UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS

FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES

CARRERA DE MATEMÁTICA

TEORÍA DE MODELOS Y EL TEOREMA DE LÖWENHEIM-SKOLEM

PROYECTO DE GRADO PRESENTADO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

AUTOR: MARTÍN MEAVE MONTECINOS

TUTOR: MSC. NICOLÁS CHAVARRÍA GÓMEZ

LA PAZ-BOLIVIA

2019

TEORÍA DE MODELOS Y EL TEOREMA DE LÖWENHEIM-SKOLEM

Por

Martín Meave Montecinos

REMITIDO EN CUMPLIMIENTO PARCIAL DE LOS
REQUISITOS PARA LA OBTENCIÓN DEL GRADO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICA
DE LA
UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS

TUTOR:
MSC. NICOLÁS CHAVARRÍA GÓMEZ
TRIBUNAL:
LIC. HELDER LÓPEZ ROMERO
LIC. RONNAL ALVARO SILVA GUZMAN

LA PAZ-BOLIVIA

2019

Índice general

Resumen

El presente trabajo tiene el propósito de hacer una introducción a la teoría de modelos y realizar la demostración del teorema de Löwenheim-Skolem, el cual se puede considerar uno de los teoremas fundamentales de la teoría de modelos. Primero hicimos un desarrollo de los conceptos básicos sobre los que trabaja la teoría de modelos. Definimos la equivalencia elemental, las subestructuras elementales, las inmersiones elementales y los morfismos, conceptos que son necesarios para entender a plenitud el enunciado formal del teorema de Löwenheim-Skolem y su poder. Para la demostración del teorema de Löwenheim-Skolem es necesario el Teorema de compacidad, el cual también es un teorema importante en teoría de modelos y lógica. Por ello el capítulo 3 consiste en el desarrollo de herramientas tales como los filtros, ultrafiltros y ultraproductos para la demostración del Teorema de compacidad. Además de ello se muestran algunas consecuencias de este Teorema. Finalmente, en el capítulo 4 demostramos el Teorema de Löwenheim-Skolem, además de desarrollar una de sus consecuencias interesantes con la construcción de los hiperreales que se desprende de forma inmediata. Acompañamos todo el desarrollo anterior con ejemplos, los cuales tienen sus pruebas respectivas, que fortalecen la comprensión de la teoría.

Capítulo 1

Introducción

A lo largo del siglo XX la lógica matemática se desarrolló considerablemente. Una de sus disciplinas de mayor alcance y más bellas es la teoría de modelos, la cual permite analizar los sistemas axiomáticos recurriendo a la idea de modelo como aquellas entidades que satisfacen una lista axiomas. Se debe aclarar que, mientras que los modelos ordinarios en diseño, arquitectura o en las ciencias empíricas son una representación de un objeto o fenómeno real, en lógica la representación es la teoría y aquello que se representa (el objeto) es el modelo.

El objeto de la teoría de modelos es el estudio de las relaciones entre los lenguajes formales y las realidades de las que hablan dichos lenguajes, la clase de los objetos o sistemas mediante la noción de verdad. Entre los resultados más notables de la teoría está el teorema de Löwenheim-Skolem o teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski, que establece que si una teoría de primer orden tiene un modelo infinito (y por lo tanto es consistente), entonces tiene al menos un modelo de cada cardinalidad lo suficientemente grande. En particular, cualquier teoría en un lenguaje contable que tenga un modelo infinito, tiene también un modelo contable y un modelo para cada cardinal infinito.

1.1. Antecedentes

Más allá de que la teoría clásica de modelos es un producto de los años 50s, sus antecedentes pueden rastrearse varias décadas atrás. En 1915 Löwenheim probó que si una formula tiene realizaciones o modelos de alguna cardinalidad infinita (posiblemente incontable), entonces también tiene modelos contables. Ese resultado fue extendido por Skolem a conjuntos cualesquiera de fórmulas. Así surgió la primera versión del teorema de Löwenheim-Skolem, que acabaría convirtiéndose en uno de los puntos focales de la teoría de modelos. En 1919 Skolem introdujo el procedimiento de la eliminación de cuantificadores para determinar qué relaciones son definibles en un sistema. En 1930 Gödel publicó su tesis doctoral, en la que se seguía como corolario el teorema de compacidad, es decir que si todo subconjunto finito de un conjunto dado de fórmulas tiene un modelo, entonces el conjunto dado entero también tiene un modelo. Así en 1930, tres de las herramientas clásicas de la teoría de modelos: el teorema de la eliminación de cuantificadores y los teoremas de Löwenheim-Skolem y compacidad, estaban ya disponibles. Sin embargo, aun pasarían 20 años más antes de que den lugar a la teoría de modelos. Eso se debió a que era necesaria una definición precisa de los conceptos de satisfacción, de verdad y de consecuencia, las cuales fueron hechas por Alfred Tarski en 1957.

1.2. Planteamiento del problema

La lógica al ser rigurosa delimita las partes sintáctica y semántica de forma muy clara. A partir de ello puede surgir la pregunta ¿Será que existe alguna relación entre los aspectos sintácticos y semánticos de la lógica? Es decir ¿A partir de propiedades del mecanismo sintáctico de la lógica podemos obtener información de la parte semántica y viceversa? Por otro lado, adentrándonos en la teoría de modelos podemos tener varios modelos de una misma teoría y entonces surgen las siguientes preguntas ¿Se pueden tener modelos de diferentes cardinalidades de una misma teoría? ¿Se puede extender un modelo (de forma válida) a modelos más grandes (de mayor cardinalidad) o restringirlo? Las preguntas anteriores son problemas que el presente trabajo desarrolla y responde.

1.3. Objetivo del trabajo

La teoría de modelos trabaja sobre cómo se relacionan los aspectos sintácticos de la lógica con la parte semántica. El objetivo del trabajo es hacer un desarrollo de la teoría de modelos que nos muestre un estudio riguroso de dicha relación, además de resolver en el camino las preguntas más específicas sobre la cardinalidad de los modelos que se citaron en el planteamiento del problema como consecuencia del teorema de Löwenheim-Skolem.

1.4. Alcance

El trabajo llega a demostrar el teorema de Löwenheim-Skolem, siendo este uno de los fundamentales en la teoría de modelos. También se planea muestran algunas de las consecuencias inmediatas de dicho teorema, siendo varias de ellas muy interesantes, como por ejemplo la construcción de los hiperreales, pruebas de que hay subestructuras elementales e inmersiones elementales.

1.5. Objetivos específicos

Se plantío hacer un desarrollo riguroso de las nociones básicas de la teoría de modelos, como las estructuras elementales. Además de ello se demostraron los teoremas fundamentales de la teoría, como el teorema de compacidad y el teorema Löwenheim-Skolem, mostrando además su relevancia en algunas de sus aplicaciones inmediatas.

1.6. Marco teórico

Los fundamentos teóricos necesarios para este trabajo son los lenguajes de primer orden, las estructuras y el concepto de lo que entendemos por verdad. A continuación hacemos su desarrollo, además de establecer las definiciones y notaciones que se usaran en los siguientes capítulos.

1.6.1. Alfabeto

Los símbolos comunes a todos los lenguajes de primer orden son los siguientes:

(i) conectores proposicionales $\rightarrow, \leftrightarrow, \neg, \vee, \wedge$

(ii) una cantidad contable de variables $x, y, z, x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$

(iii) el cuantificador existencial $\exists$

(iv) el cuantificador universal $\forall$

(v) un símbolo, "=", para la igualdad

(vi) como símbolos auxiliares en nuestros lenguajes tendremos los paréntesis y la coma "(),"

Nota Se utilizará el mismo símbolo, "=", en el lenguaje y en el metalenguaje. En el primer caso, forma parte del alfabeto de $\mathcal{L}$ y es un símbolo de relación binario que, junto con los términos t_1 y t_2, nos permite formar igualdades, $t_1 = t_2$, que más adelante definiremos como fórmulas de $\mathcal{L}$. En el segundo caso, expresa la genuina relación de identidad, que se da únicamente entre un objeto y sí mismo, el contexto dará a entender claramente cual es el caso.

Signatura

Además de los anteriores símbolos hay otros que dependen de la estructura que vamos a interpretar, símbolos de constantes, símbolos de funciones y símbolos de relaciones a los que en conjunto llamaremos **signatura** de $\mathcal{L}$ y denotaremos como $\langle C; \mu : I \to \mathbb{N}-\{0\}; \delta : J \to \mathbb{N}-\{0\}\rangle$, de forma abreviada escribiremos $\langle C; \mu; \delta\rangle$, donde:

1. C es el conjunto de símbolos de constantes $\{c_1, c_2, \ldots\}$.

2. I es un conjunto, que puede ser $\emptyset$, de índices. Para cada $i \in I$, $\mu(i) \in \mathbb{N}-\{0\}$ y f_i es un símbolo de función $\mu(i)$-aria.

3. J es un conjunto de índices, que también puede ser $\emptyset$. Para cada $j \epsilon$ J, $\delta(j) \epsilon \mathbb{N}-\{0\}$ y R_j es un símbolo de relación $\delta(j)$-aria.

1.6.2. Construcción de términos

Los términos del lenguaje $\mathcal{L}$ junto con sus conjuntos de variables libres fv(-) (donde "fv" viene de "free variables") son definidos de forma inductiva de la siguiente manera:

(T1) cada variable individual x es un término, $\mathrm{fv}(x) = \{x\}$;

(T2) cada símbolo de constante c es un término, $\mathrm{fv}(c) = \emptyset$;

(T3) si f_i es un símbolo de función $\mu(i)$-aria y si $t_1, \ldots, t_{\mu(i)}$ son términos, entonces $f_i(t_1, \ldots, t_{\mu(i)})$ es un término, $\mathrm{fv}(f(t_1, \ldots, t_{\mu(i)})) = \mathrm{fv}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{fv}(t_{\mu(i)})$;

(T4) para ser un término, toda expresion debe poder obtenerse por la aplicación de (T1), (T2) y (T3).

1.6.3. Construcción de fórmulas

- Las **fórmulas atómicas** de $\mathcal{L}$ junto con sus variables libres se definen de la siguiente manera:

(A1) si s, t son términos, entonces $s = t$ es una fórmula atómica, $\mathrm{fv}(s = t) = \mathrm{fv}(s) \cup \mathrm{fv}(t)$;

(A2) si R_j es un símbolo de relación $\delta(j)$-aria y si $t_1, \ldots, t_{\delta(j)}$ son términos, entonces $R_j(t_1, \ldots, t_{\delta(j)})$ es una fórmula atómica, $\mathrm{fv}(R_j(t_1, \ldots, t_{\delta(j)})) = \mathrm{fv}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{fv}(t_{\delta(j)})$.

- Las **fórmulas** están definidas bajo las siguientes reglas:

(F1) todas las fórmulas atómicas son fórmulas;

(F2) si φ es una fórmula entonces $\neg\varphi$ también lo es, $\mathrm{fv}(\neg\varphi) = \mathrm{fv}(\varphi)$;

(F3) si φ y ψ son fórmulas, entonces también lo son $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \to \psi$ y $\varphi \leftrightarrow \psi$, $\mathrm{fv}(\varphi \wedge \psi) = \mathrm{fv}(\varphi \vee \psi) = \mathrm{fv}(\varphi \to \psi) = \mathrm{fv}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \mathrm{fv}(\varphi) \cup \mathrm{fv}(\psi)$;

(F4) si φ es una fórmula y x es una variable cualquiera entonces $\exists x\varphi$ y $\forall x\varphi$ son fórmulas, $\mathrm{fv}(\exists x\varphi) = \mathrm{fv}(\forall x\varphi) = \mathrm{fv}(\varphi) - \{x\}$.

Definición Una **oración** de $\mathcal{L}$ es una fórmula σ de $\mathcal{L}$ sin variables libres $\mathrm{fv}(\sigma) = \emptyset$. Algunos autores la llaman **sentencia**.

1.6.4. Inducción semiótica

Las definiciones y demostraciones por inducción semiótica aparecen frecuentemente en lógica. A continuación mostraremos la estructura de ambas.

Demostraciones por inducción semiótica Si queremos demostrar que todos los términos tienen la propiedad P, es suficiente con demostrar que:

(T1) Cada variable x tiene la propiedad P.

(T2) Cada símbolo de constante c tiene la propiedad P.

(T3) Si los términos $t_1, \ldots, t_{\mu(i)}$ tienen la propiedad P, entonces $f_i(t_1, \ldots, t_{\mu(i)})$ tiene la propiedad P.

Cuando queramos demostrar que todas las fórmulas tienen la propiedad Q, las condiciones serán:

(F1) Todas las fórmulas atómicas: $R_j(t_1, \ldots, t_{\delta(j)})$ y $t_1 = t_2$ tienen la propiedad Q.

(F2) Si φ tiene la propiedad Q, entonces $\neg\varphi$ tiene la propiedad Q.

(F3) Si φ y ψ tienen la propiedad Q, entonces $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \to \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi$ tienen la propiedad Q.

(F4) Si φ tiene la propiedad Q, entonces $\forall x\varphi$ y $\exists x\varphi$ tienen la propiedad Q, siendo x una variable.

Definiciones por inducción semiótica Si se desea definir algun concepto H para cada término y un concepto K para cada fórmula, es suficiente con:

(T1) Definir H para cada variable.

(T2) Definir H para cada constante.

(T3) Definir H para $f_i(t_1, \ldots, t_{\mu(i)})$ suponiendo que ya está definido para $t_1, \ldots, t_{\mu(i)}$.

(F1) Definir K para las fórmulas atómicas: $R_j(t_1, \ldots, t_{\delta(j)})$ y $t_1 = t_2$.

(F2) Definir K para $\neg\varphi$, suponiendo que lo está para φ.

(F3) Definir K para $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \to \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi$ suponiendo que lo está para φ y ψ.

(F4) Definir K para $\forall x\varphi$ y $\exists x\varphi$, suponiendo que está definido para φ.

Si bien estas son las formas de hacer definiciones y demostraciones por inducción semiótica, con la finalidad de acortar nuestras futuras definiciones y demostraciones haremos lo siguiente. Omitiremos los casos para los conectores $\vee, \to, \leftrightarrow$, pues pueden ser escritos en terminos de $\wedge$ y $\neg$ y, dado que "$\forall = \neg\exists\neg$", tampoco es necesario tener un caso para "$\forall$".

1.6.5. Sobre las estructuras

Sea un lenguaje $\mathcal{L}$. Una $\mathcal{L}$-estructura es un contexto en donde las fórmulas del lenguaje toman significado.

Idea: Las fórmulas y oraciones no tienen significado hasta que son interpretadas en una estructura particular.

Una $\mathcal{L}$-**estructura** $\mathcal{M}$ (estructura para el lenguaje $\mathcal{L}$) consiste en un conjunto no vacío M llamado universo de $\mathcal{M}$ (se escribe también $|\mathcal{M}|$) junto con una interpretación de cada uno de los símbolos de constantes, funciones y relaciones de $\mathcal{L}$. Por la "interpretación" de estos símbolos queremos decir lo siguiente:

(i) si c es un símbolo de constante, entonces la interpretacion de c en $\mathcal{M}$, la cual es denotada por $c^{\mathcal{M}}$, debe ser un elemento de M;

(ii) si f_i es un símbolo de función $\mu(i)$–aria, la interpretación de f_i, la cual es denotada por $f_i^{\mathcal{M}}$, debe ser una función de $M^{\mu(i)}$ a M;

(iii) si R_j es un símbolo de relación $\delta(j)$-aria, entonces la interpretación de R_j en M, la cual es denotada por $R_j^{\mathcal{M}}$, debe de ser un subconjunto de $M^{\delta(j)}$.

Definición La **signatura de una estructura** $\mathcal{M}$ son sus conjuntos de constantes, funciones y relaciones, escribiremos $\langle\{c_1^{\mathcal{M}},\ldots\},\{f_1^{\mathcal{M}},\ldots\},\{R_1^{\mathcal{M}},\ldots\}\rangle$ para denotarla.

Ejemplos

1) Los grupos son $\mathcal{L}$-estructuras con signatura $\langle\{0\},\{+\},\emptyset\rangle$ donde 0 es el elemento identidad y "+" es la operación binaria.

2) Los anillos son $\mathcal{L}$-estructuras con signatura $\langle\{0\},\{+,\cdot\},\emptyset\rangle$ donde 0 es el elemento identidad. "+" y "·" son las operaciones binarias.

3) Los cuerpos son $\mathcal{L}$-estructuras con signatura $\langle\{1,0\},\{+,\cdot\},\emptyset\rangle$ donde 0 y 1 son los elementos correspondientes a las identidades aditiva y multiplicativa de forma corespondiente. "+" y "·" son las operaciones binarias.

4) Las algebras de boole; retículos; conjuntos equipados con un orden son también $\mathcal{L}$-estructuras.

1.6.6. Interpretación de los términos

Para que sea más sencillo referirnos a las n-tuplas, escribiremos $\overline{a}$ en lugar de $(a_1,...,a_n)$, donde $a_1,...,a_n$ son elementos de la $\mathcal{L}$-estructura sobre la que estemos hablando.

Ahora definamos la interpretación de los terminos $t(\overline{x})$, donde $\overline{x}$ contiene todas las variables libres de t, de la siguiente forma:

(i) si $t(\overline{x})$ es un símbolo de constante c, entonces $t^{\mathcal{M}}(\overline{a})$ es el elemento $c^{\mathcal{M}} \in M$; si $t(\overline{x})$ es la variable x_i entonces $t^{\mathcal{M}}(\overline{a})$ es a_i;

(ii) si $t(\overline{x})$ es $f_i(t_1,...,t_{\mu(i)})$, donde $t_1,...,t_{\mu(i)}$ son términos, entonces asumiendo que ya hemos definido inductivamente los elementos $t_1^{\mathcal{M}}(\overline{a}),...,t_{\mu(i)}^{\mathcal{M}}(\overline{a})$ de M, definimos $t^{\mathcal{M}}(\overline{a})$ como $f_i^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(\overline{a}),...,t_{\mu(i)}^{\mathcal{M}}(\overline{a}))$ –el valor de la funcíon $f_i^{\mathcal{M}}$ en el elemento $(t_1^{\mathcal{M}}(\overline{a}),...,t_{\mu(i)}^{\mathcal{M}}(\overline{a}))$ de $M^{\mu(i)}$.

1.6.7. Interpretación de las fórmulas

Sustituyendo valores en las fórmulas Supongamos que $\varphi(x_1,...,x_n)$ es una fórmula del lenguaje $\mathcal{L}$ y tiene variables libres entre $x_1,...,x_n$ (para efectos prácticos posteriores convengamos que $x_1,...,x_n$ no necesariamente aparecen en φ). Sean $a_1,...,a_n$ elementos de M (no necesariamente distintos). Entonces $\varphi(a_1,...,a_n)$ es una fórmula la cual resulta cuando cada aparición libre de x_i es sustituida por a_i. Por lo menos esa es la idea. El problema es que un elemento no puede ser literalmente reemplazado en una fórmula, pero podemos hacer lo siguiente. Extendemos temporalmente el lenguaje $\mathcal{L}$ añadiendo un "nombre" a cada elemento $a_1,\ldots,a_n$. Eso es añadir a $\mathcal{L}$ nuevos símbolos de constantes $c_1,\ldots,c_n$. También extendemos $\mathcal{M}$ añadiendo a la signatura de dicha estructura las constantes $c_1^{\mathcal{M}'} = a_1,\ldots,c_n^{\mathcal{M}'} = a_n$, llamando a esta extensión $\mathcal{M}'$. Luego podemos tomar "$\varphi(a_1,\ldots,a_n)$" literalmente como la fórmula $\varphi(c_1,\ldots,c_n)$, del lenguaje extendido, la cual es obtenida al reemplazar cada aparición libre de x_i por un símbolo de constante c_i, la cual es interpretada en la estructura $\mathcal{M}'$ para el lenguaje extendido. Cuando usemos expresiones como $\varphi(a_1,\ldots,a_n)$ entenderemos lo anterior de forma intuitiva, pues sería muy moroso realizar dicho proceso de extensión cada vez que usemos dichas expresiones. Si es que quisiéramos reemplazar sólo algunas variables libres, entonces usamos la notación $\varphi(a_1,x_2,x_3,a_4)$ donde x_1 y x_4 fueron sustituidas, pero x_2 y x_3 no. Es importante recordar que solo las apariciones libres de las variables son reemplazadas. Por ejemplo, si $\varphi(x)$ es la fórmula $x+1=0\wedge\forall x(x=x)$ entonces sólo la primera aparición de x es libre, así que la fórmula $\varphi(-1)$ es $-1+1=0\wedge\forall x(x=x)$.

Satisfacción de las fórmulas Si $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ es una fórmula (con $x_1,\ldots,x_n$ variables libres para nuestra conveniencia), y si $a_1,\ldots,a_n$ son elementos de la estructura $\mathcal{M}$, entonces la expresión $\varphi(a_1,\ldots,a_n)$, definida antes, es una aseveración con un valor de verdad definido. Nos referimos a dicha expresión como fórmula con parámetros, la cual se denotará como una oración ($\varphi(c_1,\ldots,c_n)$) de un lenguaje $\mathcal{L}'$ el cual será una extensión de $\mathcal{L}$. Ahora definiremos lo que queremos decir por que tal fórmula sea satisfecha por la estructura $\mathcal{M}$. La notación que usaremos es $\mathcal{M}\models\varphi(a_1,\ldots,a_n)$, la cual se lee como "$\mathcal{M}$ satisface $\varphi(a_1,\ldots,a_n)$" o "$\varphi(a_1,\ldots,a_n)$ es verdad en $\mathcal{M}$".(Una notación equivalente es $(a_1,\ldots,a_n)\in\varphi(\mathcal{M})$, donde $\varphi(\mathcal{M})$ es el conjunto de "soluciones" de φ en $\mathcal{M}$. La definición de esto es mediante inducción semiótica:

(F1) (A1) $\varphi=(t_1=t_2)$ donde t_1,t_2 son términos con $\mathrm{fv}(t_1)$, $\mathrm{fv}(t_2)\subseteq\{x_1,\ldots,x_n\}$ en este caso definimos $\mathcal{M}\models\varphi(a_1,\ldots,a_n)$ sii $t_1^{\mathcal{M}}(a_1,\ldots,a_n)=t_2^{\mathcal{M}}(a_1,\ldots,a_n)$.

(A2) $\varphi=R_j(t_1,\ldots,t_m)$ donde $t_1,\ldots,t_m$ son terminos con $\mathrm{fv}(t_k)\subseteq\{x_1,\ldots,x_n\}$ para cada k. En este caso definimos la satisfacción de la fórmula así:
$\mathcal{M}\models\varphi(a_1,\ldots,a_n)$ sii $(t_1^{\mathcal{M}}(a_1,\ldots,a_n),\ldots,t_n^{\mathcal{M}}(a_1,\ldots,a_n))\in R_j^{\mathcal{M}}$.

A continuación tomaremos ventaja de nuestra convención de que las variables listadas despues de la fórmula pueden o no aparecer en la fórmula (por ejemplo, $\varphi(x,y)$ con $\varphi : x = x$). De esa fórma podemos usar la misma lista de variables para φ y ψ.

(F2) Tenemos $\mathcal{M} \models \neg\varphi(a_1,\ldots,a_n)$ sii $\mathcal{M} \models \varphi(a_1,\ldots,a_n)$ no sucede.

(F3) Tenemos $\mathcal{M} \models (\varphi \wedge \psi)(a_1,\ldots,a_n)$ sii $\mathcal{M} \models \varphi(a_1,\ldots,a_n)$ y $\mathcal{M} \models \psi(a_1,\ldots,a_n)$.

(F4) Consideremos una fórmula de la forma $\mathcal{M} \models \exists y\varphi(a_1,\ldots,a_n)$. Si y no es una de las variables libres $x_1,\ldots,x_n$ de φ, entonces tenemos $\mathcal{M} \models \exists y\varphi(a_1,\ldots,a_n)$ específicamente si $\mathcal{M} \models \varphi(a_1,\ldots,a_n)$. El caso no trivial es que y aparezca como variable libre en φ, digamos que sea x_i con $i \in \{1,\ldots,n\}$ entonces consideramos la fórmula $\exists x_i\varphi(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$.
Luego, tenemos que $\mathcal{M} \models \exists x_i\varphi(a_1,\ldots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\ldots,a_n)$ sii hay algún elemento b de M tal que $\mathcal{M} \models \varphi(a_1,\ldots,a_{i-1},b,a_{i+1},\ldots,a_n)$.

Nota Es claro de que dada una oración σ podemos hablar sobre si una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$ satisface o no σ desde que σ es una fórmula sin variables libres.

Definición de modelo Se dice que la $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$ es **modelo** de Σ(donde Σ es un conjunto de oraciones) si es que $\mathcal{M}$ satisface cada oración de Σ, escribimos $\mathcal{M} \models \Sigma$.

Nota Sea $\mathcal{M}$ una $\mathcal{L}$-estructura y $\varphi \in \mathcal{L}$ una oración cualquiera. Algunos autores se refieren a la expresión $\mathcal{M} \models \varphi$ como $\mathcal{M}$ es modelo de o modela φ. Nosotros nos referiremos a dicha expresión simplemente como $\mathcal{M}$ satisface φ. Usaremos la palabra modelo sólo en el caso en que el símbolo $\models$ aparezca entre $\mathcal{M}$ y un conjunto de oraciones Σ.

1.6.8. Verdad

Definición de consecuencia Decimos que una oración σ es **consecuencia de un conjunto de oraciones** Σ, si cada estructura que es modelo de Σ, lo es también de σ.

Ejemplo El conjunto de oraciones que forman los axiomas de los grupos implican la oracion de la ley de cancelación.

Definición de validez Decimos que una oración σ es **válida** cuando es verdadera en toda estructura.

Ejemplo La oración $\forall x(x = x)$ es una oración que está en toda estructura desde que existe igualdad en todas las estructuras. Además es claro que siempre será cierta.

Definición de satisfacibilidad Una oración σ es **satisfacible** sii hay al menos una estructura que satisfaga σ.

Ejemplo La oración $\forall y \exists x \neg(xRy)$ es cierta en la estructura de los naturales con la signatura $\langle \emptyset, \emptyset, \{<\} \rangle$, donde la interpretación de R es $<$. Lo anterior es cierto, pues existe un elemento mínimo en los naturales.

Definición de equivalencia lógica Dos fórmulas $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ y $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ son **lógicamente equivalentes** si, para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$ y toda tupla $(a_1, \ldots, a_n)$ de elementos de $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ sii $\mathcal{M} \models \psi(a_1, \ldots, a_n)$.

Ejemplo Las fórmulas $x = y$ y $y = x$ son lógicamente equivalentes.

1.7. Metodología

Se utilizó bibliografía de teoría de modelos, se expusieron los conceptos básicos y se hicieron pruebas de ejemplos de diferentes libros para hacer un desarrollo bastante ilustrativo de la teoría de modelos. Se realizaron reuniones informales con el tutor para discutir el desarrollo adecuado del tema propuesto. Se culminó con sesiones de seminario y discusión que dieron lugar a observaciones productivas para el trabajo.

1.8. Medios

Se usaron los libros tradicionales de teoría de modelos (ver bibliografía) y algún adicional, el cual fue provisto por el tutor.

Capítulo 2

Nociones básicas de la teoría de modelos

2.1. Morfismos y subestructuras

2.1.1. Subestructuras

Sea $\mathcal{M}$ una $\mathcal{L}$-estructura, tomemos un subconjunto no vacío N de M. La $\mathcal{L}$-estructura inducida en N, si exite, está dada por:

(i) $c^{\mathcal{N}} = c^{\mathcal{M}}$ para cada símbolo de constante c (por lo que necesitamos que $c^{\mathcal{M}} \in N$);

(ii) $f_i^{\mathcal{N}}(\overline{a}) = f_i^{\mathcal{M}}(\overline{a})$ para cada símbolo f_i de función $\mu(i)$-aria y $\overline{a} \in N^{\mu(i)}$ (para lo que necesitamos $f_i^{\mathcal{M}}(N^{\mu(i)}) \subseteq N$);

(iii) $\overline{a} \in R_j^{\mathcal{N}}$ sii $\overline{a} \in R_j^{\mathcal{M}}$ para todo $\overline{a} \in N^{\delta(j)}$ para cada símbolo R_j de relación $\delta(j)$-aria.

Si esta estructura está definida – es decir, si N "contiene las constantes" y está cerrado respecto a todas sus funciones, entonces escribimos $\mathcal{N} = \mathcal{M} \restriction N$ ("$\restriction$" se lee "restringido a") y se dice que $\mathcal{N}$ es la subestructura de $\mathcal{M}$ bajo N. Escribiremos

$\mathcal{N} \leq \mathcal{M}$ lo que significa que $\mathcal{N}$ es una subestructura de $\mathcal{M}$.

Lo siguiente se sigue de forma inmediata de la definición.

Lema 2.1.1 *Si $\mathcal{M}$ es una $\mathcal{L}$-estructura y A es un subconjunto de M, el universo de $\mathcal{M}$, entonces A es el universo de una subestructura de $\mathcal{M}$ sii: para todo símbolo de constante c de $\mathcal{L}$, $c^{\mathcal{M}} \in A$ y; para todo símbolo de función f_i $\mu(i)$-aria de $\mathcal{L}$ y $\overline{a} \in A^{\mu(i)}$, $f_i^{\mathcal{M}}(\overline{a}) \in A$.*

Demostración.

($\Rightarrow$) La definición de subestructura en (i) e (ii) afirman esto.

($\Leftarrow$) Construyamos una subestructura $\mathcal{N}$ ($\mathcal{N} \leq \mathcal{M}$) apartir de A.

- Para todo $c \in \mathcal{L}$: $c^{\mathcal{N}} = c^{\mathcal{M}}$. Esto es posible porque, por hipótesis, $\forall c \in \mathcal{L}$ $c^{\mathcal{M}} \in A$.
- Para todo $f_i \in \mathcal{L}$ y tupla $\mu(i)$-aria $\overline{a}$ de elementos de A: $f_i^{\mathcal{N}}(\overline{a}) = f_i^{\mathcal{M}}(\overline{a})$, lo cual es posible pues $f_i^{\mathcal{M}}(\overline{a}) \in A$ por hipótesis con lo que tenemos $f_i^{\mathcal{N}}(A^{\mu(i)}) \subseteq A$.
- Para todo $R_j \in \mathcal{L}$ y $\overline{a} \in A^{\delta(j)}$: $\overline{a} \in R_j^{\mathcal{N}}$ sii $\overline{a} \in R_j^{\mathcal{M}}$.

Con lo que $\mathcal{N} \leq \mathcal{M}$ donde $\mathcal{N} = (A, \langle C^{\mathcal{N}}, \mu, \delta \rangle)$.

□

Proposición 2.1.2 *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje y $\mathcal{M} = (M; \langle C^{\mathcal{M}}; \mu; \delta \rangle)$ una $\mathcal{L}$-estructura. Dado un subconjunto A cualquiera de M existe la más pequeña $\mathcal{L}$-subestructura de $\mathcal{M}$ la cual contiene a A - esta subestructura se denota por $\langle A \rangle$ y se llama subestructura generada por A.*

Demostración. Realicemos la construcción de $\langle A \rangle$ y luego probemos que es la más pequeña posible tal que contenga a A.

- En primer lugar necesitamos que para todo c en $\mathcal{L}$: $c^{\langle A\rangle} \in |\langle A\rangle|$. Para ello añadiremos el conjunto $C^{\langle A\rangle}(= C^{\mathcal{M}})$.

- Es necesario que para todo f_i en $\mathcal{L}$ y $\overline{a} \in |\langle A\rangle|$: $f_i^{\langle A\rangle}(\overline{a}) \in |\langle A\rangle|$, para ello definiremos $|\langle A\rangle| = \cup_{k\in K} A_k$ donde $\cup_{k\in K_i} A_k$ es la union de la familia: $A_0 = A \cup C^{\langle A\rangle}$; $A_1 = A_0 \cup (\cup_{i\in I} f_i^{\mathcal{M}}(A_0^{\mu(i)}));\ldots; A_{n+1} = A_n \cup (\cup_{i\in I} f_i^{\mathcal{M}}(A_n^{\mu(i)}))$; ... , dicho conjunto cumple claramente estar cerrado bajo las funciones de $\mathcal{M}$.

Por el Lema 2.1.1 $|\langle A\rangle|$ es el universo de una subestructura de $\mathcal{M}$ a la que llamamos $\langle A\rangle$.

Veamos que es la más pequeña posible tal que contenga A mediante una demostración por contradicción. Supongamos que exite $\mathcal{N} \leq \mathcal{M}$ que contenga a A tal que $N \subset |\langle A\rangle|$ estrictamente, es decir existe $a \in |\langle A\rangle|$ y $a \notin N$. a tiene que estar en algún A_k. Tomando el A_k más pequeño que contiene a a podemos seguir el siguiente razonamiento. Es claro que no puede estar en A_0, pues de lo contrario habria un elemento de $A \cup C^{\mathcal{M}}$ que no estaria en N. Si está en otro A_k querría decir que existe $\overline{b} \in A_{k-1}^{\mu(i)}$ tal que $a = f_i^{\mathcal{M}}(\overline{b})$ con lo que N no sería cerrado respecto a la función $f_i^{\mathcal{N}} = f_i^{\mathcal{M}}$ y por lo tanto $\mathcal{N} \nleq \mathcal{M}$ lo cual es una contradicción.

Por tanto $\langle A\rangle$ es la subestructura más pequeña de $\mathcal{M}$ que contenga A.

□

Ejemplos de subestructuras

1) $(\mathbb{Z}, \langle \emptyset, \{+_{\mathbb{Z}}, \cdot_{\mathbb{Z}}\}, \emptyset\rangle) \leq (\mathbb{Q}, \langle \emptyset, \{+_{\mathbb{Q}}, \cdot_{\mathbb{Q}}\}, \emptyset\rangle) \leq (\mathbb{R}, \langle \emptyset, \{+_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}}\}, \emptyset\rangle)$, pues no tienen constantes y las funciones son cerradas.

2) $(\mathbb{Z}, \langle \emptyset, \emptyset, \{\leq_{\mathbb{Z}}\}\rangle) \leq (\mathbb{Q}, \langle \emptyset, \emptyset, \{\leq_{\mathbb{Q}}\}\rangle) \leq (\mathbb{R}, \langle \emptyset, \emptyset, \{\leq_{\mathbb{R}}\}\rangle)$, pues no tienen constantes ni funciones.

2.1.2. Morfismos entre $\mathcal{L}$-estructuras

Si $\overline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ escribiremos $\alpha(\overline{a})$ como la abreviación de $(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n))$. Además escribiremos $\overline{x}$ para referirnos a tuplas de variables de $\mathcal{L}$.

Definición 2.1.3 Si $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son $\mathcal{L}$-estructuras entonces un **homomorfismo**, o simplemente **morfismo**, de $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ es una aplicación $\alpha : M \longrightarrow N$ tal que:

(a) para cada símbolo de constante c de $\mathcal{L}$, $\alpha(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$;

(b) para cada símbolo de función f_i $\mu(i)$-aria de $\mathcal{L}$ y cada tupla $\overline{a} \in M^{\mu(i)}$, $\alpha(f_i^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_{\mu(i)})) = f_i^{\mathcal{N}}(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_{\mu(i)}))$;

(c) para cada símbolo de relación R_j $\delta(j)$-aria de $\mathcal{L}$ y toda tupla $\overline{a} \in M^{\delta(i)}$, si se tiene $(a_1, \dots, a_{\delta(j)}) \in R_j^{\mathcal{M}}$, entonces se tiene $(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_{\delta(j)})) \in R_j^{\mathcal{N}}$.

Definición 2.1.4 Se dice que un morfismo es una **inmersión** si α es inyectiva y se cumple la condición más fuerte:

(c') para cada símbolo de relación R_j $\delta(j)$-ario de $\mathcal{L}$ y toda tupla $\overline{a} \in M^{\delta(j)}$, se da $(a_1, \dots, a_{\delta(j)}) \in R_j^{\mathcal{M}}$ sii se da $(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_{\delta(j)})) \in R_j^{\mathcal{N}}$.

Si además una inmersión es sobreyectiva, entonces es un **isomorfismo**. Para denotar que $\mathcal{M}$ es isomorfa a $\mathcal{N}$ escribiremos de forma abreviada $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$.

Ejemplos

1) La aplicación

$$
\begin{aligned}
\alpha : \{0,1,2\} &\longrightarrow \{3,4\} \\
0 &\longmapsto 3 \\
1 &\longmapsto 4 \\
2 &\longmapsto 3
\end{aligned}
$$

es un homomorfismo entre la estructura

$$0 \longmapsto 1$$
$$(\{0,1,2\}, \langle \emptyset, \{f : 1 \longmapsto 2\}, \emptyset \rangle)$$
$$2 \longmapsto 1$$

y la estructura

$$(\{3,4\}, \langle \emptyset, g : 4 \longmapsto 3 \rangle)$$
$$3 \longmapsto 4$$

2) La aplicación

$$\alpha : \{0,1\} \longrightarrow \{0,1,2,3\}$$
$$0 \longmapsto 0$$
$$1 \longmapsto 2$$

es un homomorfismo de la $\mathcal{L}$-estructura $(\mathbb{Z}_2, \langle \{0\}, \{+\}, \emptyset \rangle)$ en la $\mathcal{L}$-estructura $(\mathbb{Z}_4, \langle \{0\}, \{+\}, \emptyset \rangle)$.

3) Sea $(\mathbb{N}, \langle \emptyset, \emptyset, \{<_{\mathbb{N}}\} \rangle)$ la $\mathcal{L}$-estructura de los naturales con la relación de orden. Sea $(\mathbb{N} - \{0\}, \langle \emptyset, \emptyset, \{<_{\mathbb{N}}\} \rangle)$. La función α de $\mathbb{N} - \{0\}$ en $\mathbb{N}$, definida de la siguiente forma $\alpha(n) = n - 1$, es un isomorfismo. Hay que notar que la aplicación de inclusión es una inmersión.

Lema 2.1.5

(1) Si $\mathcal{M}_0$ es una subestructura de $\mathcal{M}$, entonces la aplicación de inclusión de $\mathcal{M}_0$ a $\mathcal{M}$ es una inmersión.

(2) Si α es una inmersión de $\mathcal{N}$ en $\mathcal{M}$, entonces la imagen $im(\alpha)$, equipada con la $\mathcal{L}$-estructura de $\mathcal{N}$, es una subestructura de $\mathcal{M}$ basada en $im(\alpha)$.

Demostración.

(1) Sea α la aplicación de inclusión de $\mathcal{M}_0$ a $\mathcal{M}$ ($\forall a \in M_o\ \alpha(a) = a$) con $\mathcal{M}_0 \leq \mathcal{M}$.

- Para todo $c \in C$ tenemos $\alpha(c^{\mathcal{M}_0}) = c^{\mathcal{M}_0}$, pues α es la inclusión; y, $c^{\mathcal{M}_0} = c^{\mathcal{M}}$, pues $\mathcal{M}_0 \leq \mathcal{M}$.
  Por tanto $\alpha(c^{\mathcal{M}_0}) = c^{\mathcal{M}}$ para todo $c \in C$.
- Para cada f_i y $\overline{a} \in M_0^{\mu(i)}$ tenemos:
  $\alpha(f_i^{\mathcal{M}_0}(\overline{a})) = f_i^{\mathcal{M}_0}(\overline{a}) = f_i^{\mathcal{M}_0}(a_1, \ldots, a_{\mu(i)}) = f_i^{\mathcal{M}}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_{\mu(i)}))$
  Por tanto $\alpha(f_i^{\mathcal{M}_o}(\overline{a})) = f_i^{\mathcal{M}}(\alpha\overline{a})$
- Como $\mathcal{M}_0 \leq \mathcal{M}$ para cada R_j y todo $\overline{a}$ en $M_0^{\delta(j)}$ tenemos:
  $\overline{a} \in R_j^{\mathcal{M}}$ sii $\overline{a} \in R_j^{\mathcal{M}_0}$, ya que $\alpha(\overline{a}) = \overline{a}$ podemos afirmar $\overline{a} \in R_j^{\mathcal{M}}$ sii $\alpha(\overline{a}) \in R_j^{\mathcal{M}_0}$.

(2) Primero construyamos $\mathcal{M}_0 \leq \mathcal{M}$ con universo $im(\alpha)$:

- $c^{\mathcal{M}_0} = \alpha(c^{\mathcal{N}}) = c^{\mathcal{M}}$
- Para $\overline{b} \in (im(\alpha))^{\mu(i)}$ y todo f_i sucede:
  $f_i^{\mathcal{M}_0}(\overline{b}) = f_i^{\mathcal{M}_0}(\alpha\overline{a})$, pues todo $b_k = \alpha(a_k)$ donde $a_k \in N$
  $= f_i^{\mathcal{M}}(\alpha(\overline{a}))$ pues queremos que $\mathcal{M}_0 \leq \mathcal{M}$
  $= \alpha(f_i^{\mathcal{N}}(\overline{a})) \in im(\alpha)$
  Por tanto $f_i^{\mathcal{M}_0}(\overline{b}) \in im(\alpha)$.

Por el Lema 2.1.1 y lo anterior tenemos que exite $\mathcal{M}_0 \leq \mathcal{M}$. Veamos además que es una copia de $\mathcal{N}$. Es fácil ver a partir de lo anterior que para sus signaturas pasa lo siguiente: $c^{\mathcal{M}_0} = \alpha(c^{\mathcal{N}})$; $f_i^{\mathcal{M}_0}(\overline{b}) = f_i^{\mathcal{M}_0}(\alpha\overline{a}) = \alpha(f_i^{\mathcal{N}}(\overline{a}))$; $\overline{a} \in R_j^{\mathcal{N}}$ sii $\alpha\overline{a} \in R_j^{\mathcal{M}}$ sii $\alpha\overline{a} \in R_j^{\mathcal{M}_0}$.

□

Lema 2.1.6 *Si $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$ son $\mathcal{L}$-estructuras y α: $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ y β: $\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}'$ son morfismos, entonces la composición, $\beta\alpha$: $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}'$ es un morfismo.*

Demostración.

(a) Para cada $c \in C$, se cumple $\alpha(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$ y $\beta(c^{\mathcal{N}}) = c^{\mathcal{N}'}$ con lo que tenemos $\beta(\alpha(c^{\mathcal{M}})) = c^{\mathcal{N}'}$.

Por tanto $\beta\alpha(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}'}$

(b) Para cada $f_i \in \mathcal{L}$ sucede:
$\alpha(f_i^{\mathcal{M}}(\overline{a})) = f_i^{\mathcal{N}}(\alpha\overline{a})$ con $\overline{a} \in M^{\mu(i)}$; $\beta(f_i^{\mathcal{N}}(\overline{b})) = f_i^{\mathcal{N}'}(\beta\overline{b})$ con $\overline{b} \in N^{\mu(i)}$.
Como $\alpha(a_k) \in N$, entonces tenemos $f_i^{\mathcal{N}'}(\beta(\alpha\overline{a})) = \beta(f_i^{\mathcal{N}}(\alpha\overline{a})) = \beta(\alpha(f_i^{\mathcal{M}}(\overline{a})))$.
Por tanto $f_i^{\mathcal{N}'}(\beta\alpha\overline{a}) = \beta\alpha(f_i^{\mathcal{M}}(\overline{a}))$

(c) Para cada $R_j \in \mathcal{L}$ y $\overline{a} \in M^{\delta(j)}$ tenemos:
$\overline{a} \in R_j^{\mathcal{M}}$, entonces $\alpha\overline{a} \in R_j^{\mathcal{N}}$.
Como $\alpha\overline{a} \in N^{\delta(j)}$ sucede lo siguiente $\alpha\overline{a} \in R_j^{\mathcal{N}}$, entonces $\beta(\alpha\overline{a}) \in R_j^{\mathcal{N}'}$.
Por tanto $\overline{a} \in R_j^{\mathcal{M}}$ entonces $\beta\alpha\overline{a} \in R_j^{\mathcal{N}'}$.

□

Proposición 2.1.7 *Supongamos que $\alpha\colon \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}$ es un morfismo de $\mathcal{L}$-estructuras. Entonces para cada termino $t(x_1,...x_n)$ de $\mathcal{L}$ y cualquier tupla $\overline{a} \in N^n$ tenemos $\alpha(t^{\mathcal{N}}(\overline{a})) = t^{\mathcal{M}}(\alpha\overline{a})$.*

Demostración. Probemos por inducción semiótica sobre los términos de $\mathcal{L}$.

(i) Si $t = c$, entonces $t^{\mathcal{N}}(\overline{a}) = c^{\mathcal{N}}$ y $t^{\mathcal{M}}(\alpha\overline{a}) = c^{\mathcal{M}}$.
Luego $\alpha(t^{\mathcal{N}}(\overline{a})) = \alpha(c^{\mathcal{N}}) = c^{\mathcal{M}} = t^{\mathcal{M}}(\alpha\overline{a})$.

Si $t = x_k$ con $k \in \{1,\dots,n\}$, entonces $t^{\mathcal{N}}(a_1,..,a_n) = a_k$ y $t^{\mathcal{M}}(\alpha\overline{a}) = \alpha(a_k)$.
Luego $\alpha(t^{\mathcal{N}}(\overline{a})) = \alpha(a_k) = t^{\mathcal{M}}(\alpha\overline{a})$.

(ii) Si $t = f_i(t_1,\dots,t_{\mu(i)})$, donde $t_1,\dots,t_{\mu(i)}$ son términos para los que se cumple la Proposición 2.1.7, entonces $t^{\mathcal{N}}(\overline{a}) = f_i^{\mathcal{N}}(t_1^{\mathcal{N}}(\overline{a}),\dots,t_{\mu(i)}^{\mathcal{N}}(\overline{a}))$ y

$t^{\mathcal{M}}(\alpha\overline{a}) = f_i^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(\alpha\overline{a}),\ldots,t_{\mu(i)}^{\mathcal{M}}(\alpha\overline{a}))$. Luego $\alpha(t^{\mathcal{N}}(\overline{a})) = \alpha(f_i^{\mathcal{N}}(t_1^{\mathcal{N}}(\overline{a}),\ldots,t_{\mu(i)}^{\mathcal{N}}(\overline{a}))) = f_i^{\mathcal{M}}(\alpha(t_1(\overline{a})),\ldots,\alpha(t_{\mu(i)}(\overline{a})))$ y, como para $t_1,\ldots,t_{\mu(i)}$ se cumple la Proposición 2.1.7, entonces $f_i^{\mathcal{M}}(\alpha(t_1^{\mathcal{N}}(\overline{a})),\ldots,\alpha(t_{\mu(i)}^{\mathcal{N}}(\overline{a}))) = f_i^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(\alpha\overline{a}),\ldots,t_{\mu(i)}^{\mathcal{M}}(\alpha\overline{a})) = t^{\mathcal{M}}(\alpha\overline{a})$. Por tanto $\alpha(t^{\mathcal{N}}(\overline{a})) = t^{\mathcal{M}}(\alpha\overline{a})$.

□

2.2. Equivalencias elementales

Definición 2.2.1 Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ dos $\mathcal{L}$-estructuras. Decimos que $\mathcal{M}$ es **elementalmente equivalente** a $\mathcal{N}$ si para cada oración σ de $\mathcal{L}$, $\mathcal{M} \models \sigma$ sii $\mathcal{N} \models \sigma$. Escribimos $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ para indicar que $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son elementalmente equivalentes.

Ejemplos

1) Las estructuras $(\{0,1,2\},\langle\emptyset,\emptyset,\emptyset\rangle)$ y $(\{3,4,5\},\langle\emptyset,\emptyset,\emptyset\rangle)$ son elementalmente equivalentes. En general, dos estructuras con siganatura vacía con el mismo número finito de elementos en su universo son elementalmente equivalentes.

2) Las estructuras $(\mathbb{Q},\langle\emptyset,\emptyset,\{<_{\mathbb{Q}}\}\rangle)$ y $(\mathbb{R},\langle\emptyset,\emptyset,\{<_{\mathbb{R}}\}\rangle)$ de los racionales y de los reales con sus órdenes respectivos son elementalmente equivalentes. En ejemplos posteriores mostraremos que una es una subestructura elemental de la otra, lo cual es más fuerte que la equivalencia elemental.

Proposición 2.2.2 *La relación $\equiv$ (equivalencia elemental) es una relación de equivalencia entre estructuras de la misma signatura.*

Demostración. $\equiv$ es obviamente reflexiva y simétrica por la definición. Es transitiva pues, dadas $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ y $\mathcal{N} \equiv \mathcal{N}'$, para toda oración $\sigma \in \mathcal{L}$ tenemos que $\mathcal{M}$ satisface σ sii $\mathcal{N}$ satisface σ, y $\mathcal{N}$ satisface σ sii $\mathcal{N}'$ satisface σ, de lo que se puede concluir $\mathcal{M}$ satisface σ sii $\mathcal{N}'$ satisface σ y por ende $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}'$.
Por tanto $\equiv$ es una relación de equivalencia.

□

Notemos que como $\cong$ y $\equiv$ son ambas relaciones de equivalencia, podemos hablar de las clases de equivalencia generadas por ambas. La Proposición 2.2.3 puede expresarse diciendo que, para cada estructura $\mathcal{M}$ su clase de equivalencia mediante $\cong$ está dentro de clase de equivalencia de $\mathcal{M}$ mediante $\equiv$, es decir, $\{\mathcal{N}/\mathcal{M} \cong \mathcal{N}\} \subseteq \{\mathcal{N}/\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}\}$. Esta inclusión se convierte en igualdad cuando $\mathcal{M}$ es finita y es inclusión estricta cuando $\mathcal{M}$ es infinita. De hecho, esto es una consecuencia de la Proposición 2.4.7 y del Teorema de Löwenheim-Skolem que probaremos más adelante.

2.3. Subestructuras elementales e inmersiones elementales

Definición 2.3.1 Supongamos que $\mathcal{N}$ y $\mathcal{M}$ son $\mathcal{L}$-estructuras con $\mathcal{N}$ una subestructura de $\mathcal{M}$, $\mathcal{N} \leq \mathcal{M}$. Diremos que $\mathcal{N}$ es una **subestructura elemental** de $\mathcal{M}$ (y que $\mathcal{M}$ es una **extensión elemental** de $\mathcal{N}$), lo que escribiremos $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$, si para cada $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(\overline{x})$ y tupla $\overline{a}$ de elementos de $\mathcal{N}$ tenemos que $\mathcal{N} \models \varphi(\overline{a})$ sii $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a})$.

Nota Hablaremos de ejemplos al respecto después de definir inmersiones elementales y el Lema 2.3.4, puesto que los tres conceptos que se exponen están relacionados.

Lema 2.3.2

(1) $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$ *implica* $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$

(2) $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$ *y* $\mathcal{M} \prec \mathcal{M}'$ *juntas implican* $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}'$.

Demostración.

(1) Si sucede $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$ se cumple en particular que, para toda oración $\sigma \in \mathcal{L}$, $\mathcal{N} \models \sigma$ sii $\mathcal{M} \models \sigma$. Por lo tanto $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$.

(2) Como toda subestructura elemental es subestructura, sucede lo siquiente para los elementos de la signatura: $c^{\mathcal{N}} = c^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{M}'}$; $f_i^{\mathcal{N}}(\overline{a}) = f_i^{\mathcal{M}}(\overline{a}) = f_i^{\mathcal{M}'}(\overline{a})$, para todo $\overline{a} \in N^{\mu(i)}$, lo cual es posible pues $N \subseteq M \subseteq M'$; $\overline{a} \in R_j^{\mathcal{N}}$ sii $\overline{a} \in R_j^{\mathcal{M}}$ sii $\overline{a} \in R_j^{\mathcal{M}'}$, para todo $\overline{a} \in N^{\delta(j)}$ con lo que $\mathcal{N} \leq \mathcal{M}'$.
Aplicando la definicíon de subestructura elemental tenemos que, para toda fórmula φ de $\mathcal{L}$ y $a \in \mathcal{N}$ sucede $\mathcal{N} \models \varphi(\overline{a})$ sii $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a})$ sii $\mathcal{M}' \models \varphi(\overline{a})$. Por tanto $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}'$.

□

Definición 2.3.3 Diremos que una inmersión $\alpha : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}$ de $\mathcal{L}$-estructuras es una **inmersión elemental** si para cada $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(\overline{x})$ y tupla $\overline{a}$ de elementos de N tenemos $\mathcal{N} \models \varphi(\overline{a})$ sii $\mathcal{M} \models \varphi(\alpha\overline{a})$.

Lema 2.3.4

(1) Si $\mathcal{M}_0$ es una subestructura elemental de $\mathcal{M}$, entonces la aplicación de inclusión de $\mathcal{M}_0$ a $\mathcal{M}$ es una inmersión elemental.

(2) Si α es una inmersión elemental de $\mathcal{N}$ a $\mathcal{M}$ entonces la imagen, im(α), equipada con la $\mathcal{L}$-estructura copiada de $\mathcal{N}$ (la cual es la $\mathcal{L}$-estructura inducida por $\mathcal{M}$) es una subestructura elemental de $\mathcal{M}$.

Demostración.

(1) Por la parte (1) del Lema 2.1.5 tenemos que la aplicación α de inclusión es una inmersión. Veamos que es una inmersión elemental. Ya que $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}$, entonces para cada $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(\overline{x})$ y tupla $\overline{a}$ de elementos de $\mathcal{M}_0$ tenemos que $\mathcal{M}_0 \models \varphi(\overline{a})$ sii $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a})$. Y, desde que $\overline{a} = \alpha\overline{a}$ (pues α es una aplicación de

inlusión), se sigue que $\mathcal{M}_0 \models \varphi(\overline{a})$ sii $\mathcal{M} \models \varphi(\alpha\overline{a})$.
$\therefore$ α es una inmersión elemental.

(2) No necesitaremos esta parte del lema en el resto del capítulo, por lo que nos permitiremos demostrarlo después de la Proposición 2.3.7 la cual nos ahorrará mucho trabajo.

$\square$

Proposición 2.3.5 *Todos los órdenes lineales densos sin extremos contables son isomorfos.*

Demostración. La demostración consiste en la contrucción de una biyección que preserve la relación de orden entre los elementos. Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ dos ordenes lineales densos sin extremos contables cualesquiera.Podemos tomar una numeración de cada uno $m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots$ y $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$, respectivamente. Luego definimos el isomorfismo inductivamente de la siguiente forma:
A m_1 le asignamos n_1.
A n_2 le asignamos un m_i de forma que (n_1, n_2) y (m_1, m_i) tengan la misma relación de orden.
Luego tomamos el m_j con el menor subíndice que no hayamos tomado y le asignamos algún n de forma que preserve el orden con el resto de elementos.
Luego tomamos el n_i con el menor subíndice que no hayamos tomado y le asignamos algún m de forma que preserve el orden con el resto de elementos.
Luego tomamos el m_j con el menor subíndice que no hayamos tomado y le asignamos algún n de forma que preserve el orden con el resto de elementos.
Luego tomamos el n_i con el menor subíndice que no hayamos tomado y le asignamos algún m de forma que preserve el orden con el resto de elementos.
Y, así de forma sucesiva se cubren los dos universos y α preserva el orden de ambas estructuras.

$\square$

Ejemplos

1) Veamos primero el caso de una subestructura no elemental. Es fácil ver que $(\mathbb{R}, \langle \emptyset, \{\cdot\}, \emptyset \rangle) \leq (\mathbb{C}, \langle \emptyset, \{\cdot\}, \emptyset \rangle)$, puesto a que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ y la función "$\cdot$" es cerrada en $\mathbb{R}$ y por ello cumplen las condiciones del Lema 2.1.1. No es una subestructura elemental, pues en $(\mathbb{C}, \langle \emptyset, \{\cdot\}, \emptyset \rangle)$ la oración $\forall y \exists x (x \cdot x = y)$ es verdadera, pero no lo es en la subestructura. Lo anterior es claro si recordamos que -1 no tiene raiz cuadrada en los reales.

2) $(\mathbb{Q}, \langle \emptyset, \emptyset, \{<_{\mathbb{Q}}\} \rangle) \prec (\mathbb{R}, \langle \emptyset, \emptyset, \{<_{\mathbb{R}}\} \rangle)$.

   Demostraremos que $\mathbb{Q}$ es una subestructura elemental al probar que toda tupla $\overline{a}$ de $\mathbb{Q}$ satisface las mismas fórmulas en $\mathbb{Q}$ y en $\mathbb{R}$. Para ello, tomamos una subestructura elemental $\mathcal{M}$ de $\mathbb{R}$ infinita contable que contenga a $\overline{a}$; esto se puede hacer por el Teorema de Löwenheim-Skolem. Luego por la Proposición 2.3.5 podemos contruir un isomorfismo α entre $\mathbb{Q}$ y $\mathcal{M}$ (lo cual es posible porque son órdenes lineales densos sin extremos) . Además, podemos hacer que α mande $\overline{a}$ a sí misma porque claramente sus elementos tienen la misma relación de orden en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{Q}$. Por la Proposición 2.3.7, que demostraremos más adelante tenemos que los isomorfismos son inmersiones elementales. En consecuencia tenemos que $\overline{a}$ cumple las mismas fórmulas en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{Q}$. El proceso anterior se puede realizar para cada tupla de $\mathbb{Q}$.

3) La aplicación de inclusión de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ es una inmersión elemental entre las estructuras $(\mathbb{Q}, \langle \emptyset, \emptyset, \{<_{\mathbb{Q}}\} \rangle)$ y $(\mathbb{R}, \langle \emptyset, \emptyset, \{<_{\mathbb{R}}\} \rangle)$, donde $<$ es un símbolo de relación de orden. Podemos afirmar lo anterior por el Ejemplo 2 y el Lema 2.3.4.

Nota: Dada una $\mathcal{L}$-estructura con un universo infinito, el Teorema de Löwenheim-Skolem permite construir subestructuras y extensiones elementales de todas las cardinalidades deseadas. En el Capítulo 4 construiremos los hiperreales que tienen como subestructura a los reales. En dicha construcción también podremos ver un ejemplo claro de una inmersión elemental. Por todo ello no daremos más ejemplos de subestructuras e inmersiones elementales.

Proposición 2.3.6

(1) Si $\alpha : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}$ es una inmersión y si $\varphi(\overline{x}) \in \mathcal{L}$ está libre de cuantificadores y $\overline{a}$ es una tupla de elementos de N, entonces $\mathcal{N} \models \varphi(\overline{a})$ sii $\mathcal{M} \models \varphi(\alpha(\overline{a}))$.

(2) Si $\mathcal{N}$ es una subestructura de $\mathcal{M}$, entonces si $\varphi(\overline{x}) \in \mathcal{L}$ está libre de cuantificadores y $\overline{a}$ es una tupla de elementos de N, entonces $\mathcal{N} \models \varphi(\overline{a})$ sii $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a})$.

Demostración.

(1) En primer lugar es útil resaltar que para cada termino $t(x_1, ...x_n)$ de $\mathcal{L}$ y cualquier tupla $\overline{a} \in N^n$ sucederá $\alpha(t^{\mathcal{N}}(\overline{a})) = t^{\mathcal{M}}(\alpha\overline{a})$ pues α es una inmersión. Ahora, hagamos una prueba por inducción semiótica sobre las fórmulas de $\mathcal{L}$ sin cuantificadores:

(F1) En esta parte usamos la definición de "$\models$", la Proposición 2.1.7, el hecho de que α es una inmersión y la definición de $\models$ otra vez.

(A1) Sea $\varphi = (t_1 = t_2)$, entonces tenemos:
$\mathcal{M} \models \varphi(\alpha\overline{a})$ sii $t_1^{\mathcal{M}}(\alpha\overline{a}) = t_2^{\mathcal{M}}(\alpha\overline{a})$ sii $\alpha(t_1^{\mathcal{N}}(\overline{a})) = \alpha(t_2^{\mathcal{N}}(\overline{a}))$ sii $t_1^{\mathcal{N}}(\overline{a}) = t_2^{\mathcal{N}}(\overline{a})$ sii $\mathcal{N} \models \varphi(\overline{a})$.

(A2) Sea $\varphi = R_j(t_1, \ldots, t_{\delta(j)})$, entonces tenemos:
$\mathcal{M} \models \varphi(\alpha\overline{a})$ sii $(t_1^{\mathcal{M}}(\alpha\overline{a}), \ldots, t_{\delta(j)}^{\mathcal{M}}(\alpha\overline{a})) \in R_j^{\mathcal{M}}$ sii $(\alpha(t_1^{\mathcal{N}}(\overline{a})), \ldots, \alpha(t_{\delta(j)}^{\mathcal{N}}(\overline{a}))) \in R_j^{\mathcal{M}}$ sii $(t_1^{\mathcal{N}}(\overline{a}), \ldots, t_{\delta(j)}^{\mathcal{N}}(\overline{a})) \in R_j^{\mathcal{N}}$ sii $\mathcal{N} \models \varphi(\overline{a})$.

(F2) $\mathcal{M} \models \neg\varphi(\overline{a})$ sii $\mathcal{M} \not\models \varphi(\overline{a})$ sii $\mathcal{N} \not\models \varphi(\overline{a})$ sii $\mathcal{N} \models \neg\varphi(\overline{a})$.

(F3) $\mathcal{M} \models (\varphi \wedge \psi)(\alpha\overline{a})$ sii $\mathcal{M} \models \varphi(\alpha\overline{a})$ y $\mathcal{M} \models \psi(\alpha\overline{a})$
sii $\mathcal{N} \models \varphi(\overline{a})$ y $\mathcal{N} \models \psi(\overline{a})$ sii $\mathcal{N} \models (\varphi \wedge \psi)(\overline{a})$.

Por la inducción semiótica podemos afirmar que para toda fórmula sin cuantificadores si α es una inmersión entonces $\mathcal{N} \models \varphi(\overline{a})$ sii $\mathcal{M} \models \varphi(\alpha\overline{a})$.

(2) Tomemos la aplicación de inclusión $\alpha : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}$. Por la parte (1) del Lema 2.1.5 es una inmersión y de la parte (1) de esta proposición se sigue que si $\varphi(\overline{x}) \in \mathcal{L}$ está libre de cuantificadores y $\overline{a}$ está en N, entonces $\mathcal{N} \models \varphi(\overline{a})$ sii $\mathcal{M} \models \varphi(\alpha\overline{a})$. Como $\overline{a} = \alpha\overline{a}$ (pues α es de inclusión), entonces $\mathcal{N} \models \varphi(\overline{a})$ sii $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a})$, para $\varphi(\overline{x})$ sin cuantificadores.

□

Proposición 2.3.7 *Sea $\alpha : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}$ un isomorfismo. Sea $\varphi(\overline{x}) \in \mathcal{L}$ y $\overline{a}$ en N. Entonces $\mathcal{N} \models \varphi(\overline{a})$ sii $\mathcal{M} \models \varphi(\alpha\overline{a})$.*

Demostración. La demostración es por inducción semiótica sobre las fórmulas. A partir de la parte (1) del Lema 2.3.6, es claro que se cumple para las fórmulas sin cuantificadores ya que los isomorfismos son inmersiones sobreyectivas. Probemos que se cumple para las fórmulas con cuantificadores.

(F4) Si queremos probar $\mathcal{N} \models \exists y\varphi(\overline{a})$ sii $\mathcal{M} \models \exists y\varphi(\alpha\overline{a})$ debemos tomar los siguientes casos:

(i) y no es una de las variables libres $x_1,\ldots,x_n$ de φ, entonces $\mathcal{N} \models \exists y\varphi(\overline{a})$ sii $\mathcal{N} \models \varphi(\overline{a})$ sii $\mathcal{M} \models \varphi(\alpha\overline{a})$ sii $\mathcal{M} \models \exists y\varphi(\alpha\overline{a})$.

(ii) y es alguna variable libre x_i de φ (con $i \in \{1,\ldots,n\}$), entonces $\mathcal{N} \models \exists y\varphi(\overline{a})$
sii $\mathcal{N} \models \exists x_i\varphi(\overline{a})$ sii $\mathcal{N} \models \exists x_i\varphi(a_1,\ldots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\ldots,a_n)$
sii hay algún elemento b de N tal que $\mathcal{N} \models \varphi(a_1,\ldots,a_{i-1},b,a_{i+1},\ldots,a_n)$
sii $\mathcal{N} \models \varphi(a_1,\ldots,a_{i-1},b,a_{i+1},\ldots,a_n)$
sii $\mathcal{M} \models \varphi(\alpha(a_1),\ldots,\alpha(a_{i-1}),\alpha(b),\alpha(a_{i+1}),\ldots,\alpha(a_n))$
sii hay algún elemento $\alpha(b)$ de M
tal que $\mathcal{M} \models \varphi(\alpha(a_1),\ldots,\alpha(a_{i-1}),\alpha(b),\alpha(a_{i+1}),\ldots,\alpha(a_n))$
sii $\mathcal{M} \models \exists x_i\varphi(\alpha(a_1),\ldots,\alpha(a_{i-1}),x_i,\alpha(a_{i+1}),\ldots,\alpha(a_n))$ sii $\mathcal{M} \models \exists x_i\varphi(\alpha\overline{a})$
sii $\mathcal{M} \models \exists y\varphi(\alpha\overline{a})$.

□

Hay que notar que el paso
$\mathcal{N} \models \varphi(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ sii $\mathcal{M} \models \varphi(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_{i-1}), \alpha(b), \alpha(a_{i+1}), \ldots, \alpha(a_n))$ es posible por la sobreyectividad de α. Pues si no fuera sobreyectiva podría suceder que existiece un elemento $d \in M$ tal que $d \neq \alpha(b)$ para todo $b \in N$ ($d \notin im(\alpha)$) tal que sucediera $\mathcal{M} \models \varphi(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_{i-1}), d, \alpha(a_{i+1}), \ldots, \alpha(a_n))$
y $\mathcal{M} \not\models \varphi(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_{i-1}), \alpha(b), \alpha(a_{i+1}), \ldots, \alpha(a_n))$.

Prueba de la Proposición 2.3.4 (2):

Demostración. Por la parte (2) del Lema 2.1.5 tenemos que $\langle im(\alpha), \mu, \delta \rangle = \mathcal{M}_0$ es una subestructura de $\mathcal{M}$. Como α es una inmersión elemental, es, en particular, un isomorfismo respecto a $\mathcal{M}_0$ por la naturaleza de $\mathcal{M}$. Luego, para toda tupla $\overline{a}$ de elemntos de N, por 2.3.7, que $\mathcal{M}_0 \models \varphi(\alpha\overline{a})$ sii $\mathcal{N} \models \varphi(\overline{a})$ sii $\mathcal{M} \models \varphi(\alpha\overline{a})$. Como todo $b \in M_o$ cumple $b = \alpha(a)$ podemos concluir que $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{b})$ sii $\mathcal{M}_0 \models \varphi(\overline{b})$
Por tanto $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}$.

□

Proposición 2.3.8 *Si $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$, entonces $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.*

Demostración. Por la Proposición 2.3.7, si $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$, tenemos que, en particular, para cualquier oración $\sigma \in \mathcal{L}$ se cumple $\mathcal{M} \models \sigma$ sii $\mathcal{N} \models \sigma$.
Por tanto $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.

□

Teorema 2.3.9 (Criterio de Tarski para las subestructuras elementales)

Supongamos que $\mathcal{N} \leq \mathcal{M}$. Entonces $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$ sii para toda fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ de $\mathcal{L}$ y tupla $\overline{a} \in N^n$ si $\mathcal{M} \models \exists y \varphi(\overline{a}, y)$, entonces hay un $b \in N$ tal que $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a}, b)$.

Demostración. Empezamos probando la implicación.

($\Rightarrow$) $\mathcal{M} \models \exists y\varphi(\overline{a}, y)$ sii $\mathcal{N} \models \exists y\varphi(\overline{a}, y)$ sii hay $b \in N$ tal que $\mathcal{N} \models \varphi(\overline{a}, b)$ sii $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a}, b)$ y $b \in N$.

($\Leftarrow$) A partir de la parte (2) de la Proposición 2.3.6 tenemos que, por el simple hecho de que $\mathcal{N} \leq \mathcal{M}$, se cumple $\mathcal{N} \models \varphi(\overline{a})$ sii $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a})$ para $\varphi \in \mathcal{L}$ sin cuantificadores. Por lo que si probamos $\mathcal{M} \models \exists y\varphi(\overline{a})$ sii $\mathcal{N} \models \exists y\varphi(\overline{a})$ entonces por inducción semiótica sobre las fórmulas de $\mathcal{L}$, podemos concluir que $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a})$ sii $\mathcal{N} \models \varphi(\overline{a})$ para toda fórmula $\varphi \in \mathcal{L}$.

(F4) - y no aparece en φ:

$\mathcal{M} \models \exists y\varphi(\overline{a})$ sii $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a})$ sii $\mathcal{N} \models \varphi(\overline{a})$ sii $\mathcal{N} \models \exists y\varphi(\overline{a})$.

- y aparece en φ:

$\mathcal{M} \models \exists y\varphi(\overline{a})$ sii $\mathcal{M} \models \exists y\varphi(\overline{a}, y)$ sii hay un $b \in M$ tal que $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a}, b)$. Además por la hipótesis tenemos que $b \in N$ con lo que esto sucede sii $\mathcal{N} \models \varphi(\overline{a}, b)$ sii $\mathcal{N} \models \exists y\varphi(\overline{a}, y)$ sii $\mathcal{N} \models \exists y\varphi(\overline{a})$.

Con esto termina la demostración por inducción semiótica.

$\therefore \mathcal{N} \prec \mathcal{M}$.

□

2.4. Teorías

Si Σ es un conjunto de oraciones de $\mathcal{L}$, denotaremos por $Mod(\Sigma)$ la colección de modelos de Σ.

Definición 2.4.1 La **clausura deductiva** de Σ es el conjunto $\overline{\Sigma}$ de todas las oraciones σ las cuales son verdaderas para todo modelo de Σ; podemos escribir $\overline{\Sigma} = Th(Mod(\Sigma))$. Notar que, $Mod(\overline{\Sigma}) = Mod(\Sigma)$.

Definición 2.4.2 Sea Σ un conjunto de oraciones del lenguaje $\mathcal{L}$, se dice que Σ es **consistente** si para ninguna oración σ de $\mathcal{L}$ sucede que σ y $\neg\sigma$ son consecuencias de Σ.

Definición 2.4.3 Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Una **teoría** en $\mathcal{L}$, o una $\mathcal{L}$-**teoría**, es un conjunto T de oraciones de $\mathcal{L}$ consistente y cerrado deductivamente, es decir $T = \overline{T}$.

Nota Una definición alternativa de la consistencia de un conjunto de oraciones Σ es que tenga al menos un modelo. Como toda teoría es consistente bajo nuestra definición, entonces toda teoría tiene un modelo.

Definición 2.4.4 Una **teoría** T **es completa** si para cada oración σ de $\mathcal{L}$ bien $\sigma \in T$ o $\neg\sigma \in T$.

Definición 2.4.5 Si $\mathcal{M}$ es una $\mathcal{L}$-estructura entonces la **teoría (completa)** de $\mathcal{M}$ es el conjunto de todas las oraciones de $\mathcal{L}$ que son verdaderas en $\mathcal{M}$

$$Th(\mathcal{M}) = \{\sigma/\sigma \text{ es una oración de } \mathcal{L} \text{ y } \mathcal{M} \models \sigma\}$$

Notar que la teoría de $\mathcal{M}$ es completa, pues si σ es una oración, bien $\mathcal{M} \models \sigma$ (entonces $\sigma \in Th(\mathcal{M})$) o, si no, entonces $\mathcal{M} \not\models \sigma$, entonces $\mathcal{M} \models \neg\sigma$ (por lo que $\neg\sigma \in Th(\mathcal{M})$).

Lema 2.4.6 *Los siguientes enunciados son equivalentes para una teoría T:*

(i) *T es completa;*

(ii) *$\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T$ implica $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$;*

(iii) *$T = Th(\mathcal{M})$ para alguna $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$.*

Demostración. Realizamos la prueba en tres partes.

(i)⇒(ii) Supongamos que $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T$ y que existe una oración σ de $\mathcal{L}$ tal que $\mathcal{M} \models \sigma$ y $\mathcal{N} \not\models \sigma$. Desde que T es completa bien $\sigma \in T$, lo que implica $\mathcal{N} \models \sigma$ y llegamos a una contradicción, o $\neg\sigma \in T$, lo que implica $\mathcal{M} \models \neg\sigma$ y también llegamos a una contradicción.

(ii)⇒(iii) Por (ii) tenemos que todos los modelos de T son elementalmente equivalentes entre sí, entonces para toda oración $\sigma \in \mathcal{L}$ y para todo modelo $\mathcal{M}$ de T tenemos:

- $\mathcal{M} \models \sigma$. Por lo tanto, por la clausura deductiva de T tenemos que $\sigma \in T$ ya que cualquier otro modelo va a satisfacer σ al ser elementalmente equivalente a $\mathcal{M}$.
- $\mathcal{M} \models \neg\sigma$. Por lo tanto, por la clausura deductiva de T tenemos que $\neg\sigma \in T$ ya que cualquier otro modelo va a satisfacer $\neg\sigma$ al ser elementalmente equivalente a $\mathcal{M}$.

Por tanto $T = Th(\mathcal{M})$.

(iii)⇒(i) Para todo $\sigma \in \mathcal{L}$ bien $\mathcal{M} \models \sigma$, lo que implica $\sigma \in T$ pues $T = Th(\mathcal{M})$, o bien $\mathcal{M} \models \neg\sigma$, lo que implica $\neg\sigma \in T$ pues $T = Th(\mathcal{M})$. Por tanto T es completa.

□

Proposición 2.4.7 *Si T es completa y tiene un modelo finito, entonces T tiene sólo un modelo salvo isomorfismos.*

Demostración. Sea $\mathcal{M}$ un modelo con exactamente n elementos tal que $\mathcal{M} \models T$. La idea de la demostración es escribir mediante una oración todas las interacciones que suceden entre los elementos de $\mathcal{M}$, sus funciones y relaciones y, al ser T completa, tendremos que todo modelo de T cumplirá la misma oración (por el Lema 2.4.6) y estará obligado a ser una copia de $\mathcal{M}$.

Definimos la fórmula $\sigma_{=n} = \wedge_{i\neq j}(x_j \neq x_i)$ con $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ que será la parte que fije el número de elementos en la oración que queremos construir. Asociamos $x_1, \ldots, x_n$ a los elementos distintos $a_1, \ldots, a_n$ de $\mathcal{M}$. Luego escribimos para cada $c^{\mathcal{M}} = a_k$ la fórmula asociada $c = x_k$; para cada $f_i^{\mathcal{M}}(\overline{a}) = a_k$ la fórmula asociada $f_i(\overline{x}) = x_k$ y, de la misma forma, para cada $R_j^{\mathcal{M}}(\overline{a})$, $R_j(\overline{x})$. Además, para definir las relaciones Rj totalmente también añadimos fórmulas para las relaciones que no suceden entre los elementos, es decir, si no sucede $R_j^{\mathcal{M}}(\overline{a})$, entonces $\neg R_j(\overline{x})$ debe estar. La unión mediante "$\wedge$" de las fórmulas anteriores, junto con las fórmulas $\sigma_{=n}$ y $\neg\sigma_{=n+1}$, aplicandole cuantificadores de la siguiente forma $\exists x_1, \ldots, x_n \forall x_{n+1}$, nos da una oración que describe totalmente a $\mathcal{M}$. Como $\mathcal{M}$ es finito, la oración descrita arriba será finita también y, como dijimos, todo otro modelo de T tendrá que cumplirla por el Lema 2.4.6 por lo que todos esos modelos serán isomorfos a $\mathcal{M}$.

$\square$

Ejemplos

1) Es fácil ver que la teoría de grupos es incompleta, puesto que la oración $\forall x \forall y(x+y = y+x)$ no es cierta ni falsa de forma general para todos los grupos.

2) La teoría de los órdenes lineales densos sin extremos es completa. Para la demostración probaremos que si $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son órdenes lineales densos sin extremos, son elementalmente equivalentes, y por el Lema 2.4.6 tendríamos que la teoría de los ordenes lineales densos sin extremos es completa.

   Tomemos $\mathcal{M}' \prec \mathcal{M}$ y $\mathcal{N}' \prec \mathcal{N}$ donde $\mathcal{M}'$ y $\mathcal{N}'$ son contables, lo cual es posible por el Teorema de Löwenheim-Skolem. Por ser subestructuras elementales, son órdenes lineales sin extremos. Por la Proposición 2.3.5 tenemos que ambas subestructuras tienen que ser isomorfas con lo que tendríamos que para cualquier oración σ cierta en $\mathcal{M}$ será cierta en $\mathcal{M}'$, $\mathcal{N}'$ y $\mathcal{N}$. Lo anterior sucede porque: $\mathcal{M}'$ es subestructura elemental de $\mathcal{M}$; $\mathcal{N}'$ es isomorfa a $\mathcal{M}'$; $\mathcal{N}'$

es una subestructura elemental de $\mathcal{N}$. Por lo anterior, $\mathcal{N}$ y $\mathcal{M}$ son elementalmente equivalentes y, por lo tanto, la teoría de órdenes lineales densos sin extremos es completa.

Definición 2.4.8 Diremos que la teoría T' es una **completitud** de T si $T \subseteq T'$ y si T' es completa.

Ejemplo La teoría de relaciones de equivalencia es incompleta, porque tiene modelos de todas las cardinalidades finitas e infinitas. Sin embargo, podemos contruir una completitud añadiendo oraciones que detallen sus clases de equivalencia. Dado un lenguaje $\mathcal{L}$ con signatura tan sólo un símbolo de relación binaria R, definamos $\sigma_{=n} = (\bigwedge x_i \neq x_j) \wedge (\bigwedge x_i R x_j)$ que es la fórmula que nos ayudará a enunciar luego que existen n elementos distintos relacionados mediante R sólo entre ellos.

Ahora agregamos a la teoría las siguientes oraciones:

-$\exists x_1 \ldots x_5 \forall x_6 (\sigma_{=5} \wedge \neg\sigma_{=6})$, que dice existen 5 elementos que están relacionados sólo entre ellos

-$\exists x_1 \ldots x_{10} \forall x_{11} (\sigma_{=10} \wedge \neg\sigma_{=11})$, que dice existen 10 elementos que están relacionados sólo entre ellos

-$\exists x_1 x_2 x_3 (\wedge_{i \neq j} \neg(x_i R x_j)) \wedge \neg\exists x_1 x_2 x_3 x_4 (\wedge_{i \neq j} \neg(x_i R x_j)))$ La primera parte dice que existen 3 elementos no relacionados entre sí y la segunda que no existen 4 elementos que no estén relacionados entre sí.

-$\exists x_1 \sigma_{=1}, \exists x_1 x_2 \sigma_{=2}, \ldots, \exists x_1 \ldots x_k \sigma_{=k} \ldots$

La teoría resultante de agregar las anteriores oraciones tiene 3 clases de equivalencia: una con 5 elementos, otra con 10, y una tercera que tiene el resto de elementos y es infinita.

Para ver que es completa demostramos que dos estrecturas $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ cualesquiera que modelen nuestra teoría son elementalmente equivalentes. Para ello simplemente tomamos una biyección que preserve las clases de equivalencia entre dos subestructuras elementales $\mathcal{M}'(\prec \mathcal{M})$ y $\mathcal{N}'(\prec \mathcal{N})$ que tengan la misma cardinalidad. Esto es posible por el Teorema de Löwenheim-Skolem. Como la biyección preserva las clases de equivalencia, es claro que para el símbolo de relación binaria R y cualesquiera $a, b \in \mathcal{M}'$ se da $aR^{\mathcal{M}}b$ sii se da $\alpha(a)R^{\mathcal{N}'}\alpha(b)$. Por lo tanto, $\mathcal{M}'$ y $\mathcal{N}'$ son elementalmente equivalentes y, de forma transitiva, también $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$. Por el Lema 2.4.6, nuestra teoría es completa.

Capítulo 3

Teorema de compacidad

Realizaremos la demostración de ultraproductos para el teorema de compacidad. Para ello será necesario que hagamos un desarrollo utilitario de filtros, ultrafiltros, productos directos, productos reducidos y ultraproductos.

Nota En este capítulo usaremos la letra "x" para denotar elementos del conjunto de indices X y no variables de $\mathcal{L}$. Cuando necesitemos denotar variables de $\mathcal{L}$ usaremos la letra "y".

3.1. Filtros y ultrafiltros

Definición 3.1.1 Un **filtro** $\mathcal{F}$ sobre X es un subconjunto de $P(X)$ (conjunto potencia de X) tal que:

(1) $X \in \mathcal{F}$.

(2) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

(3) Si $A, B \in \mathcal{F}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$.

(4) Si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B \subseteq X$, entonces $B \in \mathcal{F}$.

Ejemplos

1) Para cada $B \subseteq X$, $\mathcal{F} = \{A \subseteq X \mid B \subseteq A\}$ es un filtro al que llamaremos **filtro generado** por B.

2) En particular, $\mathcal{F}_a = \{A \subseteq X \mid a \in A\}$ es el filtro generado por $\{a\}$. A los filtros generados por conjuntos unitarios se les llama **principales**.

Definición 3.1.2 Sea $E \subseteq P(X)$. Decimos que E tiene la **propiedad de las intersecciones finitas** (PIF) sii cada subconjunto finito de E tiene intersección no vacía. Es decir, siempre que $G \subseteq E$, G finito, $\cap G \neq \emptyset$.

Lema 3.1.3 *Supongamos que $D \subseteq \mathcal{F}$, siendo $\mathcal{F}$ un filtro, entonces D tiene la PIF.*

Demostración. Supongamos que existe $D \subseteq \mathcal{F}$ tal que la intersección de un número finito de sus elementos sea $\emptyset$. Esto implicaría que $\emptyset \in \mathcal{F}$ por lo que $\mathcal{F}$ no sería un filtro ($\Rightarrow\Leftarrow$).

$\square$

Lema 3.1.4 *Si $D \subseteq P(X)$ tiene la PIF. Sea $\mathcal{D}$ la colección de las intersecciones finitas de los conjuntos de D, entonces $\mathcal{F} = \{A \subseteq X \mid \exists B \in \mathcal{D}$ tal que $B \subseteq A\}$ es un filtro, al cual llamaremos filtro generado por D.*

Demostración. Verificaremos las propiedades de filtro a continuación.

(1) $X \in \mathcal{F}$ desde que todo conjunto de $\mathcal{D}$ está contenido en X.

(2) $\emptyset \notin \mathcal{F}$ desde que D tiene la PIF.

(3) Sean $A, B \in \mathcal{F}$, entonces existen $Y, Z \in \mathcal{D}$ tales que $Y \subseteq A$ y $Z \subseteq B$. Es claro que $Y \cap Z \in \mathcal{D}$, pues $Y \cap Z$ continuará siendo una intersección finita de los elementos de D. Por propiedas de conjuntos $(Y \cap Z) \subseteq (A \cap B)$, por lo que $A \cap B \in \mathcal{F}$.

(4) Si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B \subseteq X$, entonces existe $Y \in \mathcal{D}$ tal que $Y \subseteq A$ y por lo tanto $Y \subseteq B$.

Por tanto $B \in \mathcal{F}$.

□

Definición 3.1.5 Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. $\mathcal{F}$ es un **ultrafiltro** si para cada $A \subseteq X$, o bien $A \in \mathcal{F}$ o bien $X - A \in \mathcal{F}$.

Proposición 3.1.6 *$\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre X sii es maximal bajo la inclusión respecto a otros filtros. Es decir, si $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ también es un filtro, entonces $\mathcal{U} = \mathcal{F}$.*

Demostración. La demostración se hará en dos partes.

($\Rightarrow$) Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro, entonces para cada $A \subseteq X$, bien $A \in \mathcal{U}$, o $X - A \in \mathcal{U}$, entonces es maximal desde que ningún otro subconjunto de $P(X)$ que contenga a $\mathcal{U}$ es filtro .

($\Leftarrow$) La demostración será usando la contrarrecíproca. Sea $\mathcal{U}$ un filtro y supongamos que existe $A \subseteq X$ tal que $A \notin \mathcal{U}$ y $(X - A) \notin \mathcal{U}$, entonces $\mathcal{U}$ no es maximal. Para argumentar que $\mathcal{U}$ no es maximal es suficiente ver que $\mathcal{U} \cup \{A\}$ o $\mathcal{U} \cup \{X - A\}$ tienen la PIF, pues por el Lema 3.1.4 tendríamos un filtro $\mathcal{F}$ que lo contiene de forma estricta. Supongamos que no tienen la PIF, entonces hay conjuntos $D, E \in \mathcal{U}$ tales que $A \cap D = \emptyset$ y $(X - A) \cap E = \emptyset$. Pero entonces $D \subseteq (X - A)$, $E \subseteq A$, y $D \cap E = \emptyset$, contradiciendo el hecho de que $\mathcal{U}$ tiene la PIF por el Lema 3.1.3.

□

Lema de Zorn 3.1.7 *Si A es un conjunto parcialmente ordenado en el que cada cadena tiene cota superior, entonces A tiene un elemento maximal.*

Proposición 3.1.8 *Si $\mathcal{C}$ es una cadena de filtros sobre X, entonces $\cup\mathcal{C}$ es también un filtro sobre X.*

Demostración. Probaremos las condiciones a continuación.

(1) $X \in \cup\mathcal{C}$, pues X está en todo filtro $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$.

(2) $\emptyset \notin \cup\mathcal{C}$, pues $\emptyset$ no está en ningún filtro $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$.

(3) Si $A \in \cup\mathcal{C}$ y $B \in \cup\mathcal{C}$, entonces $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{G}$, con $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ es una cadena oredenada por inclusión tenemos que $A, B \in \mathcal{F}$ o $A, B \in \mathcal{G}$. De ello se sigue que $A \cap B \in \mathcal{F}$ o $A \cap B \in \mathcal{G}$, pues $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son filtros $\therefore A \cap B \in \cup\mathcal{C}$.

(4) Si $A \in \cup\mathcal{C}$ y $A \subseteq B \subseteq X$, entonces $B \in \mathcal{F}$ con $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$. Por lo tanto, $B \in \mathcal{F}$ por ser filtro. Por tanto $B \in \cup\mathcal{C}$.

□

Teorema del Ultrafiltro 3.1.9

Cada filtro $\mathcal{F}$ puede extenderse a un ultrafiltro.

Demostración. Consideremos la colección de todos los filtros en X que contengan a $\mathcal{F}$ ordenada parcialmente por $\subseteq$. Claramente no es vacía desde que al menos está $\mathcal{F}$. Dada una cadena $\mathcal{C}$ en la colección, esta está acotada por $\cup\mathcal{C}$ y por el Lema de Zorn tiene un elemento máximal $\mathcal{U}$ que es un ultrafiltro por la Proposición 3.1.6.

□

Corolario 3.1.10 *Si D es una colección de subconjuntos de X que tiene la PIF, entonces D puede extenderse a un ultrafiltro.*

Demostración. Se sigue de forma inmediata a partir del Lema 3.1.4 y del Teorema del ultrafiltro 3.1.9.

□

3.2. Productos y ultraproductos

Sea $\{\mathcal{M}_x\}_{x\in X}$ una familia de $\mathcal{L}$-estructuras.

Definición 3.2.1 El producto $\prod_{x\in X}\mathcal{M}_x$ es una estructura $\mathcal{N}$ con dominio N y la misma signatura, definida así:

(i) N es el producto de la familia $\langle M_x\rangle_{x\in X}$ de los universos de los $\mathcal{M}_x$.
$N = \prod_{x\in X} M_x = \{a : X \longrightarrow \cup_{x\in X} M_x \mid \forall x \in X\ a(x) \in M_x\}$.

(ii) Para cada símbolo de constante c, la constante $c^{\mathcal{N}} = a$ con $a(x) = c^{\mathcal{M}_x}$.

(iii) Para cada símbolo de función $\mu(i)$-ario f_i, la función $f_i^{\mathcal{N}} : N^{\mu(i)} \longrightarrow N$ se define de forma que para cada $a_1,\ldots,a_{\mu(i)} \in N$:
$(f_i^{\mathcal{N}}(a_1,\ldots,a_{\mu(i)}))(x) = f_i^{\mathcal{M}_x}(a_1(x),\ldots,a_{\mu(i)}(x))$ para cada $x \in X$.

(iv) Para cada símbolo de relación R_j $\delta(j)$-ario, la relación $R_j^{\mathcal{N}}$ se define de forma que para cada $a_1,\ldots,a_{\delta(j)} \in N$ $(a_1,\ldots,a_{\delta(j)}) \in R_j^{\mathcal{N}}$ sii para cada $x \in X$ $(a_1(x),\ldots,a_{\delta(j)}(x)) \in R_j^{\mathcal{M}_x}$.

En particular, el símbolo de igualdad se interpretará como la identidad. Es decir, dados $a, b \in N$, $\mathcal{N} \models a = b$ sii para cada $x \in X$ $\mathcal{M}_x \models a(x) = b(x)$.

Nota Pese a que $\prod_{x\in X}\mathcal{M}_x = \mathcal{N}$ es una estructura, $\mathcal{N}$ puede no compartir las propiedades de primer orden de los $\mathcal{M}_x$. Puede suceder que exista una oración φ de la que cada $\mathcal{M}_x$ sea modelo, sin embargo $\mathcal{N}$ no sea modelo. Debido a ello vamos a continuar con el siguiente desarrollo, pero antes veamos un ejemplo de lo mencionado anteriormente.

Ejemplo Si cada $\mathcal{M}_x$ es una estructura con al menos dos elementos y una relación de orden total $R^{\mathcal{M}_x}$, entonces cada $\mathcal{M}_x$ satisfará la oración $\sigma = \forall x\forall y((R(x,y))\vee$

$(R(y,x))$, pero puede que $\prod_{x\in X}\mathcal{M}_x$ no la satisfaga. Eso se debe a que el producto cartesiano de conjuntos con órdenes totales no necesariamente tiene un orden total.

Lema 3.2.2 *Para la $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{N} = \prod_{x\in X}\mathcal{M}_x$ y los términos del lenguaje $\mathcal{L}$, se cumple que $t^{\mathcal{N}}(a_1,\ldots,a_n)(x) = t^{\mathcal{M}_x}(a_1(x),\ldots,a_n(x))$.*

Demostración. Realizaremos una demostración por inducción semiótica.

(i) $t = c : t^{\mathcal{N}}(a_1,\ldots,a_n)(x) = c^{\mathcal{N}}(x) = c^{\mathcal{M}_x} = t^{\mathcal{M}_x}(a_1(x),\ldots,a_n(x))$
$t = y_k : t^{\mathcal{N}}(a_1,\ldots,a_n)(x) = a_k(x) = t^{\mathcal{M}_x}(a_1(x),\ldots,a_n(x))$.

(ii) $t = f_i : t^{\mathcal{N}}(a_1,\ldots,a_n)(x) = f_i^{\mathcal{N}}(a_1,\ldots,a_n)(x) = f_i^{\mathcal{M}_x}(a_1(x),\ldots,a_n(x)) = t^{\mathcal{M}_x}(a_1(x),\ldots,a_n(x))$.

Por tanto $t^{\mathcal{N}}(a_1,\ldots,a_n)(x) = t^{\mathcal{M}_x}(a_1(x),\ldots,a_n(x))$.

□

Relación de equivalencia

Vamos a definir una relación de equivalencia la cual nos permitirá tener un producto con los requerimientos lógicos deseados.

Definición 3.2.3 Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Definimos la relación $\equiv_{\mathcal{F}}$ sobre N de la siguiente forma: para cada $a,b \in N$, $a \equiv_{\mathcal{F}} b$ *sii* $\{x \in X \mid a(x) = b(x)\} \in \mathcal{F}$.

Proposición 3.2.4 *Siendo $\mathcal{F}$ un filtro sobre X, $\equiv_{\mathcal{F}}$ es una relación de equivalencia sobre N.*

Demostración. Probamos a continuación por pasos.

- Es reflexiva, pues $X = \{x \in X \mid a(x) = a(x)\} \in \mathcal{F}$.

- Es simétrica, pues $\{x \in X \mid a(x) = b(x)\} = \{x \in X \mid b(x) = a(x)\}$.

- Es transitiva, pues si $A = \{x \in X \mid a(x) = b(x)\}$ y $B = \{x \in X \mid b(x) = d(x)\}$ están en $\mathcal{F}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$ y ya que $A \cap B \subseteq \{x \in X \mid a(x) = d(x)\}$ tenemos que $\{x \in X \mid a(x) = d(x)\} \in \mathcal{F}$.

□

Definición 3.2.5 Para cada símbolo de relación R_j del lenguaje $\mathcal{L}$ definimos las siguientes relaciones $R_j^{\mathcal{F}}$ como sigue:

$$(a_1, \dots, a_{\delta(j)}) \in R_j^{\mathcal{F}} \text{ sii } \{x \in X \mid (a_1(x), \dots, a_{\delta(j)}(x)) \in R_j^{\mathcal{M}_x}\} \in \mathcal{F}.$$

Proposición 3.2.6 *Los $R_j^{\mathcal{F}}$ tienen la siguiente propiedad: Dadas las siguientes relaciones $b_1 \equiv_{\mathcal{F}} a_1; \dots; b_{\delta(j)} \equiv_{\mathcal{F}} a_{\delta(j)}$, si $(b_1, \dots, b_{\delta(j)}) \in R_j^{\mathcal{F}}$ entonces $(a_1, \dots, a_{\delta(j)}) \in R_j^{\mathcal{F}}$.*

Demostración. A partir de las relaciones de la hipótesis tenemos que $A_1 = \{x \in X \mid b_1(x) = a_1(x)\} \in \mathcal{F}; \dots; A_{\delta(j)} = \{x \in X \mid b_{\delta(j)}(x) = a_{\delta(j)}(x)\} \in \mathcal{F}$. Vamos a mostrar que si $(b_1, \dots, b_{\delta(j)}) \in R_j^{\mathcal{F}}$, que es equivalente a $B = \{x \in X \mid (b_1(x), \dots, b_{\delta(j)}(x)) \in R_j^{\mathcal{M}_x}\} \in \mathcal{F}$, entonces $(a_1, \dots, a_{\delta(j)}) \in R_j^{\mathcal{F}}$. Como $\mathcal{F}$ es un filtro, $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{\delta(j)} \cap B = A \in \mathcal{F}$ y como A, por las propiedades que tiene debido a la construcción anterior es subconjunto de $\{x \in X \mid (a_1(x), \dots, a_{\delta(j)}(x)) \in R_j^{\mathcal{M}_x}\}$, podemos concluir que $(a_1, \dots, a_{\delta(j)}) \in R_j^{\mathcal{F}}$.

□

Producto reducido

Para no cargar mucho la notación y debido a que sólo nos referiremos a un filtro a la vez escribiremos $[a]$ en lugar de $[a]_{\mathcal{F}}$, después del apartado (i) que está a continuación, para referirnos a las clases de equivalencia.

Definición 3.2.7 $\mathcal{M} = \prod_{x \in X} \mathcal{M}_x / \mathcal{F}$ es la $\mathcal{L}$-estructura definida como sigue:

(i) El universo es el conjunto de las clases de equivalencia bajo $\mathcal{F}$.
Es decir, $M = \prod_{x \in X} M_x / \mathcal{F} = \{[a]_{\mathcal{F}} \mid a \in \prod_{x \in X} M_x\}$.

(ii) Para cada símbolo de constante c, $c^{\mathcal{M}} = [c^{\mathcal{N}}]$.

(iii) Para cada símbolo de función $\mu(i)$-ario f_i, la función $f_i^{\mathcal{M}} : M^{\mu(i)} \longrightarrow M$ se define de forma que para cada $[a_1],\ldots,[a_{\mu(i)}] \in M$
$f_i^{\mathcal{M}}([a_1],\ldots,[a_{\mu(i)}]) = [f_i^{\mathcal{N}}(a_1,\ldots,a_{\mu(i)})]$.

(iv) Para cada símbolo de relación R_j $\delta(j)$-ario, la relación $R_j^{\mathcal{M}}$ se define de forma que para cada $[a_1],\ldots,[a_{\delta(j)}] \in M$, $([a_1],\ldots,[a_{\delta(j)}]) \in R_j^{\mathcal{M}}$ sii $(a_1,\ldots,a_{\delta(j)}) \in R_j^{\mathcal{F}}$.

Lema 3.2.8 *El producto reducido está definido de forma consistente.*

Demostración. La definición no depende de los representantes elegidos de las clases de equivalencia según se desprende de la Proposición 3.2.6. Además podemos ver que si $([a_1],\ldots,[a_{\mu(i)}]) = ([b_1],\ldots,[b_{\mu(i)}])$, entonces $f_i^{\mathcal{M}}(\overline{[a]}) = f_i^{\mathcal{M}}(\overline{[b]})$ como demostramos a continuación:

$([a_1],\ldots,[a_{\mu(i)}]) = ([b_1],\ldots,[b_{\mu(i)}])$

$\Rightarrow [a_k] = [b_k]$ para $k \in \{1,\ldots,\mu(i)\}$

$\Rightarrow \{x \in X \mid a_k(x) = b_k(x)\} \in \mathcal{F}$ para $k \in \{1,\ldots,\mu(i)\}$

$\Rightarrow D = \{x \in X \mid a_1(x) = b_1(x)\} \cap \ldots \cap \{x \in X / a_{\mu(i)}(x) = b_{\mu(i)}(x)\} \in \mathcal{F}$ pues $\mathcal{F}$ es un filtro

$\Rightarrow D = \{x \in X \mid a_1(x) = b_1(x),\ldots,a_{\mu(i)}(x) = b_{\mu(i)}(x)\} \in \mathcal{F}$

$\Rightarrow E = \{x \in X \mid f_i^{\mathcal{M}_x}(a_1(x),\ldots,a_{\mu(i)}(x)) = f_i^{\mathcal{M}_x}(b_1(x),\ldots,b_{\mu(i)}(x))\} \in \mathcal{F}$, pues $D \subseteq E$ y $\mathcal{F}$ es filtro

$\Rightarrow \{x \in X \mid f_i^{\mathcal{N}}(a_1,\ldots,a_{\mu(i)})(x) = f_i^{\mathcal{N}}(b_1,\ldots,b_{\mu(i)})(x)\} \in \mathcal{F}$

$\Rightarrow [f_i^{\mathcal{N}}(a_1,\ldots,a_{\mu(i)})] = [f_i^{\mathcal{N}}(b_1,\ldots,b_{\mu(i)})]$

$\Rightarrow f_i^{\mathcal{M}}([a_1],\ldots,[a_{\mu(i)}]) = f_i^{\mathcal{M}}([b_1],\ldots,[b_{\mu(i)}])$.

Con lo que podemos afirmar que el producto reducido está bien definido.

□

Definición 3.2.9 Cuando $\mathcal{F}$ es un **ultrafiltro** sobre X, el producto reducido $\prod_{x\in X} \mathcal{M}_x/\mathcal{F}$ se denomina ultraproducto.

Lema 3.2.10 *Para los términos del lenguaje* $\mathcal{L}$ *y las estructuras* $\mathcal{N} = \prod_{x\in X} \mathcal{M}_x$ *y* $\mathcal{M} = \prod_{x\in X} \mathcal{M}_x/\mathcal{F}$ *se cumple que* $t^{\mathcal{M}}(\overline{[a]}) = [t^{\mathcal{N}}(\overline{a})]$.

Demostración. Realizamos una demostración por inducción semiótica.

(i) $t = c$: $t^{\mathcal{M}}(\overline{[a]}) = c^{\mathcal{M}} = [c^{\mathcal{N}}] = [t^{\mathcal{N}}(\overline{a})]$.
$t = y_k$: $t^{\mathcal{M}}(\overline{[a]}) = [a_k] = [t^{\mathcal{N}}(\overline{a})]$.

(ii) $t^{\mathcal{M}}(\overline{[a]}) = f_i^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(\overline{[a]}),\dots,t_{\mu(i)}^{\mathcal{M}}(\overline{[a]}))$
$= f_i^{\mathcal{M}}([t_1^{\mathcal{N}}(\overline{a})],\dots,[t_{\mu(i)}^{\mathcal{N}}(\overline{a})])$
$= [f_i^{\mathcal{N}}(t_1^{\mathcal{N}}(\overline{a}),\dots,t_{\mu(i)}^{\mathcal{N}}(\overline{a}))] = [t^{\mathcal{N}}(\overline{a})]$.

Por tanto $t^{\mathcal{M}}(\overline{[a]}) = [t^{\mathcal{N}}(\overline{a})]$.

□

Teorema de Loś 3.2.11 *Si* $\mathcal{F}$ *es un ultrafiltro sobre* X*, entonces para cada fórmula* $\varphi(y_1,\dots,y_n)$ *de* $\mathcal{L}$ *y* $a_1,\dots,a_n \in \prod_{x\in X} M_x$ *se cumple* $\prod_{x\in X} \mathcal{M}_x/\mathcal{F} \models \varphi([a_1],\dots,[a_n])$ *sii* $\{x \in X \mid \mathcal{M}_x \models \varphi(a_1(x),\dots,a_n(x))\} \in \mathcal{F}$.

Demostración. Realizamos a continuación una inducción semiótica sobre las fórmulas de $\mathcal{L}$. Cabe resaltar que utilizamos los Lemas 3.2.2 y 3.2.10. Para que sea más sencilla la lectura escribiremos $\mathcal{M}$ para denotar a la estructura $\prod_{x\in X} \mathcal{M}_x/\mathcal{F}$.

(F1) (A1) Si $\varphi = (t_1 = t_2)$ se sigue que $\mathcal{M} \models \varphi([a_1],\dots,[a_n])$
sii $t_1^{\mathcal{M}}(\overline{[a]}) = t_2^{\mathcal{M}}(\overline{[a]})$
sii $[t_1^{\mathcal{N}}(\overline{a})] = [t_2^{\mathcal{N}}(\overline{a})]$
sii $\{x \in X \mid t_1^{\mathcal{N}}(\overline{a})(x) = t_2^{\mathcal{N}}(\overline{a})(x)\} \in \mathcal{F}$
sii $\{x \in X \mid t_1^{\mathcal{M}_x}(\overline{a}(x)) = t_2^{\mathcal{M}_x}(\overline{a}(x))\} \in \mathcal{F}$
sii $\{x \in X \mid \mathcal{M}_x \models (t_1 = t_2)(\overline{a}(x))\} \in \mathcal{F}$
sii $\{x \in X \mid \mathcal{M}_x \models \varphi(\overline{a}(x))\} \in \mathcal{F}$.

(A2) Si $\varphi = R_j(t_1,\dots,t_{\delta(j)})$ se sigue que $\mathcal{M} \models \varphi([a_1],\dots,[a_n])$
sii $(t_1^{\mathcal{M}}(\overline{[a]}),\dots,t_{\delta(j)}^{\mathcal{M}}(\overline{[a]})) \in R_j^{\mathcal{M}}$

sii $(t_1^{\mathcal{N}}(\overline{a}),\ldots,t_{\delta(j)}^{\mathcal{N}}(\overline{a}))\in R_j^{\mathcal{F}}$
sii $\{x\in X\mid (t_1^{\mathcal{N}}(\overline{a})(x),\ldots,t_{\delta(j)}^{\mathcal{N}}(\overline{a})(x))\in R_j^{\mathcal{M}_x}\}\in\mathcal{F}$
sii $\{x\in X\mid (t_1^{\mathcal{M}_x}(\overline{a}(x)),\ldots,t_{\delta(j)}^{\mathcal{M}_x}(\overline{a}(x)))\in R_j^{\mathcal{M}_x}\}\in\mathcal{F}$
sii $\{x\in X\mid \mathcal{M}_x\models\varphi(a_1(x),\ldots,a_n(x))\}\in\mathcal{F}$.

(F2) Si $\varphi=\neg\psi$ se sigue que $\mathcal{M}\models\neg\psi([a_1],\ldots,[a_n])$
sii no sucede $\mathcal{M}\models\psi([a_1],\ldots,[a_n])$
sii $\{x\in X\mid \mathcal{M}_x\models\psi(a_1(x),\ldots,a_n(x))\}\notin\mathcal{F}$
sii $X-\{x\in X\mid \mathcal{M}_x\models\psi(a_1(x),\ldots,a_n(x))\}\in\mathcal{F}$
sii $\{x\in X\mid \mathcal{M}_x\models\neg\psi(a_1(x),\ldots,a_n(x))\}\in\mathcal{F}$.

(F3) Sea $\varphi=\psi\wedge\gamma$. Supongamos que se cumple para ψ y γ. Además sean $D_\psi=\{x\in X\mid \mathcal{M}\models\psi\}$ y $D_\gamma=\{x\in X\mid \mathcal{M}\models\gamma\}$. Entonces $\mathcal{M}\models\psi\wedge\gamma([a_1],\ldots,[a_n])$
sii $\mathcal{M}\models\psi([a_1],\ldots,[a_n])$ y $\mathcal{M}\models\gamma([a_1],\ldots,[a_n])$
sii $D_\psi\in\mathcal{F}$ y $D_\gamma\in\mathcal{F}$
sii $D_\psi\cap D_\gamma\in\mathcal{F}$
sii $\{x\in X\mid \mathcal{M}_x\models(\psi\wedge\gamma)(a_1(x),\ldots,a_n(x))\}\in\mathcal{F}$.

(F4) Si $\varphi=\exists y\psi(\overline{x},y)$, entonces $\mathcal{M}\models\varphi([a_1],\ldots,[a_n])$
sii $\mathcal{M}\models\exists y\psi(\overline{[a]},y)$
sii existe $[b]\in M$ tal que $\mathcal{M}\models\psi(\overline{[a]},[b])$
sii existe b en N tal que $\mathcal{M}\models\exists\psi(\overline{[a]},[b])$
sii $\{x\in X\mid \mathcal{M}_x\models\psi(a_1(x),\ldots,a_n(x),b(x))\}\in\mathcal{F}$
sii $\{x\in X\mid$ hay $b(x)\in\mathcal{M}_x$ tal que $\mathcal{M}_x\models\psi(a_1(x),\ldots,a_n(x),b(x))\}\in\mathcal{F}$
sii $\{x\in X\mid \mathcal{M}_x\models\varphi(a_1(x),\ldots,a_n(x))\}\in\mathcal{F}$.

□

Corolario 3.2.12 *Si σ es una oración de $\mathcal{L}$, y $\mathcal{F}$ un ultrafiltro, $\prod_{x\in X}M_x/\mathcal{F}\models\sigma$ sii $\{x\in X\mid \mathcal{M}_x\models\sigma\}\in\mathcal{F}$.*

Demostración. Es claro que, por el Teorema de Loś 3.2.11, sucede en particular para las oraciones lo enunciado en este corolario.

□

3.3. Demostración del Teorema de Compacidad

Teorema de Compacidad 3.3.1 *Sea Σ un conjunto de oraciones de $\mathcal{L}$. Σ tiene un modelo sii cada subconjunto finito de Σ tiene un modelo.*

Demostración. La prueba se realizará en dos partes.

($\Rightarrow$) Es obvio que cualquier modelo $\mathcal{M}$ de Σ será, en particular, modelo de cualquier subconjunto de Σ.

($\Leftarrow$) Por hipótesis tenemos que cada subconjunto finito Δ de Σ tiene un modelo $\mathcal{M}_\Delta$. La prueba consiste en definir un ultraproducto de las estructuras $\mathcal{M}_\Delta$ que sea modelo de Σ. Para ello necesitamos un ultrafiltro adecuado el cual construiremos a continuación. Tomemos a X como el conjunto de índices, los cuales serán los $\Delta \subset \Sigma$ finitos. Para todo $\Delta \in X$ sea $\Delta^* = \{\Delta' \in X \mid \Delta \subseteq \Delta'\}$. Note que Δ^* contiene al menos a Δ. Veamos que $\{\Delta^* \mid \Delta \in X\}$ tiene la PIF, es decir, $\Delta_1^* \cap \ldots \cap \Delta_n^* \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por su definición, cada Δ_k, con $k \in \{1, \ldots, n\}$, estará en algún elemento de cada Δ^*, entonces $\Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n \in \Delta_1^* \cap \ldots \cap \Delta_n^*$. Por tanto $\{\Delta^* \mid \Delta \in X\}$ tiene la PIF. Por el Corolario 3.1.10 $\{\Delta^* \mid \Delta \in X\}$ se puede extender a un ultrafiltro $\mathcal{F}$.

Proposición: $\prod_{\Delta \in X} \mathcal{M}_\Delta / \mathcal{F} \models \Sigma$.

Para toda oración $\sigma \in \Sigma$, σ está en un Δ y se tiene que, para todo $\Delta' \in X$ donde $\Delta \subseteq \Delta'$, $\mathcal{M}_{\Delta'} \models \sigma$, de lo cual se sigue que

$$\{\Delta' \in X \mid \mathcal{M}_{\Delta'} \models \sigma\} \supseteq \{\Delta' \in X \mid \mathcal{M}_{\Delta'} \models \Delta\} \supseteq \{\Delta' \in X \mid \Delta \subseteq \Delta'\} = \Delta^* \in \mathcal{F}.$$

Por el Corolario 3.2.12 tenemos que $\prod_{\Delta \in X} \mathcal{M}_\Delta / \mathcal{F} \models \sigma$. Esto termina la prueba del teorema de compacidad.

□

3.4. Consecuencias

Lema 3.4.1 *Si Σ es un conjunto de oraciones que tiene modelos finitos arbitrariamente grandes, entonces Σ tiene un modelo infinito.*

Demostración. Ampliaremos el conjunto de oraciones añadiendo la colección infinita de oraciones φ_n que expresan que existen al menos n elementos. Todos los subconjuntos finitos del conjunto ampliado tendrán un modelo y, por compacidad, también lo tendrá el total.

Sea Σ un conjunto de oraciones y sea $\Sigma^* = \Sigma \cup \{\varphi_n \mid n > 1\}$ donde $\varphi_n = \exists x_1 \dots x_n \bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j$. Mostremos que cada subconjunto finito $\Delta \subseteq \Sigma^*$ tiene un modelo. Sea $\Delta \subseteq \Sigma \cup \{\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_p}\}$, y tomamos m que será el máximo índice entre los φ_i que aparecen en Δ (que es posible de identificar pues Δ es finito). Podemos encontrar un modelo de Δ, pues basta con tomar un modelo de Σ con una cantidad de oraciones mayor a m, que existe por la hipótesis. Dicho modelo satisfará claramente $\Delta \cap \Sigma$ y todos los φ_i que aparecen en Δ pues sus índices son menores a m. Por el Teorema de compacidad concluimos que Σ^* tiene un modelo y dicho modelo tiene que ser infinito al tener que cumplir φ_n para todo n.

□

Definición 3.4.2 Sea P una propiedad, se dice que es **axiomatizable** si Hay un conjunto Σ de oraciones de $\mathcal{L}$ tal que, dada una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ tiene la propiedad P sii $\mathcal{M} \in Mod(\Sigma)$.

Corolario 3.4.3 *La propiedad de ser finito no es axiomatizable.*

Demostración. La demostración será por contradicción. Supongamos que fuera axiomatizable. Entonces, existiría un conjunto de oraciones Σ de forma que para cada

$\mathcal{M}$ sucederá que $\mathcal{M} \models \Sigma$ sii $\mathcal{M}$ es finito. Esto llevaría a que podríamos encontrar modelos $\mathcal{M}$ arbitrariamente grandes que modelan Σ y, por el Lema 3.4.1, tendríamos un modelo infinito de Σ lo que sería una contradicción.

$\square$

Teorema 3.4.4(Aritmética no estándar) *Sea $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, \langle\{0\}, \{S, +, \cdot\}, \emptyset\rangle)$ la estructura de los naturales tal y como la conocemos intuitivamente (S es la función sucesor). Hay una estructura $\mathcal{M}$ que es modelo de $Th(\mathcal{N})$ pero no es isomorfa a $\mathcal{N}$.*

Demostración. Primeramente extendemos el lenguaje a $\mathcal{L}^*$ que es $\mathcal{L}$ más un nuevo símbolo de constante k. Luego tomamos el conjunto de oraciones $\Sigma^* = Th(\mathcal{N}) \cup \{\alpha_n \mid$ para todo $n \in \mathbb{N}\}$, donde α_n es igual a $(k \neq S(...(S(0))))$ y la función sucesor se aplicó n veces. Es claro que $\mathcal{N}$ será un modelo de cualquier subconjunto finito de Σ^*, pues k puede ser interpretado como un elemento mayor a todos los subíndices de los α en Δ. Por lo tanto, por compacidad existirá un modelo $\mathcal{M}^*$ de Σ^*, es decir, una estructura que satisfaga $Th(\mathcal{N})$ y que tenga al menos un elemento que sea diferente a todos los elementos generados por la función sucesor (el correspondiente al símbolo k). $\mathcal{M}^*$ será una $\mathcal{L}^*$-estructura y quitándole el símbolo de constante será la $\mathcal{L}$-estructura que buscabamos (aritmética no estándar).

$\square$

Capítulo 4

El teorema de Löwenheim-Skolem

4.1. Los teoremas de Löwenheim-Skolem

4.1.1. Teorema Descendente de Löwenheim-Skolem (Tarski y Vaught, 1956)

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de cardinalidad λ. Para cada $\mathcal{M}$ de cardinalidad κ, cada subconjunto $A \subseteq M$ de cardinalidad α y cada cardinal β tal que $\alpha, \lambda \leq \beta \leq \kappa$, hay una estructura $\mathcal{N}$ de cardinalidad β tal que $A \subseteq N$ y $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$.

Demostración. En primer lugar definiremos el conjunto N y nos aseguraremos de que tenga cardinalidad β. Luego, veremos que es el universo de una subestructura elemental $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$. En el camino nos apoyaremos en que podemos definir un buen orden $\leq^o$ en M por el Axioma de elección.

- Sea B un subconjunto de M con cardinalidad β tal que $A \subseteq B$. Vamos a construir el conjunto N a partir de B, definiéndolo a partir de la siguiente familia de conjuntos: $N_0 = B$; $N_{n+1} = N_n \cup E_n$ donde E_n es el conjunto construido de las siguiente forma:

  Para cada combinación de tupla $\overline{a}$ de N_n y fórmula $\varphi(\overline{y}, x)$ de $\mathcal{L}$ tal que $\mathcal{M} \models$

$\exists x\varphi(\overline{a},x)$ existe el conjunto $\{b \in M \mid \mathcal{M} \models \varphi(\overline{a},b)\}$. De dicho conjunto nos quedamos con el primer elemento (que existe por ser $\leq^{o}$ un buen orden) y lo seleccionamos en E_n.

Todos los elementos de la cadena tienen cardinalidad β, pues en cada proceso constructivo de N_k a N_{k+1} se le añade a lo sumo un conjunto de cardinalidad λ (λ porque a lo sumo hay λ fórmulas existenciales por la cardinalidad de $\mathcal{L}$) con lo que tenemos que $|N_{k+1}| \leq |N_k| + \lambda = \beta$ y esto implica que $N_{k+1} = \beta$. Luego, definimos N como la unión de los N_k y como es una unión contable tenemos que $|N| = \beta$.

- Para mostrar que $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$, para ello primero veremos que N es el universo de una subestructura debido al Lema 2.1.1. Tenemos que $c^{\mathcal{M}} \in N$, pues en N_1 debe existir un elemento tal que suceda $\mathcal{M} \models \exists x(x = c)$. Tambien, para todo f_i y toda tupla $\overline{a} \in N^{\mu(i)}$ tendremos que $f_i^{\mathcal{M}}(\overline{a}) \in N$, pues los elementos de $\overline{a}$ estarán en algún N_k y por lo tanto en N_{k+1} estará un b tal que satisfaga $\exists x f_i(\overline{a}) = x$. Por tanto $\mathcal{N} \leq \mathcal{M}$.

  Para toda $\varphi(x_1,\ldots,x_n,y) \in \mathcal{L}$ y $a_1,\ldots,a_n \in \mathcal{N}$ si $\mathcal{M} \models \exists y\varphi(\overline{a},y)$, entonces hay un $b \in \mathcal{N}$ tal que $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a},b)$, pues $a_1,\ldots,a_n$ están en algún N_k. En consecuencia $b \in N_{k+1} \subseteq N$. Por el criterio de Tarski 2.4.6, $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$.

$\square$

4.1.2. Teorema Ascendente de Löwenheim-Skolem (Tarski y Vaught, 1956)

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de cardinalidad λ. Para cada $\mathcal{M}$ de cardinalidad $\kappa \geq \aleph_0$ y cada cardinal $\beta \geq \kappa, \lambda$ hay un $\mathcal{N}$ de cardinalidad β tal que $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$.

Demostración. Sea $\mathcal{M}$ una $\mathcal{L}$-estructura con cardinalidad κ y sea $|\mathcal{L}| = \lambda$. Expandamos el lenguaje $\mathcal{L}$ a $\mathcal{L}^*$ añadiendo un símbolo de constantes c_a por cada elemento

a del universo de $\mathcal{M}$. $\mathcal{M}^*$ será la $\mathcal{L}^*$-estructura que resulta de añadir a la signatura de $\mathcal{M}$ las constantes $c_a^{\mathcal{M}^*} = a$. Expandamos una vez más el lenguaje $\mathcal{L}$ a $\mathcal{L}^{**}$ que será $\mathcal{L}^* \cup C_\beta$ donde C_β es un conjunto de símbolos de constantes de cardinalidad β. Tomemos $Th(\mathcal{M}^*) \cup \Delta_\beta$, donde $\Delta_\beta = \{\neg(c = c_\beta) \mid \text{con } c \in C^* \cup C_\beta - \{c_\beta\} \text{ y } c_\beta \in C_\beta\}$. Para cada subconjunto finito Δ de $Th(\mathcal{M}^*) \cup \Delta_\beta$ habrá un conjunto finito de símbolos de constantes de $C^* \cup C_\beta$ que aparezcan en él. Podemos definir $\mathcal{M}^*_\Delta = (M, \langle C^* \cup C_\beta, \mu, \delta \rangle)$ de forma que modele Δ definiendo su signatura igual a la de $\mathcal{M}^*$ y para los c_β que aparezcan en Δ definirlos como elementos de M que hagan que se cumplan las oraciones, es decir, con interpretaciones diferentes entre sí y al resto de los c que estén en Δ. Aquellos c_β que no aparecen en Δ los definimos igual a alguna constante que no aparezca en Δ y que no fuera usada por los c_β en Δ. Por el Teorema de compacidad, tendremos que existe una $\mathcal{L}^{**}$-estructura $\mathcal{N}^*$ tal que $\mathcal{N}^* \models Th(\mathcal{M}^*) \cup \Delta_\beta$. Ahora, podemos definir la $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{N}$, simplemente quitándole las constantes que no tienen símbolos en la signatura de $\mathcal{L}$. Lo anterior no implica quitar los elementos de M correspondientes a las contantes, si no simplemente quitarles a dichos elementos el estatus de constantes.

Veamos que $\mathcal{M}$ es una subestructura elemental de $\mathcal{N}$. Nos remontamos al apartado 1.2.3 (Interpretación de las fórmulas), En particular, al hecho de que para toda fórmula de $\mathcal{L}$ y $\overline{a} \in M$, cuando nos referimos a $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a})$, lo que en realidad sucede es que en el lenguaje extendido donde cada a_k de la tupla $\overline{a}$ está asociado a una constante de la estructura extendida satisface la oración asociada a $\varphi(\overline{a})$ en dicho lenguaje. Claramente podemos tomar como lenguaje extendido a $\mathcal{L}^*$ y $\mathcal{M}^*$ como estructura extendida, desde que $\mathcal{L}^*$ es simplemente el leguaje donde todo elemento a de M está asociado a una constante c_a. Luego, para toda tupla $\overline{a}$ de elementos de M y fórmulas φ de $\mathcal{L}$ tendremos que $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a})$ sii $\mathcal{M}^* \models \varphi(\overline{c_a})$. Como teníamos que $\mathcal{N}^* \models Th(\mathcal{M}^*)$, entonces $\mathcal{N} \models \varphi(\overline{a})$. Por tanto $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$.

$\square$

4.2. Los hiperreales

El Teorema de Löwenheim-Skolem tiene muchas consecuencias y es una herramienta habitual en teoría de modelos, como lo vimos en las pruebas de algunos ejemplos durante el capítulo 2. Una de las consecuencias más interesante son los hiperreales que acontinuación desarrollaremos.

Su construcción. Tomemos el conjunto $\mathbb{R}$ en donde destacamos el 0 y 1 como constantes; la adición(+), la multiplicación($\cdot$), el inverso aditivo($^-$) y el valor absoluto ($|\ |$) como funciones; $<$ como la relación de orden. Nos referimos mediante $\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, \{0,1\}, \{+, \cdot, ^-, |\ |\}, \{<\}\rangle$ a la estructura de los reales.

Su construcción es sencilla gracias al teorema de Löwenheim-Skolem. Por el Teorema ascendente de Löwenheim-Skolem podemos encontrar una extensión elemental $\mathcal{R}^H$ de $\mathcal{R}$ con cardinalidad mayor. $\mathcal{R}^H$ será la estructura de los hiperreales.

Sus propiedades. Por la construcción de $\mathcal{R}^H$, sabemos que debe cumplir las mismas propiedades que cumple $\mathcal{R}$ enunciables en un lenguaje de primer orden. Por lo tanto, para demostrar que $\mathcal{R}^H$ tiene una propiedad simplemente vemos si la tiene $\mathcal{R}$ y si ésta es expresable en un lenguaje de primer orden.

Proposición 4.2.1 *$\mathcal{R}^H$ es un campo.*

Demostración. Los campos son $\mathcal{L}$-estructuras y $\mathcal{R}$ es un campo por lo tanto $\mathcal{R}^H$ es un campo también.

□

Proposición 4.2.2 *$\mathcal{R}^H$ contiene un orden lineal estricto, denso y sin extremos.*

Demostración. Los órdenes lineales estrictos, densos y sin extremos son $\mathcal{L}$-estructuras y $\mathcal{R}$ es un orden lineal estricto, denso y sin extremos por lo tanto $\mathcal{R}^H$ es un orden lineal estricto, denso y sin extremos.

□

Propiedades no expresables. La propiedad de que todo conjunto acotado superiormente posee un supremo no es expresable en un lenguaje de primer orden, debido a que no podemos cuantificar sobre conjuntos en un lenguaje de primer orden. Por tanto, $\mathcal{R}^H$ no la tiene.

Sus elementos. A continuación definimos sus elementos, y luego de unas proposiciones sobre ellos, probaremos que efectivamente existen.

$INF(\mathcal{R}^H) = \{x \in \mathcal{R}^H \mid \forall r \in \mathbb{R} : |x|^H > |r|\}$ es el conjunto de los elementos infinitos de $\mathcal{R}^H$.

$FIN(\mathcal{R}^H) = \{x \in \mathcal{R}^H \mid \exists r \in \mathbb{R} : |x|^H < r\}$ es el conjunto de los elementos finitos de $\mathcal{R}^H$.

$INFMAL(\mathcal{R}^H) = \{x \in \mathcal{R}^H \mid \forall r \in \mathbb{R} : |x|^H < |r|\}$ es el conjunto de elementos infinitesimales de $\mathcal{R}^H$.

Proposición 4.2.3 *Para cada $b \in \mathbb{R}^H$ se cumple que $b \in INFIMAL(\mathbb{R}^H)$ sii $b^{-1} \in INF(\mathbb{R}^H)$.*

Demostración. La anterior proposición es cierta porque en los reales se cumplen las siguientes oraciones: $\forall xy((x > y \to x^{-1} < y^{-1}) \land (x \cdot y > 0))$ y $\forall x(x > 0 \to x^{-1} > 0)$ con las cuales podemos afirmar que al b ser un número infinito más grande que todo real, entonces su inverso tendrá que ser positivo y menor que todo real positivo, es decir, infinitesimal.

□

Proposición 4.2.4 *Existen infinitesimales distintos de* 0 *y elementos infinitos en $\mathcal{R}^H$.*

Demostración. Debído a que $\mathcal{R}^H$ tiene una mayor cardinalidad que $\mathcal{R}$ tiene que existir algún elemento h en $\mathcal{R}^H$ que sea diferente a todos los de $\mathbb{R}$. Pese a que es diferente de cualquier real, debe cumplir las mismas propiedades de primer orden. En particular, tendrá alguna relación de orden con los reales. Es decir, existirán dos conjuntos de los reales $A = \{r \in \mathbb{R} \mid r > h\}$ y $B = \mathbb{R} - A = \{r \in \mathbb{R} \mid r < h\}$.

A partir de lo anterior tenemos los siguientes tres casos:

Caso 1 B es vacío y $A = \mathbb{R}$. Esto nos lleva a que para todo $r \in \mathcal{R}$, h es mayor r y por lo tanto es un elemento infinito. Por la Proposición 4.2.3, su inverso multiplicativo h^{-1} será infinitesimal.

Caso 2 A es vacío y $B = \mathbb{R}$. Esto nos lleva a que para todo $r \in \mathbb{R}$, h es menor que r, luego $|h|^H > |r|^H$, y por lo tanto es un elemento infinito. Por la Proposición 4.2.3, su inverso multiplicativo h^{-1} será infinitesimal.

Caso 3 A y B son no vacíos. Entonces dado el supremo s de B (infimo de A), tendrá que suceder uno de los siguientes casos:

Caso 3.1 $s < h$. Esto nos lleva a la desigualdad $s < h < a$, para todo $a \in A$. Si a la desigualdad le restamos s obtenemos $0 < h-s < a-s$ donde nos podemos dar cuenta que los $a-s$ son todos los reales positivos y por lo tanto $h-s$ es un infinitesimal. En consecuencia, $(h-s)^{-1}$ es un elemento infinito por la Proposición 4.2.3.

Caso 3.2 $s > h$. Esto nos lleva a la desigualdad $s > h > b$, para todo $b \in B$. Si a la desigualdad le restamos s obtenemos $0 > h-s > b-s$ donde nos podemos dar cuenta que los $b-s$ son todos los reales negativos y por lo tanto $h-s$ es un infinitesimal. En consecuencia, $(h-s)^{-1}$ es un elemento infinito por la Proposición 4.2.3.

$\square$

Proposición 4.2.5 $\mathbb{R} \subseteq FIN(\mathbb{R}^H)$ pero $\mathbb{R} \neq FIN(\mathbb{R}^H)$.

Demostración. Por la contrucción de $\mathcal{R}^H$ es claro que $\mathbb{R} \subseteq FIN(\mathbb{R}^H)$, pero en $FIN(\mathbb{R}^H)$ hay otros elementos, los cuales resultan de la suma entre elementos de los reales e infinitesimales diferentes del 0. □

4.3. Análisis no estándar

Como una curiosidad, veremos en está sección la base del análisis en los hiperreales, el análisis no estándar.

Definición (Hiperreales infinitamente cercanos) Dos hiperreales $x, y \in \mathbb{R}^H$ son infinitamente cercanos ($x \approx y$) cuando su diferencia es un infinitecimal:

$$x \approx y \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1)|x - y| < 1/n$$

Teorema (Reformulación de límites) Cada función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se extiende a una función. $f : \mathbb{R}^H \longrightarrow \mathbb{R}^H$

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\mathbb{R}$

- f es continua en un punto $x \in \mathbb{R}$ sii $(\forall \varepsilon \approx 0)\ f(x + \varepsilon) \approx f(x)$.

- f es continua sobre $\mathbb{R}$ sii ($\forall x, y$ finitos)$(x \approx y \Rightarrow f(x) \approx f(y))$.

- f es uniformemente continua sobre $\mathbb{R}$ sii $(\forall x, y \in \mathbb{R}^H)(x \approx y \Rightarrow f(x) \approx f(y))$.

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge hacia $l \in \mathbb{R}$ sii ($\forall w$ infinito)$u_w \approx l$.

Teorema (Reformulación de la derivabilidad) Una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en un punto $x \in \mathbb{R}$ sii $l \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} \approx l\ (\forall \varepsilon \approx 0, \varepsilon \neq 0)$$

En este caso, tenemos que $f'(x) = l$.

Ejemplo: Sea $f(x) = x^2$. Para todo $x \in \mathbb{R}, \varepsilon \approx 0$ y $\varepsilon \neq 0$, tenemos que

$$\frac{f(x-\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} = \frac{(x+\varepsilon)^2-x^2}{\varepsilon} = \frac{2x\varepsilon+\varepsilon^2}{\varepsilon} = 2x + \varepsilon \approx 2x.$$

Entonces: $f'(x) = 2x$.

Conclusión

La teoría de modelos nos muestra que efectivamente existe una relación entre los aspectos sintácticos y semánticos de la lógica. En el trabajo es principalmente la parte sintáctica (lenguajes de primer orden) la que nos da información sobre aspectos semánticos (estructuras). Los resultados que nos permiten hacer gala de lo anterior son el Teorema de compacidad y el Teorema de Löwenheim-Skolem. Y es claro el gran poder que tienen dichos Teoremas, pues nos dan consecuencias difíciles de imaginar de forma sencilla. Como vimos en la construcción de los hiperreales, al usar un leguaje de primer orden sobre una estructura con el Teorema de Löwenheim-Skolem podemos encontrar otras estructuras de cualquier cardinalidad infinita que mantengan todas las propiedades de dicha estructura. Con el Teorema de compacidad podemos encontrar estructuras con ciertas propiedades especificas deseadas. Los lenguajes de primer orden, pese a tener sus limitaciones nos pueden ayudar a obtener mucha información sobre los modelos de una teoría.

Bibliografía

[1] C. C. Chang, H. J. Keisler, Model theory, Elsevier, 1990.

[2] María Manzano, Teoría de Modelos, Alianza Editorial, 1989.

[3] Wilfrid Hodges, Model theory, Cambridge University Press, 1993.

[4] David Marker, Model Theory: An Introduction, Springer-Verlag, 2002.

[5] Mike Prest, Notas de Teoría de Modelos, 2015.