garantizaremos la existencia y unicidad de soluciones. Fundamentalmente aquí, vamos a enfatizar el estudio de sistemas lineales homogéneos y no homogéneos ya sea en tiempo variante o invariante. Para su estudio se requiere el Álgebra Lineal fundamentalmente la forma canónica Jordan.

Finalmente, en el último capítulo desarrollaremos el objetivo principal de la tesis que es el criterio de controlabilidad de Kalman. Para esto introduciremos el concepto de sistema de control de una manera axiomática, a partir de los axiomas de sistema encontramos propiedades muy importantes que posteriormente con el estudio del conjunto alcanzable alrededor de un estado de equilibrio, llegamos a construirnos el siguiente resultado

Un sistema Σ_d lineal n -dimensional es controlable si y solo si $\mathcal{R}^n(0) = \mathcal{X}$.

De aquí, el teorema central del trabajo es consecuencia de este resultado.

En este capítulo presentaremos las nociones de ecuaciones en diferencia. Para ello, la primera parte se estudia el cálculo de diferencias finitas y algunas de sus propiedades que aparecen en situaciones en que son interesantes estudiar los cambios en los valores de una función, al efectuar variaciones en el dominio de esta. Estas diferencias, de manera natural nos permitirán definir las ecuaciones en diferencia, objetivo del presente capítulo.

1.1. Cálculo de diferencias finitas

Muy frecuentemente nos encontramos con funciones definidas en conjuntos discretos, finitos o infinitos, de números reales. Las sucesiones son un buen ejemplo, puesto que están definidas en el conjunto de los números naturales. Otra situación muy común se presenta cuando queremos estudiar una función f cuyo dominio es un intervalo, pero solamente conocemos la restricción de f a un subconjunto discreto, generalmente finito, de su dominio.

Supongamos que solamente conocemos los valores de una función f en los puntos t_0, t_1, \dots, t_n . Si queremos estudiar la función, debemos ver como cambia $f(t)$ al cambiar t . Como t solamente puede cambiar por saltos, de un punto x_i a x_j , lo mismo pasa con los valores de f , que saltan de $f(x_i)$ a $f(x_j)$. Por tanto, las diferencias $f(x_i) - f(x_j)$ son importantes para el estudio de f .

Operadores de diferencia

Sean t y h números reales, con $h > 0$ y sea $\mathcal{F}(S, \mathbb{R})$ el conjunto de todas las funciones reales definidas en el subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}$, de modo que siempre que t pertenezca al dominio de la función, $t + h$ también.

Además el conjunto de las funciones $\mathcal{F}(S, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial con las operaciones usuales. Puesto que, si f, g están en $\mathcal{F}(S, \mathbb{R})$ y λ es cualquier número real, entonces $0, f + g, \lambda f$ están también en $\mathcal{F}(S, \mathbb{R})$.

Definición 1.1 (Primera diferencia). Sea $f \in \mathcal{F}(S, \mathbb{R})$, definimos la primera diferencia de la función f relativo al incremento (o intervalo de diferencia) h , como

$$\Delta f(t) = f(t+h) - f(t). \quad (1.1)$$

Ejemplo 1.1. La primera diferencia de la función f definida por $f(t) = at + b$, permite una interpretación sencilla, es la función cuyo valor en t es igual al cambio producido en el valor de f , cuando en el dominio se produce un incremento h . Entonces $\Delta f(t) = ah$ define una función constante, y si $h = 1$, la primera diferencia coincide con el valor a de la pendiente de la recta.

Ejemplo 1.2. Sea $f(t) = \sin(at)$. Aplicando la definición de primera diferencia se tiene:

$$\begin{aligned} \Delta \sin(at) &= \sin a(t+h) - \sin(at) \\ &= 2\cos\left(\frac{a(t+h)+at}{2}\right) \sin\left(\frac{a(t+h)-at}{2}\right) \\ &= 2\cos a\left(t + \frac{h}{2}\right) \sin\left(\frac{ah}{2}\right). \end{aligned}$$

Análogo a esto, podemos encontrar la primera diferencia de las funciones \cos , \tan , \log , etc.

Analizando la aplicación Δ :

$$\begin{aligned} \Delta : \mathcal{F}(S, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{F}(S, \mathbb{R}) \\ f &\rightarrow \Delta f : S \rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow \Delta f(t) = f(t+h) - f(t). \end{aligned} \quad (1.2)$$

En el siguiente resultado, veremos la linealidad de la aplicación Δ .

Teorema 1.1. Si f, g están en $\mathcal{F}(S, \mathbb{R})$ y a, b son números reales cualesquiera, entonces

$$\Delta[af + bg](t) = a\Delta f(t) + b\Delta g(t). \quad (1.3)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \Delta[af + bg](t) &= [af + bg](t+h) - [af + bg](t) \\ &= af(t+h) + bg(t+h) - af(t) - bg(t) \\ &= af(t+h) - af(t) + bg(t+h) - bg(t) \\ &= a\Delta f(t) + b\Delta g(t). \end{aligned}$$

□

Por tanto, Δ es un operador lineal. A este operador lo denominaremos *operador de diferencia*.

Diferencias superiores

De la relación 1.2 se puede apreciar que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(S, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{F}(S, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(S, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(S, \mathbb{R}) \cdots \\ f &\rightarrow \Delta f \rightarrow \Delta(\Delta f) \rightarrow \Delta(\Delta(\Delta f)) \cdots\end{aligned}$$

La primera diferencia de una función dada, produce una nueva función. Aplicando la primera diferencia a esta nueva función produce una segunda diferencia (esta aplicación, esta dado bajo la ley de composición de funciones), y en general se puede definir diferencias de forma inductiva para cualquier número natural $n \geq 2$.

Definición 1.2. Sea f un elemento de $\mathcal{F}(S, \mathbb{R})$ y su primera diferencia Δf dados. Entonces, la segunda diferencia de f , denotado por $\Delta^2 f$, está definido como diferencia de la primera diferencia de f ; es decir,

$$\Delta^2 f = (\Delta \circ \Delta)(f) = \Delta(\Delta f).$$

Análogamente, se define la tercera diferencia de f , la cuarta diferencia de f , etc. En la siguiente definición definiremos la n -ésima diferencia de f , para todo número natural $n \geq 2$.

Definición 1.3. La diferencia n -ésima de f , denotado por $\Delta^n f$, es la diferencia de la $(n - 1)$ diferencia de f ; es decir,

$$\Delta^n f = \Delta[\Delta^{n-1} f], \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (1.4)$$

Ejemplo 1.3. Sea $f(t) = t^3 + 1$. Entonces, aplicando el operador de diferencia, tenemos que

$$\Delta f(t) = f(t+h) - f(t) = (t+h)^3 + 1 - t^3 - 1 = 3t^2h + 3th^2 + h^3.$$

Aplicado nuevamente la primera diferencia y la linealidad de Δ , se tiene

$$\begin{aligned}\Delta(\Delta f(t)) &= \Delta(3t^2h + 3th^2 + h^3) \\ &= 3h\Delta t^2 + 3h^2\Delta t + h^3\Delta 1 \\ &= 3h[(t+h)^2 - t^2] + 3h^2[t+h-t] + 0 \\ &= 3h[2th + h^2] + 3h^3 \\ &= 6th^2 + 6h^3.\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que

$$\Delta^2 f(t) = 6th^2 + 6h^3.$$

Calculando la tercera diferencia, se tiene

$$\begin{aligned}\Delta^3 f(t) &= \Delta(6th^2 + 6h^3) \\ &= \Delta(6th^2) + \Delta(6h^3) \\ &= h^2\Delta(t) + 6h^3\Delta 1 \\ &= 6h^3.\end{aligned}$$

Como la tercera diferencia es constante, y por consiguiente, $\Delta^n f(t) = 0$ para todo número natural $n \geq 4$.

Definición 1.4. El operador identidad I , es definido como

$$If = f.$$

A este operador lo denotaremos como Δ^0 , es decir,

$$\Delta^0 f = If.$$

Las diferencias para productos y cocientes de funciones tienen bastante similitud con las ya conocidas para la derivación de productos y cocientes. A continuación se formulan y demuestran estos resultados.

Teorema 1.2. Sean f, g elementos de $\mathcal{F}(S, \mathbb{R})$. Entonces,

- (a) $\Delta[f \cdot g](t) = \Delta f(t)g(t) + \Delta g(t)f(t+h)$,
- (b) $\Delta \left[\frac{f}{g} \right](t) = \frac{\Delta f(t)g(t) - f(t)\Delta g(t)}{g(t)g(t+h)}$, si $g(t)g(t+h) \neq 0$.

Demostración. (a)

$$\begin{aligned} \Delta[f \cdot g](t) &= f(t+h)g(t+h) - f(t)g(t) \\ &= f(t+h)g(t+h) - f(t+h)g(t) + f(t+h)g(t) - f(t)g(t) \\ &= f(t+h)[g(t+h) - g(t)] + g(t)[f(t+h) - f(t)] \\ &= f(t+h)[\Delta g(t)] + g(t)[\Delta f(t)] \\ &= \Delta f(t)g(t) + \Delta g(t)f(t+h). \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \Delta \left[\frac{f}{g} \right](t) &= \frac{f(t+h)}{g(t+h)} - \frac{f(t)}{g(t)} \\ &= \frac{g(t)f(t+h) - g(t+h)f(t)}{g(t+h)g(t)} \\ &= \frac{g(t)f(t+h) - f(t)g(t) + f(t)g(t) - g(t+h)f(t)}{g(t+h)g(t)} \\ &= \frac{g(t)[f(t+h) - f(t)] + f(t)[g(t) - g(t+h)]}{g(t+h)g(t)} \\ &= \frac{g(t)[f(t+h) - f(t)] - f(t)[g(t+h) - g(t)]}{g(t+h)g(t)} \\ &= \frac{\Delta f(t)g(t) - f(t)\Delta g(t)}{g(t)g(t+h)}. \end{aligned}$$

□

A continuación se demostrará la linealidad del operador diferencia de orden n

Teorema 1.3. Sean f, g elementos de $\mathcal{F}(S, \mathbb{R})$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\Delta^n[af(t) + bg(t)] = a\Delta^n f(t) + b\Delta^n g(t).$$

Demostración. Procediendo por inducción, para $n = 1$, por el Teorema 1.1 se verifica.

Para $n = k$, asumamos verdadera la afirmación, y demostraremos que para $n = k + 1$; en efecto,

$$\begin{aligned} \Delta^{k+1}[af(t) + bg(t)] &= \Delta\{\Delta^k[af(t) + bg(t)]\} \\ &= \Delta[a\Delta^k f(t) + b\Delta^k g(t)], \end{aligned}$$

por la linealidad de Δ , se tiene

$$\begin{aligned} &= a\Delta\Delta^k f(t) + b\Delta\Delta^k g(t) \\ &= a\Delta^{k+1} f(t) + b\Delta^{k+1} g(t). \end{aligned}$$

De este modo, queda demostrado la afirmación. □

Suma indefinida: el operador Δ^{-1}

Antes, analizaremos la inyectividad y la sobreyectividad del operador diferencia.

Teorema 1.4. Sean f, g elementos de $\mathcal{F}(S, \mathbb{R})$. $\Delta f = \Delta g$ si y solo si existe una función periódica p de periodo h tal que $f = g + p$.

Demostración. Supongamos que $\Delta f = \Delta g$.

Afirmación. $f - g$ es una función periódica de periodo h . En efecto; sea $t \in S$, entonces

$$\begin{aligned} [f - g](t + h) &= f(t + h) - g(t + h) \\ &= f(t + h) - f(t) + f(t) - g(t + h) + g(t) - g(t) \\ &= [f(t + h) - f(t)] + f(t) - [g(t + h) - g(t)] - g(t) \\ &= \Delta f - \Delta g + f(t) - g(t) \\ &= [f - g](t). \end{aligned}$$

De este modo, existirá una función periodica $p = f - g$ de periodo h tal que $f = g + p$.

El recíproco es inmediato. □

Así, el operador Δ no es inyectivo. Para la sobreyectividad, sea g un elemento cualquiera de $\mathcal{F}(S, \mathbb{R})$ y sea $t \in S$. Si f es un elemento de $\mathcal{F}(S, \mathbb{R})$ tal que $\Delta f = g$, entonces se deben cumplir

las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 f(t+h) - f(t) &= g(t) \\
 f(t+2h) - f(t+h) &= g(t+h) \\
 f(t+3h) - f(t+2h) &= g(t+2h) \\
 &\vdots \\
 f(t+kh) - f(t+(k-1)h) &= g(t+(k-1)h)
 \end{aligned}$$

Si sumamos las primeras k - ecuaciones, obtenemos

$$f(t+kh) - f(t) = \sum_{j=0}^{k-1} g(t+jh), \quad k \geq 1 \quad (1.5)$$

Si escogemos en forma arbitraria el valor de $f(t)$, la ecuación (1.5), nos dice que los valores de f en los puntos $t+kh$, con $k \geq 1$, quedan determinados. Por tanto, usando esta relación (1.5), se define $f(x)$ para $x \geq t+h$.

De este modo, g tiene un número infinito de preimágenes bajo el operador de diferencia con incremento h . Consecuencia de este resultado, tenemos la siguiente afirmación.

Corolario 1.1. *Si llamamos f_0 una preimagen de g bajo Δ ($\Delta f_0 = g$). Entonces, $\Delta f = g$ si y solo si $f = f_0 + p$, donde p es una función periódica de periodo h .*

El análogo a la integral indefinida, en el cálculo de diferencias finitas es la suma indefinida (o antidiferencia) al cual denotaremos con Δ^{-1} , y se define de la siguiente manera:

Definición 1.5. *Sean $f, g, 0$ elementos de $\mathcal{F}(S, \mathbb{R})$. Si $\Delta f = 0$, entonces $\Delta^{-1}(0) = p$, para alguna función periodica p de periodo h . Por otro lado, si $\Delta f = g$, entonces $\Delta^{-1}g = f_0 + p$, para alguna función periodica p de periodo h , donde f_0 es una preimagen de g bajo Δ .*

Del Corolario 1.1, tenemos la equivalencia: $\Delta f = g$ si y sólo si $f = f_0 + p$. Aplicando este resultado en la definición anterior, se tiene que $\Delta^{-1}g = f$; de este modo, se dice que f es una suma indefinida de g con respecto al incremento h .

Ejemplo 1.4. *La suma indefinida de la función 2^t resulta ser $\frac{2^t}{2^h - 1} + c$; donde c es una constante arbitrario y h es el intervalo de diferencia.*

Acontinuación veremos la linealidad de la suma indefinida.

Teorema 1.5. *Si F y G son sumas indefinidas de f y g respectivamente, y a, b son constantes arbitrarios, entonces $aF + bG$ es una suma indefinida de la función $af + bg$; es decir,*

$$\Delta^{-1}(af + bg) = a\Delta^{-1}f + b\Delta^{-1}g.$$

Demostración. En principio se debe demostrar que la primera diferencia de $aF + bG$ es igual $af + bg$. En efecto; Usando la linealidad de Δ , se obtiene que

$$\begin{aligned}\Delta(aF + bG) &= a\Delta F + b\Delta G \\ &= af + bg.\end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\Delta^{-1}(af + bg) = aF + bG. \quad (1.6)$$

Por otro lado, como F y G son sumas indefinidas de f y g ; es decir,

$$\Delta^{-1}(f) = F, \quad \Delta^{-1}(g) = G. \quad (1.7)$$

Entonces, sustituyendo las relaciones de (1.7) en (1.6), se tiene que

$$\Delta^{-1}(af + bg) = a\Delta^{-1}f + b\Delta^{-1}g.$$

□

1.2. Ecuaciones en diferencia

En esta sección, introduciremos el estudio de las ecuaciones en diferencia con un análisis detallado, esto nos permitirá una comprensión clara de lo que significan estas ecuaciones.

Definición 1.6. *Sea x un elemento del conjunto $\mathcal{F}(S, \mathbb{R})$. Una ecuación que relaciona los valores de la función x y una o más de sus diferencias $\Delta x, \Delta^2 x, \dots$ para cada elemento t del conjunto S (para el cual se define cada una de estas funciones) se llama ecuación en diferencia sobre el conjunto S .*

Sean las funciones definidas sobre el conjunto de los números reales t , las siguientes ecuaciones son ejemplos de ecuaciones en diferencia sobre el conjunto S de números reales.

$$\begin{aligned}\Delta x(t) + 3x(t) &= 0 \\ \Delta^2 x(t) + 2\Delta x(t) + x(t) &= 0 \\ \Delta^2 x(t) - tx(t) &= 2t + 7.\end{aligned} \quad (1.8)$$

Es importante observar que estas ecuaciones también se pueden considerar como ecuaciones en diferencia sobre algún conjunto distinto al de números reales. Como x se define para todos los números reales t , con mayor motivo para valores enteros positivos de t . Si usamos $h = 1$ (o cualquier otro entero positivo), entonces $\Delta x(t), \Delta^2 x(t), \dots$ también será significativo, ya que en estas circunstancias incluirán valores de x en los enteros $t + h, t + 2h, \dots$

Por lo tanto, las ecuaciones (1.8) pueden considerarse como ecuaciones en diferencias sobre el conjunto de los números reales, sobre los enteros positivos o sobre algún otro conjunto. Por lo que, en el momento de definir una ecuación en diferencia es de mucha importancia mencionar explícitamente sobre que conjunto están definidas.

En el presente trabajo consideramos conjuntos especiales de valores sucesivos igualmente espaciados t ; es decir, conjuntos formados por una secuencia de números consecutivos de la forma:

$$t_0, t_0 + h, t_0 + 2h, t_0 + 3h, \dots$$

este conjunto puede ser finito o infinito (t_0 indica el valor de inicio y h es el número que se agregará a cada valor de t para obtener el siguiente valor de t .)

Sin pérdida de generalidad, es posible simplificar más el conjunto S de valores para los cuales se definen las ecuaciones en diferencia que estudiaremos. Asumiremos que t_0 es un entero no negativo y que h es igual a 1. Entonces el conjunto S consistirá de un conjunto finito o infinito de enteros sucesivos (será conveniente que este conjunto comience con 0, aunque esto no es necesario).

Si S consiste de cualquier conjunto finito o infinito de valores de t igualmente espaciados en \mathbb{R} , entonces, sin pérdida de generalidad, podemos asumir este conjunto como un conjunto finito o infinito de enteros consecutivos. Este resultado se demuestra en la siguiente proposición.

Teorema 1.6. Sean $t_0 \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}_0^+$ y $k_0 \in \mathbb{Z}^+$. Si $S_1 = \{t_0, t_0 + h, t_0 + 2h, \dots\} \subset \mathbb{R}$, y $S_2 = \{k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \dots\} \subset \mathbb{Z}^+$, entonces hay una biyección entre S_1 y S_2 .

Demostración. Definamos la función

$$f : S_1 \rightarrow S_2$$

$$t \rightarrow f(t) = \frac{t - (t_0 - ah)}{h},$$

donde k_0 es cualquier entero no negativo. Ahora veamos si esta función es biyectiva. En efecto,

Inyectividad. Sean $t_1, t_2 \in S_1$, esto es: existen algún $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$t_1 = t_0 + k_1h, \quad t_2 = t_0 + k_2h.$$

Además supongamos que $f(t_1) = f(t_2)$, entonces

$$\frac{t_0 + k_1h - (t_0 - k_0h)}{h} = \frac{t_0 + k_2h - (t_0 - k_0h)}{h},$$

de aquí, se tiene que $k_1 = k_2$, en consecuencia $t_1 = t_2$.

Sobreyectividad. Notemos que para cualquier $k \in S_2$, existe $t = t_0 + (k - k_0)h \in S_1$ de modo que

$$f(t) = \frac{t_0 + (k - k_0)h - (t_0 - k_0h)}{h} = k.$$

De este modo, hay una biyección entre S_1 y S_2 . □

De esta manera, las ecuaciones en diferencia definida sobre una secuencia de números reales igualmente espaciados

$$t : t_0, t_0 + h, t_0 + 2h, \dots \quad (1.9)$$

podemos pensar como una ecuación en diferencia definido en una secuencia de enteros no negativos

$$k : k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \dots \quad (1.10)$$

es decir, hallar una fórmula para el término k -ésimo para la secuencia (1.9), es lo mismo, que hallar una fórmula para el término k -ésimo de la secuencia (1.10). Razón por la cual las ecuaciones en diferencia que estudiaremos estarán definidas en un conjunto S de enteros no negativos.

Para enfatizar esta simplificación del conjunto S , usaremos la letra k en lugar de t para indicar un número en el dominio de las funciones relacionadas por la ecuación en diferencia, y en ocasiones escribiremos x_k (notación posicional) en lugar de $x(k)$ (notación funcional) para el valor de x en el periodo k . Con esta nueva notación las ecuaciones de 1.8 se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Delta x_k + 3x_k &= 0 \\ \Delta^2 x_k + 2\Delta x_k + x_k &= 0 \\ \Delta^2 x_k - tx_k &= 2k + 7. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Aplicando la definición de operador diferencia en las ecuaciones (1.11). Para la primera ecuación, se tiene que $x_{k+1} - x_k + 3x_k = 0$, de donde

$$x_{k+1} = -2x_k,$$

análogamente para el resto de las ecuaciones, tenemos que

$$\begin{aligned} x_{k+2} &= 0 \\ x_{k+2} &= 2x_{k+1} + (k-1)x_k + 2k + 7. \end{aligned} \quad (1.12)$$

De esta manera, las ecuaciones (1.11) se puede ver como una relación de recurrencia.

Definición 1.7. Una función x es una ***solución de una ecuación en diferencia*** sobre el conjunto S , si los valores de x reducen la ecuación en diferencia a una identidad sobre S .

Como se observó las ecuaciones (1.12) son relaciones recursivas. Por tanto, la forma usual de hallar sus soluciones es por iteración (o recursión).

Ejemplo 1.5 (Dinámica de poblaciones). Antes mencionaremos algunas consideraciones elementales sobre la dinámica de poblaciones. La **tasa de natalidad**, por ejemplo, de una población humana (de una determinada zona) en un cierto año es el número de nacimientos habidos ese año dividido por el tamaño de la población al comienzo del año. Se define de manera análoga la **tasa de mortalidad**. La **tasa de crecimiento** es la diferencia entre la tasa de natalidad y la tasa de mortalidad, es decir, es la variación neta de población en un año dividida por la población a comienzos de ese año (se supone que la población permanece aislada, es decir, que no se producen migraciones). Representemos por x_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, el número de individuos en el instante t_k de una población. Como se mencionó la tasa de crecimiento del periodo $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ es, por definición

$$r = \frac{\Delta x_k}{x_k} = \frac{x_{k+1} - x_k}{x_k}. \quad (1.13)$$

La tasa r dependerá en general de k y x_k , osea, del periodo considerado y del valor x_k de partida:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{x_k} = r(k, x_k).$$

De este modo,

$$\Delta x_k = r(k, x_k)x_k, \quad (1.14)$$

o equivalentemente,

$$x_{k+1} = (1 + r(k, x_k))x_k. \quad (1.15)$$

La relación (1.14) (o (1.15)) es una ecuación en \mathbb{Z}^+ . La **incognita** es la sucesión

$$x_0, x_1, \dots, x_k, \dots \quad (1.16)$$

de niveles de población en los sucesivos instantes t_0, t_1, t_2, \dots

Es claro que la hipótesis más simple de la tasa $r(k, x_k)$ es la de tasa de crecimiento constante r , lo que conduce a la ecuación en diferencias

$$x_{k+1} = (1 + r)x_k, \quad (1.17)$$

sus soluciones se obtienen de manera inmediata procediendo por iteración a partir de cada población inicial x_0 considerada (son **progresiones geométricas de razón $1 + r$**)

$$\begin{aligned} x_0 & \\ x_1 &= (1 + r)x_0 \\ x_2 &= (1 + r)x_1 = (1 + r)^2 x_0 \\ &\vdots \\ x_k &= (1 + r)x_{k-1} = \dots = (1 + r)^k x_0. \end{aligned}$$

De esta manera, bajo la ley de crecimiento expresada por la ecuación en diferencias

$$x_{k+1} = (1 + r)x_k,$$

una población inicial de $x_0 > 0$ individuos evolucionará de acuerdo con la fórmula

$$x_k = (1 + r)^k x_0.$$

Si $r > 0$, o sea, si la natalidad domina a la mortalidad, la población crecerá en cada periodo ($x_{k+1} > x_k$) y además

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \infty$$

cualquiera que sea $x_0 > 0$ (**crecimiento ilimitado o malthusiano**). Si $r = 0$, $x_k = x_0$ para todo k , es decir, la población permanecerá estabilizada en el valor constante x_0 . Si $r < 0$ (con $r > -1$ para evitar valores negativos de x , lo que no tendría sentido en este contexto) la población decrecerá en cada periodo y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$$

lo que significa que a largo plazo la población se extingue.

Resulta que ninguna población puede crecer indefinidamente a una tasa constante. Cuando una población llega a ser demasiado numerosa aparecen políticas de restricción del medio en forma de limitación de espacio. En el siguiente ejemplo analizamos esta situación.

Ejemplo 1.6 (Ecuación Logística). Es más realista suponer que el medio puede sólo sostener de manera estable un máximo K de población (la **capacidad de soporte** del medio), de modo que si $x(k)$ está por encima de K , la tasa será negativa y la población decrece acercándose a K , si $x(k) = K$ la tasa será nula y, por tanto la población permanece constante, y, finalmente, si $x(k)$ se mantiene por debajo de K , la tasa será positiva, entonces crece la población. La manera de reflejar matemáticamente ese comportamiento es imponer que la tasa de crecimiento sea proporcional a la diferencia $(K - x)$, esto es:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{x_k} = b(K - x_k) \quad (1.18)$$

con $b > 0$. Se tiene así la denominada **ecuación logística**:

$$\Delta x_k = bx_k(K - x_k) \quad (1.19)$$

propuesta por Verhulst en 1936. Escribimos la ecuación (1.19) en la forma

$$\Delta x_k = rx_k - bx_k^2 \quad (1.20)$$

con $r = bK$, de otro modo

$$\Delta x_k = r x_k \left(1 - \frac{x_k}{K}\right) \quad (1.21)$$

Despejando en (1.18) x_{k+1} en términos de x_k , se tiene

$$x_{k+1} = b x_k \left(K + \frac{1}{b} - x_k\right) \quad (1.22)$$

Observemos que la cantidad $M = K + \frac{1}{b} > K$ representa un máximo absoluto para una población regida por la ley (1.18), pues si $x_k = K + \frac{1}{b}$, se tendrá $x_{k+1} = 0$, es decir, se agotará todos los recursos y la población se extinguirá a lo largo del siguiente período. Nos plantemos, en la ecuación (1.22) para valores $x \leq M$. Para ello sea

$$y_k = \frac{x_k}{M},$$

dividiendo por $M = K + \frac{1}{b}$ la ecuación (1.22), tenemos que

$$\frac{x_{k+1}}{M} = b \frac{x_k}{M} (M - x_k) = (1 + bK) \frac{x_k}{M} \left(1 - \frac{x_k}{M}\right),$$

es decir, se tiene la ecuación en diferencia

$$y_{k+1} = a y_k (1 - y_k), \quad (1.23)$$

con $a = 1 + bK$. Esta es la forma usual de la ecuación logística.

Iterando a partir de la población inicial y_0 , se tendrá

$$\begin{aligned} y_1 &= a y_0 (1 - y_0) = a y_0 + a y_0^2 \\ y_2 &= a y_1 (1 - y_1) = a^2 (y_0 - y_0^2) (1 - a y_0 - a y_0^2) \end{aligned}$$

polinomio de grado 4 en y_0 ; en general, y_k será un polinomio de grado 2^k en y_0 de fórmula imposible de establecer analíticamente.

Las ecuaciones (1.8), (1.17) y (1.23) responden al siguiente modelo general: Dada una función $x \rightarrow f(x)$ de \mathbb{R} en \mathbb{R} , analizaremos el proceso dinámico que se genera al aplicar f sucesivamente, de manera iterada, partiendo de un valor inicial x_0 en el instante inicial $k_0 \in \mathbb{Z}^+$

$$x_0 \rightarrow f(x_0) \rightarrow f(f(x_0)) = f^2(x_0) \rightarrow \cdots \rightarrow f(f^{k-1}(x_0)) = f^k(x_0) \rightarrow \cdots \quad (1.24)$$

Podemos imaginar este proceso (o sistema dinámico) como la evolución de un sistema real (físico, biológico, económico...) a lo largo de una secuencia de períodos temporales cuando se supone que el estado del sistema en cada uno de esos períodos está reflejado por un número real x (nivel de población en el ejemplo anterior) y que la ley de cambio que transforma un

estado, está dada por la función f : $f(x_0)$ es el estado del sistema una unidad de tiempo después de estar en el estado inicial x_0 ; $f(f(x_0)) = f^2(x_0)$ el estado dos unidades de tiempo después, y así sucesivamente $f(f^{k-1}(x_0)) = f^k(x_0)$ es el estado k -unidades de tiempo después.

Poniendo $f^k(x_0) = x_k$, tenemos

$$x_{k+1} = f^{k+1}(x_0) = f(f^k(x_0)) = f(x_k).$$

Por lo cuál el proceso (1.24) lo podemos representar en la forma de un *problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k), & k = k_0, k_0 + 1, \dots \\ x(k_0) = x_0. \end{cases}$$

De este modo, entenderemos que, una ecuación en diferencias es una *relación de recurrencia* de la forma $x_{k+1} = f(x_k)$, relación a la que también aplicaremos, de modo indistinto, el término de *sistema dinámico*. (Se tiende a utilizar la expresión ecuación en diferencias cuando se estudian las cuestiones analíticas y la de sistema dinámico cuando se consideran los aspectos geométricos y topológicos del proceso).

Más generalmente, sean $k_0 \in \mathbb{Z}^+$ y $S = \{k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \dots\}$. Si consideramos f como una función de dos variables; esto es, $f : S \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Una ecuación en diferencias sobre el conjunto S , es una relación de la forma:

$$x_{k+1} = f(k, x_k) \quad \text{o} \quad x(k+1) = f(k, x(k))$$

con la función f dependiendo del entero k que va indicando los sucesivos periodos. En el siguiente capítulo definiremos sistemas de ecuaciones en diferencia con un mayor período de retraso y el estado descrito con varias variables.

Sistemas de ecuaciones en diferencia

En ocasiones, al construir un modelo matemático interesa elegir una variable que tome valores discretos. Así ocurre, por ejemplo con el tiempo, ya que es común realizar mediciones regulares a la hora de controlar un experimento. Estos datos constituyen un conjunto finito o infinito numerable de valores de la variable independiente. Para este tipo de modelos determinísticos discretos, las herramientas matemáticas más adecuadas para analizarlos son las ecuaciones en diferencias. Estas ecuaciones naturalmente se aplican a varios campos del esfuerzo científico: la biología (el estudio de especies competitivas en dinámica poblacional), la física (el estudio de los movimientos de los cuerpos que interactúan), al estudio de los sistemas de control, la neurología y la electricidad.

2.1. Sistemas de ecuaciones en diferencia

Son ecuaciones en las que el estado está descrito por dos o más variables, de tal manera que la evolución en el tiempo de cada una de ellas está descrita por una ecuación en la que intervienen no sólo el instante considerado y el valor en él de esa variable, sino también los valores de las demás variables en dicho instante. La evolución conjunta de todas las variables a intervalos discretos de tiempo, estará regida por un sistema de ecuaciones en diferencia.

Con lo visto en el capítulo anterior, a continuación definiremos con rigor las ecuaciones en diferencia que generalizan con un mayor período de retraso y dimensión.

Definición 2.1. Sean k_0 un entero no negativo, r un número natural y $S = \{k_0, k_0 + 1, \dots\} \subseteq \mathbb{Z}^+$. Un sistema de ecuaciones en diferencia de dimensión n y de orden r sobre el conjunto S , es una expresión de la forma

$$x(k+r) = f[k, x(k+r-1), x(k+r-2), \dots, x(k)], \quad k = k_0, k_0 + 1, \dots \quad (2.1)$$

donde $f : S \times \mathbb{R}^{rn} \rightarrow \mathbb{R}^n$. El sistema se denomina:

- **autónomo (o invariante en el tiempo)**, si f no depende de k ;

- **lineal**, si la aplicación f es lineal en las variables $x(k+r-1), x(k+r-2), \dots, x(k)$.

Para mejor comprensión de los conceptos, analizaremos las siguientes ecuaciones en diferencia de dimensión 1, definidas sobre los enteros no negativos:

$x(k+1) = x(k) + k$ es lineal, no autónoma (pues f depende de k) y de primer orden;

$x(k+2) = -x(k)$ es lineal, autónoma y de segundo orden;

$x(k+1) = x(k)^2 + 1$ es no lineal, autónoma y de primer orden.

Ejemplo 2.1 (Números de Fibonacci 1202). *Leonardo Fibonacci, en su Liber abaci de 1202 planteó el siguiente problema:*

Un hombre pone una pareja de conejos en un lugar cercado por todos lados. ¿Cuántas parejas de conejos tendrá al cabo de un año, a partir de una única pareja, si se supone que cada pareja engendra cada mes una nueva pareja, y es fértil a partir del segundo mes de vida?

Sea F_k el número de parejas existentes al cabo del mes k -ésimo; se comienza con una pareja recién nacida: $F_0 = 1$; al final del primer mes esa pareja todavía es fértil, así que sigue teniéndose $F_1 = 1$; al final del segundo mes la pareja anterior, ya fértil, da origen a una nueva pareja $F_2 = 1 + 1 = F_0 + F_1$. Y, en general $F_{k+2} = (\text{número de parejas existentes en el mes anterior}) + (\text{número de parejas nacidas en el mes } k\text{-ésimo}) = F_{k+1} + F_k$. De este modo, el problema se plantea como una ecuación en diferencia autónoma de segundo orden en \mathbb{Z}^+ .

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k. \quad (2.2)$$

Empezando con $F_0 = 1, F_1 = 1$, se tiene la sucesión

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

A esta sucesión se le conoce como la sucesión de Fibonacci; sus aplicaciones aparecen en una gran variedad de contextos. Más adelante completaremos su solución.

Ejemplo 2.2 (Depredador-presa). *El crecimiento e interacción de dos especies, que compartiendo un mismo medio, están en la relación depredador-presa (por ejemplo, zorros y conejos en una isla). Hagamos las siguientes hipótesis sobre la evolución conjunta de ambas especies:*

- En ausencia de depredadores, las presas no tienen prácticamente limitaciones del medio (en particular, de nutrientes) y crecen con una tasa constante positiva según el modelo malthusiano: $x_{k+1} = ax_k$, con $a > 0$. A su vez, los depredadores, cuyo único alimento son las presas, irán extinguiéndose, en ausencia de éstas, con una tasa negativa:

$$y_{k+1} = dy_k, \quad 0 < d < 1.$$

- Con las dos especies presentes, la evolución de los depredadores vendrá representada por $y_{k+1} = dy_k + cx_k$, $c > 0$, y la de presas por $x_{k+1} = ax_k - by_k$, $b > 0$.

Se tiene entonces el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} x_{k+1} = ax_k - by_k \\ y_{k+1} = cx_k + dy_k \end{cases}$$

cuya dimensión es 2. En su forma matricial, se tiene

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}.$$

Por lo cual, este modelo se puede visualizar como un sistema de ecuaciones de dos variables.

Solución de un sistema de ecuaciones en diferencia

Análogo a la Definición 1.7, se tiene la siguiente definición:

Definición 2.2. Una solución del sistema de ecuaciones en diferencia (2.1), es una aplicación $x : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que satisface la identidad

$$x(k+r) = f[k, x(k+r-1), x(k+r-2), \dots, x(k)].$$

Por lo general, para encontrar soluciones de sistemas de ecuaciones, se procede por el método recursivo (o iteración). Esto significa evaluar la variable independiente k (tiempo) en la ecuación, a partir de un tiempo inicial k_0 , y por inducción se obtendrá una fórmula general.

Ejemplo 2.3. Del Ejemplo 1.5 (dinámica de poblaciones) con tasa de crecimiento constante

$$x(k+1) = ax(k), \quad k \in \mathbb{Z}^+ \tag{2.3}$$

donde $a = (1+r)$. La función $x(k) = a^k$, reduce la ecuación a una identidad. En efecto;

$$x(k+1) = a^{k+1} = aa^k = ax(k).$$

Por lo tanto, es una solución de la relación (2.3). Además cada una de las funciones

$$x(k) = 3a^k, \quad x(k) = 4a^k, \quad x(k) = \frac{1}{5}a^k, \tag{2.4}$$

son soluciones de la ecuación (2.3). De hecho, si C es cualquier constante y x está dado por

$$x(k) = Ca^k. \tag{2.5}$$

Entonces, x es solución de la ecuación. Al elegir adecuadamente el valor de la constante arbitraria C de la ecuación (2.5), podemos obtener cualquiera de las otras soluciones en (2.4). En este sentido, la solución (2.5) se denomina **solución general**, y cualquiera de las identidades de (2.4) se llama **solución particular**.

Alternativamente, una solución particular de la ecuación (2.3) puede verse como una sucesión de números. Por ejemplo, para $a = 1/2$, está representado por:

$$\dots, 8, 4, 2, 1, 1/2, 1/4, 1/8, \dots$$

Los dos puntos de vista de una solución como alguna función de valor entero k y como una sucesión de números, son por supuesto, equivalentes.

La mejor forma de resolver ecuaciones lineales de orden superior es reduciendo el orden. Esto significa, introducir nuevas variables que conviertan a un sistema de ecuaciones de primer orden. A continuación, presentaremos un ejemplo de cómo esta reducción puede realizarse.

Ejemplo 2.4. La sucesión de Fibonacci (del Ejemplo 2.1) se plantea como una ecuación lineal de segundo orden

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k, \quad (2.6)$$

usando la relación

$$G_k = F_{k+1}, \quad (2.7)$$

y sustituyendo (2.7) en (2.6), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} G_{k+1} = G_k + F_k, \\ F_{k+1} = G_k. \end{cases}$$

Por tanto, la ecuación de Fibonacci es equivalente al sistema lineal homogéneo

$$\begin{pmatrix} G_{k+1} \\ F_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_k \\ F_k \end{pmatrix}.$$

Teorema de existencia y unicidad de soluciones

La propia naturaleza de la ecuación en diferencia permite obtener cualquiera de sus soluciones procediendo por iteración a partir del estado inicial x_0 dado, por lo cual la existencia está garantizada. Sin embargo la solución no es única, este hecho se ilustró en el Ejemplo 2.3. La solución debe restringirse a un conjunto de condiciones iniciales. El siguiente teorema es una declaración formal de este hecho.

Teorema 2.1 (Teorema de existencia y unicidad). Sea $S = \{k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \dots\} \subseteq \mathbb{Z}^+$. Dado el sistema de ecuaciones en diferencia de dimensión n y de orden r definida en el conjunto S

$$x(k+r) = f[k, x(k+r-1), x(k+r-2), \dots, x(k)], \quad k = k_0, k_0 + 1, \dots \quad (2.8)$$

Entonces,

- (a) Dados los r -estados iniciales x_0, x_1, \dots, x_{r-1} , existe una aplicación $x : S \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $x(k_0) = x_0, x(k_0 + 1) = x_1, \dots, x(k_0 + r - 1) = x_{r-1}$.
- (b) Dadas las soluciones $x : S \rightarrow \mathbb{R}^n, y : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $x(k_0) = y(k_0), \dots, x(k_0 + r - 1) = y(k_0 + r - 1)$, entonces $x(k) = y(k)$ para todo $k \in S$.

Demostración. (a) La solución que comienza con los valores iniciales x_0, x_1, \dots, x_{r-1} , se obtiene aplicando el proceso iterativo a partir del tiempo inicial k_0 en la ecuación (2.8), esto es,

$$\begin{aligned}
 x(k_0) &= x_0 \\
 &\vdots \\
 x(k_0 + r - 1) &= x_{r-1} \\
 x(k_0 + r) &= f[k_0, x(k_0), x(k_0 + 1), \dots, x(k_0 + r - 1)] \\
 &= f[k_0, x_0, x_1, \dots, x_{r-1}] \\
 x(k_0 + r + 1) &= f[k_0 + 1, x(k_0 + 1), x(k_0 + 2), \dots, x(k_0 + r)] \\
 &= f[k_0 + 1, x_1, x_2, \dots, x_{r-1}, x(k_0 + r)] \\
 x(k_0 + r + 2) &= f[k_0 + 2, x(k_0 + 2), x(k_0 + 3), \dots, x(k_0 + r), x(k_0 + r + 1)] \\
 &= f[k_0 + 2, x_2, x_3, \dots, x(k_0 + r), x(k_0 + r + 1)] \\
 &\vdots \\
 x(k) &= f[k - r, x(k - r), x(k - r + 1), \dots, x(k - 2), x(k - 1)],
 \end{aligned}$$

para todo $k \geq k_0 + r$. De este modo, a partir de los r -valores iniciales, es posible construir la solución de la ecuación (2.8).

(b) Sean x e y dos soluciones de (2.8) que coinciden en las condiciones iniciales, entonces se debe demostrar que $x(k) = y(k)$, para todo $k \geq k_0 + r$; en efecto, procediendo por inducción.

Si $x(k_0 + k) = y(k_0 + k)$, $k \leq r$, entonces

$$\begin{aligned}
 x(k_0 + k + 1) &= f[k_0, x(k_0), x(k_0 + 1), \dots, x(k_0 + k)] \\
 &= f[k_0, y(k_0), y(k_0 + 1), \dots, y(k_0 + k)] \\
 &= y(k_0 + k + 1).
 \end{aligned}$$

De este modo, se demuestra la unicidad de las soluciones de la ecuación (2.8). \square

Cabe señalar que no se aplican restricciones a la función f . La función puede ser altamente no lineal. El ingrediente esencial del resultado es que el valor del índice principal se puede determinar a partir de los valores previos, y este índice principal aumenta paso a paso.

2.2. Sistemas lineales en diferencia

Un sistema lineal de dimensión n se define en términos de n variables $x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)$ que son funciones del índice k , y estas n variables están relacionadas por un sistema de n ecuaciones en diferencia de primer orden. Matricialmente un sistema lineal es de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(k) & a_{12}(k) & \cdots & a_{1n}(k) \\ a_{21}(k) & a_{22}(k) & \cdots & a_{2n}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(k) & a_{n2}(k) & \cdots & a_{nn}(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1(k) \\ w_2(k) \\ \vdots \\ w_n(k) \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}^+ \quad (2.9)$$

donde las variables $x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)$ son las coordenadas del vector de estado; $a_{ij}(k)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$ son coeficientes del sistema; y los valores w_i , $i = 1, 2, \dots, n$ son parámetros que indican los términos de conducción o forzado del sistema.

La descripción anterior es algo tediosa de escribir en detalle. Con la notación vectorial, el sistema (2.9) se puede expresar de la siguiente forma:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + w(k), \quad k \in \mathbb{Z}^+ \quad (2.10)$$

donde $x(k) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $A(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz cuadrada, y $w(k) \in \mathbb{R}^n$ es el vector forzante o de conducción.

Los sistemas lineales se clasifican en homogéneos y no homogéneos. Si el término forzante $\{w(k)\}$ de la ecuación es la sucesión constante cero, la ecuación es *homogénea*; en caso contrario, la ecuación es *no homogénea*. En principio estudiaremos sistemas homogéneos, los cuales se clasifican en: sistemas autónomos (o invariantes en el tiempo) y no autónomos. Posterior a ello, veremos sistemas no homogéneos.

2.3. Sistemas homogéneos

Sistemas Autónomos

Un sistema autónomo de n -ecuaciones y n -variables es una expresión que podemos escribir en su forma vectorial de la siguiente manera:

$$x(k+1) = Ax(k), \quad k \in \mathbb{Z}^+ \quad (2.11)$$

donde $x(k) \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Estos sistemas se consideran autónomos (o invariantes en el tiempo) debido a que las entradas de la matriz A son constantes. En esta sección estudiaremos fórmulas de solución de este tipo de sistemas.

El *problema de valor inicial* (PVI) de la ecuación en diferencia (2.11), consiste en encontrar una solución $(\phi(k, x_0))_{k \in \mathbb{Z}^+}$ para un estado inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ dado, que satisface la condición inicial $\phi(0, x_0) = x_0$. Usaremos la notación $\phi(k, x_0)$, que indica el estado en el período k -ésimo que es generado a partir del estado inicial x_0 .

Observación 2.1. *Notemos que las ecuaciones en diferencia que estudiamos hasta aquí, fuerón sobre una secuencia de enteros no negativos, pero hay algunos sistemas ya sea en su forma general o del tipo (2.11) que pueden ser extendidas sobre todos los enteros (\mathbb{Z}); por ejemplo, para el caso del sistema autónomo, es importante considerar que la matriz A sea invertible.*

Teorema 2.2. *Las siguientes afirmaciones son válidas.*

(a) *Sea la matriz $A \in Gl(n, \mathbb{R})$. El conjunto solución $Sol(A)$ de $x(k+1) = Ax(k)$, forma un espacio vectorial n -dimensional sobre \mathbb{R} .*

(b) *Para cada problema de valor inicial, la solución $(\phi(k, x_0))_{k \in \mathbb{Z}}$ es única y está dada por*

$$\phi(k, x_0) = A^k x_0, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(c) *Para una base v_1, v_2, \dots, v_n de \mathbb{R}^n las funciones $(\phi(k, v_1))_{k \in \mathbb{Z}}, \dots, (\phi(k, v_n))_{k \in \mathbb{Z}}$, forma una base del espacio solución ($Sol(A)$). La función matriz*

$$X(k) := [\phi(k, v_1), \dots, \phi(k, v_n)], \quad k \in \mathbb{Z}$$

es llamada una solución fundamental de $x(k+1) = Ax(k)$ y $X(k+1) = AX(k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Demostración. (a) Esto va ser una consecuencia del Teorema 2.5, que más adelante procederemos con su demostración.

(b) La solución se puede obtener por el método de iteración de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ x(1) &= Ax(0) = Ax_0 \\ &\vdots \\ \phi(k, x_0) = x(k) &= A^k x_0, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

La unicidad está garantizada por la propia ley de recurrencia.

(c) *Linealidad.* En efecto, sean c_1, \dots, c_n escalares arbitrarios, y

$$c_1 \{A^k v_1\} + c_2 \{A^k v_2\} + \dots + c_n \{A^k v_n\} = 0.$$

Aplicando las propiedades de asociatividad y distributividad, tenemos que

$$\begin{aligned} \{A^k c_1 v_1 + A^k c_2 v_2 + \dots + A^k c_n v_n\} &= 0 \\ A^k \{c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n\} &= 0, \end{aligned}$$

y por la invertibilidad de la matriz A , se tiene

$$\{c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n\} = 0$$

de donde $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

Generador. Notemos que para cada $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

$$x = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n,$$

aplicando A^k

$$\begin{aligned} A^kx &= c_1A^kv_1 + c_2A^kv_2 + \cdots + c_nA^kv_n \\ \phi(k, x) &= c_1\phi(k, v_1) + c_2\phi(k, v_2) + \cdots + c_n\phi(k, v_n). \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

De este modo, es base, y la relación $X(k+1) = AX(k)$ es inmediata. \square

Las soluciones de sistemas autónomos dependen de las potencias de la matriz de estado A , puesto que para encontrar soluciones explícitas de la ecuación en diferencia $x(k+1) = Ax(k)$, usaremos la forma Jordan de la matriz A , lo cual, esto induce en primera instancia a analizar si A es diagonalizable, de lo contrario recurrir a la diagonalización a formas de Jordan. Esto se reflejará en la siguiente proposición.

Teorema 2.3. *Sea $A \in Gl(n, \mathbb{R})$ con autoespacio real generalizado $E_i = E(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, r$ para los autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ con $d_i = \dim E_i$ y $\sum_{i=1}^r d_i = n$.*

(a) *Si $A = TJT^{-1}$, entonces $A^k = TJ^kT^{-1}$.*

(b) *Sean v_1, v_2, \dots, v_n una base de \mathbb{R}^n ; por ejemplo, que consiste en vectores propios reales generalizados de A . Si $x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, entonces $\phi(k, x_0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi(k, v_i)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

(c) *Cada autoespacio real generalizado E_i es invariante bajo la solución $\phi(k, x) = A^kx$ de la ecuación lineal en diferencia $x(k+1) = Ax(k)$ (es decir, si $x_0 \in E_i$, también la solución correspondiente satisface $\phi(k, x_0) \in E_i$ para todo $k \in \mathbb{Z}$).*

Demostración. (a) Procediendo por inducción sobre k . Para $k = 1$, se verifica por hipótesis. Asumiendo verdadera para k ; entonces, para $k + 1$, tenemos que

$$A^{k+1} = A^kA = TJ^kT^{-1}TJT^{-1} = TJ^{k+1}T^{-1}.$$

(b) Sea $x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Entonces, para cualquier $k \in \mathbb{Z}$,

$$\varphi(k, x_0) = A^kx_0 = A^k \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i A^k v_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(k, v_i).$$

(c) Sea $E_i = \{v \in \mathbb{R}^n / (A - \lambda_i I)^{d_i} v = 0\}$ cualquier autoespacio real generalizado, y tomemos $x_0 \in E_i$, entonces $(A - \lambda_i I)^{d_i} x_0 = 0$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} (A - \lambda_i I)^{d_i} A^k x_0 &= (A - \lambda_i I) \cdots (A - \lambda_i I) A^k x_0 \\ &= (A - \lambda_i I) \cdots A^k (A - \lambda_i I) x_0 \\ &\vdots \\ &= A^k (A - \lambda_i I)^{d_i} x_0 \\ &= A^k 0 = 0. \end{aligned}$$

De este modo, $\varphi(k, x_0) = A^k x_0 \in E_i$. □

Corolario 2.1. *Si la matriz $A \in Gl(n, \mathbb{R})$ es diagonalizable, entonces $A^k = T D^k T^{-1}$*

Demostración. Como A es una matriz diagonalizable, entonces $A = T D T^{-1}$. Aplicando el Teorema 2.3 (a), se tiene que $A^k = T D^k T^{-1}$. □

Entonces, para tener soluciones explícitas de los sistemas autónomos nos basaremos en el Teorema 2.3 y Corolario 2.1; lo cual implica analizar los valores propios y vectores propios de la matriz de estado (para más detalle, ver el Apéndice A.) Con estos resultados completaremos los ejemplos descritos en el Capítulo 1.

Ejemplo 2.5. *La sucesión de Fibonacci en su forma matricial*

$$\begin{pmatrix} G_{k+1} \\ F_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_k \\ F_k \end{pmatrix},$$

es un sistema lineal homogéneo invariante en el tiempo; la ecuación característica de la matriz de estado es

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

de donde, los autovalores son:

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2};$$

y los autoespacios correspondientes a cada autovalor están generados por los autovectores

$$v_1 = \begin{pmatrix} (1 + \sqrt{5})/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} (1 - \sqrt{5})/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

respectivamente. En consecuencia, por la caracterización de matrices diagonalizables, la matriz de estado es diagonalizable; y la matriz de paso correspondiente es

$$P = \begin{pmatrix} (1 + \sqrt{5})/2 & (1 - \sqrt{5})/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

e inversa

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/(\lambda_2 - \lambda_1) & \lambda_2/(\lambda_2 - \lambda_1) \\ 1/(\lambda_2 - \lambda_1) & -\lambda_1/(\lambda_2 - \lambda_1) \end{pmatrix}, \text{ y } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Aplicando el Teorema 2.1, y sabiendo que $f_0 = \begin{pmatrix} G_0 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, se tiene

$$\begin{pmatrix} G_k \\ F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} G_0 \\ F_0 \end{pmatrix} = PD^k P^{-1} f_0. \quad (2.12)$$

Por otro lado, realizando operaciones se tiene

$$PD^k P^{-1} = \left(\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \begin{pmatrix} -\lambda_1^{k+1} + \lambda_2^{k+1} & \lambda_2 \lambda_1^{k+1} - \lambda_1 \lambda_2^{k+1} \\ -\lambda_1^k + \lambda_2^k & \lambda_2 \lambda_1^k - \lambda_1 \lambda_2^k \end{pmatrix}; \quad (2.13)$$

sustituyendo (2.13) en (2.12), se tiene

$$\begin{pmatrix} G_k \\ F_k \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \begin{pmatrix} -\lambda_1^{k+1} + \lambda_2^{k+1} & \lambda_2 \lambda_1^{k+1} - \lambda_1 \lambda_2^{k+1} \\ -\lambda_1^k + \lambda_2^k & \lambda_2 \lambda_1^k - \lambda_1 \lambda_2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

de donde

$$\begin{aligned} F_k &= \left(\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \left(\lambda_1^k (\lambda_2 - 1) + \lambda_2^k (1 - \lambda_1) \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\lambda_1^{k+1} + \lambda_2^{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1} \right). \end{aligned}$$

De este modo, se obtiene una fórmula para la sucesión de Fibonacci

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right].$$

Sistemas no autónomos

Ahora nos enfocaremos en sistemas de la forma:

$$x(k+1) = A(k)x(k), \quad k = k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \dots \quad (2.14)$$

donde $k_0 \in \mathbb{Z}^+$; $A(k) = (a_{ij}(k))$, $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$ es una función de matriz no singular de tamaño $n \times n$ y $x(k) \in \mathbb{R}^n$.

Estos sistemas se caracterizan debido a que dependen de la variable independiente k , por tanto, es importante entender el concepto de estado a partir del par $(k; x(k))$ que indica el tiempo y su respectivo estado en ese tiempo. La siguiente proposición nos muestra las soluciones explícitas de (2.14) a partir de un estado inicial dado.

Teorema 2.4. *Dado cualquier $k_0 \in \mathbb{Z}^+$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe una única solución $x(k) = \phi(k, k_0, x_0)$, $k_0 \leq k$ de $x(k+1) = A(k)x(k)$ de modo que $\phi(k_0, k_0, x_0) = x_0$.*

Demostración. Recursivamente, reemplazando para $k = k_0, k_0 + 1, \dots$ en la ecuación homogénea, se tiene que

$$\begin{aligned}\phi(k_0 + 1, k_0, x_0) &= x(k_0 + 1) = A(k_0)x(k_0) = A(k_0)x_0, \\ \phi(k_0 + 2, k_0, x_0) &= A(k_0 + 1)x(k_0 + 1) = A(k_0 + 1)A(k_0)x_0, \\ \phi(k_0 + 3, k_0, x_0) &= A(k_0 + 2)A(k_0 + 1)x(k_0 + 1) = A(k_0 + 2)A(k_0 + 1)A(k_0)x_0.\end{aligned}$$

Inductivamente, tenemos que

$$\begin{aligned}\phi(k, k_0, x_0) &= A(k-1)A(k-2) \cdots A(k_0)x_0 \\ \phi(k, k_0, x_0) &= \left[\prod_{i=k_0}^{k-1} A(i) \right] x_0, \quad i = k_0, k_0 + 1, \dots, k-1.\end{aligned}\tag{2.15}$$

Para la unicidad. La propia ley de recurrencia hace que la fórmula (2.15) sea única con las propiedades deseadas. \square

De la relación (2.15), definamos la *matriz transición de estado* del sistema, como

$$\Phi(k, k_0) = \prod_{i=k_0}^{k-1} A(i) = \begin{cases} A(k-1)A(k-2) \cdots A(k_0), & \text{Si } k > k_0, \\ I, & \text{Si } k = k_0. \end{cases}$$

Con esta notación la solución única $\phi(k, k_0, x_0)$, está dado por

$$\phi(k, k_0, x_0) = \Phi(k, k_0)x_0.\tag{2.16}$$

Definición 2.3. *Las soluciones $x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)$ de (2.14) se dice que son linealmente independientes para $k \geq k_0$. Si $c_1x_1(k) + c_2x_2(k) + \cdots + c_nx_n(k) = 0$ para todo $k \geq k_0$, entonces $c_i = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$.*

Observación 2.2. *La definición no requiere que para cada $k \geq k_0$, los vectores $x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)$ sean linealmente independientes. Es suficiente para un valor de k (digamos $k = k_0$) sean linealmente independientes.*

Teorema 2.5. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. El conjunto solución $Sol(A)$ de $x(k+1) = A(k)x(k)$, forma un espacio vectorial n -dimensional sobre \mathbb{R} .*

Demostración. La secuencia $x(k) = 0$, es una solución trivial del sistema. Por otra parte, sean $x_1(k), x_2(k) \in Sol(A)$, y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$; entonces para $x(k) = c_1x_1(k) + c_2x_2(k)$, se tiene

$$x(k+1) = c_1x_1(k+1) + c_2x_2(k+1) = A(k)[c_1x_1(k) + c_2x_2(k)] = A(k)x(k),$$

de este modo, el conjunto $Sol(A)$ es un espacio vectorial.

Construyamos una base para el espacio solución. Para ello sea v_1, v_2, \dots, v_n una base de \mathbb{R}^n ; tomemos las soluciones $\phi_i(k, k_0, v_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ tal que satisfacen la condición inicial $\phi_i(k_0, k_0, v_i) = v_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Ahora veamos si $\phi_1(k, k_0, v_1), \dots, \phi_n(k, k_0, v_n)$ es una base para la $Sol(A)$.

Linealidad. Supongamos que existen escalares $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$c_1\phi_1(k, k_0, v_1) + \dots + c_n\phi_n(k, k_0, v_n) = 0,$$

evaluando esta suma para $k = k_0$, tenemos

$$c_1\phi_1(k_0, k_0, v_1) + \dots + c_n\phi_n(k_0, k_0, v_n) = c_1v_1 + \dots + c_nv_n = 0,$$

Como v_1, \dots, v_n son linealmente independientes, entonces $c_1 = \dots = c_n = 0$. De este modo, se verifica la linealidad.

Generador. Sea $\varphi \in Sol(A)$ y supongamos que $\varphi(k_0) = \xi$. Como v_1, \dots, v_n es una base de \mathbb{R}^n , entonces existen $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$\xi = c_1v_1 + \dots + c_nv_n.$$

Por la linealidad, $c_1\phi_1(k, k_0, v_1) + \dots + c_n\phi_n(k, k_0, v_n) = y(k) \in Sol(A)$, entonces

$$y(k_0) = \xi = \varphi(k_0).$$

Además, por el Corolario 2.4 las soluciones del problema de valor inicial son únicos. Así,

$$\varphi = y = c_1\phi_1(k, k_0, v_1) + \dots + c_n\phi_n(k, k_0, v_n).$$

Por tanto, $\phi_1(k, k_0, v_1), \dots, \phi_n(k, k_0, v_n)$ genera el espacio $Sol(A)$, y así tenemos una base. \square

Observación 2.3. Recordemos el siguiente resultado del algebra lineal: En cualquier espacio vectorial de dimensión n , cualquier conjunto de n elementos linealmente independientes forman una base. Por este resultado, hallar una base en el espacio $Sol(A)$ se reducirá a encontrar un conjunto de n soluciones linealmente independientes.

Corolario 2.2. Sean $\phi_i(k, k_0, v_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$ soluciones tal que satisfacen la condición inicial $\phi_i(k_0, k_0, v_i) = v_i$, $i = 1, 2, \dots, m$. Entonces, $\phi_1(k, k_0, v_1), \dots, \phi_m(k, k_0, v_m)$ son linealmente independientes en el conjunto $Sol(A)$ si y solo si v_1, \dots, v_m son linealmente independientes en \mathbb{R}^n . En particular, si $m = n$, entonces $\phi_1(k, k_0, v_1), \dots, \phi_n(k, k_0, v_n)$ forman una base para $Sol(A)$ si y solo si v_1, \dots, v_n es una base para \mathbb{R}^n .

Demostración. El argumento usado en la demostración del Teorema 2.5 muestra que si v_1, \dots, v_m son linealmente independientes en \mathbb{R}^n , entonces $\phi_1(k, k_0, v_1), \dots, \phi_m(k, k_0, v_m)$ son linealmente independientes en $Sol(A)$.

Recíprocamente, sean $\phi_1(k, k_0, v_1), \dots, \phi_m(k, k_0, v_m)$ linealmente independientes en $Sol(A)$ y supongamos que existen $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ tal que

$$c_1 v_1 + \dots + c_m v_m = 0.$$

Por linealidad, $c_1 \phi_1(k, k_0, v_1) + \dots + c_m \phi_m(k, k_0, v_m) = y(k) \in Sol(A)$. Para $k = k_0$, satisface que $y(k_0) = 0$, entonces

$$y(k) = 0 = c_1 \phi_1(k, k_0, v_1) + \dots + c_m \phi_m(k, k_0, v_m),$$

de donde $c_1 = \dots = c_m = 0$. □

Una base del conjunto $Sol(A)$ juega un papel fundamental en esta clase de sistemas homogéneos, que a continuación desarrollaremos.

Conjunto fundamental de soluciones

Ahora desarrollaremos la noción de matriz fundamental, para ello consideremos una colección de n soluciones de la ecuación homogénea 2.14 tal que $x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)$ es una base del espacio solución $Sol(A)$ (por la observación 2.3 es suficiente pedir que sean linealmente independientes). Con el fin de facilitar las manipulaciones requeridas, es conveniente ordenar estas n soluciones en n columnas de una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$, de la forma:

$$\mathbf{X}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) & x_2(k) & \dots & x_n(k) \end{bmatrix}.$$

A esta matriz de soluciones denominaremos *matriz fundamental de soluciones*. Además satisface la ecuación homogénea. En efecto;

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(k+1) &= [x_1(k+1) \ x_2(k+1) \ \dots \ x_n(k+1)] \\ &= A(k)[x_1(k) \ x_2(k) \ \dots \ x_n(k)] \\ &= A(k)\mathbf{X}(k). \end{aligned}$$

De este modo,

$$\mathbf{X}(k+1) = A(k)\mathbf{X}(k). \tag{2.17}$$

Teorema 2.6. *La matriz fundamental de soluciones $\mathbf{X}(k)$ es no singular para cualquier valor de $k \geq k_0$.*

Demostración. El resultado se deriva de la independencia lineal de las soluciones y de la no singularidad de la matriz $A(k)$. Procediendo por el absurdo, supongamos que $\mathbf{X}(k_0)$ es singular para algún índice k_0 . Entonces, por un resultado del algebra lineal (Lema fundamental), se sigue que

$$\mathbf{X}(k_0)v = 0, \tag{2.18}$$

para algún vector $v \in \mathbb{R}^n$ diferente de cero. Multiplicando por $A(k_0)$, tenemos

$$\mathbf{X}(k_0 + 1)v = A(k_0)\mathbf{X}(k_0)v = 0.$$

Si multiplicamos nuevamente a la ecuación (2.18) por $A(k_0 + 1)$, se tiene

$$\mathbf{X}(k_0 + 2)v = A(k_0 + 1)A(k_0)\mathbf{X}(k_0)v = 0.$$

Inductivamente, se obtiene que $\mathbf{X}(k)v = 0$, para todo $k \geq k_0$. Esto es equivalente a

$$v_1x_1(k) + v_2x_2(k) + \cdots + v_nx_n(k) = 0.$$

lo que contradice la suposición de que el conjunto fundamental de soluciones es linealmente independiente, con esto se tiene que el vector $v = (v_1, \dots, v_n) = 0$. \square

Corolario 2.3. *Las soluciones $x_1(k), \dots, x_n(k)$ son linealmente independientes si y solo si $\mathbf{X}(k)$ es no singular para todo $k \geq k_0$.*

Demostración. Por el teorema anterior sólo falta probar el recíproco, para esto supongamos que $\mathbf{X}(k) = [x_1(k) \cdots x_n(k)]$ es no singular. Por otro lado, sea

$$c_1x_1(k) + \cdots + c_nx_n(k) = 0, \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

equivalentemente, $\mathbf{X}(k)c = 0$, por la no singularidad de la matriz fundamental, $c = 0$. Por tanto, las soluciones $x_1(k), \dots, x_n(k)$ son linealmente independientes. \square

El siguiente resultado es un criterio para verificar la no singularidad de la matriz fundamental de soluciones $X(k)$.

Lema 2.1 (Fórmula de Abel). *Para cualquier $k \geq k_0$.*

$$\det[\mathbf{X}(k)] = \left(\prod_{i=k_0}^{k-1} \det[A(i)] \right) \det[\mathbf{X}(k_0)]. \quad (2.19)$$

Demostración. Procediendo por inducción, supongamos que para cualquier k , la ecuación es verdadera. Ahora veamos para $k + 1$.

Por definición, la matriz fundamental $\mathbf{X}(k)$ satisface la ecuación en diferencia matricialmente

$$\mathbf{X}(k + 1) = A(k)\mathbf{X}(k),$$

aplicando el determinante, se obtiene la ecuación escalar

$$\begin{aligned} \det[\mathbf{X}(k + 1)] &= \det[A(k)]\det[\mathbf{X}(k)], \\ &= \det[A(k)] \left(\prod_{i=k_0}^{k-1} \det[A(i)] \right) \det[\mathbf{X}(k_0)] \\ &= \left(\prod_{i=k_0}^k \det[A(i)] \right) \det[\mathbf{X}(k_0)]. \end{aligned}$$

\square

Lema 2.2. Si $A(n)$, $n \geq n_0$ es una matriz constante de la ecuación $x(k+1) = A(k)x(k)$, entonces

$$\det \mathbf{X}(n) = [\det A]^{n-n_0} \det \mathbf{X}(n_0). \quad (2.13)$$

Corolario 2.4. La matriz fundamental $\mathbf{X}(k)$ es no singular para todo $k \geq k_0$ si y solo si $\mathbf{X}(k_0)$ es no singular.

Demostración. Por el Teorema 2.6, sólo falta probar el recíproco, para ello supongamos que $\mathbf{X}(k_0)$ es no singular (esto es, $\det[\mathbf{X}(k_0)] \neq 0$). Como $A(k)$ es no singular, esto es, $\det[A(i)] \neq 0$ para todo $i \geq k_0$. Luego por la Fórmula de Abel, $\det[\mathbf{X}(k)] \neq 0$, de donde $\mathbf{X}(k)$ es no singular \square

Con el conocimiento de la matriz fundamental, es fácil derivar una expresión para la matriz transición de estado en función de la matriz fundamental de soluciones. En vista de esta relación, podemos establecer la siguiente proposición.

Teorema 2.7. Sea $\mathbf{X}(k)$ una matriz fundamental de soluciones correspondiente al sistema

$$x(k+1) = A(k)x(k),$$

entonces la matriz de transición de estado está dado por la expresión

$$\Phi(k, k_0) = \mathbf{X}(k)\mathbf{X}(k_0)^{-1}, \text{ para } k \geq k_0.$$

Demostración. Sea $x(k)$ una solución, con la condición inicial $x(k_0)$, y consideremos la sucesión vectorial $y(k)$ definida en términos de la condición inicial $x(k_0)$ por

$$y(k) = \mathbf{X}(k)\mathbf{X}(k_0)^{-1}x(k_0),$$

Está claro que, $y(k_0) = x(k_0)$. Además, si el vector v está definido por

$$v = \mathbf{X}(k_0)^{-1}x(k_0),$$

tenemos que

$$y(k) = \mathbf{X}(k)v.$$

A partir de esta expresión, está claro que $y(k)$ es una combinación lineal de soluciones, y por la linealidad del sistema, esta combinación lineal es una solución. Sin embargo, dado que tiene el valor inicial $x(k_0)$, las dos soluciones $x(k)$ y $y(k)$ deben ser idénticas (por la singularidad de las soluciones); eso es $y(k) = x(k)$. Por lo tanto, se deduce que cualquier solución $x(k)$ se puede expresar como

$$x(k) = \mathbf{X}(k)\mathbf{X}(k_0)^{-1}x(k_0).$$

Por otro lado, como $x(k)$ es solución, entonces

$$x(k) = \Phi(k, k_0)x(k_0),$$

de donde

$$\Phi(k, k_0) = \mathbf{X}(k)\mathbf{X}(k_0)^{-1}.$$

□

Lema 2.3. Si $\mathbf{X}(k)$ es una matriz fundamental, y $C \in Gl(n, \mathbb{R})$ es una matriz no singular, entonces $\mathbf{X}(k)C$ es una matriz fundamental.

Demostración. Por la linealidad de la matriz fundamental, $\mathbf{X}(k)C$ también es solución del espacio $Sol(A)$. Para la independencia lineal, sea $v \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\mathbf{X}(k)Cv = 0,$$

como $\mathbf{X}(k)$ y C son invertibles, entonces $v = 0$. Así, $\mathbf{X}(k)C$ es una matriz fundamental. □

Corolario 2.5. La matriz transición de estado $\Phi(k, k_0)$ es una matriz fundamental.

Demostración. Como $\mathbf{X}(k)$ es una matriz fundamental de soluciones, por el lema 2.3, también $\mathbf{X}(k)\mathbf{X}(k_0)^{-1}$ es una matriz fundamental de soluciones; de donde, $\Phi(k, k_0)$ es una matriz fundamental de soluciones. □

Definición 2.4. Sea $\{x_i(k) | 1 \leq i \leq n\}$ el conjunto de soluciones linealmente independientes de 2.14. Su **solución general** se define como

$$x(k) = \sum_{i=1}^n c_i x_i(k),$$

donde cada $c_i \in \mathbb{R}$ y al menos uno $c_i \neq 0$, de manera equivalente es

$$x(k) = \mathbf{X}(k)c,$$

donde $\mathbf{X}(n)$ es una matriz fundamental de soluciones y $c \in \mathbb{R}^k$.

Ejemplo 2.6 (Sistema no autónomo). Consideremos el sistema homogéneo definida como

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Lo primero será encontrar un conjunto fundamental de soluciones, para ello consideremos dos condiciones iniciales linealmente independientes.

Para el estado inicial $x_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, se tiene que la solución es la secuencia

$$x_1(k) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{para todo } k \geq 0$$

Para el estado inicial $x_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, se puede construir una segunda solución mediante sustitución repetida en la ecuación del sistema, evaluando para $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots$$

Por lo tanto, buscando una fórmula general tenemos la segunda solución definida por

$$x_2(k) = \begin{pmatrix} k(k+1)/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Estas dos soluciones son linealmente independientes. Por tanto, forma una matriz fundamental de soluciones

$$\mathbf{X}(k) = \begin{pmatrix} 1 & k(k+1)/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

luego, nuestra matriz de transición de estado esta formado por

$$\mathbf{X}(k)\mathbf{X}(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & k(k+1)/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k(k+1)/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, para cualquier vector inicial $x(0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$, la solución esta dada por

$$x(k) = \mathbf{X}(k)\mathbf{X}(0)^{-1}x(0),$$

de donde, tenemos la solución general

$$x(k) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 k(k+1)/2 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

2.4. Sistemas no homogéneos

El sistema *no homogéneo* a estudiar es de la forma:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + g(k), \quad k = k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \dots \quad (2.20)$$

donde $k_0 \in \mathbb{Z}^+$, $A(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $g: S \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $S = \{k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \dots\}$.

En esta sección está destinado a estudiar este tipo de sistemas, más comunmente conocido como sistemas lineales, que a continuación desarrollaremos resultados importantes que con frecuencia utilizaremos en el próximo capítulo.

Teorema 2.8 (Fórmula de variación de constantes). *La única solución del problema de valor inicial*

$$y(k+1) = A(k)y(k) + g(k), \quad y(k_0) = y_0, \quad (2.21)$$

es

$$\phi(k, k_0, y_0) = \Phi(k, k_0)y_0 + \sum_{r=k_0}^{k-1} \Phi(k, r+1)g(r),$$

o más explícitamente

$$\phi(k, k_0, y_0) = \left(\prod_{i=k_0}^{k-1} A(i) \right) y_0 + \sum_{r=k_0}^{k-1} \left(\prod_{i=r+1}^{k-1} A(i) \right) g(r).$$

Demostración. Procederemos por recursión. Evaluando los valores de $k = k_0, k_0 + 1, \dots$ en la ecuación (2.21), se tiene

$$\begin{aligned} \phi(k_0 + 1, k_0, x_0) &= y(k_0 + 1) = A(k_0)y(k_0) + g(k_0) = A(k_0)y_0 + g(k_0), \\ \phi(k_0 + 2, k_0, x_0) &= A(k_0 + 1)A(k_0)y_0 + A(k_0 + 1)g(k_0) + g(k_0 + 1), \\ \phi(k_0 + 3, k_0, x_0) &= A(k_0 + 2)A(k_0 + 1)A(k_0)y_0 + A(k_0 + 2)A(k_0 + 1)g(k_0) \\ &\quad + A(k_0 + 2)g(k_0 + 1) + g(k_0 + 2), \\ &\vdots \\ \phi(k, k_0, y_0) &= \left(\prod_{i=k_0}^{k-1} A(i) \right) y_0 + \sum_{r=k_0}^{k-1} \left(\prod_{i=r+1}^{k-1} A(i) \right) g(r). \\ \phi(k, k_0, y_0) &= \Phi(k, k_0)y_0 + \sum_{r=k_0}^{k-1} \Phi(k, r+1)g(r). \end{aligned}$$

Para la unicidad. La propia ley de recurrencia hace que la solución sea única con las propiedades deseadas. \square

Es de interés estudiar los sistemas lineales invariantes en el tiempo, cuando $A(k)$ es una matriz constante y la función $g(k) = Bu(k)$, este tipo de sistemas estudiaremos en el siguiente capítulo. A continuación presentaremos un resultado para este tipo de sistemas lineales.

Corolario 2.6. *Para el sistema lineal de la forma*

$$y(k+1) = Ay(k) + Bu(k), \quad \text{con } y(k_0) = y_0$$

la solución viene dada por

$$\phi(k, k_0, y_0) = A^{k-k_0}y_0 + \sum_{i=k_0}^{k-1} A^{k-i-1}Bu(i).$$

Demostración. Del Teorema 2.8, para $A(i) = A$ y $g(r) = Bu(r)$, se tiene que

$$\phi(k, k_0, y_0) = A^{k-k_0}y_0 + \sum_{r=k_0}^{k-1} A^{k-r-1}Bu(r)$$

□

Ejemplo 2.7. Resolver el sistema $y(k+1) = Ay(k) + g(k)$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad g(k) = \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como la matriz A es un bloque de Jordan. Entonces, por el cálculo de las potencias de los bloques de Jordan (ver Apéndice A), se tiene que

$$A^k = \begin{pmatrix} 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

Aplicando el Corolario 2.6, tenemos

$$\begin{aligned} y(k) &= \begin{pmatrix} 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{r=0}^{k-1} \begin{pmatrix} 2^{k-r-1} & (k-r-1)2^{k-r-2} \\ 0 & 2^{k-r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^k \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{r=0}^{k-1} \begin{pmatrix} r2^{k-r-1} + (k-r-1)2^{k-r-2} \\ 2^{k-r-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^k \\ 0 \end{pmatrix} + 2^k \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \sum_{r=1}^{k-1} r \left(\frac{1}{2}\right)^r + \frac{k-1}{4} \sum_{r=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^r \\ \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^r \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^k \\ 0 \end{pmatrix} + 2^k \begin{pmatrix} -\frac{k}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{k}{2} - \frac{k}{2} \left(\frac{1}{2}\right) \\ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{pmatrix} \tag{2.22} \\ &= \begin{pmatrix} 2^k \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k2^{k-1} - \frac{3}{4}k \\ 2^k - 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^k + k2^{k-1} - \frac{3}{4}k \\ 2^k - 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En la relación (2.22), se utilizarán los siguientes argumentos:

$$\sum_{r=1}^{k-1} ra^r = \frac{a(1-a^k) - ka^{k+1}(1-a)}{(1-a)^2}, \quad \sum_{r=0}^{k-1} a^r = \frac{1-a^k}{1-a}.$$

Sistemas de control discreto

La Teoría de Control consiste en estudiar las propiedades de los sistemas a partir de su comportamiento. Esta teoría pone énfasis el concepto de estado del sistema. En una primera aproximación, el estado de un sistema en un instante dado es el valor de unas variables internas del sistema que describen a lo largo del tiempo, la evolución del mismo.

3.1. Definiciones fundamentales

Según Rosenbrock, “*es más fácil distinguir un sistema que definirlo*”. Se han propuesto varias definiciones formales de *sistema*, todas ellas buscando un modelo para el mismo concepto.

En este trabajo presentaremos una definición de sistema a través del concepto de estado. Para ello, pensemos en la ecuación

$$x(k+1) = Ax(k) + Bw(k),$$

no como ecuación en diferencia sino que para cada par de tiempos $k > k_0$ como una regla para obtener cualquier valor $x(k)$ a partir de las especificaciones de $x(k_0)$ y de la restricción u del control $w(\cdot)$ al intervalo entre k_0 y k . Para usar esta regla usaremos la notación

$$x(k) = \phi(k, k_0, x, u),$$

que se puede leer el lado derecho como “el estado en el tiempo k que resulta de comenzar en el estado x en tiempo k_0 y aplicando la función de entrada u ”.

Debido a que las soluciones de ecuaciones en diferencia no existen en general para todos los pares de tiempo inicial y final; por eso solo puede definirse ϕ en un subconjunto del conjunto de posibles cuádruples (k, k_0, x, u) . Para ello, lo primero vamos a introducir conceptos, terminologías y las relaciones que se necesitan entre distintos conjuntos constitutivos de sistema.

Definición 3.1. *Un conjunto de tiempo \mathcal{T} es un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$.*

Un sistema dinámico evoluciona con el tiempo, y por lo tanto, las variables que describen el comportamiento del sistema son funciones del tiempo. Para nuestro ámbito de estudio, el conjunto de tiempo \mathcal{T} es considerado el conjunto de los números enteros (\mathbb{Z}).

Por convención de notación, cuando el conjunto de tiempo establecido \mathcal{T} se entiende a partir del contexto, se supone que todos los intervalos están restringidos a \mathcal{T} ; por ejemplo, para referirnos al intervalo

$$[k_0, k_1) = \{k \in \mathcal{T} : k_0 \leq k < k_1\}. \quad (3.1)$$

Como ya venimos denotando en los capítulos anteriores a los elementos del conjunto tiempo denotaremos con k .

Sea U un conjunto no vacío e $\mathcal{I} = [k_0, k_1)$ un intervalo de tiempo. Al conjunto de todas las aplicaciones de \mathcal{I} a U , denotaremos por

$$\mathcal{U}^{\mathcal{I}} = \{u/u : \mathcal{I} \rightarrow U\}; \quad (3.2)$$

y al conjunto de todas las aplicaciones, denotaremos con \mathcal{U} ; es decir,

$$\mathcal{U} = \bigcup \{\mathcal{U}^{[k_0, k_1)} : k_0 \leq k_1\}.$$

Observación 3.1. *El conjunto de las aplicaciones $\mathcal{U}^{[k_0, k_1)}$, se puede identificar como el conjunto de todas las sucesiones*

$$u(k_0), u(k_0 + 1), \dots, u(k_1 - 1),$$

que toma valores en U . En particular, si el tiempo inicial $k_0 = 0$ y $k_1 = T$, el conjunto $\mathcal{U}^{[0, T)}$ se puede identificar como el conjunto de todas las sucesiones

$$u(0), u(1), \dots, u(T - 1),$$

de tamaño T .

En el caso particular, en el que \mathcal{I} es un intervalo vacío, el conjunto de aplicaciones $\mathcal{U}^{\mathcal{I}}$ en la relación (3.2) consiste de un solo elemento, que denotaremos con \diamond ; esto se puede considerar como la sucesión vacía de longitud cero.

Principio de concatenación. Sean k_0 , k_1 y k_2 números enteros que satisfacen $k_0 \leq k_1 \leq k_2$. Si $u_1 \in \mathcal{U}^{[k_0, k_1)}$, $u_2 \in \mathcal{U}^{[k_1, k_2)}$, su *concatenación*, denotado con $u_1 u_2$ es la sucesión

$$u_1 u_2(k) = \begin{cases} u_1(k), & \text{si } k \in [k_0, k_1), \\ u_2(k), & \text{si } k \in [k_1, k_2). \end{cases}$$

Notemos que

$$u \diamond = \diamond u = u.$$

Con estas consideraciones previas, definiremos el concepto de sistema de control discreto.

Definición 3.2. Un *sistema de control discreto* es la 4-tupla $(\mathcal{T}, \mathcal{X}, U, \phi)$, denotado por Σ , que consta de:

- Un conjunto de tiempo \mathcal{T} ;
- Un conjunto no vacío \mathcal{X} , llamado *espacio de estado* del sistema;
- Un conjunto no vacío U , denominado *espacio de control* o *valor de control* del sistema; y
- Una aplicación $\phi : \mathcal{D}_\phi \rightarrow \mathcal{X}$, denominado *aplicación transición del sistema*, que se define en un subconjunto \mathcal{D}_ϕ de

$$\{(k, k_0, x, u) : k_0, k \in \mathcal{T}, k_0 \leq k, x \in \mathcal{X}, u \in \mathcal{U}^{[k_0, k]}\},$$

tal que cumplen los siguientes axiomas:

A1. No trivialidad. Para cada estado $x \in \mathcal{X}$, existe al menos un par $k_0 < k_1$ en \mathcal{T} , y algún control $u \in \mathcal{U}^{[k_0, k_1]}$ tal que u es **admisibles para** x ; es decir, para que $(k_1, k_0, x, u) \in \mathcal{D}_\phi$,

A2. Restricción. Si el control $u \in \mathcal{U}^{[k_0, k_1]}$ es admisible para x , entonces para cada $k \in [k_0, k_1)$ la restricción $u_1 = u|_{[k_0, k]}$ de u para el subintervalo $[k_0, k)$ también es admisible para x y la restricción $u_2 = u|_{[k, k_1]}$ es admisible para $\phi(k, k_0, x, u_1)$,

A3. Semigrupo. Sean $k_0, k_1, k_2 \in \mathcal{T}$ de modo que $k_0 < k_1 < k_2$. Si $u_1 \in \mathcal{U}^{[k_0, k_1]}$ y $u_2 \in \mathcal{U}^{[k_1, k_2]}$, y si x es un estado tal que

$$\phi(k_1, k_0, x, u_1) = x_1 \quad \text{y} \quad \phi(k_2, k_1, x_1, u_2) = x_2,$$

entonces $u = u_1 u_2$ es admisible para x , y

$$\phi(k_2, k_0, x, u) = \phi(k_2, k_1, \phi(k_1, k_0, x, u_1), u_2) = x_2,$$

A4. Identidad. Para cada $k \in \mathcal{T}$ y cada $x \in \mathcal{X}$, la secuencia vacía $\diamond \in \mathcal{U}^{[k, k]}$ es admisible para x y se tiene $\phi(k, k, x, \diamond) = x$.

Los elementos de \mathcal{X} son llamados **estados**, los elementos de U son llamados **valores de control** o **valores de entrada** y las aplicaciones $u \in \mathcal{U}^{[k_0, k_1]}$ son llamados **controles** o **entradas**.

Definiendo formalmente el control. Sea $\mathcal{I} = [k_0, k_1) \subset \mathbb{Z}$ un intervalo de tiempo. Un control es una sucesión finita, definida como

$$u : [k_0, k_1) \rightarrow U;$$

cuya longitud es

$$|u| = k_1 - k_0.$$

En la definición de sistema, $\phi(k, k_0, x, u)$ se lee como “el estado en el tiempo k que resulta de comenzar en el estado x en tiempo k_0 y al aplicar la función de entrada u ”. La definición permite la posibilidad de transiciones indefinidas, cuando la entrada u no es admisible para el estado dado.

Algunas convenciones simplificadoras son útiles. Cuando k_0, k_1 son claros desde el contexto, escribiremos $\phi(k_1, k_0, x, u)$ simplemente como $\phi(x, u)$. Una fórmula como

$$\phi(k_1, k_0, x, u) = z \tag{3.3}$$

implícitamente significará “ u es admisible para x y $\phi(k_1, k_0, x, u) = z$ ”.

Algunas clasificaciones

Anteriormente estudiamos la definición de sistema de control en términos generales, en esta sección clasificaremos estos sistemas.

Definición 3.3. *El sistema Σ es **completo**, si cada entrada es admisible para cualquier estado; esto es,*

$$\mathcal{D}_\phi = \{(k_1, k_0, x, u) : k_0, k_1 \in \mathcal{T}, k_0 \leq k_1, x \in \mathcal{X}, u \in \mathcal{U}^{[k_0, k_1]}\}.$$

Más general, para cualquiera familia de controles $\mathcal{V} \subset \bigcup_{k_0 \leq k} \mathcal{U}^{[k_0, k]}$, \mathcal{V} -completitud significa que (k, k_0, x, u) está en \mathcal{D}_ϕ siempre que $k_0 \leq k$, $x \in \mathcal{X}$, $u \in \mathcal{V}$.

Observación 3.2. *Los axiomas de no trivialidad y restricción en la definición de sistema, son automáticamente ciertos si el sistema es completo.*

Definición 3.4. *El sistema Σ no tiene controles si el espacio de valor de control U posee un solo elemento.*

En estos casos se dice que el sistema Σ es un sistema dinámico clásico; es decir, $\phi(k, k_0, x, u)$ es independiente de la última coordenada, luego la aplicación transición de estado escribimos solamente como $\phi(k, k_0, x)$.

La subclase general más estudiado es la de sistemas invariantes en el tiempo, estos sistemas son independiente del tiempo; es decir, $\phi(k, k_0, x, u)$ depende solo de $k - k_0, x, u$. A continuación definiremos un sistema invariante en el tiempo.

Definición 3.5. *El sistema Σ es **invariante en el tiempo** si para cada control $u \in \mathcal{U}^{[k_0, k_1]}$, $x \in \mathcal{X}$, y para cualquier $s \in \mathcal{T}$; si u es admisible para x , entonces la traslación*

$$u^s \in \mathcal{U}^{[k_0+s, k_1+s]}, \quad u^s(k) = u(k - s),$$

es admisible para x, y

$$\phi(k_1, k_0, x, u) = \phi(k_1 + s, k_0 + s, x, u^s).$$

Observación 3.3. Cuando se trata de sistemas invariantes en el tiempo, es usual identificar los controles con sus traslaciones; es decir, el control $u_1 \in \mathcal{U}^{[k_0, k_1]}$ es identificado con $u_2 \in \mathcal{U}^{[0, k]}$ con $k = k_1 - k_0$. Esto debido a que el sistema no depende del tiempo, en ese sentido utilizaremos para esta clase de sistemas, el control traslación definido desde el tiempo inicial 0.

Con estos conocimientos generales de sistemas de control discreto, a continuación concretizaremos sistemas de control definido para sistemas de ecuaciones en diferencia con control, debido a que estas ecuaciones presentan dinámicas en tiempo discreto.

3.2. Sistemas de control en diferencia

En esta sección deseamos definir sistemas de control de tiempo discreto como aquellos que se describen mediante ecuaciones en diferencia

$$x(k+1) = f(k, x(k), u(k)), \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3.4)$$

donde $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función arbitraria, con $U \subseteq \mathbb{R}^m$.

Nosotros denominaremos a este tipo de relaciones, *ecuaciones en diferencia con control o sistemas de control en diferencia*. Para tener un sistema bien definido, necesitamos que las soluciones de esta ecuación para condiciones iniciales arbitrarias y controles dados existan.

Lema 3.1. Dados un sistema de ecuaciones en diferencia de la forma (3.4) y cualquier par de números enteros de modo que $k_0 < k_1$. Para cualquier control $u \in \mathcal{U}^{[k_0, k_1]}$ admisible para el estado arbitrario x_0 ; existe una única solución x definida en $[k_0, k_1]$ de modo que

$$\begin{cases} x(k+1) = f(k, x(k), u(k)) \\ x(k_0) = x_0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Demostración. (a) Como las ecuaciones en diferencia son relaciones recursivos, y la aplicación u es admisible para x_0 . Entonces para la existencia de su solución procederemos por recursividad.

$$\begin{aligned} x(k_0) &= x_0 \\ x(k_0 + 1) &= f(k_0, x_0, u(k_0)) \\ x(k_0 + 2) &= f(k_0 + 1, x(k_0 + 1), u(k_0 + 1)) \\ &= f(k_0 + 1, f(k_0, x_0, u(k_0)), u(k_0 + 1)) \\ x(k_0 + 3) &= f(k_0 + 2, x(k_0 + 2), u(k_0 + 2)) \\ &= f(k_0 + 2, f(k_0 + 1, f(k_0, x_0, u(k_0)), u(k_0 + 1)), u(k_0 + 2)) \\ &\vdots \\ x(k_1) &= f(k_1 - 1, f(k_1 - 2, \dots, f(k_0, x_0, u(k_0)), u(k_0 + 1)), u(k_0 + 2), \dots, u(k_1 - 1)). \end{aligned}$$

De este modo, se construye una solución definida en $[k_0, k_1]$ del problema de valor inicial. Además, la propia ley de recurrencia hace que esta solución sea única. \square

Lema 3.2. *Sea el sistema de ecuaciones en diferencia con control como en la relación 3.4, y consideremos el conjunto*

$$D = \{(k_1, k_0, x, u) : \text{para cada } x \in \mathcal{X}, \exists u \in \mathcal{U}^{[k_0, k_1]} \text{ admisible para } x \text{ con } k_0 < k_1\}.$$

Sobre este conjunto definamos la función transición de estado como la solución del problema de valor inicial como en el Lema 3.1; es decir,

$$\phi(k, k_0, x, u) = x(k).$$

Entonces, la 4 – tupla $(\mathbb{Z}, \mathcal{X}, U, \phi)$ es un sistema de control discreto.

Demostración. Las ecuaciones en diferencia con control posee todos los elementos del sistema; solo nos faltaría ver, la solución que es aplicación transición de estado satisfaga los axiomas de sistema. Pero por la forma de como esta definida el conjunto D , por el Lema anterior, y por la recursividad de estas ecuaciones, los axiomas de sistema satisfacen de manera inmediata. \square

Al sistema de control definido para ecuaciones en diferencia en el Lema 3.2 lo denotaremos con $\Sigma_d = (\mathbb{Z}, \mathcal{X}, U, \phi)$. Para fines prácticos, es conveniente identificar esta clase de sistemas simplemente como el sistema $x(k+1) = f(k, x(k), u(k))$. A continuación nos centraremos en estudiar sistemas cuando la función f es lineal.

Sistemas de control lineal

Consideremos el campo de los números reales \mathbb{R} . Los términos de espacio vectorial siempre se interpretarán con respecto a este campo fijo \mathbb{R} .

Definición 3.6. *El sistema de control discreto Σ_d es **lineal** (sobre el campo \mathbb{R}) si:*

- *Es completo;*
- *\mathcal{X}, U son espacios vectoriales; y*
- *$f(k, \cdot, \cdot)$ es lineal para cada $k \in \mathbb{Z}$.*

El sistema es de **dimensión finita**, si los espacios U, \mathcal{X} son de dimensión finita; en ese caso la **dimensión** del sistema Σ_d se define como la dimensión del espacio de estado \mathcal{X} .

Consideremos m, n enteros positivos. Para tener un sistema lineal discreto asumiremos $U = \mathbb{R}^m, \mathcal{X} = \mathbb{R}^n$. Por ende, el producto cartesiano $\mathcal{X} \times U$ también tendrá la estructura de espacio vectorial con las operaciones de coordenada; esto es,

$$(x_1, u_1) + \lambda(x_2, u_2) = (x_1 + \lambda x_2, u_1 + \lambda u_2), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Además, para cualquier par de tiempos $k_0, k_1 \in \mathbb{Z}$ tales que $k_0 < k_1$. El conjunto de controles $\mathcal{U}^{[k_0, k_1]}$ tiene estructura lineal con las operaciones puntuales; esto es,

$$(u + w)(k) = u(k) + w(k) \quad y \quad (\lambda u)(k) = \lambda u(k), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Observación 3.4. (a) *Complejitud significa que $f(k, \cdot, \cdot)$ es definido para cada terna (k, x, u) .*

(b) *La linealidad es equivalente a la existencia de aplicaciones lineales*

$$\begin{aligned} A(k) : \mathcal{X} &\rightarrow \mathcal{X}, & B(k) : U &\rightarrow \mathcal{X}, & k &\in \mathbb{Z}^+ \\ x &\rightarrow A(k)x & u &\rightarrow B(k)u \end{aligned}$$

(o $f(k, \cdot, 0)$ y $f(k, 0, \cdot)$, respectivamente) tal que

$$f(k, x, u) = A(k)x + B(k)u.$$

Los sistemas invariantes en el tiempo resulta precisamente cuando las aplicaciones $A(k), B(k)$ son independientes de k .

Lema 3.3. *Si el sistema de control discreto Σ_d es lineal, entonces $\phi(k, k_0, \cdot, \cdot)$ es lineal, para cualquier par de enteros positivos con $k_0 \leq k$.*

Demostración. Sean $k_0, k \in \mathbb{Z}^+$ de modo que $k \geq k_0$, $(x_1, u_1), (x_2, u_2) \in \mathcal{X} \times U$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Aplicando la fórmula de variación de constantes, tenemos que

$$\begin{aligned} \phi(k, k_0, x_1 + \lambda x_2, u_1 + \lambda u_2) &= \Phi(k, k_0)(x_1 + \lambda x_2) + \sum_{r=k_0}^{k-1} \Phi(k, r+1)B(r)(u_1(r) + \lambda u_2(r)) \\ &= \Phi(k, k_0)x_1 + \lambda \Phi(k, k_0)x_2 + \sum_{r=k_0}^{k-1} \Phi(k, r+1)B(r)u_1(r) + \\ &\quad \lambda \sum_{r=k_0}^{k-1} \Phi(k, r+1)B(r)u_2(r) \\ &= \phi(k, k_0, x_1, u_1) + \lambda \phi(k, k_0, x_2, u_2). \end{aligned}$$

De este modo, ϕ es lineal en las variables de estado y control. □

Consecuencia de este lema tenemos las siguientes proposiciones.

Corolario 3.1. *Si el sistema Σ_d es lineal, entonces $\phi(k, k_0, 0_x, 0_u) = 0_x$ para todo $k, k_0 \in \mathbb{Z}^+$, con $k_0 \leq k$.*

Corolario 3.2 (Principio de descomposición). *Si el sistema Σ_d es lineal, entonces*

$$\phi(k, k_0, x, u) = \phi(k, k_0, x, 0_u) + \phi(k, k_0, 0_x, u).$$

Demostración. Por la linealidad de ϕ , tenemos

$$\begin{aligned} \phi(t, t_0, x, u) &= \phi(t, t_0, x + 0_x, 0_u + u) \\ &= \phi(t, t_0, x, 0_u) + \phi(t, t_0, 0_x, u). \end{aligned}$$

□

3.3. Controlabilidad y Alcanzabilidad

Sea el sistema de control $\Sigma_d = (\mathbb{Z}, \mathcal{X}, U, \phi)$ definido para sistemas de ecuaciones en diferencia de dimensión n . En esta sección nos interesa principalmente el problema: si bajo este sistema es posible controlar o dirigir un estado inicial dado a cualquier estado arbitrario en un periodo de tiempo finito; es decir, determinar si se puede lograr un objetivo deseado manipulando las variables de control elegidas. A continuación presentaremos la definición de controlabilidad de un par de elementos en el espacio de estado.

Definición 3.7. Sean los estados $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, y un tiempo $T \in \mathbb{Z}^+$.

- El estado inicial x_0 es **controlable a x_1 en tiempo T** ; si existen $k_0, k_1 \in \mathbb{Z}$ y un control $u \in \mathcal{U}^{[k_0, k_1]}$ ($u(k_0), u(k_0 + 1), \dots, u(k_1 - 1)$) tal que $k_1 - k_0 = T$, y la solución del sistema con la condición inicial $x(k_0) = x_0$ está definida en $[k_0, k_1]$ y

$$\phi(k_1, k_0, x_0, u) = x_1.$$

- El estado x_0 es **controlable a x_1** si es controlable para algún tiempo T .

Observación 3.5. También utilizaremos el término “ x_1 es alcanzable desde x_0 ” en lugar de “ x_0 es controlable a x_1 ”. Para simplificar la definición de controlabilidad, usaremos las notaciones: $x_0 \rightsquigarrow_T x_1$, $x_0 \rightsquigarrow x_1$ (para indicar: el estado x_0 es controlable a x_1 en tiempo T , y simplemente x_0 es controlable a x_1 , respectivamente).

Con estas aclaraciones desarrollaremos algunos resultados de controlabilidad aplicando las definiciones y resultados de la Sección 3.1, Sección 3.2 y Sección 3.3 que en lo posterior, estos resultados utilizaremos con frecuencia.

Lema 3.4. Sean los estados $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$. Entonces, tenemos:

- (Existencia).** Si $x_0 \rightsquigarrow_T x_1$, con $T > 0$ y existe un tiempo $t > 0$ de modo que $0 < t < T$, entonces existe algún estado $x_2 \in \mathbb{R}^n$ tal que $x_0 \rightsquigarrow_t x_2$ y $x_2 \rightsquigarrow_{T-t} x_1$.
- (Transitividad).** Sea el sistema Σ_d invariante en el tiempo. Si $x_0 \rightsquigarrow_t x_1$ y $x_1 \rightsquigarrow_s x_2$, entonces $x_0 \rightsquigarrow_{t+s} x_2$.

Demostración. (a) Por hipótesis, existen $k_0, k_1 \in \mathbb{Z}$ y un control $u \in \mathcal{U}^{[k_0, k_1]}$ tal que

$$k_1 - k_0 = T \quad \text{y} \quad \phi(k_1, k_0, x_0, u) = x_1.$$

Por otra parte, como u es admisible para x_0 , y además $k_0 < k_0 + t < k_1$. Entonces, por el axioma de restricción del sistema: $u_1 = u|_{[k_0, k_0+t]}$ es admisible para x_0 , y la restricción $u_2 = u|_{[k_0+t, k_1]}$ es admisible para $\phi(k_0 + t, k_0, x_0, u_1)$.

Elijamos $x_2 = \phi(k_0 + t, k_0, x_0, u_1)$, lo cual u_2 es admisible para x_2 , y

$$\phi(k_1, k_0 + t, x_2, u_2) = \phi(k_1, k_0 + t, \phi(k_0 + t, k_0, x_0, u_1), u_2);$$

y por el axioma de semigrupo del sistema

$$\phi(k_1, k_0, x_0, u) = x_1;$$

de este modo, $\phi(k_1, k_0 + t, x_2, u_2) = x_1$, con $k_1 - k_0 - t = T - t$. De donde, $x_2 \underset{T-t}{\rightsquigarrow} x_1$.

(b) Por hipótesis, existen $k_0, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$, $u_1 \in \mathcal{U}^{[k_0, k_1]}$ y $u_2 \in \mathcal{U}^{[k_2, k_3]}$ tal que

$$k_1 - k_0 = t, \quad k_3 - k_2 = s, \quad \phi(k_1, k_0, x_0, u) = x_1 \text{ y } \phi(k_3, k_2, x_1, u_2) = x_2.$$

Por otro lado, $u_2 \in \mathcal{U}^{[k_2, k_3]}$ es admisible para x_2 , y para el entero $m = -(k_2 - k_1)$, por la invarianza del sistema, su control (traslación) $u_2^m \in \mathcal{U}^{[k_2+m, k_3+m]}$ es admisible para x_1 y

$$\phi(k_3, k_2, x_1, u_2) = \phi(k_3 + m, k_2 + m, x_1, u_2^m) = x_2.$$

Además, notemos que

$$k_0 < k_1 < k_3 + m \quad (k_0 < k_1 < k_1 + s), \quad \phi(k_1, k_0, x_0, u_1) = x_1 \text{ y } \phi(k_3 + m, k_1, x_1, u_2^m) = x_2;$$

entonces, por el axioma de semigrupo el control (concatenado)

$$u(k) = u_1 u_2^m(k) = \begin{cases} u_1(k) & \text{si } k \in [k_0, k_1), \\ u_2(k) & \text{si } k \in [k_1, k_3 + m), \end{cases}$$

es admisible para x_0 , y

$$\phi(k_3 + m, k_0, x_0, u_1 u_2^m(k)) = x_2,$$

con $k_3 + m - k_0 = k_3 - k_2 + k_1 - k_0 = t + s$. De este modo, $x_0 \underset{t+s}{\rightsquigarrow} x_2$. □

Lema 3.5. *Sea el sistema de control Σ_d lineal e invariante en el tiempo. Entonces,*

(a) $x_0 \underset{T}{\rightsquigarrow} x_1$ si y solo si $0 \underset{T}{\rightsquigarrow} (x_1 - \phi(T, 0, x_0, 0))$.

(b) Si $x_0 \underset{T}{\rightsquigarrow} x_1$ y $x_2 \underset{T}{\rightsquigarrow} x_3$, entonces $(x_0 + \lambda x_2) \underset{T}{\rightsquigarrow} (x_1 + \lambda x_3)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$

Demostración. (a) Por hipótesis, existe un control $u \in \mathcal{U}^{[0, T]}$ tal que $\phi(T, 0, x_0, u) = x_1$; y por el principio de descomposición de ϕ , se tiene que

$$\phi(T, 0, x_0, u) = \phi(T, 0, x_0, 0_u) + \phi(T, 0, 0_x, u) = x_1,$$

de donde

$$\phi(T, 0, 0_x, u) = x_1 - \phi(T, 0, x_0, 0_u);$$

de este modo, $0 \rightsquigarrow_T (x_1 - \phi(T, 0, x_0, 0))$ bajo el control $u \in \mathcal{U}^{[0, T]}$.

(b) Por hipótesis, existen controles $u_1, u_2 \in \mathcal{U}^{[0, T]}$ tales que

$$\phi(T, 0, x_0, u_1) = x_1, \quad (3.6)$$

$$\phi(T, 0, x_2, u_2) = x_3. \quad (3.7)$$

Multiplicando por λ a (3.7) y sumando las ecuaciones (3.6) y (3.7), se tiene que

$$\phi(T, 0, x_0, u_1) + \lambda\phi(T, 0, x_2, u_2) = x_1 + \lambda x_3;$$

y por la linealidad de ϕ ,

$$\phi(T, 0, x_0 + \lambda x_2, u_1 + \lambda u_2) = x_1 + \lambda x_3.$$

En consecuencia, $(x_0 + \lambda x_2) \rightsquigarrow_T (x_1 + \lambda x_3)$ con el control $u_1 + \lambda u_2$. \square

Hasta aquí se definió la controlabilidad de un par de elementos del espacio de estado. A continuación definiremos la controlabilidad del sistema.

Definición 3.8. *El sistema Σ_d se denomina **completamente controlable en tiempo T** si para cualquier par de estados $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, x_0 es controlable a x_1 en tiempo T ; es simplemente **completamente controlable** si x_0 es controlable a x_1 .*

Para que no genere ambigüedad en lo posterior, en lugar del término completamente controlable se mencionará solamente sistema controlable.

Una de las propiedades intrínsecas que tiene la Teoría de Sistemas de Control, es la *controlabilidad en el origen*; esto significa que cualquier estado puede ser controlado al origen manipulando las variables de control. A este hecho, denominaremos propiedad de *controlabilidad*.

La propiedad inversa al anterior, que cualquier estado sea alcanzable desde el origen (proceso inverso de controlabilidad) se denomina *alcanzabilidad*.

En el siguiente resultado, veremos la relación que existe entre la controlabilidad completa del sistema con las propiedades que acabamos de mencionar.

Lema 3.6. *Sea el sistema de control Σ_d lineal e invariante en el tiempo. Entonces, se tiene las siguientes afirmaciones:*

- (a) *El Σ_d es completamente controlable en tiempo T si y solo si el Σ_d es alcanzable desde el origen en tiempo T .*
- (b) *Si además agregamos la invertibilidad de la matriz de estado A . El sistema Σ_d es completamente controlable en tiempo T si y solo si el sistema Σ_d es controlable en el origen en tiempo T .*

Demostración. (a) Una de las implicaciones es inmediato, solo es necesario ver el recíproco. En efecto, sean los estados $x_0, x_1 \in \mathcal{X}$. Entonces, para el estado $x_1 - \phi(T, 0, x_0, 0) \in \mathcal{X}$, por hipótesis, tenemos que

$$0 \underset{T}{\rightsquigarrow} x_1 - \phi(T, 0, x_0, 0),$$

y por el Lema 3.5 (a)

$$x_0 \underset{T}{\rightsquigarrow} x_1.$$

(b) Solo tiene relevancia ver el recíproco, para esto. Sean los estados $x_0, x_1 \in \mathcal{X}$. Para $T \in \mathbb{Z}^+$, tomemos la función transición de estados de tiempo invertido $\phi(0, T, x_1, 0)$ (por la invertibilidad de la matriz A está definido). Para el estado $x_0 - \phi(0, T, x_1, 0) \in \mathcal{X}$; por hipótesis, tenemos que

$$x_0 - \phi(0, T, x_1, 0) \underset{T}{\rightsquigarrow} 0.$$

Así, existe un control $u \in \mathcal{U}^{[0, T]}$ tal que

$$\phi(T, 0, x_0 - \phi(0, T, x_1, 0), u + 0_u) = 0,$$

por la linealidad de ϕ , tenemos

$$\phi(T, 0, x_0, u) - \phi(T, 0, \phi(0, T, x_1, 0), 0_u) = 0,$$

por el axioma de semigrupo

$$\phi(T, 0, x_0, u) - \phi(T, T, x_1, 0_u) = 0,$$

y por la identidad de ϕ

$$\phi(T, 0, x_0, u) - x_1 = 0.$$

Esto es,

$$\phi(T, 0, x_0, u) = x_1;$$

por consiguiente, $x_0 \underset{T}{\rightsquigarrow} x_1$ con el control $u \in \mathcal{U}^{[0, T]}$. De este modo, el sistema es completamente controlable. \square

Observación 3.6. *La afirmación (a), nos muestra que controlabilidad completa del sistema es equivalente a la propiedad de alcanzabilidad. Analizando de manera análoga de (b); se concluye, que controlabilidad completa no es equivalente a controlabilidad en el origen (a no ser que A sea invertible), esto se apreciará en el siguiente ejemplo.*

Ejemplo 3.1. Sea el sistema de control $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sea $x(0) = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix}$ cualquier estado inicial. Notemos que existe un tiempo $N = 1$, tal que

$$\begin{aligned} x(1) &= Ax(0) + Bu(0) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(0) \\ &= \begin{pmatrix} x_{02} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u(0) \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

elijendo el control $u(0) = -x_{02}$, se tiene que $x(1) = 0$; por tanto, el sistema es controlable en el origen. Por otro lado, para el estado inicial $x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y para el estado final $x_f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, por la fórmula de variación de constantes, se tiene que

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} Bu(i) = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} Bu(i).$$

Lo cual, se reduce analizar el producto de matrices $A^{k-1-i} Bu(i)$; para $k = 1$, el producto de matrices será $\begin{pmatrix} u(0) \\ 0 \end{pmatrix}$; para $k \geq 2$, el producto de matrices será nulo (debido a que A es una matriz nilpotente). Por tanto, independientemente de quien sea el control, el objetivo $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ nunca va ser alcanzado desde el estado inicial $x(0)$. Por tanto, el sistema no es completamente controlable.

3.4. Sistemas invariantes en el tiempo

En esta sección nos centraremos en estudiar específicamente sistemas de control Σ_d invariantes en el tiempo de dimensión n ; si recordamos de la Sección 3.3, la propiedad de alcanzabilidad nos indica: que cualquier elemento del estado puede ser alcanzado desde el origen. Por tanto, es natural definir criterios de controlabilidad mediante esta colección de elementos del estado, al cual denominaremos *conjunto alcanzable*. A continuación desarrollaremos resultados que nos va permitir resolver el problema central de nuestro trabajo.

Definición 3.9. Sean $x \in \mathcal{X}$ y $T \in \mathbb{Z}^+$. El **conjunto alcanzable de x en tiempo T** , se define como el conjunto:

$$\mathcal{R}^T(x) = \{z \in \mathcal{X} : x \rightsquigarrow_T z\};$$

y solamente **conjunto alcanzable de x** se define como

$$\mathcal{R}(x) = \bigcup_{T \in \mathbb{Z}^+} \mathcal{R}^T(x).$$

Si \mathcal{S} es un subconjunto de \mathcal{X} , también escribimos

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^T(\mathcal{S}) &= \bigcup_{x \in \mathcal{S}} \mathcal{R}^T(x), \\ \mathcal{R}(\mathcal{S}) &= \bigcup_{x \in \mathcal{S}} \mathcal{R}(x), \end{aligned}$$

para los conjuntos alcanzables desde el subconjunto \mathcal{S} .

A continuación veremos una primera caracterización para la controlabilidad de sistemas invariantes en el tiempo en función del conjunto alcanzable.

Lema 3.7. *El sistema Σ_d es controlable en tiempo T si y solo si $\mathcal{R}^T(x) = \mathcal{X}$, para todo $x \in \mathcal{X}$.*

Demostración. Sea $x \in \mathcal{X}$. Notemos que $\mathcal{R}^T(x) \subseteq \mathcal{X}$, Entonces, nos faltaría demostrar la contención

$$\mathcal{X} \subseteq \mathcal{R}^T(x).$$

En efecto, sea $y \in \mathcal{X}$. Aplicando la hipótesis para $x, y \in \mathcal{X}$, x es controlable a y en tiempo T . De donde $y \in \mathcal{R}^T(x)$.

Recíprocamente. Sean $y, z \in \mathcal{X}$. Por hipótesis, en particular para $y \in \mathcal{X}$, se tiene que

$$\mathcal{R}^T(y) = \mathcal{X};$$

de donde, y es controlable a z . Por tanto, el sistema es controlable. \square

La pregunta natural que surge a esta altura: si este conjunto alcanzable tiene algunas propiedades intrínsecas, como uno desearía. La respuesta a esta, desarrollaremos en los siguientes resultados

Lema 3.8. *Si el sistema Σ_d es lineal, entonces el conjunto alcanzable $\mathcal{R}^T(0)$ es un subespacio vectorial, para cualquier tiempo $T \in \mathbb{Z}^+$.*

Demostración. Sea $T \in \mathbb{Z}^+$.

Por el Corolario 3.1, $\phi(T, 0, 0_x, 0_u) = 0_x$; de donde, $0_x \in \mathcal{R}^T(0)$.

Por otro lado, sean $x, y \in \mathcal{R}^T(0)$, y $\lambda \in \mathbb{R}$; entonces

$$0 \underset{T}{\rightsquigarrow} x, \quad 0 \underset{T}{\rightsquigarrow} y.$$

Aplicando el Lema 3.5 (b), tenemos que

$$0 + \lambda 0 \underset{T}{\rightsquigarrow} x + \lambda y.$$

En consecuencia, $x + \lambda y \in \mathcal{R}^T(0)$; por tanto, $\mathcal{R}^T(0)$ es un subespacio vectorial. \square

De esta manera, el conjunto alcanzable desde el origen posee una estructura lineal. Pero eso no sucede para todo vector del espacio de estado. El conjunto alcanzable $\mathcal{R}^T(x)$ para estados diferentes del vector nulo, carece de la propiedad de existencia del neutro; pero por el resultado del Lema 3.5 (b), nos garantiza la linealidad de los elementos. Por tanto el conjunto $\mathcal{R}^T(x)$ es un subespacio afín.

En consecuencia, por la descomposición de ϕ

$$\phi(T, 0, x, u) = \phi(T, 0, x, 0) + \phi(T, 0, 0, u),$$

se concluye, que el conjunto alcanzable diferente del origen $\mathcal{R}^T(x)$ es una traslación del subespacio $\mathcal{R}^T(0)$. Esto es,

$$\mathcal{R}^T(x) = \phi(T, 0, x, 0) + \mathcal{R}^T(0).$$

En las siguientes proposiciones desarrollaremos más resultados en función del conjunto alcanzable, que en lo posterior esto nos permitirá encontrar una caracterización más fuerte para sistemas lineales e invariantes en el tiempo.

Lema 3.9. *Para cualquier $s, t \in \mathbb{Z}^+$ y $x \in \mathcal{X}$.*

$$\mathcal{R}^{s+t}(x) = \mathcal{R}^s(\mathcal{R}^t(x)).$$

Demostración. Notemos que,

$$\mathcal{R}^s(\mathcal{R}^t(x)) = \bigcup_{y \in \mathcal{R}^t(x)} \mathcal{R}^s(y).$$

Además notemos que, un elemento $p \in \mathcal{R}^s(\mathcal{R}^t(x))$ si y solo si existe $y \in \mathcal{R}^t(x)$ tal que $p \in \mathcal{R}^s(y)$.

Con esta aclaración procederemos con la demostración por inclusión de conjuntos.

Sean $s, t \in \mathbb{Z}^+$ y $x \in \mathcal{X}$; tomando un elemento $p \in \mathcal{R}^{s+t}(x)$, tenemos que $x \rightsquigarrow_{s+t} p$.

Por otro lado, $0 < t < s + t$; por Lema 3.4 (a), existe $y \in \mathcal{X}$ tal que

$$x \rightsquigarrow_t y, \quad y \rightsquigarrow_{s+t-t} p.$$

De donde, $p \in \mathcal{R}^s(\mathcal{R}^t(x))$.

Recíprocamente, sea $p \in \mathcal{R}^s(\mathcal{R}^t(x))$, entonces existe $y \in \mathcal{R}^t(x)$, tal que $p \in \mathcal{R}^s(y)$; por Lema 3.4 (b), $x \rightsquigarrow_{s+t} p$. De este modo, $p \in \mathcal{R}^{s+t}(x)$. \square

Veamos un ejemplo, que nos permitirá entender algunos resultados abordados hasta aquí.

Ejemplo 3.2. *Si la cardinalidad del espacio de estado \mathcal{X} es n ($n < \infty$), entonces*

$$\bigcup_{k=0}^{n-1} \mathcal{R}^k(x) = \mathcal{R}(x), \quad \text{para todo } x \in \mathcal{X}.$$

En efecto; sea $x \in \mathcal{X}$.

Observemos que

$$\bigcup_{k=0,\dots,n-1} \mathcal{R}^k(x) \subset \bigcup_{T \in \mathbb{Z}^+} \mathcal{R}^T(x) = \mathcal{R}(x).$$

Para el recíproco procederemos por el absurdo, esto es suponer que

$$z \in \mathcal{R}(x) \text{ y } z \notin \mathcal{R}^k(x), \quad k = 0, \dots, n-1$$

entonces existe un tiempo $N > 0$ (tiempo mínimo), con $N \geq n$, de tal manera que $x \overset{N}{\rightsquigarrow} z$.

Por otra parte, $N > 0$, y $0 < 1 < N$, entonces por Lema 3.4 (a), existe $x_1 \in \mathcal{X}$ tal que

$$x_0 = x \overset{1}{\rightsquigarrow} x_1, \quad x_1 \overset{N-1}{\rightsquigarrow} z = x_N.$$

Análogamente para $0 < 1 < N-1$, existe $x_2 \in \mathcal{X}$ tal que

$$x_1 = x \overset{1}{\rightsquigarrow} x_2, \quad x_2 \overset{N-2}{\rightsquigarrow} z;$$

así, sucesivamente existen $x_0, x_1, \dots, x_N \in \mathcal{X}$, tal que

$$x_i = x \overset{1}{\rightsquigarrow} x_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Por hipótesis, la cardinalidad de \mathcal{X} es n ; entonces, necesariamente

$$x_i = x_j, \quad \text{para algún } i, j; \text{ de modo que, } \quad 0 \leq i < j \leq N; \quad (3.8)$$

de donde, se tiene

$$x \overset{i}{\rightsquigarrow} x_i, \quad x_j \overset{N-j}{\rightsquigarrow} z.$$

Por el Lema 3.4 (b),

$$x \overset{l}{\rightsquigarrow} z;$$

donde, $l = i + N - j$. Además, $l < N$ por la relación 3.8; lo cual es una contradicción a la minimalidad de N . De este modo, $z \in \mathcal{R}^k(x)$ para algún $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

Estados de equilibrio o estacionario

Nuestro interés en esta sección es estudiar el conjunto alcanzable desde un estado de equilibrio o estacionario para sistemas invariantes.

Definición 3.10. El estado $x \in \mathcal{X}$ es un estado de equilibrio del sistema, si para todo $T \in \mathbb{Z}^+$, existe algún control $u \in \mathcal{U}^{[0,T]}$ de modo que

$$\phi(T, 0, x, u) = x \quad \text{para todo } T \in \mathbb{Z}^+;$$

equivalentemente en función de f

$$f(x, u) = x.$$

Un resultado inmediato: si x es un estado de equilibrio, entonces $x \in \mathcal{R}^T(x)$. Las afirmaciones que se desarrollará a continuación son resultados de conjunto alcanzable a partir de un estado de equilibrio.

Lema 3.10. *Si x es un estado de equilibrio, entonces*

$$\mathcal{R}^s(x) \subseteq \mathcal{R}^s(\mathcal{R}^t(x)), \quad (3.9)$$

para cada $s, t \in \mathbb{Z}^+$,

Demostración. Sea $z \in \mathcal{R}^s(x)$. Entonces, $x \rightsquigarrow_s z$, y como x es un estado de equilibrio, tenemos que

$$x \rightsquigarrow_t x, \quad x \rightsquigarrow_s z;$$

así $z \in \mathcal{R}^s(\mathcal{R}^t(x))$. Por lo tanto, $\mathcal{R}^s(x) \subseteq \mathcal{R}^s(\mathcal{R}^t(x))$. \square

Si a la relación (3.9) aplicamos el resultado del Lema 3.9, esto es

$$\mathcal{R}^s(\mathcal{R}^t(x)) = \mathcal{R}^{s+t}(x),$$

tenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.3. *Si x es un estado de equilibrio, entonces para cada $s, t \in \mathbb{Z}^+$*

$$\mathcal{R}^s(x) \subseteq \mathcal{R}^{s+t}(x). \quad (3.10)$$

Una consecuencia inmediata de este resultado es:

$$\text{si } s, t \in \mathbb{Z}^+ \text{ con } s < t, \text{ entonces } \mathcal{R}^s(x) \subseteq \mathcal{R}^t(x).$$

La igualdad en la relación (3.10) se dará bajo las siguientes condiciones, que formularemos en el siguiente lema.

Lema 3.11. *Sea x un estado de equilibrio. Si existen $s, t \in \mathbb{Z}^+, t > 0$ tal que $\mathcal{R}^s(x) = \mathcal{R}^{s+t}(x)$, entonces necesariamente $\mathcal{R}^s(x) = \mathcal{R}(x)$.*

Demostración. Antes, demostremos la siguiente relación:

$$\mathcal{R}^{s+nt}(x) = \mathcal{R}^s(x), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.11)$$

Procederemos por inducción, para $n = 1$, $\mathcal{R}^{s+t}(x) = \mathcal{R}^s(x)$ se verifica por hipótesis.

Asumiendo verdadero para n , verificaremos para $n + 1$. En efecto,

$$\mathcal{R}^{s+(n+1)t}(x) = \mathcal{R}^{s+nt+t}(x) = \mathcal{R}^t(\mathcal{R}^{s+nt})(x) = \mathcal{R}^t(\mathcal{R}^s)(x) = \mathcal{R}^{s+t}(x) = \mathcal{R}^s(x).$$

Procediendo con la demostración, notemos que por definición $\mathcal{R}^s(x) \subseteq \mathcal{R}(x)$.

Recíprocamente, sea $z \in \mathcal{R}(x)$, entonces existe $r \in \mathbb{Z}^+$ de modo que $z \in \mathcal{R}^r(x)$. Para cualquier $s, t \in \mathbb{Z}^+$ con $t > 0$, siempre es posible encontrar algún $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$r < s + nt.$$

Por el Corolario 3.3, tenemos que

$$\mathcal{R}^r(x) \subseteq \mathcal{R}^{s+nt}(x) = \mathcal{R}^s(x);$$

de donde $z \in \mathcal{R}^s(x)$. Por tanto, $\mathcal{R}(x) \subseteq \mathcal{R}^s(x)$. \square

Con estos resultados desarrollaremos en los siguientes corolarios otra caracterización para la controlabilidad de sistemas lineales que tiene que ver con estados de equilibrio y con la dimensión del espacio de estado.

Corolario 3.4. *Sea x un estado de equilibrio, \mathcal{X} es un espacio vectorial sobre el campo \mathbb{K} de dimensión n , y $\mathcal{R}^T(x)$ es un subespacio vectorial para cada $T \in \mathbb{Z}^+$. Entonces,*

$$\mathcal{R}^n(x) = \mathcal{R}(x).$$

Demostración. Notemos que el conjunto alcanzable desde un estado de equilibrio no necesariamente es un subespacio vectorial, excepto desde el origen. Pero en este resultado estamos asumiendo, que todos los conjuntos alcanzables contienen al origen.

Consideremos la cadena de subespacios

$$\mathcal{R}^0(x) \subseteq \mathcal{R}^1(x) \subseteq \dots \subseteq \mathcal{R}^{n+1}(x).$$

Si fuera cierto, que esa cadena de subespacios están contenido estrictamente, se tendrá que

$$\dim(\mathcal{R}^{i+1}(x)) > \dim(\mathcal{R}^i(x)), \text{ para todo } i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (3.12)$$

Entonces, se tiene que

$$\dim \mathcal{R}^{n+1}(x) \geq n + 1 > \dim \mathcal{X},$$

esto es una contradicción. Por tanto, en esa cadena de subespacios, existe algún $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ tal que

$$\mathcal{R}^{i+1}(x) = \mathcal{R}^i(x).$$

De esta manera, por el Lema 3.11

$$\mathcal{R}^i(x) = \mathcal{R}(x).$$

Si $i = n$, la prueba ya estaría. Para $i < n$, como

$$\mathcal{R}^i(x) = \mathcal{R}(x) = \bigcup_{T \in \mathbb{Z}^+} \mathcal{R}^T(x),$$

entonces, necesariamente

$$\mathcal{R}^i(x) = \mathcal{R}^{i+1}(x) = \mathcal{R}^{i+2}(x) = \dots = \mathcal{R}(x),$$

de donde $\mathcal{R}^n(x) = \mathcal{R}(x)$. \square

Corolario 3.5. *Un sistema Σ_d lineal n -dimensional es controlable si y solo si*

$$\mathcal{R}(0) = \mathcal{R}^n(0) = \mathcal{X}.$$

Demostración. Como el sistema Σ_d es controlable, entonces $\mathcal{R}(x) = \mathcal{X}$ para todo $x \in \mathcal{X}$. En particular para $0 \in \mathcal{X}$, tenemos que $\mathcal{R}(0) = \mathcal{X}$, y por el Corolario 3.4, se tiene que

$$\mathcal{R}^n(0) = \mathcal{R}(0) = \mathcal{X}.$$

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{R}^n(0) = \mathcal{X}$. Por la propiedad de alcanzabilidad (Lema 3.6), el sistema es controlable. \square

De este resultado, para analizar la controlabilidad de sistemas lineales, basta ver que el conjunto alcanzable desde el origen en tiempo n (siendo n la dimensión del sistema) sea todo el espacio de estado como ilustraremos en el siguiente ejemplo. En ese sentido este resultado es interesante, pero aún no es manejable para cálculos algebraicos. Sin embargo, este corolario nos permitirá encontrar un resultado como deseamos.

Ejemplo 3.3. *Sea el sistema de control discreto $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$, gobernado por las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Se pide analizar la controlabilidad del sistema.

Para ello utilizaremos el Corolario 3.5; en efecto,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^3(0) &= \{z \in \mathbb{R}^3 / \exists u \in \mathcal{U}^{[0,3)}, \phi(3, 0, 0, u) = z\} \\ &= \{z \in \mathbb{R}^3 / \exists u \in \mathcal{U}^{[0,3)}, \sum_{i=1}^2 A^{i-1} B u(3-i) = z\} \\ &= \{z \in \mathbb{R}^3 / \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(2) \\ u(1) \\ u(0) \end{pmatrix} = z\} \\ &= \{z \in \mathbb{R}^3 / \exists u \in \mathcal{U}^{[0,3)}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(2) \\ u(1) \\ u(0) \end{pmatrix} = z\} \\ &= \{z \in \mathbb{R}^3 / \exists u \in \mathcal{U}^{[0,3)}, (u(1) + u(0), u(0), u(2) + u(0)) = z\} \\ &= \{z \in \mathbb{R}^3 / \exists u \in \mathcal{U}^{[0,3)}, (0, 0, u(2)) + (u(1), 0, 0) + (u(0), u(0), u(0)) = z\} \\ &= \{z \in \mathbb{R}^3 / \exists u \in \mathcal{U}^{[0,3)}, u(2)(0, 0, 1) + u(1)(1, 0, 0) + u(0)(1, 1, 1) = z\} \\ &= \langle (0, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 1) \rangle; \end{aligned}$$

de este modo, $\dim(\mathcal{R}^3(0)) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$, en consecuencia $\mathcal{R}^3(0) = \mathbb{R}^3$. Por tanto, por el Corolario 3.5, el sistema es controlable.

Criterio de controlabilidad de Kalman

Sea el sistema de control Σ_d lineal e invariante en el tiempo de dimensión n ; esto es, $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, $U = \mathbb{R}^m$ y ϕ es la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ x(k_0) = x_0, \end{cases}$$

donde las matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Por la fórmula de variación de constantes, se tiene que

$$\phi(k, 0, x_0, u) = A^k x_0 + \sum_{i=1}^k A^{i-1} B u(k-i).$$

Cuando el estado inicial es el origen y para $k = n$, tenemos que

$$\phi(n, 0, 0, u) = \sum_{i=1}^n A^{i-1} B u(n-i) = \begin{pmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(n-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{pmatrix}.$$

De esta última relación, se tiene la siguiente definición.

Definición 3.11. La matriz $[B \ AB \ A^2B \ \cdots \ A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n \times mn}$ se denomina matriz de controlabilidad del sistema, y se denota con $R = R(A, B)$.

A continuación mencionaremos el teorema central del trabajo.

Teorema 3.1 (Controlabilidad de Kalman). El sistema Σ_d lineal e invariante en el tiempo n -dimensional es completamente controlable si y solo si rango $R(A, B) = n$.

Demostración. Consideremos la transformación lineal T_R asociada a la matriz de controlabilidad $R \in \mathbb{R}^{n \times mn}$

$$\begin{aligned} T_R : \mathbb{R}^{mn} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\rightarrow [B \ AB \ A^2B \ \cdots \ A^{n-1}B]x. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^n(0) &= \{z \in \mathbb{R}^n / \exists u \in \mathcal{U}^{[0,n)}, \phi(n, 0, 0, u) = z\} \\ &= \{z \in \mathbb{R}^n / \exists u(n-1), \dots, u(0) \in \mathbb{R}^m, \sum_{i=1}^n A^{i-1} B u(n-i) = z\} \\ &= \{z \in \mathbb{R}^n / \exists u = \begin{pmatrix} u(n-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mn}, \begin{pmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix} u = z\} \\ &= \{z \in \mathbb{R}^n / \begin{pmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix} u = z, \text{ para algún } u \in \mathbb{R}^{mn}\} \\ &= \text{Im}(T_R). \end{aligned}$$

De este modo,

$$\mathcal{R}^n(0) = \text{Im}(T_R).$$

Por otra parte, la relación

$$\text{Im}(T_R) = \mathcal{X} = \mathbb{R}^n,$$

va ser cierta, si y solamente si

$$\dim(\text{Im}(T_R)) = \dim(\mathcal{X}) = \dim(\mathbb{R}^n) = n,$$

pero

$$\dim(\text{Im}(T_R)) = \text{rg}(T_R) = \text{rg}(R).$$

Por tanto, se tiene la siguiente equivalencia:

$$\mathcal{R}^n(0) = \text{Im}(T_R) = \mathcal{X} \text{ si y solo si } \text{rg}(R) = n. \quad (3.13)$$

Así, por el Corolario 3.5 y de la relación (3.13), la afirmación está demostrado. \square

Ejemplo 3.4. *Del ejemplo anterior. Para el sistema gobernado por las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Su matriz de controlabilidad es } R(A, B) = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

cuyo rango de la matriz de controlabilidad $R(A, B)$ es 3. Por tanto, por el criterio de Kalman, el sistema es completamente controlable.

Ejemplo 3.5. (Obsolescencia). *Consideremos la historia de vida de una clase de productos en un país, tal vez algún electrodoméstico, como lavadoras. Suponemos que los hogares compran lavadoras nuevas y las mantienen hasta que sufran un colapso fatal o se vuelvan obsoletas. En cualquier momento, por lo tanto, hay una distribución de varias lavadoras envejecidas en todo el país. Describiremos el sistema de ecuaciones que rige esta distribución.*

Empleemos una formulación de tiempo discreto basada en períodos de un año. La suposición básica que hacemos para desarrollar el modelo es que existe una cierta probabilidad de que cualquier lavadora que tenga 1 año de antigüedad permanezca en servicio por lo menos un año más. Esta probabilidad puede ser relativamente alta para máquinas jóvenes y baja para máquinas viejas. Suponemos que ninguna máquina sobrevive a una edad de $n + 1$ años.

Con estas suposiciones, dividimos las lavadoras en cohortes de grupos de edad de un año. Sea $x_i(k)$ el número de lavadoras supervivientes de edad i años durante el período(año) k . Entonces tenemos las ecuaciones

$$x_{i+1}(k+1) = \beta_i x_i(k), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

La cantidad de lavadoras de menos de un año es igual a la cantidad de compras $u(k)$ durante el año; es decir,

$$x_0(k+1) = u(k).$$

Este sistema de ecuaciones se puede expresar en forma de matriz como

$$\begin{pmatrix} x_0(k+1) \\ x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \beta_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0(k) \\ x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u(k),$$

que es un caso especial de la forma general $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$.

Nuestro interés es analizar si este sistema lineal es controlable mediante el criterio de controlabilidad de Kalman, para ello lo primero calcularemos las potencias de la matriz A y la multiplicación por la matriz B .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \beta_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \beta_{n-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta_1\beta_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & & \beta_{n-1}\beta_{n-2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \beta_2\beta_1\beta_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & & \beta_{n-1}\beta_{n-2}\beta_{n-3} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

luego la matriz de controlabilidad esta formado por

$$R = [B \ AB \ A^2B \ \cdots \ A^nB] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1\beta_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_2\beta_1\beta_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{n-1}\beta_{n-2}\cdots\beta_0 \end{pmatrix},$$

como las tasas de crecimiento y decrecimientos β_i son diferentes de cero, de este modo, rango de la matriz de controlabilidad R es $n+1$. Por tanto, el sistema es controlable.

Conclusiones y recomendaciones

Este trabajo es una incursión en una rama relativamente moderna de la matemática, como es la Teoría de Control Discreto, un fenómeno muy propio que es caracterizado por estudiar sistemas definidos en un conjunto de tiempo discreto, lo cual esto consiste en una secuencia ordenada de puntos en lugar de un continuo.

Inicialmente nuestro interés fue desarrollar las ecuaciones en diferencia, posterior a ello se vió que con estas ecuaciones se podrían estudiar sistemas lineales de la forma

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad k \in \mathbb{Z}^+ \quad (\text{L})$$

donde $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $u \in \mathcal{U}$ (conjunto de controles admisibles). Para su estudio, muchos tópicos fueron preponderantes. Citemos el capítulo uno, que gracias a los operadores de diferencia, se definió lo que son las ecuaciones en diferencia. Posterior a esto, en el capítulo dos, generalizamos la noción de ecuaciones en diferencias a varias variables y con esto se desarrolló la Teoría de Control Discreto.

El capítulo tres, fue uno de los capítulos más importantes donde se desarrolló el resultado central del trabajo, que es el criterio de controlabilidad de Kalman. Para esto, se estudio la teoría de control de una manera axiomática, donde elegimos estudiar la controlabilidad del sistema, mediante el conjunto alcanzable, a partir de este conjunto encontramos relaciones muy importantes como el Corolario 3.5, lo cual nos permitió llegar a nuestro objetivo. De manera resumida tenemos el resultado central de la tesis,

El sistema lineal (L) es controlable si y solo si el rango de la matriz $[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$ es n .

Los sistemas de control estan intimamente relacionadas en estudiar las variables de entrada-salida. En analogía a los sistemas continuos, con lo desarrollado en la tesis es posible continuar el estudio de las variables de salida del sistema (Observabilidad), ya que análogo al criterio de Kalman, existe el criterio de observabilidad que caracteriza las variables de salida, y entre las propiedades de controlabilidad y observabilidad hay una dualidad, el cual dejamos para posteriores trabajos.

Diagonalización y forma canónica de Jordan

A.1. Nociones básicas

Definición A.1. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Se dice que las matrices A y B son semejantes, y se denota como $A \sim B$, si existe una matriz $C \in Gl(n, \mathbb{R})$ tal que $A = CBC^{-1}$.

Definición A.2. Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es **diagonalizable** si es semejante a una matriz diagonal.

Autovalores, autovectores y autoespacios

Definición A.3. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Se dice que $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, es un **autovector** de A si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Av = \lambda v$. El escalar que verifica la condición anterior se llama **autovalor** de A .

Definición A.4. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y sea λ un autovalor de A . Se define el **autoespacio** como

$$E_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^n / Av = \lambda v\} = \{v \in \mathbb{R}^n / (\lambda I_n - A)v = 0\} = Nuc(\lambda I - A).$$

Se observa que E_λ es un subespacio de \mathbb{R}^n , debido a que es el núcleo de la transformación lineal asociado a la matriz $(\lambda I_n - A)$. Además, a la dimensión del autoespacio E_λ se denomina multiplicidad *geométrica*.

Lema A.1. Dado la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Sea el autoespacio E_λ correspondiente al autovalor λ de multiplicidad algebraica r . Entonces, $\dim E_\lambda \leq r$.

Caracterización de matrices diagonalizables

Teorema A.1. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ todos los autovalores de A en \mathbb{R} , con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) A es diagonalizable en $\mathbb{R}^{n \times n}$.

$$(b) \bigoplus_{i=1}^r E\lambda_i = \mathbb{R}^n.$$

$$(c) P_A(x) = (x - \lambda_1)^{d_1} \cdots (x - \lambda_r)^{d_r} \text{ y } d_i = \dim E\lambda_i \text{ para cada } 1 \leq i \leq r$$

A.2. Forma canónica de Jordan

Como se vió, las matrices cuadradas de $n \times n$ con n autovectores linealmente independientes pueden ser llevados a una forma especialmente agradable mediante una transformación de equivalencia. Sin embargo, las matrices que no son diagonalizables (esto es, que no tienen n autovectores linealmente independientes). En este caso todavía es posible mostrar que la matriz es equivalente a otra matriz más simple denominado forma canónica de Jordan, donde esta nueva matriz sus diagonales están formados por bloques de Jordan y la matriz de paso (o de transformación) es la más difícil de obtener.

La construcción de la matriz de Jordan se debe al Lema A.1. Para su comprensión, consideremos la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con un autovalor real de multiplicidad geométrica $d = \dim \text{Nuc}(\lambda I - A)$, o sea, con d autovectores linealmente independiente asociados a λ . Es fácil ver que, para $i \geq 1$, se tiene

$$\{0\} \subseteq \text{Nuc}(\lambda I - A) \subseteq \text{Nuc}(\lambda I - A)^2 \subseteq \cdots \subseteq \text{Nuc}(\lambda I - A)^i \subseteq \mathbb{R}^n,$$

como todos los núcleos son subespacios de \mathbb{R}^n , existe $k = k(\lambda)$ a partir del cual todos son iguales. denotando con $d_i = \dim \text{Nuc}(\lambda I - A)^i$, entonces, tenemos que

$$1 \leq d = d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_k = d_{k+1} \cdots \leq n$$

se dice que $\text{Nuc}(\lambda I - A)$ es el *autoespacio generalizado* asociado al autovalor λ , y $d_k = \dim \text{Nuc}(\lambda I - A)^k$ es exactamente la multiplicidad *algebraica* de λ como raíz del polinomio característico de A , o sea es el número de veces que aparece en la factorización.

La multiplicidad geométrica $d = \dim \text{Nuc}(\lambda I - A)$, define el número de bloques que posee la matriz de Jordan (es decir, habrá d bloques de Jordan) y la dimensión de los bloques dependerá de las dimensiones $d \leq d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_k$ de los autoespacios generalizados.

Definición A.5. Diremos que $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una **matriz de Jordan** o una **forma de Jordan**, si es una matriz diagonal por bloques

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_r \end{pmatrix},$$

donde cada bloque elemental J_i , $i = 1, \dots, r$ (dado por los autovalores de A) se llama **bloques de Jordan**, y es de la forma

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda \end{pmatrix} o(\lambda)$$

con λ autovalor real de A (denominado bloques de Jordan real) o bien de la forma

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} D & I_2 & 0_2 & \cdots & 0_2 \\ 0_2 & D & I_2 & \cdots & 0_2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_2 & \cdots & & D & I_2 \\ 0_2 & \cdots & & 0_2 & D \end{pmatrix} o(D)$$

siendo

$$D = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con $a + ib$, $b > 0$, autovalor complejo de A (esta clase de bloques denominado bloque de Jordan complejo). Cada autovalor real aparece sobre la diagonal principal tantas veces como indique su multiplicidad (algebraica), y cada bloque D tantas como indique la multiplicidad del autovalor $a + ib$, $b > 0$. Un autovalor real λ puede aparecer en varios bloques elementales si corresponde a varios autovectores linealmente independientes, y análogamente para D si ello ocurre con el autovalor $a + ib$, $b > 0$.

El siguiente teorema describe la forma normal de Jordan J para matrices en $\mathbb{R}^{n \times n}$ con dimensión arbitraria n . Su demostración se puede encontrar en la referencia [11], o consultar [4].

Teorema A.2. Para cualquier matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, existe una matriz $P \in Gl(n, \mathbb{R})$ tal que $J = P^{-1}AP$ es una matriz de Jordan; esto es,

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_r \end{pmatrix}, \quad 1 \leq r \leq n$$

donde cada bloque J_i es una matriz de tamaño $d_i \times d_i$, y $\sum_{i=1}^r d_i = n$

Construcción de la matriz de paso

Lo primero analicemos para una matriz de tamaño $n \times n$ que es semejante a una matriz de Jordan de la forma:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

lo cual tiene un solo autovalor $\lambda_1 = \lambda$ repetido, y posee un bloque de Jordan, donde $d_1 = n$. Por el teorema anterior

$$AP = PJ.$$

Sea $P = (v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n)$ la matriz de paso formado por vectores columna. Entonces

$$A(v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n) = (v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n)J.$$

realizando operaciones se tiene

$$Av_1 = \lambda v_1, \dots, Av_{i+1} = \lambda v_{i+1} + v_i, \quad i = 1, 2, \dots, d_1$$

de esta manera apartir del único autovector v_1 de A , recursivamente podemos encontrar la cadena de vectores v_2, \dots, v_{d_1} , estos son llamados **autovectores generalizados** de A . Sistemáticamente esto podemos obtener usando la ecuación en diferencia

$$(A - \lambda_1 I)v_{i+1} = v_i, \quad i = 1, 2, \dots, d_1.$$

Repitiendo este proceso para varios los bloques de jordan, se puede hallar los autovectores generalizados correspondiente a m -bloques de Jordan usando la ecuación en diferencia

$$(A - \lambda_m I)v_{m_i+1} = v_{m_i}. \quad i = 1, 2, \dots, d_m$$

Con un análisis similar, se optiene los autovectores generalizados para autovalores complejos.

Cálculo de las potencias de una matriz

Notemos que $A^k = (PJP^{-1})^k = PJ^kP^{-1}$, donde la matriz de Jordan J es una matriz diagonal por bloques; por tanto,

$$J^k = \begin{pmatrix} J_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2^k & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_r^k \end{pmatrix},$$

donde cada bloque de jordan J_i , $i = 1, 2, \dots, r$ es asociado a un autovalor real λ_i . De donde el cálculo de la potencia de la matriz A , se reducen a encontrar las potencias de los bloques de Jordan, para ello es importante descomponer los bloques de Jordan de la siguiente manera:

$$J_i = \lambda_i I + N_i,$$

donde

$$N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

es una matriz nilpotente de tamaño $d_i \times d_i$ (es decir, $N_i^r = 0$ para todo $r \geq d_i$). De este modo,

$$\begin{aligned} J_i^k &= (\lambda_i I + N_i)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \lambda_i^{k-i} N_i^i \\ &= \lambda_i^k I + \binom{k}{1} \lambda_i^{k-1} N_i + \cdots + \binom{k}{d_i-1} \lambda_i^{k-d_i+1} N_i^{d_i-1} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_i^k & \binom{k}{1} \lambda_i^{k-1} & \binom{k}{2} \lambda_i^{k-2} & \cdots & \binom{k}{d_i-1} \lambda_i^{k-d_i+1} \\ 0 & \lambda_i^k & \binom{k}{1} \lambda_i^{k-1} & \cdots & \binom{k}{d_i-2} \lambda_i^{k-d_i+2} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{k}{1} \lambda_i^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i^k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Esta es la fórmula para hallar la k -ésima potencia de un bloque de Jordan J_i de tamaño $d_i \times d_i$ asociado a un autovalor real λ_i .

Para un bloque de Jordan J_i , $i = 1, 2, \dots, r$ de dimensión $2m$ asociado a un autovalor complejo $\lambda_i = a \pm ib$.

Con $D = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se tiene que

$$\begin{aligned} J_i &= \begin{pmatrix} D & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D & I & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & D & I \\ 0 & \cdots & & 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & D & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & I \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \tilde{D} + N \end{aligned}$$

Así, J_i es la suma de un bloque de la matriz diagonal \tilde{D} con los bloques D y una matriz nilpotente N con $N^{m-1} = 0$. Entonces, si observamos que \tilde{D} y N conmutan; es decir,

$$\tilde{D}N = N\tilde{D}.$$

De donde,

$$\begin{aligned} J_i^k &= (\tilde{D} + N)^k \\ &= \sum_{i=0}^{m-2} \binom{k}{i} \tilde{D}^{k-i} N^i \\ &= \binom{k}{0} \tilde{D}^k I + \binom{k}{1} \tilde{D}^{k-1} N + \cdots + \binom{k}{m-2} \tilde{D}^{k-(m-2)} N^{m-2}. \end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] Goldberg, S. *Introduction to Difference Equations*. Wiley, New York. 1958.
- [2] Elaydi, S. *An Introduction to Difference Equations*. Springer-Verlag. 2005.
- [3] Luenberger, D. G. *Introduction to Dynamic Systems*. Wiley, New York. 1993.
- [4] Colonius, F., Kliemann, W. *Dynamical Systems and Linear Algebra*. American Mathematical Society. 2014.
- [5] Sontag, E. *Mathematical Control Theory*. Springer-Verlag. 1998.
- [6] C., Vasquez, F. J. *Ecuaciones diferenciales y en diferencias*. Thomson. 2010.
- [7] Cull, P., Flahive, M., Robson, R. *Difference equations*. Springer-Verlag. 2005.
- [8] Cassandras, C. C., Lafortune, S. *Introduction to Discrete Event Systems*. Springer-Verlag. 2008.
- [9] Leigh, J. R. *Functional Analysis and Linear Control Theory*. Academic Press. 1980.
- [10] G., Sabia, J., Tesauri, S. *Álgebra Lineal*. Universidad de Buenos Aires. 2008.
- [11] Lima, E. L. *Álgebra Linear*. IMPA. 1981.