UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS

FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES

CARRERA DE MATEMÁTICA

"EL TEOREMA DE BURNSIDE"

(Representación de Grupos Finitos)

Proyecto de grado para obtener el Grado de Licenciatura

Por: Porfirio Miranda Layme

Tutor : Lic. Ramiro Choque Canaza

LA PAZ - BOLIVIA

Junio, 2019

Dedicatoria

Este proyecto de grado la dedico a mi mamita Celia Layme Quispe que estuvo siempre a mi lado brindándome su mano amiga dándome a cada instante una palabra de aliento para llegar a culminar mi formación profesional y convirtiéndose en pilar fundamental.

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a Dios, por guiarme en el camino y fortalecerme espiritualmente para empezar un camino lleno de éxito.

Así, quiero mostrar mi gratitud a todas aquellas personas que estuvieron presentes en la realización de esta meta, de este sueño que es tan importante para mí, agradecer todas sus ayudas, sus palabras motivadoras, sus conocimientos, sus consejos y su dedicación.

A mi tutor de proyecto, Lic. Ramiro Choque Canaza quién con su conocimiento y su guía fue una pieza clave para que pudiera superar ciertos hechos que fueron imprescindibles para cada etapa de desarrollo del trabajo.

A mi tribunal: Lic. Zenón Condori Gonzales y Lic. Eugenio Castaños Calle por compartir sus conocimientos y por las acertadas sugerencias realizadas para la culminación del proyecto.

A mis compañeros, quienes a través del tiempo fuimos fortaleciendo una amistad y creando una familia, muchas gracias por toda su colaboración, por compartir experiencias, alegrías, frustraciones, tristezas, celebraciones, por aportarme confianza y por crecer juntos, muchas gracias.

A mi novia Elizabeth Nina, que durante estos años ha sabido apoyarme para continuar y nunca renunciar, gracias por su amor incondicional y por su ayuda en mi proyecto.

Por último, quiero agradecer a la base de todo, a mi familia, en especial a mi madre Celia Layme, mi padre Eduardo Miranda (†) y hermanos Sonia, Réne, Eddy, Javier, Abraham y Raúl, quienes con sus consejos fueron el motor de arranque y mi constante motivación, muchas gracias por su paciencia y comprensión, y sobre todo por su cariño.
¡Muchas gracias por todo!

Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo principal demostrar el *Teorema de Burnside* que afirma que todo grupo G de orden $p^a q^b$, con p y q primos es *soluble*, para este fin se desarrolla la teoría de *Representaciones de grupos finitos*, que es la descripción y clasificación de las distintas representaciones de un grupo finito G, además se analiza las representaciones *irreducibles* y cuando una representación es *completamente reducible*, esto gracias al teorema de Maschke. Posteriormente se desarrolla las relaciones de ortogonalidad y la teoría de caracteres para finalmente pasar a la prueba del teorema de Burnside. Para la prueba se realiza un repaso de algunos resultados de grupos simples y solubles que serán de vital importancia para la prueba, también se enuncian resultados importantes, como el teorema de la dimensión y otros lemas que ayudan a la prueba del teorema como un resultado de la aplicación de las teorías de representación y carácter.

Palabras claves: Grupo, representación, carácter, ortogonalidad, simple, soluble y teorema de Burnside.

Abstract

The main objective of this paper is to demonstrate the *Burnside's theorem* which states that every group G of order $p^a q^b$, with p and q cousins is *soluble*, for this purpose the theory of *Representations of finite groups* is developed, which is the description and classification of the different representations of a finite group G, in addition, *irreducible* representations are analyzed and when a representation is *completely reducible*, this is thanks to *Maschke's theorem*. Subsequently, the relations of orthogonality and character theory are developed to finally pass to the test of Burnside's theorem. For the test a review is made of some results of simple and soluble groups that will be of vital importance for the test, also important results, such as the theorem of the dimension and other slogans that help the proof of the theorem as a result of the application of representation and character theories.

Keywords: Group, representation, character, orthogonality, simple, soluble and Burnside theorem.

Perfil de Proyecto de Grado

UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS
FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES
CARRERA DE MATEMÁTICA

PERFIL DE PROYECTO DE GRADO

“EL TEOREMA DE BURNSIDE"

(Representación de Grupos Finitos)

AUTOR: Univ.Porfirio Miranda Layme

TUTOR: Lic. Ramiro Choque Canaza

LA PAZ - BOLIVIA

Junio,2019

0.1. Antecedentes

Las ideas que dan pie a nuevas teorías en matemáticas se van desarrollando poco a poco con el paso del tiempo, por lo cual no es posible en general decir la fecha exacta en que ocurrió un determinado descubrimiento. Sin embargo, hay ocasiones en que eventos muy particulares acompañan su nacimiento y terminan por identificarse con el inicio mismo de la teoría en cuestión.

Tal es el caso de las representaciones de grupos finitos, cuya aparición puede situarse el 12 de abril de 1896, fecha en la que Frobenius dio respuesta al planteamiento hecho por Dedekind acerca de cómo factorizar un cierto polinomio asociado a un grupo al que llamaba el "determinante del grupo".

Richard Dedekind (1831-1916) era quizás el alemán más destacado en el área de álgebra abstracta a fines del siglo pasado. Durante la década de los ochenta del siglo XIX trabajo en lo siguiente: a un grupo finito le asociaba una matriz de tamaño $|G| \times |G|$ cuyo determinante era un polinomio. Él intentó obtener resultados generales sobre su factorización pero sólo logro desarrollar casos particulares.

Después de más de quince años de trabajar en el asunto, convencido de que no podía aportar nada nuevo al problema, decidió escribirle a Ferdinard Georg Frobenius (1849-1917) quien por esas fechas estaba interesado en los grupos finitos y, aunque para él era nuevo el planteamiento de Dedekind, conocía bien la teoría general de los caracteres y sentó las bases de las representaciones de grupos finitos, resolviendo con ello el problema.

Otro matemático que jugó un papel muy importante en la teoría de representaciones fue el inglés William Burnside (1852-1927). Desde chico destacó en matemáticas. Durante gran parte de su vida dio clases en el Colegio Naval Real en Greenwich teniendo así tiempo suficiente para dedicarse por su cuenta a la investigación. Fue el primero en dar a conocer la teoría de los grupos finitos en ingles de manera accesible, pero como el tema no era muy popular en su país, sus trabajos al respecto fueron apreciados mucho tiempo después. A fines del siglo pasado se intereso en los grupos finitos y se entero de los trabajos de Frobenius. Publicó sus propias pruebas de los resultados obtenidos por el alemán, dándolas a conocer en Inglaterra y desarrollo nuevas ideas en este campo. Uno de sus más importantes es:

Teorema 0.1 (Burnside)**.** *Sean p, q primos y $a, b \in \mathbb{N}$. Todo grupo de orden $p^a q^b$ es soluble*

A simple vista no parece un resultado muy profundo, pero a partir de su publicación en la segunda edición del libro **Teoría de Grupos de orden finito** (1911) se intento en vano, encontrar una prueba usando solo teoría de grupos

0.2. Introducción

Un grupo de orden p^a (p un número primo) es llamado p-grupo y sabemos que todo p-grupo es soluble. En este trabajo mostraremos que grupos de orden p^aq^b también son solubles. Este resultado es conocido como el Teorema p^aq^b de Burnside, pues fue el matemático inglés William Burnside (1852-1927) que en 1904 probó este resultado. En su demostración él uso la teoría de caracteres de grupos finitos. Este teorema en verdad es un corolario de un teorema, también debido a Burnside, en el afirma que todo grupo finito que posee una clase de conjugación no trivial cuyo orden es una potencia de un numero primo no es simple. Para esto, previamente precisaremos de algunos resultados sobre números algebraicos y teoría de caracteres de un grupo.

Hoy en día existen otras demostraciones para el Teorema p^aq^b de Burnside que no usa la teoría de caracteres, la primera de estas aparece apenas en 1970 y fue publicada por D. Goldschmidt.

0.3. Problema

Demostrar el Teorema de Burnside mediante la teoría de representaciones de grupos. Estudiar la solubilidad de grupos finitos, para ello se hace un estudio de carácter de grupos finitos:

0.4. Objetivos

En el área de Álgebra, desarrollaremos las Representaciones de Grupos Finitos, y el **objetivo principal** es demostrar el Teorema de Burnside.

Entre los **objetivos específicos** estan el desarrollar la teoría de representación de grupos finitos y teoría de caracteres, demostrar el teorema de Maschke, Lema de Schur, las relaciones de ortogonalidad, representaciones de los grupos abelianos, Teorema de la dimensión, Teorema de Burnside y sus aplicaciones.

Resumen de algunos resultados:

Definición 0.1. *Una representación de un grupo G es un homomorfismo $\varphi : G \to GL(V)$, donde V es un espacio vectorial de dimensión finita. El grado de la representación φ es la dimensión de V, denotado por* $\deg \varphi$

Teorema 0.2 (Maschke)**.** *Si $\varphi : G \to GL(V)$ es una representación, entonces φ es completamente reducible.*

El teorema central de la teoría de representación de grupos es la teoría de carácter de Frobenius y Schur. La idea fundamental de la teoría de caracteres es expresar la representación

$\varphi : G \to GL_n(C)$ por una función de valores complejos $\chi_\varphi : G \to \mathbb{C}$. En otras palabras, se reemplaza una función con valores en un espacio n-dimensional con una función con valores espacio de dimensión 1. Los caracteres vuelven a formar un conjunto ortonormal con respecto al producto interno en funciones.

Definición 0.2. *Una transformación lineal $T : V \to W$ es un morfismo entre las representaciones $\varphi : G \to GL(V)$, $\psi : G \to GL(W)$ si $T\varphi_g = \psi_g T$ para todo $g \in G$. El conjunto de todos los morfismos de φ a ψ se denota* $\mathrm{Hom}(\varphi, \psi)$.

Lema 0.1 (Lema de Schur). *Sean $\varphi : G \to GL(V)$, $\psi : G \to GL(W)$ representaciones irreducibles y $T \in \mathrm{Hom}(\varphi, \psi)$. Entonces*

1. $T = 0$ o T es inversible

2. Si $\varphi \nsim \psi$, entonces $\mathrm{Hom}(\varphi, \psi) = 0$

3. Si $\varphi = \psi$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $T = \lambda I$

Teorema 0.3. *Sean $\varphi : G \to GL(V)$, $\psi : G \to GL(W)$ representaciones y $T : V \to W$ una transformación lineal y $T^\# = \dfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi_{g^{-1}} T \varphi_g$. Entonces*

1. $T^\# \in \mathrm{Hom}(\varphi, \psi)$

2. *Si $T \in \mathrm{Hom}(\varphi, \psi)$, entonces $T^\# = T$*

3. *La función $P : \mathrm{Hom}(V.W) \to \mathrm{Hom}(\varphi, \psi)$ definida por $P(T) = T^\#$ es un operador lineal sobreyectiva*

La siguiente variante del lema de Schur será la forma más comúnmente usada.

Teorema 0.4. *Sean $\varphi : G \to GL(V)$, $\psi : G \to GL(W)$ representaciones irreducibles y $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces*

1. *Si $\varphi \nsim \psi$, entonces $T^\# = 0$*

2. *Si $\varphi = \psi$, entonces $T^\# = \dfrac{\mathrm{tr}(T)}{\deg \varphi} I$*

Teorema 0.5 (Relaciones de ortogonalidad de Schur). *Si $\varphi : G \to U_n(\mathbb{C})$, $\psi : G \to U_m(\mathbb{C})$ son representaciones unitarias irreducibles no equivalentes, entonces*

1. $\langle \varphi_{ij}, \psi_{kl} \rangle = 0$

2. $\langle \varphi_{ij}, \varphi_{kl} \rangle = \begin{cases} 1/n & si\ i = k\ y\ j = l \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$

Definición 0.3. *El carácter de una representación* $\varphi : G \to GL(V)$ *es la función* $\chi_\varphi : G \to \mathbb{C}$ *definida por*

$$\chi_\varphi(g) = \mathrm{tr}(\varphi_g)$$

Teorema 0.6. *Si* φ *y* ψ *son representaciones irreducibles de grupo* G*, entonces*

$$\langle \chi_\varphi, \chi_\psi \rangle = \begin{cases} 1 & , \quad \varphi \sim \psi \\ 0 & \quad \varphi \nsim \psi \end{cases}$$

Por lo tanto los caracteres irreducibles de G *forman un conjunto ortonormal de funciones de clases.*

Teorema 0.7 (Teorema de la Dimensión)**.** *Sea* φ *una representación irreducible del grupo* G *del grado* d*. Entonces* d *divide a* $|G|$

Lema 0.2. *Sea* G *un grupo no abeliano finito. Supongamos que existe una clase de conjugación* $C \neq \{1\}$ *de* G *tal que* $|G| = p^t$ *con primo* p*,* $t \geq 0$*. Entonces* G *no es simple.*

Teorema 0.8 (Burnside)**.** *Sean* p*,* q *primos y* $a, b \in \mathbb{N}$*. Todo grupo de orden* $p^a q^b$ *es soluble*

0.5. Contenido

1. Preliminares

    1.1 Grupos

    1.2 Grupos Simples

    1.3 Grupos Solubles

    1.4 Álgebra Lineal

2. Representaciones Lineales de Grupos Finitos

    2.1 Definiciones Básicas

    2.2 Subespacios invariantes

    2.3 Representaciones Irreducibles

    2.4 Teorema de Maschke

3. Las relaciones de ortogonalidad

    3.1 Morfismo entre representaciones

    3.2 Lema de Schur

    3.3 Relaciones de Ortogonalidad de Schur

4. Teoría de Caracteres

    4.1 Caracteres y funciones de clase. Clases de Conjugación

    4.2 Carácter y Relaciones de Ortogonalidad

    4.3 Descomposición de la Representación Regular

    4.4 La representación de los Grupos Abelianos

5. El Teorema de Burnside

    5.1 El anillo de los enteros algebraicos

    5.2 Teorema de la dimensión

    5.4 Teorema de Burnside

    5.5 Aplicación del Teorema de Burnside

Índice general

1 Preliminares

En este capítulo se presenta algunos resultados sobre álgebra y álgebra lineal que serán utilizados en el presente trabajo con el fin de estudiar la teoría de representaciones.

1.1. Grupos

Definición 1.1 (Grupo). *Diremos que un conjunto no vacío G, unido a una operación binaria*

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto xy \end{aligned}$$

es un grupo si satisface las siguientes condiciones:
1. Asociatividad.

$$(xy)z = x(yz), \text{ para cualquier } x, y, z \in G.$$

2. Existencia de elemento neutro.

$$\text{Existe } e \in G \text{ tal que: } xe = x = ex, \text{ para todo } x \in G.$$

3. Existencia de elemento inverso.

$$\text{Para cada } x \in G, \text{ existe } x^{-1} \in G \text{ tal que: } xx^{-1} = x^{-1}x = e.$$

Definición 1.2 (Grupo Abeliano). *Un grupo G se denomina abeliano si satisface $ab = ba$ para todo $a, b \in G$.*

Definición 1.3 (Conmutadores). *Si G es un grupo y si $a, b \in G$, el conmutador de a y b, denotado por $[a, b]$ es el elemento*

$$[a, b] := aba^{-1}b^{-1} \in G.$$

Denotemos por $G^{(1)} = [G, G]$ al subgrupo de G generado por todos los conmutadores $[a, b]$ con $a, b \in G$. Al grupo $G^{(1)} = [G, G]$ se le llama el subgrupo conmutador de G.

Definición 1.4 (Subgrupo)**.** *Si G es un grupo y $\varnothing \neq S \subset G$. Diremos que S es un subgrupo de G, denotado como $S \leq G$ si cumple:*
1. $xy \in S$, $\forall x, y \in S$.
2. $x^{-1} \in S$, $\forall x \in S$.

Ejemplo 1.1. *Para $a \in G$, consideremos un subconjunto $\langle a \rangle = \{a^n; n \in \mathbb{Z}\}$ de G. Se tiene que $\langle a \rangle$ es un subgrupo de G, llamado el subgrupo generado por a. Además, diremos que a tiene orden finita si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = e$. En este caso, definimos el orden de a, denotado por $o(a)$ y definida como:*

$$o(a) = \text{mín}\{n \in \mathbb{N}; a^n = e\}$$

Si no existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = e$ diremos que a tiene orden infinita y denotaremos por $o(a) = \infty$.
Observe que si $o(a)$ es infinita, entonces $|\langle a \rangle|$ es infinita. Por otro lado, si $o(a)$ es finita igual a k, entonces $\langle a \rangle = \{e, a, a^2, \dots, a^{k-1}\}$ y $|\langle a \rangle| = o(a)$.

Ejemplo 1.2. *Si G es un grupo, H un subgrupo de G y $a \in G$. Definimos el conjugado de H por a, denotado por H^a o $a^{-1}Ha$, como:*

$$H^a = \{h^a; a \in H\} = \{a^{-1}ha; h \in H\}.$$

Se tiene que H^a es un subgrupo de G.

Definición 1.5 (Normalizador)**.** *Definimos al normalizador de H en G, denotado por $N_G(H)$, como $N_G(H) = \{x \in G; H^x = H\}$.*
Se tiene que $N_G(H)$ es un subgrupo de G y que $H \subseteq N_G(H)$.

Ejemplo 1.3. *Si G es un grupo, $a \in G$ y S un subconjunto no vació de G. Definimos el centralizador de a en G, denotado por $C_G(a)$, y el centralizador de S en G, denotado por $C_G(S)$, de la siguiente manera:*

$$C_G(a) = \{x \in G; xa = ax\} \qquad y \qquad C_G(S) = \{x \in G; xs = sx, \forall s \in S\}.$$

Además se tiene que los anteriores subconjuntos son subgrupos de G y que:
1. $b \in C_G(a) \Leftrightarrow ba = ab \Leftrightarrow a \in C_G(b)$.
2. $C_G(S) = \bigcap_{s \in S} C_G(s)$.

Definición 1.6 (Centro de un Grupo)**.** *El subgrupo $C_G(G) = \{x \in G; xg = gx, \forall g \in G\}$ es llamado el centro de G y es denotado por $Z(G)$. Además se puede ver que G es abeliano si y solamente si $Z(G) = G$.*

***Observación* 1.** *Si G es un grupo con $|G| = p^n$, con p primo y $n \in \mathbb{N}$, entonces $Z(G) \neq \{e\}$. Es una consecuencia de la ecuación de clase:*

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x \in S} [G : C_G(x)]$$

donde S es un sistema de representantes de las clases de conjugación con más de un elemento.

Definición 1.7. *Si G es grupo, H un subgrupo de G y $g \in G$. Definimos:*
1. La clase lateral derecha de H en G, denotado por Hg, como $Hg = \{hg; h \in H\}$.
2. La clase lateral izquierda de H en G, denotado por gH, como $gH = \{gh; h \in H\}$.

***Observación* 2.** *Si G es un grupo, $a, b, g \in G$ y $H \leq G$ se cumple que:*
1. $Ha = Hb \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$.
2. $aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$.
3. El número de las distintas clases laterales derechas de H en G es igual al número de las distintas clases laterales izquierdas de H en G. Este número es llamado indice de H en G y denotado por $|G : H|$.
4. $|Hg| = |H| = |gH|$.

Teorema 1.1 (Lagrange)**.** *Si G es un grupo finito y H un subgrupo de G. Entonces, $|G| = |G : H||H|$ y consecuentemente $|H|$ divide $|G|$.*

Definición 1.8 (Subgrupo Normal)**.** *Si G es un grupo y $N \leq G$. Diremos que N es un subgrupo normal de G, denotado por $N \trianglelefteq G$ si $gN = Ng$, para todo $g \in G$.*

Si G es un grupo y $N \trianglelefteq G$. Sabemos que $Ng = gN$ para todo $g \in G$, lo cual nos permite hablar indistintamente sobre las clases laterales derechas e izquierdas. La notación G/N corresponde al grupo de todas las clases laterales de N en G, es decir $G/N = \{gN; g \in G\}$. Definamos la siguiente operación:

$$\begin{aligned} \cdot : \frac{G}{N} \times \frac{G}{N} &\longrightarrow \frac{G}{N} \\ (aN, bN) &\longmapsto (aN)(bN) = abN. \end{aligned}$$

Se puede observar que la operación esta bien definida. En efecto, si $a, b, a_1, b_1 \in G$ son tales que $aN = a_1N$ y $bN = b_1N$, entonces $a^{-1}a_1 \in N$ y $b^{-1}b_1 \in N$. Por la normalidad de N se sigue que $(ab)^{-1}a_1b_1 \in N$ y así mismo $abN = a_1b_1N$.
No es difícil ver que G/N, unido a la anterior operación es un grupo, llamado el grupo cociente de G por N. El elemento neutro de G/N es la clase $eN = N$ y si $g \in G$, el inverso de gN en G/N es $g^{-1}N$.

Teorema 1.2 (Teorema de Sylow)**.** *Sea G un grupo finito de orden $p^n m$, donde p es primo, $n \geq 1$ y $p \nmid m$. Sea $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, entonces G posee por lo menos un subgrupo de orden p^k.*

Además, si $k < n$ y H es un subgrupo de G de orden p^k, entonces existe algún subgrupo N de G tal que $N \trianglelefteq G$ y $|N| = p^{k+1}$.

Considere p^n, la mayor potencia de p que divide $|G|$. Un subgrupo de G de orden p^n es llamado el p-subgrupo de Sylow de G.

Definición 1.9 (Clase de Conjugación). *Definimos la clase de conjugación de un elemento a de un grupo G como sigue:*

$$Cl_G(a) = \{xax^{-1}; x \in G\}.$$

Y para $a, b \in G$, se satisface:

1. $Cl_G(e) = \{e\}$.

2. $Cl_G(a) = \{a\} \Leftrightarrow a \in Z(G)$.

3. $Cl_G(a) \bigcap Cl_G(b) \neq \{e\} \Leftrightarrow Cl_G(a) \neq Cl_G(b)$.

4. $G = \bigcup\limits_{a \in G} Cl_G(a)$.

5. $\{b^{-1}yb; y \in C_G(a)\} = C_G(a)$.

Definición 1.10 (Homomorfismo). *Si G y G_1 son grupos. Diremos que una aplicación $\varphi : G \longrightarrow G_1$ es un homomorfismo de grupos si $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ para cualquier $x, y \in G$.*

Propiedades básicas:

1. $\varphi(e) = e_1$, donde e denota el elemento neutro en G y e_1 denota el elemento neutro de G_1.

2. $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$ para todo $a \in G$.

3. $\varphi(a^n) = \varphi(a)^n$ para cualquier $a \in G$ y $n \in \mathbb{Z}$.

Tomando G, G_1 grupos y $\varphi : G \longrightarrow G_1$ un homomorfismo, definimos el núcleo y la imagen de φ, denotado por $ker\varphi$ y $Im\varphi$, de la siguiente manera:

$$ker\varphi = \{x \in G; \varphi(x) = e_1\} \qquad \text{y} \qquad Im\varphi = \{\varphi(x); x \in G\}.$$

1.2. Grupos Simples

Definición 1.11 (Grupo Simple). *En el álgebra abstracta, y, particularmente, en teoría de grupos G es un grupo simple si es un grupo que solamente tiene como subgrupos normales a los subgrupos triviales $\{e\}$ y G. A estos grupos también se los conoce como grupo primo.*

La importancia de los grupos finitos simples se debe a que en cierto sentido son los "*bloques*" que forman todos los grupos finitos, de igual forma que los números primos forman los enteros. Así, todo grupo finito admite una serie de composición

$$\{e\} = H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_n = G$$

siendo n la longitud de la serie y donde cada factor de composición H_{i+1}/H_i es un grupo simple. Estas apreciaciones nos llevan a otro tipo de grupos de interés, como son los *Grupos Solubles*.

1.3. Grupos Solubles

Definición 1.12 (Grupo Soluble)**.** *Un grupo finito G se dice soluble si existe una cadena finita de subgrupos $\{G_i\}_{i=1}^n \subset G$ tal que:*

$$\{e\} = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots \subseteq G_n = G$$

donde para cada $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ se cumple que:
- *G_i es subgrupo normal de G_{i+1}, denotado por $G_i \lhd G_{i+1}$.*
- *El grupo cociente G_{i+1}/G_i es abeliano.*

Antes de enunciar la siguiente proposición se debe recordar que un un $p - grupo$ finito es un grupo cuyo orden es una potencia de p (con p primo).

Teorema 1.3. *Todo $p -$ grupo finito es soluble. En otras palabras, si G es un grupo de orden p^n, entonces existe una sucesión de subgrupos*

$$\{e\} = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \cdots \subseteq G_n = G$$

tales que G_i es normal en G_{i+1}, $|G_i| = p^i$ con $1 \leq i \leq n$ y los cocientes G_{i+1}/G_i son cíclicos de orden p.

Prueba. Por inducción sobre n. Si $n = 0$ se cumple la afirmación. Supongamos ahora que $n \geq 1$ y que el teorema es válido par cualquier grupo G de orden p^m con $m \leq n$, lo cual viene a ser la hipótesis de inducción.
Si $n \geq 1$, implica que $Z(G) \neq \{e\}$ y como $|Z(G)|$ divide a $|G| = p^n$ entonces $|Z(G)| = p^m$ con $1 \leq m \leq n$. Además, $Z(G)$ abeliano de orden p^m implica que $Z(G)$ tiene un elemento σ de orden p. Sea C el grupo cíclico generado por σ. Entonces así $|C| = p$ y $C \subseteq Z(G)$, y por lo tanto C es normal en G y G/C es un p-grupo de orden p^{n-1}. Por hipótesis de inducción existe una sucesión de subgrupos

$$\{e\} = C/C = G_1/C \lhd \cdots \lhd G_n/C = G/C$$

donde $|(G_i)/C| = p^{i-1}$ y por lo tanto $G_i = p^{i-1}|C| = p^{i-1}p = p^i$, y $G_i/C \lhd G_{i+1}/C$, lo cual implica que $G_i \lhd G_{i+1}$. Si entonces ponemos $G_0 = \{e\}$ se tiene la serie normal deseada para G y como los cocientes G_{i+1}/G_i tienen orden p y por lo tanto son cíclicos, se sigue que G es soluble. $\square$

Definición 1.13 (Conmutadores). *Si G es un grupo y si $a, b \in G$, el conmutador de a y b, denotado por $[a, b]$ es el elemento*

$$[a, b] := aba^{-1}b^{-1} \in G.$$

Denotemos por $G^{(1)} = [G, G]$ al subgrupo de G generado por todos los conmutadores $[a, b]$ con $a, b \in G$. Al grupo $G^{(1)} = [G, G]$ se le llama el subgrupo conmutador de G.

Lema 1.1. *Sea G un grupo. Entonces,*
(1) $G^{(1)}$ es un subgrupo normal de G.
(2) El grupo cociente $G/G^{(1)}$ es abeliano.
(3) Si $M \lhd G$ es un subgrupo normal tal que G/M es abeliano, entonces $G^{(1)} \subseteq M$.

Prueba. (1) Los elemento de $[G, G]$ son productos finitos de la forma

$$x = [a_1, b_1] \cdots [a_t, b_t] = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_t b_t a_t^{-1} b_t^{-1} \tag{1.1}$$

y para cada uno de los factores de la forma $[a, b]$, para cualquier $g \in G$ se tiene que:

$$g[a, b]g^{-1} = gaba^{-1}b^{-1}g^{-1} = gag^{-1}gbg^{-1}ga^{-1}gb^{-1} = [gag^{-1}, gbg^{-1}],$$

el cual es un elemento de $[G, G]$, y el paso al caso directo *(1.1)* es directo. (2) Dado $a \cdot G^{(1)} \in G/G^{(1)}$ con $a, b \in G$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left(a \cdot G^{(1)}\right) \cdot \left(b \cdot G^{(1)}\right) &= (ab)G^{(1)} && \text{Por definición de producto.} \\
&= (ab)(b^{-1}a^{-1}ba)G^{(1)} && \text{Porque } b^{-1}a^{-1}ba \in G^{(1)} \\
&= (ba)G^{(1)} && \text{Por definición de producto.} \\
&= \left(b \cdot G^{(1)}\right)\left(a \cdot G^{(1)}\right).
\end{aligned}$$

(3) Mostraremos que todos los generadores $aba^{-1}b^{-1}$ de $G^{(1)}$ están en M. En efecto, para el generador $aba^{-1}b^{-1}$ de $G^{(1)}$, como G/M es abeliano

$$abM = baM$$

y así $aba^{-1}b{-}1 = ab(ba)^{-1} \in M$. $\square$

Como $G^{(1)}$ es un grupo también, podemos considerar su subgrupo conmutador

$$G^{(2)} := [G^{(1)}, G^{(1)}],$$

y en general, iterar el proceso anterior obteniendo una cadena de subgrupos de G:

$$G \supseteq G^{(1)} \supseteq G^{(2)} \supseteq \cdots \supseteq G^{(i)} \supseteq \cdots \tag{1.2}$$

donde $G^{(i)} := [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}]$ y además (poniendo $G^{(0)} := G$), por el lema anterior se tiene que:
(i) $G^{(i)} \lhd G^{(i-1)}$ para todo $i \geq 1$.
(ii) De hecho, $G^{(i)} \lhd G$ para todo $i \geq 0$
(iii) Los cocientes $G^{(i)}/G^{(i+1)}$ son abelianos para toda $i \geq 0$.

Teorema 1.4. *Un grupo G es soluble si y sólo si $G^{(n)} = \{e\}$ para algún entero n.*

Prueba. Si $G^{(n)} = \{e\}$, la cadena *(1.2)* es finita

$$\{e\} = G^{(n)} \subseteq G^{(n-1)} \subseteq \cdots \subseteq G^{(1)} \subseteq G^{(0)} = G$$

y es tal que cada $G^{(i+1)} \lhd G^{(i)}$ y los cocientes $G^{(i)}/G^{(i+1)}$ son abelianos. Se sigue que G es soluble.

Recíprocamente, si G es soluble, se tiene una serie

$$\{e\} = G \subseteq G_1 \subseteq \cdots \subseteq G_n = G$$

donde cada $G_i \lhd G_{i+1}$ y los cocientes G_{i+1}/G_i son abelianos. Entonces, del lema (1.1)(3) se tiene que $[G_{i+1}, G_{i+1}] \subseteq G_i$, y así

$$\begin{aligned}
G^{(1)} &:= [G, G] = [G_n, G_n] \subseteq G_{n-1} \\
G^{(2)} &:= [G^{(1)}, G^{(1)}] \subseteq [G_{n-1}, G_{n-1}] \subseteq G_{n-2} \\
&\vdots \\
G^{(n)} &:= [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}] \subseteq [G_1, G_1] \subseteq G_0 = \{e\}
\end{aligned}$$

Es decir, $G^{(n)} = \{e\}$. □

Teorema 1.5. *Sea G un grupo. Entonces,*
(1) Si $H \subseteq G$ es un subgrupo y G es soluble, entonces H es soluble.
(2) Si $H \lhd G$ y G es soluble, entonces G/H es soluble.
(3) Si $H \lhd G$ es tal que H y G/H son solubles, entonces G es soluble.

Prueba. (1) Por hipótesis tenemos que G es soluble, entonces $G^{(n)} = \{e\}$ por teorema anterior, y como $H \subseteq G$ entonces $H^{(n)} \subseteq G^{(n)} = \{e\}$.
Así $G^{(n)} = \{e\}$, por lo tanto soluble.
(2) Sea $\pi : G \longrightarrow G/H$ el homomorfismo canónico y

$$\{e\} = g^{(n)} \subseteq G^{(n-1)} \subseteq G^{(n-2)} \subseteq \cdots G^{(1)} \subseteq G^{(0)} = G$$

una cadena de subgrupos normales de G por el hecho de ser soluble. Entonces

$$\{e'\} = \pi(\{e\}) = \pi(G^{(n)}) \subseteq \pi(G^{(n-1)}) \subseteq \cdots \subseteq \pi(G^{(1)}) \subseteq \pi(G^{(0)}) = \pi(G) = G/H \qquad (1.3)$$

Y como π es un homomorfismo se tiene que; $\pi(G^{(i)}) \triangleleft \pi(G^{(i-1)})$, pues $G^{(i)} \triangleleft G^{(i-1)}$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Además $\pi(G^{(i-1)})/\pi(G^{(i)})$ es abeliano, porque es un cociente de $G^{(i-1)}/G^{(i)}$. Por lo tanto G/H es soluble.
(3) Sean H y G/H solubles, entonces existe en:
- H una cadena de subgrupos normales

$$\{e\} = H^{(m)} \subseteq H^{(m-1)} \subseteq \cdots \subseteq H^{(1)} \subseteq H^{(0)} = H$$

tal que $H^{(j)} \triangleleft H^{(j-1)}$ y $H^{(j)}/H^{(j+1)}$ abeliano para $j = 1, 2, \ldots, m$.
- G/H se pueden tomar los subgrupos normales de (1.3) de manera que:

$$\begin{aligned}
G'_0 &= \pi(G^{(0)}) = \pi(G) = G/H \\
G'_1 &= \pi(G^{(1)}) \\
G'_2 &= \pi(G^{(2)}) \\
&\vdots \\
G'_{n-1} &= \pi(G^{(n-1)}) \\
G'_n &= \pi(G^{(n)}) = \pi(\{e\}) = \{e'\}
\end{aligned}$$

Así la cadena de subgrupos normales de G/H esta dado por:

$$\{e'\} = G'_n \subseteq G'_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq G'_1 \subseteq G'_0 = G/H$$

tal que $G'_i \triangleleft G'_{i-1}$ y G'_i/G'_{i+1} abeliano para $i = 1, 2, \ldots, n$.
Sea $G_i := \pi^{-1}(G'_i)$. Entonces, G_i es normal en G_{i-1} y $G_i/G_{i+1} = G^{(i)}/G^{(i+1)}$.
Por tanto la cadena $\{e\} = H^{(m)} \subseteq H^{(m-1)} \subseteq \cdots \subseteq H^{(1)} \subseteq H^{(0)} = H = \pi^{-1}(\{e'\}) \subseteq G_1 \subseteq \cdots \subseteq G_{n-1} \subseteq G_n = G$ es una serie normal de factores abelianos. En conclusión, G es soluble. $\square$

1.4. Álgebra Lineal

Los espacios vectoriales con los que se trabajaran en el presente proyecto serán complejos y todos de dimensión finita.

Definición 1.14. *La traza de una matriz cuadrada $A = (a_{ij})_{n\times n}$ esta definida como $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ y es denotado por $Tr(A)$. Además se cumple las siguientes propiedades:*
1. $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$

2. $Tr(kA) = kTr(A)$

3. $Tr(AB) = Tr(BA)$

Definición 1.15. *Diremos que dos matrices* $n \times n$ A *y* B *son semejantes si existe una matriz* $n \times n$ *inversible* P *tal que* $A = P^{-1}BP$*.*

Definición 1.16 (Transformación Lineal)**.** *Una transformación lineal de un espacio vectorial* V *en otro espacio vectorial* W *es una aplicación* $T : V \longrightarrow W$ *tal que:*

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v),$$

para cualquier $u, v \in V$ *y* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$*.*

Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal de V en W. Sea $\mathbb{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V y $\mathbb{D} = \{u_1, u_2, \ldots u_m\}$ una base de W. Como $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)$ son elementos de W, podemos escribir:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots + a_{m1}u_m \\ T(v_2) &= a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{m2}u_m \\ &\vdots \\ T(v_n) &= a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \cdots + a_{mn}u_m \end{aligned}$$

Una representación matricial de T en relación a las bases $\mathbb{B}$ y $\mathbb{D}$ esta definida como:

$$[T]_{\mathbb{D}}^{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

En el caso particular en que $V = W$ y $\mathbb{B} = \mathbb{D}$ se define de la misma forma, y denotamos la representación matricial de $T : V \longrightarrow V$ con relación a la base $\mathbb{B}$ por $[T]_{\mathbb{B}}$.

Definición 1.17. *Sean* $S, T : V \longrightarrow W$ *transformaciones lineales, definimos:*

1. $S + T : V \longrightarrow W$ *por* $(S + T)(v) = S(v) + T(v)$*, para todo* $v \in V$*.*

2. $\lambda S : V \longrightarrow W$ *por* $(\lambda S)(v) = \lambda S(v)$*, para todo* $v \in V$ *y* $\lambda \in \mathbb{C}$*.*

3. Si $I : V \longrightarrow V$ *el operador identidad de* V*, es decir,* $I(v) = v$ *para todo* $v \in V$*. Tenemos que* $[I]_{\mathbb{B}} = I$*, donde* $n = dimV$*.*

Definición 1.18. *Si* V *es un espacio vectorial de dimensión* n *y* $\mathbb{B}$ *una base de* V*. Definimos la traza del operador* $T : V \longrightarrow V$ *de la siguiente manera:*

$$Tr(T) = Tr([T]_{\mathbb{B}}).$$

Definición 1.19. *Si V y W son subespacios vectoriales sobre los complejos. Diremos que una transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ es un isomorfismo si T es inyectiva y sobreyectiva.*

Si $T : V \longrightarrow W$ es un isomorfismo, entonces $T^{-1} : W \longrightarrow V$ lo es también. Denotamos por $GL(V)$ al conjunto de los operadores lineales biyectivos de V.

***Observación* 3.** *Se puede apreciar dos grupos:*
1. $GL_n(\mathbb{C})$, unido al producto de matrices, es un grupo.
2. $GL(V)$, unido a la composición de funciones, es un grupo.

Si n es la dimensión de V y fijando una base $\mathbb{B}$ de V, se tiene $[T]_{\mathbb{B}}$ una forma matricial de la transformación T con respecto a la base $\mathbb{B}$. Una aplicación

$$\begin{aligned} f : GL(V) &\longrightarrow GL(\mathbb{C}) \\ T &\longmapsto [T]_{\mathbb{B}} \end{aligned}$$

es un *isomorfismo*.

Definición 1.20. *Si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal. Definimos el núcleo e imagen de T de la siguiente forma:*

$$Ker(T) = \{x \in V; T(x) = 0_W\} \qquad y \qquad Im(T) = \{T(x) \in W; w \in V\}.$$

Además se tiene que $Ker(T)$ es subespacio de V y $Im(T)$ es subespacios de W.

Definición 1.21. *Si V es un espacio vectorial y $T : V \longrightarrow V$ un operador lineal. Diremos que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un autovalor de T si existe $v \neq 0_V$ tal que $T(v) = \lambda v$. En este caso, diremos que v es un autovector de T, asociado al autovalor λ.*

Definición 1.22. *Si $T : V \longrightarrow V$ es un operador lineal y $\mathbb{B}$ una base de V. Definimos al polinomio característico del operador T como:*

$$p(x) = det([T]_{\mathbb{B}} - xI).$$

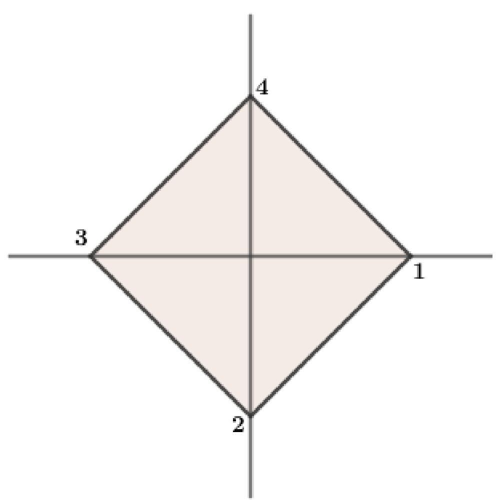
2

Representaciones Lineales de Grupos Finitos

En el campo matemático de las representaciones, éstas describen grupos abstractos en términos de transformaciones lineales de espacios vectoriales, en particular, pueden ser utilizados para representar los elementos del grupo como matrices de manera que la operación de grupo puede ser representada por la multiplicación de matrices.

Las representaciones son muy importantes porque permiten que muchos de los problemas de la teoría de Grupos se reduzcan a problemas de Álgebra Lineal, que es más entendible además de brindar información detallada acerca del grupo.

Ejemplo 2.1. *Si definimos el grupo diédrico de orden 8 como el grupo D_4 de las simetrías de un cuadrado, tendremos una representación más clara y manejable que podemos incluso tomar como definición - si observamos que es isomorfo al subgrupo siguiente del grupo Σ_4 de las permutaciones de 4 elementos (que podemos identificar con los cuatro vértices del cuadrado).*



$$D_4 = \{1, (1, 2, 3, 4), (1, 3)(2, 4), (4, 3, 2, 1), (1, 3), (2, 4), (1, 2)(3, 4), (1, 4)(2, 3)\}$$

Las tres primeras (sin contar a 1) se corresponden con los giros de 90^o, 180^o y 270^o, las dos siguientes son las simetrías respecto de las diagonales y las dos últimas son simetrías respecto de las mediatrices de los lados. Por ejemplo, a partir de esta representación de D_4 es fácil ver que, si llamamos $\sigma = (1,2,3,4)$ y $\tau = (1,3)$, entonces:

$$D_4 = \{1, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \sigma^3\tau\} =< \sigma, \tau >$$

Además, el producto en D_4 puede calcularse a partir de estas expresiones sin más que tener en cuenta que $\sigma^4 = \tau^2 = 1$ y que $\tau\sigma = \sigma^{-1}\tau$.

Sin embargo, la interpretación de D_4 como el grupo de las simetrías de un cuadrado nos proporciona otra representación concreta del mismo, como un grupo de matrices. En efecto, podemos identificar cada simetría del cuadrado con una aplicación lineal en $\mathbb{R}^2$ y esta a su vez con su matríz en la base canónica.

2.1. Definiciones Básicas

Una representación de un grupo G sobre un espacio vectorial V es un modo de asociar a los elementos de G transformaciones lineales invertibles $V \to V$. Por lo menos cuando se trabaja con los espacios sobre $\mathbb{C}$, hay una teoría elegante que clasifica todas las representaciones de un grupo finito fijo.

Definición 2.1 (Representaciones Lineales)**.** *Si G es un grupo finito y V un espacio vectorial. Una **representación** de G en V es un homomorfísmo*

$$\varphi : G \longrightarrow GL(V).$$

La definición significa que para todo elemento $g \in G$ se le asigna una tranformación lineal invertible

$$\varphi_g : V \longrightarrow V.$$

Ejemplo 2.2. *El giro de 90^o en $\mathbb{R}^2$ y la simetría respecto al eje Y son, respectivamente, las aplicaciones lineales determinadas por las matrices*

$$\sigma = \begin{bmatrix} cos\frac{2\pi}{4} & sen\frac{2\pi}{4} \\ -sen\frac{2\pi}{4} & cos\frac{2\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \tau = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se comprueba fácilmente que las matrices $1, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \sigma^3\tau$ son distintas dos a dos, así como satisfacen las relaciones $\sigma^4 = \tau^2 = 1$, $\tau\sigma = \sigma^{-1}\tau$, de donde se sigue que las ocho matrices son el subgrupo generado por σ y τ, y que sus elementos son todas las simetrías del cuadrado (la identidad, los tres giros y las cuatro simetrías propiamente dichas). Esto nos da

una representación alternativa de D_4 como grupo de matrices (como el subgrupo generado por las matrices σ y τ).
Una forma de comprobar que D_4 como grupo de permutaciones es isomorfo a D_4 como grupos de matrices es observar que si identificamos el conjunto $\{1,2,3,4\}$ con los puntos de $X = \{(1,0),(0,-1),(-1,0),(0,1)\}$ (de acuerdo con la numeración de la figura), entonces, las permutaciones σ y τ son las restricciones a X de los automorfismos de $\mathbb{R}^2$ determinados por σ y τ, por lo que, en general, si identificamos cada matriz de D_4 con el automorfismo que determina en $\mathbb{R}^2$ (respecto de la base canónica), un isomorfismo entre D_4 como grupo de automorfismos y D_4 como grupo de permutaciones viene dado por la restricción $\phi \longmapsto \phi|_X$.

Ejemplo 2.3. *Si G es un grupo finito, en él se puede definir una representación de grado 1, es decir un homomorfismo*

$$\begin{aligned}\varphi : G &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ g &\longmapsto \varphi(g) = \varphi_g.\end{aligned}$$

Observe que los elementos φ_g son raíces de la unidad. En particular, $|\varphi_g| = 1$, para todo $g \in G$. En efecto, tomando $V = \mathbb{C}$, tenemos $GL(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$. Además, tenemos que

$$(\varphi_g)^{|G|} = \varphi(g^{|G|}) = \varphi(1) = 1$$

o sea, tomando $n = |G|$, tenemos $(\varphi_g)^n = 1$, para todo $g \in G$. Asimismo $|\varphi_g|^n = |\varphi_g^n| = 1$, es decir $|\varphi_g| = 1$.
Considerando $\varphi_g = 1$, para todo $g \in G$, ésta representación es llamada representación unitaria o trivial de G.

También podemos considerar algunos ejemplos más sobre representaciones de grado uno:

Ejemplo 2.4. *Sea $\varphi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ definida por $\varphi([m]) = (-1)^m$, es una representación.*

Ejemplo 2.5. *Sea $\varphi : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ definida por $\varphi([m]) = i^m$, es una representación.*

Ejemplo 2.6. *De manera general podemos definir $\varphi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ como $\varphi([m]) = e^{2\pi i m/n}$, representaciones para los grupos $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, con $n \in \mathbb{N}$.*

Una forma equivalente de definir una representación es usando acciones lineales, ésto es posible por el teorema siguiente que nos dice que estudiar las representaciones lineales de un grupo G en un espacio vectorial V, es equivalente a estudiar las acciones lineales de G en V. Antes de enunciar el teorema se debe definir una acción lineal:

Definición 2.2 (Acciones lineales.)**.** *Supongamos ahora que G es cualquier grupo y que se tiene una acción de G en un espacio vectorial V, de dimensión finita, es decir una función $* : G \times V \longrightarrow V$ que satisface los axiomas:*

i) *$e * v = v$, para todo $v \in V$ y donde e es el neutro de G.*

ii) *$(\sigma\tau) * v = \sigma * (\tau * v)$, para todo $\sigma, \tau \in G$ y $v \in V$.*

Y que además es compatible en las operaciones del espacio vectorial V, es decir:

iii) *$\sigma * (v + w) = \sigma * v + \sigma * w$, para $\sigma \in G$ y $v, w \in V$.*

iv) *$\sigma * (\lambda v) = \lambda(\sigma * v)$, para $\lambda \in K$, $v \in V$ y $\sigma \in G$ (K un cuerpo).*

Teorema 2.1. *Existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de acciones lineales de un grupo G en un $K-$espacio vectorial V y el conjunto de homomorfismos de G en $GL(V)$.*

Prueba. Supongamos primero que se tiene una acción lineal

$$* : G \times V \longrightarrow V$$

y usando esta acción definamos la función

$$\varphi : G \longrightarrow GL(V)$$

como sigue: para $\sigma \in G$, $\varphi(\sigma) \in GL(V)$ es el operador lineal $\varphi(\sigma) : V \longrightarrow V$ dado por:

$$\varphi(\sigma)(v) := \sigma * v$$

Se debe tomar en cuenta que $\varphi(\sigma) : V \longrightarrow V$ es biyectiva, por la forma en la que se definió y también se puede demostrar que es lineal. Para probar la linealidad observemos que la función $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ es un homeomorfismo de grupos ya que si $\sigma, \tau \in G$, entonces para todo $v \in V$:

$$\varphi(\sigma\tau)v = (\sigma\tau) * v = \sigma * (\tau * v) = \sigma * (\varphi(\tau)v) = \varphi(\sigma) \circ (\varphi(\tau)v) = (\varphi(\sigma) \circ \varphi(\tau))v$$

por lo que $\varphi(\sigma\tau) = \varphi(\sigma) \circ \varphi(\tau)$.

Recíprocamente, supongamos ahora que se tiene un homeomorfismo de grupos

$$\varphi : G \longrightarrow GL(V)$$

y definamos

$$* : G \times V \longrightarrow V$$

mediante $\sigma * v := \varphi(\sigma)(v)$. La función $*$ es una acción lineal ya que:

i) Si $\sigma = e$ es el neutro de G, entonces

$$e * v := \varphi(e)(v) =: id_V(v) = v, \text{ para todo } v \in V.$$

ii) Si $\sigma, \tau \in G$ y $v \in V$, entonces

$$(\sigma\tau) * v := \varphi(\sigma\tau)(v) = [\varphi(\sigma) \circ \varphi(\tau)]v = \varphi(\sigma)(\varphi(\tau)v) = \varphi(\sigma)(\tau * v) = \sigma * (\tau * v),$$

y además es lineal.

iii) Para $\sigma \in G$ y $\tau, w \in V$.

$$\sigma * (v + w) = \varphi(\sigma)(v + w) = \varphi(\sigma)v + \varphi(\sigma)w = \sigma * v + \sigma * w.$$

iv) Para $\lambda \in K$, $v \in V$ y $\sigma \in G$.

$$\sigma * (\lambda v) = \varphi(\sigma)(\lambda v) = \lambda(\varphi(\sigma)v) = \lambda(\sigma * v).$$

□

En adelante, nos restringiremos a estudiar representaciones de grupos finitos en espacios vectoriales complejos y de dimensión finita. A la dimensión del $\mathbb{C}$-espacio vectorial V la llamaremos el grado de la representación $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ y a V lo llamaremos el espacio de la representación; algunas veces también diremos que V es la representación de G.
Para comenzar a estudiar las representaciones de un grupo finito, conviene ponernos de acuerdo en cuando dos de ellas son la misma, para tal efecto se estudia la equivalencia entre representaciones.

Definición 2.3 (Equivalencia). *Si $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ y $\psi : G \longrightarrow GL(W)$ son dos representaciones lineales de G, se dicen que son equivalentes si existe un isomorfismo $T : V \longrightarrow W$ tal que $\psi_g = T\varphi_g T^{-1}$, para todo $g \in G$, es decir:*

$$\psi_g \circ T = T \circ \varphi_g$$

para todo $g \in G$.
En este caso se escribe $\varphi \sim \psi$. Gráficamente tenemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi_g"] \arrow[d, "T"'] & V \arrow[d, "T"] \\ W \arrow[r, "\psi_g"'] & W \end{tikzcd}$$

lo que significa que cualquiera de las formas de pasar de la parte superior izquierda a la esquina inferior derecha del diagrama dan la misma respuesta.

Ejemplo 2.7. *Definamos $\varphi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow GL_2\mathbb{C}$ por:*

$$\varphi[m] = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi m}{n}\right) & -\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi m}{n}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi m}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi m}{n}\right) \end{bmatrix}$$

La cual es la matriz de rotación por $2\pi m/n$ y $\psi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow GL_2\mathbb{C}$ por:

$$\psi[m] = \begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi mi}{n}} & 0 \\ \\ 0 & e^{\frac{-2\pi mi}{n}} \end{bmatrix}$$

Entonces afirmamos que $\varphi \sim \psi$. En efecto:

$$A = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} \qquad y \qquad A^{-1} = \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{bmatrix}$$

Realizando los cálculos necesarios, mostraremos lo buscado:

$$\begin{aligned} A^{-1}\varphi[m]A &= \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi m}{n}\right) & -\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi m}{n}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi m}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi m}{n}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi mi}{n}} & ie^{\frac{2\pi mi}{n}} \\ \\ -e^{\frac{-2\pi mi}{n}} & ie^{\frac{-2\pi mi}{n}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} 2ie^{\frac{2\pi mi}{n}} & 0 \\ \\ 0 & 2ie^{\frac{-2\pi mi}{n}} \end{bmatrix} \\ &= \psi[m] \end{aligned}$$

Por lo tanto $\varphi \sim \psi$.

Ejemplo 2.8 (Representación estándar de S_n)**.** *Definiendo $\varphi : S_n \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ sobre la base estándar por $\varphi_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$. Uno obtiene la matriz para φ_σ permutando las filas de la matriz de identidad de acuerdo con σ. Entonces, por ejemplo, cuando $n = 3$ tenemos:*

$$\varphi(12) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \varphi(123) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Note que en el ejemplo (2.7)

$$\varphi(e_1 + e_2 + \ldots + e_n) = e_{\sigma(1)} + e_{\sigma(2)} + \ldots + e_{\sigma(n)} = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$$

donde se mantiene la última igualdad ya que σ es una permutación y la adición es conmutativa. Por lo tanto, $\mathbb{C}(e_1+e_2+\ldots+e_n)$ es invariante bajo todas las φ_σ en S_n. Esto lleva a la siguiente definición.

Definición 2.4 (Sub-Espacio G-invariante)**.** *Sea $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ una representación. Un subespacio $W \leqslant V$ es G-invariante, si para todo $g \in G$ y $w \in W$ tenemos que $\varphi_g w \in W$.*

Definición 2.5 (Suma directa de representaciones)**.** *Supongamos que se dan las siguientes representaciones:*

$$\varphi^{(1)} : G \longrightarrow GL(V_1) \ y \ \varphi^{(2)} : G \longrightarrow GL(V_2)$$

Entonces la suma directa (externa) se define como:

$$\begin{gathered}\varphi^{(1)} \oplus \ \varphi^{(2)} : G \longrightarrow GL(V_1 \oplus V_2) \\ \left(\varphi^{(1)} \oplus \ \varphi^{(2)}\right)_g (v_1, v_2) = \left(\varphi_g^{(1)}(v_1), \varphi_g^{(2)}(v_2)\right)\end{gathered}$$

Las sumas directas también se las puede expresar en términos de matrices. Supongamos que:

$$\varphi^{(1)} : G \longrightarrow GL_m(\mathbb{C}) \ y \ \varphi^{(2)} : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$$

sean representaciones, entonces:

$$\varphi^{(1)} \oplus \ \varphi^{(2)} : G \longrightarrow GL_{m+n}(\mathbb{C})$$

tiene la forma de matriz de bloques:

$$\left(\varphi^{(1)} \oplus \ \varphi^{(2)}\right)_g = \begin{bmatrix} \varphi_g^{(1)} & 0 \\ 0 & \varphi_g^{(2)} \end{bmatrix}$$

Definición 2.6 (Sub-representación)**.** *Si $W \leq V$ es G-invariante bajo φ, para cada $\sigma \in G$ la restricción $\varphi(\sigma)|_W$ es un isomorfismo de W en si mismo (ya que es inyectivo y W es de dimensión finita). Se sigue que la restricción de φ a W es una representación de G en W,*

$$\varphi \,|_W : G \longrightarrow GL(W)$$

y se dice que $\varphi|_W$ es una subrepresentación.

Definición 2.7 (Representación de Irreducibles)**.** *Una representación distinto de cero*

$$\varphi : G \longrightarrow GL(V)$$

de un grupo G se dice que es irreducible, si los únicos subespacios G-invariantes de V son $\{0\}$ y V.

Ejemplo 2.9. *Toda representación de grado 1 es irreducible, ya que los únicos subespacios G-invariantes posibles son el $\{0\}$ y el total.*

Nuestra meta futura es mostrar que cada representación es equivalente a una suma directa de representaciones irreducibles. Vamos a definir algunos de los términos para este efecto.

Definición 2.8 (Completamente Reducible). *Sea G un grupo, una representación*

$$\varphi : G \longrightarrow GL(V)$$

se dice que es completamente reducible si $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_n$, donde V_i es subespacio G-invariante y $\varphi|_{V_i}$ es irreducible para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.
De manera equivalente φ es completamente reducible si $\varphi \sim \varphi^{(1)} \oplus \varphi^{(2)} \oplus \ldots \oplus \varphi^{(n)}$, donde $\varphi^{(i)}$ es irreducible, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.

Definición 2.9 (Representación Descomponible). *Una representación φ distinto de cero de un grupo G es descomponible si $V = V_1 \oplus V_2$ con V_1, V_2 distintos de cero, además de ser subespacios G-invariantes. De lo contrario V se llama indescomponible.*

Reducibilidad Completa es el análogo de diagonalizar en teoría de representaciones. Nuestro objetivo es entonces mostrar que cualquier representación de un grupo finito es completamente reducible, para ello se muestra que cualquier representación es irreducible o descomponible y luego proceder por inducción sobre el grado.
En primer lugar tenemos que mostrar que estas nociones (irreducible y descomponible) solo dependen de la clase de equivalencia de una representación.

Lema 2.1. *Si $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ es una representación finita equivalente a una representación descomponible, entonces φ es descomponible.*

Prueba. Sea $\psi : G \longrightarrow GL(W)$ una representación descomponible equivalente a φ, entonces existe un isomorfismo de espacios vectoriales $T : V \longrightarrow W$ tal que:

$$\varphi_g = T^{-1}\psi_g T$$

Y como ψ descomponible, existen W_1, W_2 subespacios G-invariantes en W, distintos de cero, tal que $W = W_1 \oplus W_2$. De donde la transformación T queda definida del espacio vectorial V al espacio vectorial $W = (W_1 \oplus W_2)$, con inversa $T^{-1} : (W_1 \oplus W_2) \longrightarrow V$, mediante la cual se puede definir:

$$V_1 = T^{-1}(W_1) \qquad y \qquad V_2 = T^{-1}(W_2)$$

Por lo tanto $V = V_1 \oplus V_2$, en efecto:
i) Para todo $v \in V$ se tiene que si:

$$\begin{aligned}
v \in V_1 \cap V_2 &\Rightarrow v \in T^{-1}(W_1) \cap T^{-1}(W_2) && \text{Por definición de } V_1 \text{ y } V_2. \\
&\Rightarrow v \in T^{-1}(W_1) \wedge v \in T^{-1}(W_2) && \text{Por definición de intersección.} \\
&\Rightarrow Tv \in W_1 \wedge Tv \in W_2 && \text{Por definición de preimagen.} \\
&\Rightarrow Tv \in W_1 \cap W_2 = \{0\} && \text{Por definición de intersección y } W = W_1 \oplus W_2. \\
&\Rightarrow v = 0 && \text{Pues T es isomorfismo.}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.
ii) Por otro lado si $v \in V$, entonces

$$Tv = w_1 + w_2.$$

Luego $Tv = w_1 + w_2$ con $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$, donde:

$$v = T^{-1}Tv = T^{-1}(w_1 + w_2) = T^{-1}w_1 + T^{-1}w_2 \in V_1 + V_2.$$

Por lo tanto $V = V_1 \oplus V_2$.
Además podemos mostrar que V_1 y V_2 son subespacios G-invariantes, para esto supongamos que $v \in V_i$ entonces

$$\varphi_g v = T^{-1}\psi_g T v, \forall g \in G.$$

Como $Tv \in W_i$, entonces $\psi_g Tv \in W_i$ puesto que W_i es G-invariante por lo tanto se tiene: $\varphi_g = T^{-1}\psi_g Tv \in T^{-1}(W_i) = V_i$ como se pretendía. □

Tenemos resultados análogos al anterior para otro tipo de representaciones.

Lema 2.2. *Si $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ es una representación equivalente a una representación irreducible, entonces φ es irreducible.*

Prueba. Considerando la representación $\psi : G \longrightarrow Gl(W)$ irreducible equivalente a la representación $\varphi :\longrightarrow GL(V)$, entonces existe $T : V \longrightarrow W$ un isomorfismo que satisface $\varphi_g = T^{-1}\psi_g T$, para todo $g \in G$. Es decir hace que el diagrama siguiente conmute:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi_g"] \arrow[d, "T"'] & V \arrow[d, "T"] \\ W \arrow[r, "\psi_g"'] & W \end{tikzcd}$$

Además como ψ es irreducible, los únicos subespacios G-invariantes de W bajo ψ son los triviales; es decir $\{0\}$ y W.
Para probar que φ es irreducible se debe mostrar que los únicos subespacios G-invariantes de V son $\{0\}$ y V. Sea U G-invariante en V, entonces $T(U) \leq W$ es G-invariante. Como W es irreducible, $T(U) = \{0\}$ o $T(U) = W$. De ahí $U = \{0\}$ o $U = V$. □

Lema 2.3. *Si $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ es una representación equivalente a una representación completamente reducible, entonces φ es completamente reducible.*

Prueba. Considerando la representación $\psi : G \longrightarrow GL(W)$, una representación completamente reducible equivalente a φ. Entonces existen subespacios W_i G-invariantes bajo ψ tal que $W = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n$ y $\psi|_{W_i}$ irreducible para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ con $W_i \cap W_j = \{0\}$

para $i \neq j$.
Como $\psi \sim \varphi$ se pueden formar subespacios

$$V_1 = T^{-1}(W_1), V_2 = T^{-1}(W_2), \ldots, V_n = T^{-1}(W_n)$$

tal que: $V = V_1 \oplus V_2 \oplus, \ldots, V_n$. En efecto:
i) Si $v \in V_i \cap V_j$, con $i \neq j$, entonces $Tv \in W_i \cap W_j = \{0\}$ además T es inyectivo por lo tanto $v = 0$ y $V_i \cap V_j = \{0\}$ para $i \neq j$.
ii) Ahora si $v \in V$, entonces $Tv = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$ con $w_i \in W_i$, luego

$$v = T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2) + \cdots + T^{-1}(w_n) \in V_1 + V_2 + \cdots + V_n.$$

Con i) y ii) se demuestra que:

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$$

como se quería.
Por otro lado $\psi|_{W_i}$ es irreducible y $\psi \sim \varphi$, entonces $\varphi|_{V_i}$ también es un irreducible por el lema (2.2). Con esto se concluye la prueba del lema. □

2.2. Teorema de Maschke y Reducibilidad Completa

A fin de efectuar descomposiciones en suma directa de representaciones, aprovecharemos las herramientas de productos internos y descomposiciones ortogonales.

Definición 2.10 (Representación Unitaria)**.** *Sea V un espacio con producto interno, la representación $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ se dice que es unitaria si φ_g es unitario para todo $g \in G$, es decir:*

$$\langle \varphi_g(v), \varphi_g(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

para todo $v, w \in V$.

Un hecho crucial, que hace a las representaciones unitarias tan útiles, es que cada representación unitaria indescomponible es irreducible como lo muestra la siguiente proposición.

Teorema 2.2. *Sea $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ una representación unitaria de un grupo, entonces φ es irreducible o descomponible.*

Prueba. Supongamos que φ no es irreducible, entonces existe al menos un subespacio propio W G-invariante diferente del vacío de V, donde su complemento ortogonal $W^{\perp}$ es también diferente del vacío y $V = W \oplus W^{\perp}$ por lo tanto queda demostrar que $W^{\perp}$ es G-invariante.

Veamos, si $v \in W^{\perp}$ y $w \in W$, entonces:

$$
\begin{aligned}
\langle \varphi_g(v), w\rangle &= \langle \varphi_{g^{-1}}\varphi_g(v), \varphi_{g^{-1}}(w)\rangle && \text{Puesto que } \varphi \text{ es unitario.}\\
&= \langle v, \varphi_{g^{-1}}(w)\rangle && \text{Puesto que } \varphi_{g^{-1}}\varphi_g = \varphi_1 = I.\\
&= 0 && \text{Puesto que } \varphi_{g^{-1}}w \in W..
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\varphi_g(v) \in W^{\perp}$, para todo $g \in G$ y $v \in W^{\perp}$, en consecuencia $W^{\perp}$ es G-invariante. Por lo tanto φ es descomponible. □

Resulta que para los grupos finitos toda representación es equivalente a una representación unitaria, como lo señala la siguiente proposición.

Teorema 2.3. *Cada representación de un grupo finito G es equivalente a una representación unitaria.*

Prueba. Sea $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ una representación, donde $dimV = n$. Elijamos una base $\mathbb{B}$ para V, y sea $T : V \longrightarrow \mathbb{C}^n$ el isomorfismo tomando coordenadas respecto a $\mathbb{B}$. Entonces $\rho_g = T\varphi_g T^{-1}$, para $g \in G$, sugiere una representación $\rho : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ equivalente a φ. Sea $< \cdot, \cdot >$ el producto interno estándar en $\mathbb{C}^n$.
Nosotros definiremos un nuevo producto interno $\prec \cdot, \cdot \succ$ en $\mathbb{C}^n$ de la siguiente manera:

$$\prec v, w \succ = \sum_{g\in G} \langle \rho_g v, \rho_g w\rangle.$$

Esta suma sobre G, por supuesto requiere que G sea finito, Puede ser visto como un proceso de "suavizado".
Efectivamente podemos probar que lo anterior es un producto interno.

i)

$$
\begin{aligned}
\prec c_1v_1 + c_2v_2, w \succ &= \sum_{g\in G} \langle \rho_g(c_1v_1 + c_2v_2), \rho_g w\rangle\\
&= \sum_{g\in G} \left[c_1\langle \rho_g v_1, \rho_g w\rangle + c_2\langle \rho_g v_2, \rho_g w\rangle\right]\\
&= c_1 \sum_{g\in G} \langle \rho_g v_1, \rho_g w\rangle + c_2 \sum_{g\in G} \langle \rho_g v_2, \rho_g w\rangle\\
&= c_1 \prec v_1, w \succ + c_2 \prec v_2, w \succ
\end{aligned}
$$

ii)

$$
\begin{aligned}
\prec w, v \succ &= \sum_{g\in G} \langle \rho_g w, \rho_g v\rangle\\
&= \sum_{g\in G} \overline{\langle \rho_g v, \rho_g w\rangle}\\
&= \overline{\prec v, w \succ}
\end{aligned}
$$

iii) Finalmente observemos que:

$$\prec v, v \succ = \sum_{g \in G} \big\langle \rho_g v, \rho_g v \big\rangle \geqslant 0,$$

pues cada término $\big\langle \rho_g v, \rho_g v \big\rangle \geqslant 0$.

Si $\prec v, v \succ = 0$, entonces:

$$0 = \sum_{g \in G} \big\langle \rho_g v, \rho_g v \big\rangle$$

lo cual implica que $\big\langle \rho_g v, \rho_g v \big\rangle = 0$, para todo $g \in G$, ya que estamos sumando números no negativos. Así $0 = \big\langle \rho_g v, \rho_g v \big\rangle = \langle v, v \rangle$ y así $v = 0$, por lo tanto $\prec \cdot, \cdot \succ$ es un producto interno. Para verificar que la representación es unitaria con respecto a este producto interior calculemos: $\prec \rho_h v, \rho_h w \succ = \sum_{g \in G} \big\langle \rho_g \rho_h v, \rho_g \rho_h w \big\rangle = \sum_{g \in G} \big\langle \rho_{gh} v, \rho_{gh} w \big\rangle$.
Luego se puede realizar un cambio de variable, haciendo $x = gh$. Como g se extiende sobre todo G. x se extiende sobre todos los elementos de G ya que si $k \in G$, entonces $g = kh^{-1}$, $x = k$.
Por lo tanto

$$\prec \rho_h v, \rho_h w \succ = \sum_{x \in G} \langle \rho_x v, \rho_x w \rangle = \prec v, w \succ$$

tal como buscábamos demostrar. □

El siguiente teorema es el resultado central de este capítulo, su prueba es bastante análoga a la prueba de la existencia de una descomposición en factores primos de un entero o de una factorización de polinomios en irreducibles.

Corolario 2.1. *Sea $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ una representación diferente de cero de un grupo finito, entonces φ es irreducible o descomponible.*

Prueba. Por el teorema (**2.2**) φ es equivalente a una representación unitaria ρ y por el teorema (**2.1**) tenemos que ρ es bien irreducible o descomponible. De los lemas (**2.1**) y (**2.2**) afirmamos que φ es bien irreducible o descomponible, como queríamos demostrar. □

Teorema 2.4 (Maschke)**.** *Cada representación de un grupo finito es completamente reducible. Es decir, para cada representación $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$, se tiene:*

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_n,$$

donde V_i es subespacio G-invariante y $\varphi|_{V_i}$ es irreducible para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Prueba. Sea $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ una representación de un grupo finito G. La prueba se realizará por inducción sobre el grado de φ, es decir sobre la $dimV$.
Así, si $dimV = 1$, entonces φ es irreducible pues V no tiene subespacios propios distintos de cero.

Ahora asumamos como cierto la afirmación para cuando $DimV \leqslant n$ (H.I.).
Sea $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ una representación con $dimV = n+1$ si φ es irreducible no hay nada más que mostrar. De lo contrario φ es descomponible por el corolario (**2.1**) y así $V = V_1 \oplus V_2$ donde $\{e\} \neq V_1, V_2$ son subespacios G-invariantes.

Además tenemos que $dimV_1, dimV_2 < dimV$ por hipótesis de inducción $\varphi \mid_{V_1}$ y $\varphi \mid_{V_2}$ son completamente reducibles, por lo tanto $V_1 = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_s$ y $V_2 = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_r$ donde los U_i, W_j son G-invariantes y las subrepresentaciones $\varphi \mid_{U_i}$ y $\varphi \mid_{W_j}$ son irreducibles para $1 \leqslant i \leqslant s$, $1 \leqslant j \leqslant r$. Entonces

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_s \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_r$$

y por lo tanto φ es completamente reducible. □

3

Las Relaciones de Ortogonalidad

3.1. Morfismo de Representaciones

Uno de los principios de la matemática moderna son las relaciones entre los objetos matemáticos, es así que se debe enfatizar cuando dos objetos se pueden considerar iguales o similares, teniendo en cuenta ésto, nos volvemos a la noción de “morfismo” entre las representaciones. La idea es que si; $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ es una representación, podemos pensar en elementos de G como escalares a través de $g \cdot v = \varphi_g v$ para $v \in V$.

Un morfismo entre $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ y $\psi : G \longrightarrow GL(W)$ debe ser una transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ tal que $Tgv = gTv$ para todo $g \in G$ y $v \in V$. Formalmente, ésto significa $T\varphi_g v = \psi_g Tv$, para todo $v \in V$. Es decir:

$$T\varphi_g = \psi_g T, \text{ para todo } g \in G.$$

Definición 3.1 (Morfismo)**.** *Si $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ y $\psi : G \longrightarrow GL(W)$ son dos representaciones, un morfismo de φ a ψ es por definición una aplicación lineal $T : V \longrightarrow W$ de tal manera que $T\varphi_g = \psi_g T$, para todo $g \in G$. En otras palabras el diagrama siguiente conmuta para todo $g \in G$*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi_g"] \arrow[d, "T"'] & V \arrow[d, "T"] \\ W \arrow[r, "\psi_g"'] & W \end{tikzcd} .$$

El conjunto de todos los morfismos de φ a ψ se denota como $Hom_G(\varphi, \psi)$. Además se satisface $Hom_G(\varphi, \psi) \subseteq Hom(V, W)$.

***Observación* 4.** *Observe que $T : V \longrightarrow V$ pertenece a $Hom_G(\varphi, \psi)$ si y sólo si $T\varphi_g = \psi_g T$, para todo $g \in G$. Es decir T conmuta (o centraliza) $\varphi(G)$. En particular la aplicación identidad de $I : V \longrightarrow V$ es siempre un elemento de $Hom_G(\varphi, \psi)$.*

Teorema 3.1. *Si $T : V \longrightarrow W$ está en $Hom_G(\varphi, \psi)$, entonces $Ker(T)$ es un subespacio G-invariante de V y $Im(T)$ es un subespacio G-invariante de W.*

Prueba. Sean $v \in Ker(T)$ y $g \in G$, entonces $Tv = 0$ pues $T \in Hom_G(\varphi, \psi)$, Luego $T\varphi_g v = \psi_g Tv = 0$. Por lo tanto $\varphi_g v \in Ker(T)$ por lo que se concluye que $Ker(T)$ es G-invariante en V.
Por otro lado sea $w \in Im(T)$, así existe $v \in V$ tal que; $w = Tv$. Entonces $\psi_g w = \psi_g Tv = T\varphi_g v$, y que $T \in Hom_G(\varphi, \psi)$, de donde $\psi_g w = T\varphi_g v \in Im(T)$. Por lo tanto $Im(T)$ es G-invariante en W. □

El conjunto de morfismos de φ a ψ tiene la estructura adicional de un espacio vectorial como el siguiente teorema revela.

Teorema 3.2. *Si $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ y $\psi : G \longrightarrow GL(W)$ son representaciones de G. Entonces $Hom_G(\varphi, \psi)$ es un subespacio de $Hom(V, W)$.*

Prueba. Sean $T_1, T_2 \in Hom_G(\varphi, \psi)$ y $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, entonces

$$(c_1T_1 + c_2T_2)\varphi_g = c_1T_1\varphi_g + c_2T_2\varphi_g = c_1\psi_gT_1 + c_2\psi_gT_2 = \psi_g(c_1T_1 + c_2, T_2)$$

y por lo tanto $c_1T_1 + c_2, T_2 \in Hom_G(\varphi, \psi)$ como se pretendía. □

Lema 3.1. *Si φ y ψ son representaciones irreducibles de G, y $T \in Hom_G(\varphi, \psi)$. Entonces T es invertible ó $T = 0$.*

Prueba. Sean $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ y $\psi : G \longrightarrow GL(W)$ representaciones, y una transformación lineal $T : V \longrightarrow W \in Hom_G(\varphi, \psi)$. Supongamos que $T \neq 0$, ya que si $T = 0$ no habría nada que mostrar.
Así queda mostrar que T es invertible, así se debe mostrar que T es biyectiva (i.e. T inyectiva y sobreyectiva), en efecto:
i) Por el teorema (**3.1**) tenemos $Ker(T)$ es G-invariante en V y por lo tanto

$$Ker(T) = V \qquad o \qquad Ker(T) = 0. \tag{3.1}$$

Como $T \neq 0$, por lo tanto no se cumple que $Ker(T) = V$ y por (3.1) se tiene que $Ker(T) = 0$, entonces T es inyectiva.
ii) Por otro lado por la teorema (**3.1**) tenemos que $Im(T)$ es G-invariante en W entonces

$$Im(T) = W \qquad o \qquad Im(T) = 0. \tag{3.2}$$

Si $Im(T) = 0$, entonces $T = 0$ que contradice $T \neq 0$. Por lo tanto $Im(T) = W$, es decir T es sobreyectivo.
Así de i) y ii) concluimos que T es biyectiva, luego invertible. □

Teorema 3.3 (Lema de Schur)**.** *Si φ y ψ son representaciones irreducibles de G, y $T \in Hom_G(\varphi, \psi)$. Se cumple que:*

(a) *Si $\varphi \nsim \psi$, entonces $Hom_G(\varphi, \psi) = \{0\}$.*

(b) *Si $\varphi = \psi$, entonces $T = \lambda I$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$ (i.e. es un múltiplo escalar de la identidad).*

Prueba. Para (a) la demostración se realiza por contra-recíproca, es decir supongamos que $Hom_G(\varphi, \psi) \neq 0$, así existe al menos un $T \neq 0$ en $Hom_G(\varphi, \psi)$, entonces por el lema (3.1) T es invertible y así $\varphi \sim \psi$ tal como se quería demostrar.

Para (b) sea λ el valor propio de T. Entonces $\varphi I - T$ no es invertible por la definición de valor propio. Como $I \in Hom_G(\varphi, \varphi)$ $\lambda I - T$ pertenece a $Hom_G(\varphi, \varphi)$. Por el lema (3.1), tenemos que:

$$\lambda I - T = 0.$$

Por lo tanto $T = \lambda I$. □

Corolario 3.1. *Si G es un grupo abeliano, entonces cualquier representación irreducible de G tiene grado uno.*

Prueba. Sea $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ una representación irreducible. Fijemos por el momento $h \in G$, tal que $T = \varphi_h$. Así obtenemos para todo $g \in G$ que:

$$T\varphi_g = \varphi_h \varphi_g = \varphi_{hg} = \varphi_{gh} = \varphi_g \varphi_h = \varphi_g T.$$

Por el lema de Schur esto implica que $\varphi_h = \lambda_h I$ para algún escalar $\lambda_h \in \mathbb{C}$ (donde el subíndice señala la dependencia de h). Sea v un vector distinto de cero en V y $k \in \mathbb{C}$, entonces $\varphi_h(kv) = \lambda_h I(kv) \in \mathbb{C}v$.

Así $\mathbb{C}v$ es un subespacio G-invariante. Luego $V = \mathbb{C}v$ por la irreducibilidad y así $dimV = 1$. □

Corolario 3.2. *Si G es un grupo abeliano finito y $\varphi : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ una representación. Entonces existe una matriz T tal que $T^{-1}\varphi_g T$ es diagonal para todo $g \in G$ (T es independiente de g).*

Prueba. Ya que φ es completamente reducible, tenemos que $\varphi \sim \varphi^{(1)} \oplus ... \oplus \varphi^{(m)}$ donde $\varphi^{(1)}, ..., \varphi^{(m)}$ son irreducibles. Además G es abeliano así el grado de cada $\varphi^{(i)}$ es 1 ($n = m$). Consecuentemente $\varphi_g^{(i)} \in \mathbb{C}^*$ para todo $g \in G$.
Por otro lado si $T : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ es la equivalencia de φ con $\varphi^{(1)} \oplus ... \oplus \varphi^{(n)}$, entonces

$$T^{-1}\varphi_g T = \begin{bmatrix} \varphi_g^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi_g^{(2)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \varphi_g^{(n)} \end{bmatrix}$$

es diagonal para todo $g \in G$.

Como un corolario obtenemos la diagonalización de matrices de orden finito. $\square$

Corolario 3.3. *Si $A \in GL^m(\mathbb{C})$ es una matriz de orden finito. Entonces A es diagonalizable. Además, si $A^n = I$, entonces los eigenvalores de A son n-ésimas raíces de la unidad.*

Prueba. Suponga que $A^n = I$. Definimos una representación $\varphi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow GL_m(\mathbb{C})$ para el cual $\varphi([k]) = A^k$. Esto se verifica fácilmente tomando una adecuada definición de representación. De esta manera existe $T \in GL_n\mathbb{C}$ tal que $T^{-1}AT$ es diagonal por el corolario **3.2**.

Supongamos

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_m \end{bmatrix} = D$$

entonces

$$D^n = (T^{-1}AT)^n = T^{-1}A^nT = T^{-1}IT = I$$

por lo tanto

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_m^n \end{bmatrix} = D^n = I$$

y como $\lambda_i^n = 1$ para todo i. Esto establece que los eigenvalores de A son la n-ésimas raíces de la unidad. $\square$

3.2. Las Relaciones de Ortogonalidad

En adelante asumimos lo siguiente; G será siempre finita $\varphi : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ una representación, entonces $\varphi_g = (\varphi_{ij}(g)) \in \mathbb{C}$ para $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$. De esta manera habrán n^2 funciones $\varphi_{ij} : G \longrightarrow \mathbb{C}$ de grado n asociados a la representación φ.

Una pregunta que surge es: ¿Qué sucede con las funciones φ_{ij} donde φ es irreducible y unitario? Resulta que las funciones de este tipo forman una base ortonormal para $\mathbb{C}^G$.

Definición 3.2 (Grupo Álgebra). *Sean G un grupo donde se define:*

$$L(G) = \mathbb{C}^G = \{f : G \longrightarrow \mathbb{C}\}$$

Entonces $L(G)$ es un espacio con producto interno, donde la adición y multiplicación por un escalar es dada por:

$$(f_1 + f_2)(g) = f_1(g) + f_2(g)$$
$$(cf)(g) = cf(g)$$

y con el producto interno definido por:

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g) \overline{f_2(g)}$$

Con todo lo anterior $L(G)$ es llamado grupo álgebra de G.

Teorema 3.4 (Relación de ortogonalidad de Schur). *Si $\varphi : G \longrightarrow U_n(\mathbb{C})$ y $\psi : G \longrightarrow U_n(\mathbb{C})$ son representaciones irreducibles, unitarios y no equivalentes, entonces:*

1. $\langle \varphi_{ij}, \psi_{kl} \rangle = 0$

2. $\langle \varphi_{ij}, \varphi_{kl} \rangle = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{sí } \; i = k \text{ y } \; j = l \\ 0, & \text{sí } \; i \neq k \text{ ó } \; j \neq l \end{cases}$

Para su demostración necesitamos de una preparación previa.

Teorema 3.5. *Si $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ y $\psi : G \longrightarrow GL(W)$ representaciones y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Entonces:*

(a) $T^{\#} = \dfrac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{g \in G} \psi_{g^{-1}} T \varphi_g \in Hom_G(\varphi, \psi).$

(b) *Si $T \in Hom_G(\varphi, \psi)$, entonces $T^{\#} = T$.*

(c) *La aplicación $P : Hom(V, W) \longrightarrow Hom_G(\varphi, \psi)$ definido por $P(T) = T^{\#}$ es un aplicación lineal sobreyectivo.*

Prueba. (a) Se puede verificar por cálculo directo. Para $h \in G$

$$T^{\#} \varphi_h = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi_{g^{-1}} T \varphi_g \varphi_h = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi_{g^{-1}} T \varphi_{gh} \tag{3.3}$$

Realizando un cambio de variable con $x = gh$, donde x varia tanto como lo hace g en G. Además $g^{-1} = hx^{-1}$, así tenemos el lado derecho de (3.3) dado por:

$$\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\psi_{hx^{-1}}T\varphi_x = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\psi_h\psi_{x^{-1}}T\varphi_x = \psi_h\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\psi_{x^{-1}}T\varphi_x = \psi_h T^{\#}$$

Por lo tanto $T^{\#}\varphi_h = \psi_h T^{\#}$, en consecuencia $T^{\#} \in Hom_G(\varphi,\psi)$.

Para **(b)**, notemos que si $T^{\#} \in Hom_G(\varphi,\psi)$, entonces para cualquier $g \in G$ se satisface $T\varphi_g = \psi_g T$.

Luego

$$T^{\#} = \frac{1}{|G|}\textstyle\sum_{g\in G}\psi_{g^{-1}}T\varphi_g = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\psi_{g^{-1}}\psi_g T = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\psi_{g^{-1}g}T = \frac{1}{|G|}|G|T$$

Por lo tanto $T^{\#} = T$

Finalmente para **(c)** se muestra la linealidad.

Sean $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ y $T_1, T_2 \in Hom(V,W)$, entonces

$$\begin{aligned}
P\left(c_1T_1 + c_2T_2\right) &= (c_1T_1 + c_2T_2)^{\#} \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\psi_{g^{-1}}(c_1T_1 + c_2T_2)\varphi_g \\
&= c_1\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\psi_{g^{-1}}T_1\varphi_g + c_2\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\psi_{g^{-1}}T_2\varphi_g \\
&= c_1T_1^{\#} + c_2T_2^{\#} \\
&= c_1P(T_1) + c_2P(T_2).
\end{aligned}$$

Para probar la sobreyectividad consideremos lo siguiente:

Sea $T \in Hom_G(\varphi,\psi)$, entonces existe T tal que $P(T) = T^{\#} = T$. □

Teorema 3.6. *Si $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$, $\psi : G \longrightarrow GL(W)$ son representaciones irreducibles de G y sea $T : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal, entonces:*

(a) *Si $\varphi \nsim \psi$, entonces $T^{\#} = 0$*

(b) *Si $\varphi = \psi$, entonces $T^{\#} = \dfrac{Tr(T)}{deg\varphi}I$.*

Prueba. (a) Por hipótesis $\varphi \nsim \psi$ y por el Lema de Schur tenemos que $T = 0$, entonces $T^{\#} = \dfrac{1}{|G|}\displaystyle\sum_{g\in G}\psi_{g^{-1}}T\varphi_g = 0.$

(b) Como $\varphi = \psi$, por Lema de Schur existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que:

$$T^{\#} = \lambda I. \tag{3.4}$$

Así queda calcular la expresión de λ. Como

$$T^{\#} : V \longrightarrow V,$$

calculando la traza de $T^{\#}$.

$$\begin{aligned} Tr^{\#} &= Tr(\lambda I) \\ &= \lambda Tr(I) \\ &= \lambda(dimV) \\ &= \lambda(deg\varphi) \end{aligned}$$

de donde $\lambda = \dfrac{Tr(T^{\#})}{deg\varphi}$.
Por lo tanto en (3.4) se tiene:

$$T^{\#} = \frac{Tr(T^{\#})}{deg\varphi} I.$$

Por otro lado también podemos calcular la traza directamente de la definición de $T^{\#}$. Usando $Tr(AB) = Tr(BA)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} Tr(T^{\#}) &= Tr\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\psi_{g^{-1}}T\varphi_g\right) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} Tr\left(\psi_{g^{-1}}T\varphi_g\right) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} Tr\left(\psi_{g^{-1}}\varphi_g T\right) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} Tr(T) \\ &= \frac{|G|}{|G|} Tr(T) = Tr(T). \end{aligned}$$

Por lo tanto $T^{\#} = \dfrac{Tr(T)}{deg\varphi} I$. □

Si $\varphi : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ y $\psi : G \longrightarrow GL_m(\mathbb{C})$ son dos representaciones, entonces $Hom(V,W) = M_{mn}(\mathbb{C})$ y $Hom_G(\varphi,\psi)$ es un subespacio de $M_{mn}(\mathbb{C})$. Por lo tanto la aplicación P del teorema (**3.5**) puede ser visto como una transformación lineal

$$P : M_{mn}(\mathbb{C}) \longrightarrow M_{mn}(\mathbb{C}).$$

Entonces sería natural calcular la matriz de P respecto a la base estándar de $M_{mn}(\mathbb{C})$.
Además se observa que cuando φ y ψ son representaciones unitarias, la matriz de P tiene una forma especial, recordemos que la base estándar de $M_{mn}(\mathbb{C})$ esta compuesta por las matrices $E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{mn}$ donde E_{ij} es una matriz $m \times n$ con el número 1 en la posición ij y ceros en las otras posiciones. Así se tiene que:

$$(a_{ij}) = \sum_{ij} a_{ij}E_{ij}.$$

Lema 3.2. *Sea* $A \in M_{rm}(\mathbb{C})$, $B \in M_{ns}(\mathbb{C})$ *y* $E_{ki} \in M_{mn}(\mathbb{C})$. *Entonces la fórmula:*

$$(AE_{ki}B)_{lj} = a_{lk}b_{ij}$$

donde $A = (a_{ij})$ *y* $B = (b_{ij})$.

Prueba. Por definición de la multiplicación de matrices

$$(AE_{ki}B)_{lj} = \sum_{x,y} a_{lx}(E_{ki})_{xy}b_{yj}.$$

Donde todos los elementos en esta suma son ceros excepto cuando $x = k$ y $y = i$, en cuyo caso uno obtiene $a_{lk}b_{ij}$ como se deseaba. □

Lema 3.3. *Si* $\varphi : G \longrightarrow U_n(\mathbb{C})$ *y* $\psi : G \longrightarrow U_m(\mathbb{C})$ *son representaciones unitarias y* $A = E_{ki} \in M_{mn}(\mathbb{C})$. *Entonces*

$$A^{\#}_{lj} = \langle \varphi_{ij}, \psi_{kl} \rangle.$$

Prueba. Como ψ es unitario $\psi_{g^{-1}} = \psi_g^{-1} = \psi_g^*$, entonces $\psi_{lk}(g^{-1}) = \overline{\psi_{kl}(g)}$.
De esta manera:

$$\begin{aligned}
A^{\#}_{lj} &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\psi_{g^{-1}}E_{ki}\varphi_g)_{lj} \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\psi_{lk}(g^{-1})\varphi_{ij}(g) && \textit{por el lema } \textbf{\textit{3.2}} \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\psi_{kl}(g)}\varphi_{ij}(g) \\
&= \langle \varphi_{ij}, \psi_{kl} \rangle
\end{aligned}$$

como se quería. □

***Observación* 5.** *Sea* $P : M_{mn}(\mathbb{C}) \longrightarrow M_{mn}(\mathbb{C})$ *la transformación lineal dada por* $P(T) = T^{\#}$ *y sea* B *la matriz de* P *con respecto a la base estándar* $M_{mn}(\mathbb{C})$. *Entonces* B *es una matriz* $mn \times mn$ *cuyas filas y columnas están indexadas en pares* lj, ki, *donde* $1 \leqslant l, k \leqslant m$ *y* $1 \leqslant j, i \leqslant n$. *El lema (3.2) satisface que la* lj, ki *entrada de* B *es un producto interior* $\langle \varphi_{ij}, \rho_{kl} \rangle$.

Teorema 3.7 (Relación de Ortogonalidad de Schur)**.** *Sea* $\varphi : G \longrightarrow U_n(\mathbb{C})$ *y* $\psi : G \longrightarrow U_m(\mathbb{C})$ *representaciones unitarios irreducibles y no equivalentes. Entonces:*

1 $\langle \varphi_{ij}, \psi_{kl} \rangle = 0$

2 $$\langle \varphi_{ij}, \varphi_{kl} \rangle = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \textit{sí } i = k \textit{ y } j = l \\ 0, & \textit{sí } i \neq k \textit{ ó } j \neq l \end{cases}$$

Prueba. Para (**1**) sea $A = E_{ki} \in M_{mn}(\mathbb{C})$, entonces $A^{\#} = 0$ por el teorema (**3.6**).
Por definición se tiene que:

$$A^{\#}_{lj} = \langle \varphi_{ij}, \psi_{kl} \rangle$$

y por el lema (**3.3**) se tiene $A^{\#}_{lj} = \langle \varphi_{ij}, \psi_{kl} \rangle = 0$ esto establece (**1**).
Para (**2**), aplicando el teorema (**3.6**) y el lema (**3.3**) con $\varphi = \psi$. Sea $A = E_{ki}M_n \in (\mathbb{C})$, entonces

$$A^{\#} = \frac{Tr(E_{ki})}{n} I$$

por el teorema (**3.6**) y el lema (**3.3**) muestra que $A^{\#}_{lj} = \langle \varphi_{ij}, \psi_{kl} \rangle$.
Primero, supongamos que $j \neq l$, entonces $I_{lj} = 0$, de donde $0 = A^{\#}_{lj} = \langle \varphi_{ij}, \varphi_{kl} \rangle$.
Si suponemos que $i \neq k$, entonces E_{ki} tiene solo ceros en la diagonal y así $Tr(E_{ki}) = 0$ por lo que tenemos: $0 = A^{\#}_{lj} = \langle \varphi_{ij}, \varphi_{kl} \rangle$.
Finalmente, en el caso donde $j = l$, $i = k$, E_{ki} tiene un solo 1 en la diagonal y todas las otras entradas son *ceros*. Así $Tr(E_{ki}) = 1$ y consecuentemente $\frac{1}{n} = A^{\#}_{lj} = \langle \varphi_{ij}, \varphi_{kl} \rangle$. Esto demuestra el teorema. □

4

Teoría de Caracteres

En este capítulo, se demostrará finalmente la unicidad de la descomposición de una representación en representaciones irreducibles, la principal herramienta es asociar a cada representación φ una función $\chi_\varphi : G \longrightarrow \mathbb{C}$, que codifica toda la representación.
Dada una matriz $A = (a_{ij})$ de tamaño $n \times n$ y con entradas $\mathbb{C}$, su traza es el escalar:

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Recordemos que si A y B son dos matrices $n \times n$, entonces $Tr(AB) = Tr(BA)$. Consecuentemente, si M, Q son matrices $n \times n$, con Q un matriz invertible, poniendo $A = QM$ y $B = Q^{-1}$, se tiene que $AB = QMQ^{-1}$ y $BA = M$, por lo que

$$Tr(QMQ^{-1}) = Tr(M). \tag{4.1}$$

Una consecuencia de esta igualdad es que si $T : V \longrightarrow V$ es un operador lineal en un espacio vectorial de dimensión n, podemos definir la *traza del operador* T usando la matriz asociada a T en cualquier base de V, por que las matrices asociadas a T en dos bases cualesquiera de V son conjugadas y entonces podemos aplicar (**4.1**).

Ahora si $\varphi : G \longrightarrow GL(\mathbb{C})$ es una representación de grado n de un grupo finito G, para cada $g \in G$ sea $\varphi(g) : V \longrightarrow V$ el isomorfismo correspondiente; por las observaciones previas podemos considerar su traza $Tr\left(\varphi(g)\right) \in \mathbb{C}$.
Se tiene así una función;

$$\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}$$

definida mediante

$$\chi(g) = Tr(\varphi(g))$$

a la cual se le llama el carácter de la representación φ. Para denotar su dependencia de φ, algunas veces denotaremos a χ como χ_φ y si n es el grado de la representación φ, diremos que el carácter χ_φ es un carácter de grado n.

Definición 4.1 (Carácter)**.** *Sea $\varphi : G \to GL(V)$ una representación. El carácter $\chi_\varphi : G \to \mathbb{C}$ de φ esta definido por $\chi_\varphi(g) = Tr(\varphi_g)$.*
El carácter de una representación irreducible es llamado carácter irreducible.
Así si $\varphi : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ es una representación definida por $\varphi_g = (\varphi_{ij}(g))$.
Entonces

$$\chi_\varphi(g) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ii}(g).$$

En general para calcular el carácter de una representación uno debe de elegir una base y cuando hablamos de caracteres, podemos asumir sin pérdida de generalidad que estamos hablando de la matriz de representaciones.

Teorema 4.1. *Si χ es el carácter de una representación $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ de grado n, tenemos:*
1. $\chi(1_G) = n$.
2. $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$, para $g \in G$.
3. $\chi(hgh^{-1}) = \chi(g)$, para g, $h \in G$.

Prueba. 1. Por definición de carácter y tomando a 1_G como la identidad de G se tiene:

$$\begin{aligned} \chi_\varphi(1_G) &= Tr(\varphi_{1_G}) \\ &= Tr(I_n) \\ &= n \end{aligned}$$

2. Los valores propios del operador $\varphi(g^{-1}) : V \longrightarrow V$ son los inversos de λ_i^{-1} de los valores propios λ_i de $\varphi(g) : V \longrightarrow V$, y como los λ_i son raíces de la unidad, entonces $\lambda_i^{-1} = \overline{\lambda_i}$ por lo que:

$$\begin{aligned} \chi_\varphi(g^{-1}) &= Tr(\varphi(g^{-1})) && \textit{Por definición de carácter.} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{-1} && \textit{Por definición de traza.} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i} && \lambda_i^{-1} = \overline{\lambda_i}. \\ &= \overline{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = \overline{\chi_\varphi(g)} && \textit{Por propiedad de la conjugada y definición de carácter.} \end{aligned}$$

3. Sea $hg = u$ y $v = h^{-1}$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\chi_\varphi(hgh^{-1}) &= \chi_\varphi(uv) && \\
&= Tr(\varphi_u\varphi_v) && \textit{Por definición de carácter.} \\
&= Tr(\varphi_v\varphi_u) && \textit{Por propiedad } Tr(AB) = Tr(BA). \\
&= \chi(vu) && \textit{Por definición de traza.} \\
&= \chi(h^{-1}hg) && hg = u \ y \ v = h^{-1}. \\
&= \chi_\varphi(g). &&
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.2. *Si φ y ψ son representaciones equivalentes. Entonces $\chi_\varphi = \chi_\psi$.*

Prueba. Dado que la traza es calculable mediante la selección de una base, podemos suponer $\varphi, \psi : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$. Entonces ya que son equivalentes, existe una matriz invertible $T \in GL_n(\mathbb{C})$ tal que $\varphi_g = T\psi_g T^{-1}$, para todo $g \in G$. Además recordemos que:
$Tr(AB) = T(BA)$ así:

$$\chi_\varphi(g) = Tr(\varphi_g) = Tr(T\psi_g T^{-1}) = Tr(T^{-1}T\psi_g) = Tr(\psi_g) = \chi_\psi(g)$$

con lo que queda demostrado el teorema. □

4.1. Caracteres y Funciones de clases

Definición 4.2 (Función de Clase)**.** *Diremos que una función $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ es de clase si para todo $g, h \in G$ satisface:*

$$f(hgh^{-1}) = f(g)$$

Como se puede observar en el teorema (4.1), un ejemplo claro de una función de clase es un carácter.
Llamemos H al conjunto de todas las funciones complejas definidas en G. Además se tiene que H junto a la adición y la multiplicación por un escalar es un espacio vectorial. Considerando:

$$\mathbb{C}[G] = \{f : G \longrightarrow \mathbb{C}; f \textit{ es de clase}\}$$

De esta manera $\mathbb{C}[G]$ es un subespacio vectorial de H, llamado *espacio de las funciones de clase.*
Considerando una aplicación:

$$\begin{aligned}
<,>: \mathbb{C}[G] \times \mathbb{C}[G] &\longrightarrow \mathbb{C} \\
(f, g) &\longmapsto < f, g > = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} f(t)\overline{g(t)}
\end{aligned}$$

se tiene que $<,>$ es un producto interno. En efecto:
i) $<,>$ es *hermítica*.

$$\begin{aligned}\overline{< f, g >} &= \overline{\frac{1}{|G|}\sum_{t\in G} g(t)\overline{f(t)}} \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G} \overline{g(t)}g(t) \\ &=< f, g >\end{aligned}$$

ii) $<,>$ cumple las condiciones de linealidad.
Con la adición:

$$\begin{aligned}< f+g, h > &= \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G}(f+g)(t)\overline{h(t)} \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G}\left[(f)(t)\overline{h(t)} + (g)(t)\overline{h(t)}\right] \\ &= \frac{1}{|G|}\left[\sum_{t\in G}(f)(t)\overline{h(t)} + \sum_{t\in G}(g)(t)\overline{h(t)}\right] \\ &=< f, h > + < g, h >\end{aligned}$$

Con la multiplicación por un escalar:

$$\begin{aligned}< \lambda f, g > &= \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G}\lambda f(t)\overline{g(t)} \\ &= \lambda\frac{1}{|G|}\sum_{t\in G} f(t)\overline{g(t)} \\ &= \lambda < f, g >\end{aligned}$$

iii) $<,>$ es positiva.
Como para todo $w \in \mathbb{C}^*$, $w\overline{w} = |w|^2 > 0$ se satisface que:

$$< f, f >= \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G} f(t)\overline{f(t)} > 0$$

para $f \in \mathbb{C}[G]$ no nulo.

4.2. Carácter y relaciones de ortogonalidad

Teorema 4.3 (Relación de ortogonalidad)**.** *Sea φ, ψ representaciones irreducibles de G. Entonces*

$$\langle \chi_\varphi,\ \chi_\psi\rangle = \begin{cases} 1, & \varphi \sim \psi \\ 0, & \varphi \nsim \psi \end{cases}$$

De esta manera los caracteres de G forman un conjunto ortonormal de funciones de clase.

Prueba. Gracias al teorema (2.3) existen φ' y ψ' representaciones unitarias equivalentes a φ y ψ respectivamente, además por el teorema (4.2) se tiene que; $\chi_\varphi = \chi_{\varphi'}$ y $\chi_\psi = \chi_{\psi'}$. Así se puede asumir sin perdida de generalidad para la demostración $\varphi = \varphi'$, $\psi = \psi'$ donde; $\varphi : G \longrightarrow U_n(\mathbb{C})$ y $\psi : G \longrightarrow U_m(\mathbb{C})$ son unitarias.
Luego podemos calcular:

$$\begin{aligned}
\langle \chi_\varphi,\ \chi_\psi \rangle &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\varphi(g)\overline{\chi_\psi(g)} \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ii}(g)\sum_{j=1}^{m}\overline{\psi_{jj}}(G) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi_{ii}(g)\overline{\psi_{jj}}(G) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\langle \varphi_{ii}(g),\ \psi_{jj}(g)\rangle
\end{aligned}$$

Las relaciones de ortogonalidad de Schur establece:

$$\langle \varphi_{ii}(g),\ \psi_{jj}(g)\rangle = 0 \quad si \qquad \varphi \nsim \psi$$

y así

$$\langle \chi_\varphi,\ \chi_\psi \rangle = 0 \quad si \qquad \varphi \nsim \psi.$$

Por otro lado si $\varphi \sim \psi$, entonces podemos asumir $\varphi = \psi$ por el teorema (**4.2**). En este caso la relación de ortogonalidad se Schur establece:

$$\langle \varphi_{ii},\ \psi_{jj}\rangle = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

y así

$$\langle \chi_\varphi,\ \chi_\varphi \rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle \varphi_{ii},\ \varphi_{ii}\rangle = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n} = 1$$

como se quería mostrar. □

Aclaremos algunas notaciones que veremos:
Si V es un espacio vectorial, φ una representación $m > 0$, entonces el conjunto:

$$mV = \underbrace{V \oplus \ldots \oplus V}_{m-veces} \qquad \text{y} \qquad m\varphi = \underbrace{\varphi \oplus \ldots \oplus \varphi}_{m-veces}$$

Sea $\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(s)}$ un conjunto completo de representaciones irreducibles unitarios de G, equivalentes de arriba. Además $d_i = deg\varphi^{(i)}$.

Definición 4.3 (Multiplicidad). *Sea $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ una representación del grupo G con carácter ϕ. Vimos que existen $W_1, \cdots, W_n$ subespacios de V invariantes por φ tales que $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$ con cada $\varphi_i = \varphi|_{W_i}$ irreducible para cada $i = 1, 2, \cdots, n$. Así ϕ es una suma de caracteres de representaciones $\varphi_i's$, los cuales son irreducibles, y así concluimos que*

$$\phi = m_1\chi_1 + m_2\chi_2 + \cdots + m_k\chi_k$$

donde $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_k$ son caracteres irreducibles, dos a dos distintos, y cada m_i es un entero no negativo. Definimos la ***multiplicidad*** *de χ_i en ϕ como el entero m_i.*

***Observación* 6.** *Para cada $i = 1, 2, \cdots, k$,*

$$< \phi, \chi_i >= m_1 < \chi_1, \chi_i > + \cdots + m_i < \chi_i, \chi_i > + \cdots + m_k < \chi_k, \chi_i >= m_i$$

por las relaciones de ortogonalidad.

Lema 4.1. *Sea $\varphi = \rho \oplus \psi$. Entonces $\chi_\varphi = \chi_\rho + \chi_\psi$*

Prueba. Supongamos que $\rho : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ y $\psi : G \longrightarrow GL_m(\mathbb{C})$, entonces
$\varphi : G \longrightarrow GL_{n+m}(\mathbb{C})$ tiene forma de bloque

$$\begin{bmatrix} \rho_g & 0 \\ 0 & \psi_g \end{bmatrix}$$

como la traza es la suma de elementos de la diagonal, podemos deducir que:

$$\chi_\varphi(g) = Tr(\varphi_g) = Tr(\rho_g) + Tr(\psi_g) = \chi_\rho(g) + \chi_\psi(g)$$

Por lo tanto

$$\chi_\varphi = \chi_\rho + \chi_\psi$$

□

El anterior lema implica que cada carácter es una combinación lineal entera de caracteres irreducibles.

4.3. Descomposición de la Representación Regular

Considere G un grupo y denotemos sus caracteres irreducibles por $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_h$, y sus grados por $n_1, n_2, \cdots, n_h$. Se tiene que $n_i = \chi_i(1)$ por el teorema (4.1).
Recuerde que, dado un grupo G, con $|G| = n$ y V un espacio vectorial de dimensión n con base $\beta = \{e_g\}_{g \in G}$ (indexada por los elementos de G), una *representación regular* de G esta definida por

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & G & \longrightarrow & Gl(V) \\ & h & \longmapsto & \varphi_h \end{array},$$

donde $\varphi_h : V \longrightarrow V$ es un operador lineal definido por $\varphi_h(e_g) = e_{hg}$.

Teorema 4.4. *El carácter $r_G(h)$ de la representación regular esta dado por:*

$$r_G(h) = \begin{cases} |G| = n, & h = e \\ 0, & h \neq e \end{cases}$$

Prueba. i) En caso de que $h = e$ tenemos

$$r_G(h) = r_G(e) = Tr(Id_V) = n.$$

ii) En el caso $h \neq e$, tenemos que $hg \neq g$, para todo $g \in G$. Luego, una de φ_h en la base β serán todos los elementos de la diagonal principal nulos. Entonces, $r_G(h) = Tr(\varphi_h) = 0$. □

4.4. La representación de los Grupos Abelianos

En esta sección calculamos los caracteres de los grupos abelianos.

Teorema 4.5. *Sea G_1, G_2 grupos abelianos y supongamos que $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m$ y $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ son representaciones irreducibles de G_1 y G_2 respectivamente, en particular $m = |G_1|$ y $m = |G_2|$. Entonces la función $\alpha_{ij} : G_1 \times G_2 \longrightarrow \mathbb{C}^*$ con $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$ definida por*

$$\alpha_{ij}(g_1, g_2) = \chi_i(g_1)\varphi_j(g_2)$$

formando un conjunto completo de representaciones irreducibles de $G_1 \times G_2$.

Prueba. Probemos primero que los α_{ij} son homomorfismos. En efecto,

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}(g_1,\ g_2)\alpha_{ij}(g_1',\ g_2') &= \chi_i(g_1)\varphi_j(g_2)\chi_i(g_1')\varphi_j(g_2') \\ &= \chi_i(g_1)\mathcal{X}_i(g_1')\varphi_j(g_2)\varphi_j(g_2') \\ &= \chi_i(g_1\ g_1')\varphi_j(g_2\ g_2') \\ &= \alpha_{ij}(g_1\ g_1',\ g_2\ g_2') \\ &= \alpha_{ij}((g_1,\ g_2)(g_1'\ g_2')) \end{aligned}$$

seguidamente probemos que $\alpha_{ij} = \alpha_{kl}$ implica $i = k$ y $j = l$.
Para cuando $\alpha_{ij} = \alpha_{kl}$, tenemos:

$$\chi_i(g) = \alpha_{ij}(g, 1) = \alpha_{kl}(g, 1) = \chi_k(g)$$

y así $i = k$, análogamente $j = l$. Como $G_1 \times G_2$ tiene orden $|G_1 \times G_2| = m \times n$ representaciones irreducibles distintos, se deduce que el α_{ij} con $1 \leqslant i \leqslant m$ y $1 \leqslant j \leqslant n$ son todos ellos. □

5 El Teorema de Burnside

Después de haber desarrollado los inicios de la teoría de caracteres de grupos finitos, probaremos una de las primeras grandes aplicaciones de la representación de grupos denominada: pq - teorema de Burnside. Éste teorema establece que ningún grupo no abeliano de orden $p^a q^b$ es simple. Recordemos que un grupo es simple si no contiene ningún subgrupo normal propio. Para demostrar el teorema de Burnside tendremos que tomar una breve incursión en la teoría de números.
En el camino vamos a probar el resultado de Froebenius, a veces conocido como el teorema de la dimensión, que dice que el grado de cada representación irreducible de un grupo G divide al orden de G.

5.1. Algunos resultados de la teoría de números

Definición 5.1. ***(Enteros algebraicos)****. Un número complejo α se dice que es un entero algebraico si se trata de una raíz de un polinomio mónico con coeficientes enteros. Es decir α es entero algebraico si existe un polinomio:*

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$$

con $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$ tal que $p(\alpha) = 0$.

El hecho de que el coeficiente principal de p es 1 es crucial para la definición. Trivialmente cada entero $m \in \mathbb{Z}$ es un entero algebraico, siendo la raíz del polinomio $z - m$. Nótese que si α es un entero algebraico, entonces también lo es $-\alpha$, pues si $p(z)$ es un polinomio mónico con coeficientes enteros tales que $p(\alpha) = 0$, entonces $p(-z)$ ó $-p(-z)$ es un polinomio mónico y $-\alpha$ es raíz de estos dos polinomios, de hecho veremos más adelante que los enteros algebraicos forman un *subanillo* de $\mathbb{C}$.

Ejemplo 5.1. ***(Raíz n-ésima)****. Sea m un entero, entonces $z^n - m$ es un polinomio mónico con coeficientes enteros, con raíz n-ésima m, de donde m es un entero algebraico.*

Así por ejemplo $\sqrt{2}$ es un entero algebraico,como lo es $e^{\frac{2\Pi i}{n}}$. En efecto, cualquier raíz n-ésima de la unidad es un entero algebraico.

Ejemplo 5.2. ***(Eigenvalores de matrices enteras)****. Sea $A = (a_{ij})$ con $a_{i,j} \in \mathbb{Z}$ una matriz con entradas enteras $n \times n$. Entonces el polinomio característico $p_A(z) = det(zI - A)$ es un polinomio mónico con coeficientes enteros, así cada valor propio (eigenvalor) de A es un entero algebraico.*

Teorema 5.1. *Un número racional es un entero algebraico si y sólo si es un número entero.*

Prueba. Sea $r = \dfrac{m}{n}$, con $m, n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$ y $MCD(m, n) = 1$.
Primero supongamos que r es un entero algebraico, entonces es una raíz de un polinomio mónico $p(z) = z^k + a_{k-1}z^{k-1} + \cdots + a_0$ con coeficientes enteros, es decir $p(r) = 0$ así:

$$0 = \left(\frac{m}{n}\right)^k + a_{k-1}\left(\frac{m}{n}\right)^{k-1} + \cdots + a_0$$

multiplicando la ecuación anterior por n^k, tenemos:

$$0 = m^k + a_{k-1}m^{k-1}n + \cdots + a_0 n^k$$

reescribiendo la ecuación anterior

$$m^k = -n(a_{k-1}m^{k-1} + \cdots + a_1 m n^{k-1} + a_0 n^{k-1})$$

de donde afirmamos que si $n|m^k$, entonces $n|m$. En efecto por inducción matemática sobre k:
i) Para $k = 1$, se tiene que $n|m$ que satisface la condición. Así tenemos que la afirmación se cumple para un entero $k = t$. Es decir si $n|m^t$ implica que $n|m$ que viene a ser la hipótesis de inducción.
ii) Por demostrar que la afirmación se cumple para $k = t + 1$

$$\begin{aligned} n|m^{t+1} &\Rightarrow n|m^t \cdot m \\ &\Rightarrow n|m^t && \text{Por teorema de Euler.} \\ &\Rightarrow n|m && \text{Por hipótesis de inducción.} \end{aligned}$$

Además como $MCD(m, n) = 1$ concluimos $n = \pm 1$. Por lo tanto $r = \pm m \in \mathbb{Z}$.
La prueba del recíproco es trivial, por el hecho de que todo entero es un entero algebraico. □

Lema 5.1. *Un número complejo $y \in \mathbb{C}$ es un entero algebraico si y sólo si existen $y_1, \ldots, y_t \in \mathbb{C}$ no todos ceros, tal que:*

$$yy_i = \sum_{j=1}^{t} a_{ij}y_i \tag{5.1}$$

con $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ para todo $1 \leqslant i \leqslant t$ (es decir yy_i es una combinación lineal de los y_i, para todo i).

Prueba. Supongamos que y es un entero algebraico, entonces existe un polinomio mónico, $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ con $p(y) = 0$.
Tomemos $y_i = y^{i-1}$ para $1 \leqslant i \leqslant n$. Entonces para $1 \leqslant i \leqslant n-2$, tenemos

$$yy_i = yy^{i-1} = y^i = y_{i+1}. \tag{5.2}$$

de donde

$$yy_{n-1} = yy^{n-1} = y^n \tag{5.3}$$

Además y es raíz de

$$\begin{aligned}(z) &= z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0\\ 0 &= y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \cdots + a_0\\ -a_0 - \cdots - a_{n-1}y^{n-1} &= y^n. \end{aligned} \tag{5.4}$$

De (5.2) y (5.4) concluimos que

$$yy_i = \sum_{j=1}^{t} a_{ij}y_i$$

que verifica (5.1).
Recíprocamente, si existen $y_1, y_2, \ldots, y_t \in \mathbb{C}$ no todos ceros y sea $A = (a_{ij})$ y sea

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_t \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^t.$$

Entonces por la igualdad de vectores

$$[AY]_i = \sum_{j=1}^{t} a_{ij}y_i = yy_i = y\,[Y]_i$$

para todo i, y así $AY = yY$. Además podemos afirmar que $Y \neq 0$, pues los elementos $y_1, y_2, \cdots, y_t$ son, no todos ceros por hipótesis, de donde y viene a ser un eigenvalor de la matriz entera $(t \times t)$ A y por lo tanto y es un entero algebraico como en el ejemplo (**5.2**). $\square$

Corolario 5.1. *El conjunto $\mathbb{A}$ de los enteros algebraicos es un subanillo de $\mathbb{C}$. En particular la suma y productos de enteros algebraicos es un algebraico.*

Prueba. Sea $y, y' \in \mathbb{A}$. Por el lema anterior existen $y_1, y_2, \ldots, y_t \in \mathbb{C}$ no todos ceros y $y'_1, y'_2, \ldots, y'_s \in \mathbb{C}$ no todo ceros tales que:

$$yy_i = \sum_{j=1}^{t} a_{ij}y_j \qquad\qquad y'y'_k = \sum_{j=1}^{s} b_{kj}y'_j.$$

Entonces

$$(y+y')y_iy'_k = yy_iy'_k + y'y'_ky_i = \sum_{j=1}^{t} a_{ij}y_jy'_k + \sum_{j=1}^{s} b_{kj}y'_jy_i$$

es una combinación lineal entera de $y_jy'_l$, estableciendo que $y+y' \in \mathbb{A}$ por lema (5.1). De forma análoga, $yy'y_iy'_k = yy_iy'y'_k$ es una combinación lineal entera de $y_jy'_l$ y así $yy' \in \mathbb{A}$. $\square$

También necesitamos que el complejo conjugado de un número entero algebraico sea un entero algebraico. En efecto si $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$ es un polinomio con coeficientes enteros y α es una raíz de $p(z)$, entonces

$$p(\overline{\alpha}) = \overline{\alpha}^{\,n} + a_{n-1}\overline{\alpha}^{\,n-1} + \ldots + a_0 = \overline{\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_0} = \overline{p(\alpha)} = 0$$

5.2. El Teorema de la Dimensión

La importancia de los enteros algebraicos en la teoría de representación de grupos se hace evidente en el siguiente corolario, que es consecuencia del corolario (**5.1**).

Corolario 5.2. *Si χ es un carácter de un grupo finito G. Entonces $\chi(g)$ es un entero algebraico, para todo $g \in G$.*

Prueba. Sea $\varphi : G \longrightarrow GL_m(\mathbb{C})$ una representación con carácter χ y n el orden de G. Entonces $g^n = e$, de donde $\varphi_g^n = I$.
Por el corolario (**3.3**) implica que φ_g es diagonalizable con eigenvalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, los cuales son las n-ésimas raíces de la unidad, por lo tanto son enteros algebraicos.

$$\chi(g) = Tr(\varphi_g) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_m$$

y como los enteros algebraicos forman un subanillo se concluye que $\chi(g)$ es un entero algebraico. $\square$

***Observación* 7.** *Se debe notar que la prueba del corolario (**5.2**) muestra que $\chi_\varphi(g)$ es una suma de m n-ésimas raíces de la unidad.*

Teorema 5.2. *Sea φ una representación irreducible de un grupo finito G de grado d. Sea $g \in G$ y h el tamaño de la clase de conjugación de g. Entonces $h\chi_\varphi(g)/d$ es un entero algebraico.*

Prueba. Sean $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_s$ las clases de conjugación en G, donde $h_i = |\mathcal{C}_i|$ y sea χ_i, el valor de χ_φ en la clase $\mathcal{C}_i$.
Así debemos de mostrar que $\dfrac{h_i\chi_i}{d}$ es un entero algebraico para cada i.
Consideremos el operador

$$T_i = \sum_{x \in \mathcal{C}_i} \varphi_x$$

con el cual podemos realizar dos afirmaciones importantes:

Afirmación 1:

$$T_i = \frac{h_i}{d}\chi_i \cdot I$$

En efecto, primero mostraremos que $\varphi_g T_i \varphi_{g^{-1}} = T_i$ para todo $g \in G$.
Es efecto

$$\varphi_g T_i \varphi_{g^{-1}} = \sum_{x\in\mathcal{C}_i} \varphi_g \varphi_x \varphi_{g^{-1}} = \sum_{x\in\mathcal{C}_i} \varphi_{gxg^{-1}} = \sum_{y\in\mathcal{C}_i} \varphi_y = T_i$$

ya que $\mathcal{C}_i$ es cerrado bajo la conjugación. Por el lema de Schur $\underline{T_i = \lambda I}$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$. De modo que I es el operador identidad, es un espacio vectorial de dimensión d lo que implica:

$$d\lambda = Tr(\lambda I) = Tr(T_i) = \sum_{x\in\mathcal{C}_i} Tr(\varphi_x) = \sum_{x\in\mathcal{C}_i} \mathcal{X}_\varphi(x) = \sum_{x\in\mathcal{C}_i} \chi_i = |\mathcal{C}_i|\chi_i = h_i\chi_i$$

por lo tanto

$$\lambda = \frac{h_i\chi_i}{d}$$

Entonces

$$T_i = \frac{h_i\chi_i}{d} \cdot I$$

probando la afirmación.
Sin embargo necesitamos de otra afirmación, el cual dice que T_i se comporta como un entero algebraico, ya que satisface una fórmula como en el lema (**5.1**).

Afirmación 2:

$$T_i T_j = \sum_{k=1}^{s} a_{ijk} T_k$$

para algún $a_{ijk} \in \mathbb{Z}$.
En efecto, realizando algunos cálculos.

$$T_i T_j = \sum_{x\in\mathcal{C}_i} \varphi_x \cdot \sum_{y\in\mathcal{C}_j} \varphi_y = \sum_{x\in\mathcal{C}_i, y\in\mathcal{C}_j} \varphi_{xy} = \sum_{g\in G} a_{ijg}\varphi_g$$

donde $a_{ijg} \in \mathbb{Z}$ es el número de maneras de escribir $g = xy$ con $x \in \mathcal{C}_i$ y $y \in \mathcal{C}_j$.
Además podemos asumir que a_{ijg} depende solo de la clase de conjugación de g. Supongamos que esto se cumple, es decir el caso y sea a_{ijk}, el valor de a_{ijg} con $g \in \mathcal{C}_k$, entonces.

$$\sum_{g\in G} a_{ijg}\varphi_g = \sum_{k=1}^{s}\sum_{g\in\mathcal{C}_k} a_{ijg}\varphi_g = \sum_{k=1}^{s} a_{ijk} \sum_{g\in\mathcal{C}_k} \varphi_g = \sum_{k=1}^{s} a_{ijk} T_k$$

probando la afirmación.
Tomando en cuenta que a_{ijg} solo depende de la clase de conjugación de g. Definimos

$$X_g = \{(x, y) \in \mathcal{C}_i \times \mathcal{C}_j | xy = g\}$$

donde $a_{ijg} = |X_g|$. Sea g' el conjugado de g, además podemos mostrar que $|X_g| = |X_{g'}|$. Supongamos que $g' = kgk^{-1}$ y definamos una biyección $\psi : X_g \longrightarrow X_{g'}$ por

$$\psi(x, y) = (kxk^{-1}, kyk^{-1})$$

Notemos que $kxk^{-1} \in \mathcal{C}_i$, $kyk^{-1} \in \mathcal{C}_j$ y $kxk^{-1}kyk^{-1} = kxyk^{-1} = kgk^{-1} = g'$
y como $\psi(x, y) \in X_{g'}$. evidentemente tiene inversa $\gamma : X_{g'} \longrightarrow X_g$ tomando $\gamma(x', y') = (k^{-1}x'k, k^{-1}y'k)$. Así ψ es una biyección y por lo tanto $|X_g| = |X_{g'}|$.

Ahora podemos completar la prueba del teorema. Sustituyendo la fórmula por el T_i de la afirmación 1 en la afirmación 2 queda.

$$\left(\frac{h_i}{d}\chi_i\right)\left(\frac{h_j}{d}\chi_j\right) = \sum_{k=1}^{s} a_{ijk}\left(\frac{h_k}{d}\chi_k\right)$$

y así

$$\frac{h_i\mathcal{X}_i}{d}$$

es un entero algebraico por el lema (**5.1**). $\square$

Teorema 5.3. ***(Teorema de la dimensión).*** *Si φ es una representación irreducible de G, de grado d. Entonces d divide a $|G|$.*

Prueba. La relación de ortogonalidad, teorema (4.3) nos indica:

$$1 = \langle \chi_\varphi, \chi_\varphi \rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\varphi(g)\overline{\chi_\varphi(g)}$$

y asi

$$\frac{|G|}{d} = \sum_{g\in G}\frac{\chi_\varphi(g)}{d}\overline{\chi_\varphi(g)} \tag{5.5}$$

Sea $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_s$ las clases conjugadas de G y sea χ_i el valor de χ_φ en $\mathcal{C}_i$. Sea $h_i = |\mathcal{C}_i|$. Entonces de la ecuación (**5.5**) se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{|G|}{d} &= \sum_{i=1}^{s}\sum_{g\in\mathcal{C}_i}\frac{\chi_\varphi(g)}{d}\overline{\chi_\varphi(g)} \\ &= \sum_{i=1}^{s}\sum_{g\in\mathcal{C}_i}\left(\frac{1}{d}\chi_i\right)\overline{\chi_i} = \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{h_i}{d}\chi_i\right)\overline{\chi_i} \qquad (*)\end{aligned}$$

Donde $\dfrac{h_i\chi_i}{d}$ es un entero algebraico por el teorema **(5.2)**, al igual que $\overline{\chi_i}$ por el corolario (**5.2**) y la clausura de los enteros algebraicos bajo conjugación compleja. Además como los enteros algebraicos forman un anillo; se tiene en **(∗)** que $\dfrac{|G|}{d}$ es un entero algebraico y por lo tanto un entero por teorema (**5.1**). Por lo tanto d divide a $|G|$. $\square$

5.3. Teorema de Burnside

Sea G un grupo de orden n y supóngase que $\varphi : G \longrightarrow GL_d(\mathbb{C})$ entonces $\mathcal{X}_\varphi(g)$ es una suma de las n-ésimas raíces de la unidad como lo notamos en la observación **(7)**. Esto implica la importancia de nuestro siguiente lema.

Lema 5.2. *Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$ las raíces n-ésimas de la unidad. Entonces*

$$|\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_d| \leqslant d$$

donde la igualdad sucede si y solo si $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_d$

Prueba. Sean v, w vectores en $\mathbb{R}^2$, entonces

$$\begin{aligned} \|v+w\|^2 &= \|v\|^2 + 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2 \\ &= \|v\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| \cos\theta + \|w\|^2 \end{aligned}$$

donde θ es el ángulo entre v y w con $\cos\theta \leqslant 1$, la igualdad se cumple si y solo si $\theta = 0$, de donde

$$\|v+w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$$

la igualdad se satisface si y solo si $v = \lambda w$ o $w = \lambda v$ para algún $\lambda \geq 0$.
Inductivamente se procede para n vectores, donde se cumple que:

$$\|v_1 + \cdots + v_n\| \leqslant \|v_1\| + \|v_2\| + \cdots + \|v_n\|$$

donde la igualdad se verifica si y sólo si los v_i son múltiplos escalares no negativos de un vector común.
Identificando los números complejos con vectores en $\mathbb{R}^2$, tenemos

$$|\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_d| \leqslant |\lambda_1| + |\lambda_2| + \cdots + |\lambda_d|$$

donde se cumple la igualdad si y solo si los λ_i son múltiplos escalares no negativos de algún número complejo z. Pero $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \cdots = |\lambda_d| = 1$, por lo que sólo pueden ser múltiplos no negativos de algún número complejo, si ellos son iguales, es decir

$$\lambda_1 = \lambda_d = \cdots = \lambda_d$$

esto completa la prueba. □

Sea $w_n = e^{2\Pi i/n}$, denotemos por $\mathbb{Q}[w_n]$ el subcampo más pequeño de $\mathbb{C}$ que contiene a w_n. Este es el subcampo más pequeño F de $\mathbb{C}$ tal que $z^n - 1 = (z - \alpha_1) \ldots (z - \alpha_n)$ para algunos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$. Es decir F es el campo de división de $z^n - 1$. A los campos de la forma $\mathbb{Q}[w_n]$ son llamadas **campos ciclotómicos**.

Lema 5.3. *Sea $p(z)$ un polinomio con coeficientes racionales y si $\alpha \in \mathbb{Q}[w_n]$ es una raíz de p. Entonces $\sigma(\alpha)$ es también raíz de p para todo $\sigma \in \Gamma$.*

Previamente necesitamos recordar un poco de la Teoría de Galois. Sea $\Gamma = Gal(\mathbb{Q}[w_n] : \mathbb{Q})$ el grupo de Galois de $\mathbb{Q}[w_n]$ sobre $\mathbb{Q}$, esto es Γ es el grupo de todos los automorfismos $\sigma : \mathbb{Q}[w_n] \longrightarrow \mathbb{Q}[w_n]$ tal que $\sigma(r) = r$, para todos $r \in Q$.

Un hecho importante es que si $p(z)$ es un polinomio con coeficientes racionales, entonces Γ permuta las raíces de p en $\mathbb{Q}[w_n]$.

Prueba. Supóngase que $p(z) = a_k\sigma^k + a_{k-1}\sigma^{k-1} + a_{k-2}\sigma^{k-2} + \cdots + a_0$, con $a_i \in \mathbb{Q}$. Entonces:

$$\begin{aligned} p(\sigma(\alpha)) &= a_k\sigma(\alpha)^k + a_{k-1}\sigma(\alpha)^{k-1} + a_{k-2}\sigma(\alpha)^{k-2} + \cdots + a_0 \\ &= \sigma(a_k\alpha^k + a_{k-1}\alpha^{k-1} + a_{k-2}\alpha^{k-2} + \cdots + a_0) \\ &= \sigma(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ya que $\sigma(a_i) = \varphi_i$, $\forall i$. □

Corolario 5.3. *Sea α un a n-ésima raíz de la unidad. Entonces $\sigma(\alpha)$ es también una n-ésima raíz de la unidad.*

Prueba. Aplicando lema (5.3) al polinomio $z^n - 1$. □

Corolario 5.4. *Sea $\alpha \in \mathbb{Q}[w_n]$ un entero algebraico y $\sigma \in \Gamma$. Entonces $\sigma(\alpha)$ es un entero algebraico.*

Prueba. Si α es raíz de un polinomio p con coeficientes enteros, implica que también lo es $\sigma(\alpha)$ por le lema (5.3). □

Teorema 5.4. *Sea $\alpha \in \mathbb{Q}[w_n]$, entonces $\sigma(\alpha) = \alpha$ para todo $\alpha \in \Gamma$ si y sólo si $\alpha \in \mathbb{Q}$.*

Corolario 5.5. *Sea $\alpha \in \mathbb{Q}[w_n]$, entonces $\prod_{\sigma\in\Gamma} \sigma(\alpha) \in \mathbb{Q}$*

Prueba. Sea $\tau \in \Gamma$, entonces tenemos:

$$\tau\left(\prod_{\sigma\in\Gamma} \sigma(\alpha)\right) = \prod_{\sigma\in\Gamma} \tau\sigma(\alpha) = \prod_{\rho\in\Gamma} \rho(\alpha)$$

donde la última igualdad se obtiene mediante $\rho = r\sigma$. Por el Teorema (**5.4**) se concluye lo deseado. □

El siguiente teorema es de naturaleza técnica, pero es crucial para la prueba del teorema de Burnside.

Teorema 5.5. *Sea G un grupo de orden n y sea C una clase conjugada de G. Si $\varphi : G \longrightarrow GL_d(G)$ es un irreducible con $|C| = h$ donde h es un primo relativo de d. Entonces o bien:*

1. *Existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $\varphi_g = \lambda I$ para todo $g \in C$; ó*

2. *$\chi_\varphi(g) = 0$, para todo $g \in C$.*

Prueba. Sea $\chi = \chi_\varphi$, notemos que si $\varphi_g = \lambda I$ para algún $g \in C$, entonces $\varphi_x = \lambda I$ para todo $x \in C$, ya que la conjugación de una matriz escalar no la cambia:

$$\varphi_x = \varphi_{y^{-1}gy} = \varphi_{y^{-1}} \lambda I \varphi_y = \lambda I.$$

También, dado que χ es una función clase, si se anula en cualquier elemento de C, debe anularse en todos los elemento de C: si $x, y \in C$ tal que $\chi(y) = 0$, entonces $x = yg^{-1}y$, luego $\chi(x) = \chi(y) = 0$.

Por lo tanto es suficiente mostrar que si $\varphi_g \neq \lambda I$ para algún $g \in C$, entonces $\chi_g(g) = 0$. Por teorema (5.2), sabemos que $h\chi(g)/d$ es un entero algebraico; también $\chi(g)$ es un entero algebraico por corolario (5.2). Además $mcd(d, h) = 1$, podemos hallar enteros k, j tal que $kh + jd = 1$. Sea

$$\alpha = K(\frac{k}{d}\chi(g)) + j\chi(g) = \frac{kh + jd}{d}\chi(g) = \frac{\chi(g)}{d}$$

Entonces α es un número entero algebraico. Por el corolario (3.3) φ_g es diagonalizable y sus eigevalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_d$ son las n-*ésimas* raíces de la unidad. Como φ_g es diagonalizable pero no una matriz escalar, estos eigevalores no son todos iguales. Aplicando lema (5.2) a $\chi(g) = \lambda_1 + \lambda_2, + \cdots + \lambda_d$, se tiene:

$$|\chi(g)| < d, \text{ y así } |\alpha = |\tfrac{\chi(g)}{d}| < 1|.$$

También notemos que $\alpha \in \mathbb{Q}[w_n]$. Sea $\sigma \in \Gamma$ por corolario (5.4) implica que $\sigma(\alpha)$ es un entero algebraico y por corolario (5.3).

$$\sigma(\chi(g)) = \sigma(\lambda_1) + \sigma(\lambda_2), \cdots, \sigma(\lambda_d)$$

afirmamos que es una suma de d n-ésimas raíces de la unidad, no todos iguales. Por lo tanto lema (5.2).

$$|\sigma(\alpha)| = |\frac{\sigma(\chi(g))}{d}| < 1$$

Poniendo todo esto juntos, obtenemos que $q = \prod_{\sigma \in \Gamma} \lambda(\alpha)$ es un entero algebraico con:

$$|q| = |\prod_{\sigma \in \Gamma} \sigma(\alpha)| = \prod_{\sigma \in \Gamma} |\sigma(\alpha)| < 1$$

Pero corolario (5.5) afirma que $q \in \mathbb{Q}$. Por lo tanto, $q \in \mathbb{Z}$ por teorema (5.1). Como $|q| < 1$, se puede concluir que $q = 0$ y por lo tanto $\sigma(\alpha) = 0$ para algunos $\sigma \in \Gamma$, por que σ es un automorfismo, esto implica $\alpha = 0$.
Así concluimos $\chi(g) = 0$ como se quería probar. $\square$

Lema 5.4. *Sea G un grupo finito no abeliano. Si G tiene una clase de conjugación $C \neq \{1\}$ tal que $|C| = p^t$ con p primo, $t \geqslant 0$. Entonces G es no simple.*

Prueba. La demostración se realizará por contradicción. Supongamos que G es simple y sea $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \varphi^{(3)}, \ldots, \varphi^{(s)}$ representaciones irreducibles de G con $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_s$ sus respectivos caracteres y $d_1, d_2, \ldots, d_s$ sus respectivos grados. Podemos tomar $\varphi^{(1)}$ como la representación trivial. Como G es simple tenemos que $Ker\varphi^{(k)} = \{e\}$ para $k > 1$ (Si $Ker\varphi^{(k)} = G$ entonces φ^k seria una representación trivial). Por lo tanto $\varphi^{(k)}$ es inyectivo para $k > 1$ y como G es no abeliano y $\mathbb{C}^*$ es abeliano, se deduce que $d_k > 1$ para $k > 1$. Asimismo por que G es simple y no abeliano, $Z(G) = \{1\}$ implica que $t > 0$, ya que si $t = 0$, entonces $|C| = 1$, $C = \{g\}$, luego para $x \in C$ se tiene $xgx^{-1} = 1$, entonces $g \in Z(G) = \{1\}$, $g = 1$ por lo tanto $C = \{1\}$ lo cual es una contradicción.

Sean $g \in C$, $k > 1$ y Z_k el conjunto de todos los elementos $x \in G$ tal que $\varphi_x^{(k)}$ es una matriz escalar.
Sea:

$$H = \{\lambda I_{d_k} | \lambda \in \mathbb{C}^*\}$$

entonces H es un subgrupo de $GL_{d_k}(\mathbb{C})$ contenida en el centro y por lo tanto normal. Como Z_k es la imagen inversa de H bajo $\varphi^{(k)}$, se concluye que es un subgrupo normal de G.
Por otro lado tenemos que si $d_k > 1$, no se puede tener $Z_k = G$, entonces $Z_k = \{1\}$ por la simplicidad de G.
Supongamos por un momento que $p \nmid d_k$, entonces $\chi_k(g) = 0$ por el teorema **(5.5)**.
Sea L la representación regular de G, es decir $L \sim d_1\varphi^{(1)} \oplus \cdots \oplus d_s\varphi^{(s)}$, $g \neq 1$ y por teorema **(4.4)** obtenemos

$$\begin{aligned} 0 = \chi L(g) &= d_1\chi_1(g) + \cdots + d_s\chi_s(g) \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{s} d_k\chi_k(g) \\ &= 1 + \sum_{p|d_k} d_k\chi_k(g) \\ &= 1 + pz \end{aligned}$$

donde z es un entero algebraico. Por lo tanto $1/p = -z$ es un entero algebraico y por lo tanto un entero por teorema **(5.1)**. Por lo que se llega a una contradicción, lo que nos lleva a afirmar como correcta el lema. $\square$

Antes de enunciar el teorema de Burnside se hace recuerdo resultados importantes de grupos solubles que son importantes para la demostración, los cuales son:
• Todo $p-grupo$ finito es soluble.
• Si $H \lhd G$ es tal que H y G/H son solubles, entonces G es soluble.

Teorema 5.6. ***(Teorema Burnside)*** *Sea G es un grupo de orden $p^a q^b$ con p, q primos. Entonces G es soluble.*

Prueba. Por inducción sobre el orden de G (de hecho, sobre $a+b$). Si $a+b=1$ entonces $a=1$ y $b=0$, o viceversa ($a=0$ y $b=1$); en cualquier caso G sería de orden primo y por lo tanto soluble, como lo señala el teorema (1.3). Supongamos ahora que $a+b>1$ y que el teorema es válido para cualquier grupo G de orden $p^r q^s$ con $r+s<a+b$, lo cual es vine a ser nuestra *hipótesis de inducción.*
Sea Q un $q-subgrupo$ de Sylow de G. Si $Q=\{e\}$, entonces G es un $p-grupo$ y por lo tanto es soluble. Supongamos entonces que $Q \neq \{e\}$; como Q es un $q-grupo$, su centro $Z(Q) \neq \{e\}$, y así existe un $e \neq g \in Z(Q)$, por lo que g conmuta con todos los elementos de Q y así $Q \subseteq C_G(g)$. Las inclusiones $Q \subseteq C_G(g) \subseteq G$ implican que $[G:Q] = [G:C_G(g)][C_G(g):Q]$ y como $\mid Q \mid = q^b$ (por ser un $q-subgrupo$ de Silow), entonces

$$[G:Q] = \frac{\mid G \mid}{\mid Q \mid} = \frac{p^a q^b}{q^b} = p^a.$$

Se sigue que $[G:C_G(g)]$ divide a p^a y así $[G:C_G(g)] = p^t$, para algún $t \leqslant a$.
CASO 1. Si $t=0$, $G=C_G(g)$ y así g conmuta con todos los elementos de G, por lo que $\{e\} \neq g \in Z(G)$ y por lo tanto $\{e\} \neq Z(G) \lhd G$, y como G no es abeliano $Z(G) \neq G$, y así G no es simple.
CASO 2. Si $t>0$, como $p^t = [G:C_G(g)]$ es el número de elementos en la clase de conjugación de g, entonces por el lema anterior implica que G no es simple.
En cualquier de los dos casos hemos mostrado que G no es simple y así tiene un subgrupo normal propio $H \lhd G$ que, por el teorema de Lagrange, tienen orden de la forma $\mid H \mid = p^r q^s$ con $r+s<a+b$ y consecuentemente, por la hipótesis de inducción, H es soluble. El cociente G/H también tiene orden de la forma $p^\alpha q^\beta$ con $\alpha+\beta<a+b$, y por lo tanto también es soluble por la hipótesis de inducción. Del teorema (1.5)(3) se sigue que G también es soluble. $\square$

5.4. Conclusiones y recomendaciones

Con la teoría de representaciones se estableció, que se puede estudiar a los grupos de manera equivalente como espacio de matrices tomando a la operación del grupo como una multiplicación de matrices. Es decir se analiza el grupo utilizando las propiedades de matrices y transformaciones lineales.

Estudiando representaciones de grupos finitos se establece; que toda representación de un grupo finito es equivalente a una representación unitaria y que cada representación es completamente reducible como se demostró con el teorema de Maschke.

En el desarrollo de la teoría de caracteres se mostró resultados importantes sobre representaciones como ser; los caracteres de dos representaciones equivalentes son iguales.

Se mostró y probó el lema de Schur en las relaciones de ortogonalidad y también se estudió la representaciones de grupos abelianos.

Con el teorema de Burnside se puede clasificar a los grupos simples y solubles tomando en cuenta el orden que tienen. Es decir se mostró que cualquier grupo G de orden $p^a q^b$, con p, q primos y $a, b \in \mathbb{N}$ es soluble.

El teorema de Burnside no se generaliza a grupos de orden $p^a q^b f^c$ con p, q, f primos y $a, b, c \in \mathbb{N}$, se recomienda hallar contra ejemplos para la demostración de la afirmación.

Bibliografía

[1] Representation Theory of Finite Groups: An Introductory Approach, Benjamin Steinberg, Springer, 2012

[2] Representations and Characters of Groups, Second Edition, Gordon James, Martin Liebeck, Cambridge, 2001

[3] Noncommutative rings,The carus mathematical monographs, Third Edition,Herstein, I. N.

[4] Introducción a la Teoría de Grupos, Sociedad Matemática Mexicana, Felipe Zaldivar, 2006

[5] Álgebra Abstracta, Grupo Editorial Iberoamericana , I. N. Herstein, 1988

[6] Álgebra Lineal, Textos del IMCA, Elon Lages Lima, 1998