Universidad Mayor de San Andrés
Facultad de Ciencias Puras y Naturales

Carrera de Matemática

Análisis Cuaterniónico

Proyecto de Grado Para Obtener el Diploma Académico de Licenciatura en Matemática

Presentado por: **Univ. Jhonny Kama Mamani**
kamajhonny@gmail.com

Tutor: **Dr. Victor Hugo Patty Yujra**
Docente Carrera de Matemática – UMSA
vhpatty@gmail.com

La Paz - Bolivia
2019

Dedicado a la gente más
importante en mi vida, mi familia.
A mis queridos padres Carlos y Maruja
y a mis hermanos Yhovana, Richar, Eva y Nelson
los quiero a todos más de lo que puedo expresar con palabras.

En memoria de
mi querida abuelita,
Asunta Condori Mamani.

Índice general

Agradecimientos **III**

Introducción **IV**

1. El álgebra de los cuaternios **1**

1.1. Los cuaternios . . . 1
1.2. Propiedades algebraicas de los cuaternios . . . 2
1.3. El conjugado, la norma y la inversa . . . 3
1.4. La raíz cuadrada de un cuaternio . . . 6
1.5. Representación polar de un cuaternio . . . 9

2. Diferenciabilidad sobre los cuaternios **11**

2.1. La derivada cuaterniónica . . . 12
2.2. Formas diferenciales cuaterniónicas valuadas . . . 16
2.3. Demostración del Teorema 1 . . . 25
2.4. Funciones regulares sobre los cuaternios . . . 29
2.5. Construcción de funciones regulares . . . 34

3. Teoría de integración sobre los cuaternios **39**

3.1. Resultados fundamentales . . . 39
3.2. Terema de Liouville . . . 41
3.3. Construcción de funciones regulares y aplicaciones . . . 43
3.4. El teorema de Cauchy . . . 49
3.5. La fórmula integral de Cauchy . . . 51

4. Conclusiones **53**

A. Formas diferenciales en $\mathbb{R}^4$ **54**

A.1. Producto exterior de formas en $\mathbb{R}^4$ . . . 60
A.2. Derivada exterior de formas en $\mathbb{R}^4$ . . . 62

Bibliografía **64**

Agradecimientos

Quiero agradecer al profesor Dr. Victor Hugo Patty Yujra, mi profesor tutor por todas sus sugerencias y apoyo durante la elaboración de este trabajo, de la misma manera quiero agradecer al Seminario de Dinámicas de Control de la carrera de Matemática que esta a cargo del Dr. Efraín Cruz, por brindarme la oportunidad de poder desarrollar mi trabajo. Expresar también mi gratitud al M.Sc. Miguel Yucra y M.Sc. Willy Condori que siempre confiaron en mi y me apoyaron en todo este proceso que además contribuyeron en mi formación matemática, asimismo a mis profesores.

Por supuesto, este trabajo nunca hubiera sido posible realizar sin el apoyo, paciencia, confienza y aprecio de mi familia, especialmente de mis padres *Carlos* y *Maruja*, por quienes mi deuda siempre será infinita. (Esto debí hacer antes, pero ahora se que ella esta en todo lo que hago y me cuida desde el cielo), agradecer a mi abuelita que en paz descance que a sido una Mamá mas para mi, que me apoyo y me cobijo al inicio de mi carrera.

Me gustaría terminar con un agradecimiento muy especial a mis hermanos Yhovana, Richar, Eva y Nelson porque fueron más que hermanos, mis mejores amigos. En especial a Yhovana y Richar que me brindaron un apoyo incondicional en todo este proceso.

Jhonny Kama Mamani

Noviembre, 2019.

Introducción

Los números complejos han sido objeto de estudio desde los tiempos de Cardano, de quien podemos decir que fue el primero en multiplicar dos números complejos, y al igual que él, varios matemáticos trabajaron con números complejos como raíces de polinomios, aunque sin estar plenamente conscientes de su verdadero significado. Euler, por otro lado, contribuyó de manera significativa en darles un estatus a los números complejos, fue él quien introdujo la notación $i := \sqrt{-1}$.

Un paso que también fue muy importante en la comprensión de los números complejos se dio con la representación gráfica de estos. Gauss fue el que le dio un completo sentido a esa representación gráfica al identificar un número complejo $a + ib$ con el punto (a, b) del plano, y a él le debemos el término *número complejo*.

Por otra parte, la estructura algebraica de los números complejos estaba claramente definida pues la suma y el producto de complejos se entendían desde mucho antes de la representación gaussiana. Dados dos elementos $z = a + ib$ y $w = c + id$ en $\mathbb{C}$, su suma esta definido por:

$$z + w := (a + c) + i\ (b + d),$$

y su producto viene dado por:

$$zw := (ac - bd) + i\ (ad + bc).$$

Los cuaternios surgieron de los intentos de Sir William Rowan Hamilton por generalizar las operaciones (aritméticas) de los números complejos de una manera que fuese aplicable en $\mathbb{R}^3$. Como los números complejos tienen dos partes, una *real* y otra *imaginaria*, Hamilton primeramente conjeturó que necesitaba otra componente imaginaria adicional. Durante años batalló intentando dar sentido a un insatisfactorio sistema algebraico que contenía una parte real y dos imaginarias.

Sin embargo, es imposible definir un producto en $\mathbb{R}^3$ que generalice la multiplicación de números complejos. En efecto, supongamos que tenemos una base para $\mathbb{R}^3$ digamos $\{1, i, j\}$. Así, cualquier $v \in \mathbb{R}^3$ se puede expresar como $v = a + ib + jc$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Supongamos que se tiene un producto en $\mathbb{R}^3$ que extiende al producto de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, Luego, $ij = \lambda + i\mu + j\kappa$, donde $\lambda, \mu, \kappa \in \mathbb{R}$, y así tenemos

$$\begin{aligned} i(ij) &= i(\lambda + i\mu + j\kappa) \\ &= i\lambda + i^2\mu + ij\kappa \\ &= i\lambda - \mu + (\lambda + i\mu + j\kappa)\kappa \\ &= (\lambda\kappa - \mu) + i(\lambda + \mu\kappa) + j\kappa^2, \end{aligned}$$

por otro lado, como se quiere que el producto en $\mathbb{R}^3$ sea asociativo entonces $i(ij) = (ii)j = i^2 j = -j$ de esta manera:

$$-j = (\lambda\kappa - \mu) + i(\lambda + \mu\kappa) + j\kappa^2,$$

por lo que $\kappa^2 = -1$, lo cual es una contradicción, pues $\kappa \in \mathbb{R}$. Así las operaciones de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ no pueden extenderse a $\mathbb{R}^3$.

Fue hasta el año 1843, a la edad de 38 años, que Hamilton en un chispazo de inspiración inventó un sistema de tres partes imaginarias que se convirtió en el álgebra de los cuaternios. Según las propias palabras de Hamilton, el día 16 de octubre de 1843 iba caminando con su esposa a lo largo del Gran Canal en Dublin, Irlanda, en camino a una reunión de la Real Academia Irlandesa, que él presidía, cuando de repente el pensamiento le llegó. Concerniente a ese momento, él después le escribe una carta a su hijo de la cual citamos un fragmento:

> . . . Ni tampoco pude resistir el impulso -irracional como pudo haber sido- de grabar con una navaja en una roca del puente de Brougham, cuando lo cruzamos, la fórmula fundamental con los símbolos, i, j, k, como sigue: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ y $ijk = -1$ la cual contiene la solución al problema . . .

El propósito de este proyecto de grado es desarrollar una teoría de diferenciabilidad e integración sobre los cuaternios $\mathbb{H}$ que se encuentra definido como el conjunto

$$\mathbb{H} := \Big\{ q = t + i\ x + j\ y + k\ z \mid t, x, y, z \in \mathbb{R} \Big\}$$

donde i, j y k satisfacen las relaciones $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ y $ij = -ji = k$. Es posible definir sobre $\mathbb{H}$ una suma y un producto que le brinda una estructura de casi-campo, i.e. $\mathbb{H}$ es un álgebra asociativa, con unidad, de división pero no conmutativa. Como en los números complejos, podemos describir algunas propiedades algebraicas como ser: la raíz cuadrada de un cuaternio, la representación polar y la fórmula de De Moivre que a diferencia de los números complejos no son triviales de obtener [9].

Posteriormente presentaremos la noción de la derivada de una función $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ usando la noción de límite; ya que $\mathbb{H}$ no es conmutativa, veremos que esta definición implica que f debe ser lineal, i.e. $f(q) = a + q \cdot b$ con $a, b \in \mathbb{H}$ [11].

En consecuencia, es necesario definir de otra manera la noción de la derivada sobre $\mathbb{H}$. Fue hasta el año 1935, cuando Rudolf Fueter [3] propuso una definición de *función regular* (para funciones cuaterniónicas de variable cuaterniónica) usando una noción análoga a las ecuaciones de Cauchy-Riemann, que citamos a continuación.

Una función $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ es regular en $q \in \mathbb{H}$ si es diferenciable en q (en el sentido real de cuatro variables) y existe $f'(q) \in \mathbb{H}$ tal que:

$$d\left[(dq \wedge dq) \cdot f\right] = Dq \cdot f'(q). \tag{1}$$

Como para el caso de una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, las ecuaciones de Cauchy Riemann $\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ (siendo la variable $z = x + iy$) son equivalentes a la existencia de un número complejo $f'(z)$ tal que $df = f'(z)dz$, para una función $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, las ecuaciones de Cauchy-Riemann-Fueter

$$\frac{\partial f}{\partial t} + i\,\frac{\partial f}{\partial x} + j\,\frac{\partial f}{\partial y} + k\,\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \tag{2}$$

(siendo la variable $q = t + i\;x + j\;y + k\;z$) equivalen a la existencia de un cuaternio $f'(q)$ que satisface (1).
A partir de las ecuaciones de Cauchy-Riemann-Fueter (2), se obtienen resultados importantes, a continuación citamos uno de ellos. Si una función $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ es regular y dos veces (real) diferenciable, entonces f es una función armónica, es decir, su laplaciano sobre $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$ es identicamente cero. Este resultado nos brinda una manera de construir funciones $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ regulares usando funciones reales armónicas sobre $\mathbb{R}^4$. Finalmente, con esta rica teoría que se tiene y usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann-Fueter (2), demostraremos los siguientes teoremas fundamentales: teorema de Liouville, teorema de Cauchy y la fórmula integral de Cauchy [1].

El presente trabajo está dividido en tres capítulos y un apéndice. En el primer capítulo se analizan las propiedades algebraicas básicas sobre los cuaternios, se establece la notación, y se introducen algunos conceptos algebraicos especiales. En el segundo capítulo se estudia la diferenciabilidad sobre los cuaternios, donde presentaremos la noción de la derivada de una función $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ usando la noción de límite, y se describen formas diferenciales sobre $\mathbb{H}$ cuaterniónicas valuadas, posteriormente definimos una función regular y deducimos funciones regulares a partir de funciones reales armónicas sobre $\mathbb{R}^4$. En el tercer capítulo, construiremos más funciones regulares a partir de una funcion real diferenciable sobre $\mathbb{R}^4$ arbitraria, Como aplicación de estudio de funciones regulares en $\mathbb{H}$, veremos como reescribir las ecuaciones de Maxwell, de la teoría electromagnética, como una sola ecuación diferencial cuaterniónica. Posteriomente mostramos los resultados centrales que son el: Teorema de Liouville, teorema de Cauchy y la fórmula integral de Cauchy.

CAPÍTULO 1

El álgebra de los cuaternios

> No hay filosofía que no este basada en el conocimiento de los fenómenos, pero para obtener algún beneficio de este conocimiento es absolutamente necesario ser un matemático.
>
> DANIEL BERNOULLI.

En este capítulo desarrollamos los fundamentos necesarios para la comprensión del presente trabajo. Empezaremos definiendo el álgebra de los cuaternios y estudiaremos algunas propiedades algebraicas elementales y geométricas. También estudiaremos las propiedades como el conjugado, la norma y la inversa de un cuaternio que se definen de manera análoga a la variable compleja. Posteriormente estudiaremos y describiremos de manera explícita la raíz cuadrada de un cuaternio. Finalmente hablaremos de la representación polar de un cuaternio. Para la comprensión y el seguimiento de este capítulo se recomienda [9].

SECCIÓN 1.1

Los cuaternios

El álgebra de los cuaternios se encuentra definido como el conjunto

$$\mathbb{H} := \Big\{ q = t + i\ x + j\ y + k\ z \mid t, x, y, z \in \mathbb{R} \Big\} \tag{1.1}$$

donde, las unidades imaginarias i, j y k satisfacen las relaciones

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \qquad \text{y} \qquad ij = -ji = k. \tag{1.2}$$

Usando las relaciones en (1.2), de un cálculo directo tenemos $jk = i$, $kj = -i$, $ki = j$ y $ik = -j$.

Dados dos elementos $q = t + ix + jy + kz$ y $q_0 = t_0 + ix_0 + jy_0 + kz_0$ de $\mathbb{H}$, definimos su suma por

$$q + q_0 := (t + t_0) + i(x + x_0) + j(y + y_0) + k(z + z_0)$$

y su producto por la expresión

$$q \cdot q_0 := (tt_0 - xx_0 - yy_0 - zz_0) + i(tx_0 + t_0x + yz_0 - zy_0) + j(ty_0 + t_0y + zx_0 - xz_0) + k(tz_0 + t_0z + xy_0 - yx_0).$$

De manera natural, podemos identificar un cuaternio $q = t + ix + jy + kz \simeq (t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ y por lo tanto se tiene definida una estructura de producto sobre el espacio Euclideano de dimensión cuatro. Si consideramos la base canónica de $\mathbb{R}^4$,

$$e_1 = (1, 0, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1, 0) \text{ y } e_4 = (0, 0, 0, 1),$$

el producto sobre $\mathbb{H}$, implica que $e_2^2 = e_3^2 = e_4^2 \simeq (-1, 0, 0, 0) \simeq -1$.

En la siguiente sección, veremos que el conjunto $\mathbb{H}$, equipado con la suma y el producto definidos encima, le brinda una estructura de álgebra asociativa, con unidad, de división y no conmutativa. Note que, la última propiedad distingue a $\mathbb{H}$ del campo de los números complejos; se dice a veces que $\mathbb{H}$ es un casi-campo.

SECCIÓN 1.2

Propiedades algebraicas de los cuaternios

Consideremos q , q_0 , $q_1 \in \mathbb{H}$. La suma y el producto sobre los cuaternios, satisfacen las siguientes propiedades:

P1. (Asociatividad) Para cualesquiera q , q_0 , $q_1 \in \mathbb{H}$, tenemos $(q + q_0) + q_1 = q + (q_0 + q_1)$.

P2. (Conmutatividad) Para cualesquiera q , $q_0 \in \mathbb{H}$, se tiene $q + q_0 = q_0 + q$.

P3. (Neutro aditivo) Existe $0 := 0 + i0 + j0 + k0 \in \mathbb{H}$ tal que $q + 0 = q$ para todo $q \in \mathbb{H}$.

P4. (Inverso aditivo) Para todo $q = t + ix + jy + kz \in \mathbb{H}$, existe $-q := -t - ix - jy - kz \in \mathbb{H}$ tal que $q + (-q) = 0$.

P5. (Asociatividad) Para cualesquiera q , q_0 , $q_1 \in \mathbb{H}$, se tiene $(q \cdot q_0) \cdot q_1 = q \cdot (q_0 \cdot q_1)$.

P6. (**No conmutativo**) En general, $q \cdot q_0 \neq q_0 \cdot q$.

P7. (Neutro multiplicativo) Existe $1 := 1 + i0 + j0 + k0 \in \mathbb{H}$ tal que $q \cdot 1 = q$ para todo $q \in \mathbb{H}$.

P8. (Inverso multiplicativo) Para todo $q \neq 0 \in \mathbb{H}$, existe (un único) $q^{-1} \in \mathbb{H}$ tal que $q \cdot q^{-1} = 1$.

P9. (Distributividad) Para cualesquiera q , q_0 , $q_1 \in \mathbb{H}$, se satisface

$$q \cdot (q_0 + q_1) = q \cdot q_0 + q \cdot q_1 \qquad \text{y} \qquad (q_0 + q_1) \cdot q = q_0 \cdot q + q_1 \cdot q.$$

Las propiedades P1-P5, P7 y P9 se verifican por medio de un cálculo directo. Para ejemplificar veamos la demostración de P2. Dados $q = t+ix+jy+kz$ y $q_0 = t_0+ix_0+jy_0+kz_0 \in \mathbb{H}$, tenemos

$$\begin{aligned} q + q_0 &= (t + ix + jy + kz) + (t_0 + ix_0 + jy_0 + kz_0) \\ &= (t + t_0) + i(x + x_0) + j(y + y_0) + k(z + z_0) \\ &= (t_0 + t) + i(x_0 + x) + j(y_0 + y) + k(z_0 + z) \\ &= (t_0 + ix_0 + jy_0 + kz_0) + (t + ix + jy + kz) \\ &= q_0 + q \end{aligned}$$

como queríamos.

La propiedad P6 es evidente pues por ejemplo, $ij \neq ji$. La propiedad P8 será verificada en la siguiente sección donde daremos una expresión para q^{-1}.

Adicionalmente a las propiedades P1-P9, tenemos la siguiente propiedad cuya verificación es directa:

P10. Para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $q \in \mathbb{H}$, tenemos $(\alpha\beta) \cdot q = \alpha(\beta \cdot q)$.

Resumimos las propiedades P1-P10 de la siguiente manera: $\mathbb{H}$ es un álgebra real asociativa, con unidad, de división y no conmutativo.

SECCIÓN 1.3

El conjugado, la norma y la inversa

Dado $q = t + ix + jy + kz \in \mathbb{H}$ definimos su *parte real* y su *parte pura* (análogos a la parte real e imaginaria de los números complejos), respectivamente por las expresiones

$$\mathcal{R}e(q) := t \qquad \text{y} \qquad \mathcal{P}u(q) := ix + jy + kz,$$

así, podemos escribir $q = \mathcal{R}e(q) + \mathcal{P}u(q)$. Note que $\mathcal{R}e$ y $\mathcal{P}u$ son aplicaciones lineales sobre $\mathbb{R}$, es decir,

$$\mathcal{R}e(\alpha q + q_0) = \alpha\mathcal{R}e(q) + \mathcal{R}e(q_0) \quad \text{y} \quad \mathcal{P}u(\alpha q + q_0) = \alpha\mathcal{P}u(q) + \mathcal{P}u(q_0),$$

para cualesquiera q , $q_0 \in \mathbb{H}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Diremos que un cuaternio q es puro si $\mathcal{R}e(q) = 0$.

La conjugación. Para $q = t + ix + jy + kz \in \mathbb{H}$, su *conjugado* se encuentra definido por la expresión

$$\overline{q} := \mathcal{R}e(q) - \mathcal{P}u(q) = t - ix - jy - kz.$$

La operación de conjugación sobre los cuaternios satisface las siguientes propiedades:

C1. $\overline{q + q_0} = \overline{q} + \overline{q_0}$

C2. $\overline{q \cdot q_0} = \overline{q_0} \cdot \overline{q}$

C3. $\overline{\overline{q}} = q$

C4. $\mathcal{R}e(q) = \dfrac{q + \overline{q}}{2}$

C5. $\mathcal{P}u(q) = \dfrac{q - \overline{q}}{2}$

C6. $q \cdot \overline{q} = \overline{q} \cdot q$

para cualesquiera q , $q_0 \in \mathbb{H}$. La verificación de las propiedades C1-C6 es directa, para ejemplificar veamos C2. Para $q = \mathcal{R}e(q) + \mathcal{P}u(q)$ y $q_0 = \mathcal{R}e(q_0) + \mathcal{P}u(q_0) \in \mathbb{H}$, tenemos

$$\begin{aligned} q \cdot q_0 &= [\mathcal{R}e(q) + \mathcal{P}u(q)] \cdot [\mathcal{R}e(q_0) + \mathcal{P}u(q_0)] \\ &= \mathcal{R}e(q)\mathcal{R}e(q_0) + \mathcal{R}e(q)\mathcal{P}u(q_0) + \mathcal{P}u(q)\mathcal{R}e(q_0) + \mathcal{P}u(q)\mathcal{P}u(q_0), \end{aligned}$$

así, luego tenemos

$$\begin{aligned} \overline{q \cdot q_0} &= \mathcal{R}e(q)\mathcal{R}e(q_0) - \mathcal{R}e(q)\mathcal{P}u(q_0) - \mathcal{P}u(q)\mathcal{R}e(q_0) + \mathcal{P}u(q)\mathcal{P}u(q_0) \\ &= \mathcal{R}e(q_0)\mathcal{R}e(q) - \mathcal{R}e(q_0)\mathcal{P}u(q) - \mathcal{P}u(q_0)\mathcal{R}e(q) + \mathcal{P}u(q_0)\mathcal{P}u(q) \\ &= [\mathcal{R}e(q_0) - \mathcal{P}u(q_0)] \cdot [\mathcal{R}e(q) - \mathcal{P}u(q)] \\ &= \overline{q_0} \cdot \overline{q}. \end{aligned}$$

como queríamos.

Por otro lado de forma análoga veamos C4. Tomemos los cuaternios $q = \mathcal{R}e(q) + \mathcal{P}u(q)$ y $q_0 = \mathcal{R}e(q_0) + \mathcal{P}u(q_0)$, luego tenemos

$$\begin{aligned} q + \overline{q} &= [\mathcal{R}e(q) + \mathcal{P}u(q)] + [\mathcal{R}e(q) - \mathcal{P}u(q)] \\ &= 2\mathcal{R}e(q) \end{aligned}$$

como queríamos.

La norma de un cuaternio. La conjugación sobre los cuaternios nos permite definir una norma sobre $\mathbb{H}$ de la siguiente manera. Para $q = t + ix + jy + kz \in \mathbb{H}$, de un cálculo directo tenemos $q \cdot \overline{q} = t^2 + x^2 + y^2 + z^2 \geq 0$, por lo tanto, definimos *la norma* de q como

$$\|q\| := \sqrt{q \cdot \overline{q}} = \sqrt{t^2 + x^2 + y^2 + z^2}.$$

Note que, bajo la identificación $q = t + ix + jy + kz \simeq (t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$, la norma de q en $\mathbb{H}$ conincide con la norma euclidiana del vector (t, x, y, z) en $\mathbb{R}^4$.

Dados $q,\ q_0 \in \mathbb{H}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, la norma sobre $\mathbb{H}$ satisface las siguientes propiedades:

N1. $\|\lambda q\| = |\lambda| \|q\|$

N2. $\|q \cdot q_0\| = \|q\| \cdot \|q_0\|$

N3. $\|q + q_0\| \leq \|q\| + \|q_0\|$

N4. $q = 0 \Leftrightarrow \|q\| = 0$

La prueba de las propiedades N1-N4 es inmediata. Note que las propiedades N1-N3-N4 afirman que $\mathbb{H}$ que es un espacio normado. Para ejemplificar veamos la demostración de N2. Para $q\ , q_0 \in \mathbb{H}$, tenemos

$$\begin{aligned}\|q \cdot q_0\| &= \sqrt{(q \cdot q_0) \cdot (\overline{q \cdot q_0})} = \sqrt{(q \cdot q_0) \cdot (\overline{q_0} \cdot \overline{q})} \\ &= \sqrt{(q \cdot \overline{q}) \cdot (q_0 \cdot \overline{q_0})} \\ &= \|q\| \cdot \|q_0\|\end{aligned}$$

como queríamos. Por ejemplo, la propiedad N3 es la desigualdad triangular de la norma de $\mathbb{R}^4$. Diremos que un cuaternio q es unitario si $\|q\| = 1$.

La inversa de un cuaternio. El conjugado y la norma sobre los cuaternios nos permite definir la *inversa* de un cuaternio. Para todo $q \neq 0 \in \mathbb{H}$, definimos

$$q^{-1} := \frac{\overline{q}}{\|q\|^2} \quad \in \quad \mathbb{H}$$

que satisface

$$q \cdot q^{-1} = q \cdot \frac{\overline{q}}{\|q\|^2} = \frac{q \cdot \overline{q}}{\|q\|^2} = 1.$$

Esto muestra la propiedad P8 de la sección anterior.

Notación. Un cuaternio $q = t + ix + jy + kz$ puede ser visto como la suma de un número real t y un vector $ix + jy + kz \simeq (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$, es decir

$$\mathbb{H} := \left\{ q = t + \vec{q} \mid t \in \mathbb{R},\ \vec{q} \in \mathbb{R}^3 \right\} \tag{1.3}$$

con $t \in \mathbb{R}$ y $\vec{q} := ix+jy+kz \in \mathbb{R}^3$. Usando la representación (1.3), la suma de dos cuaternios $q = t + \vec{q}$ y $q_0 = t_0 + \vec{q_0}$ viene dada por

$$\begin{aligned}q + q_0 &:= (t + \vec{q}) + (t_0 + \vec{q_0}) \\ &:= (t + t_0) + (\vec{q} + \vec{q_0})\end{aligned}$$

y su producto es dado por

$$\begin{aligned} q \cdot q_0 &:= (t + \vec{q}) \cdot (t_0 + \vec{q_0}) \\ &:= tt_0 + t\vec{q_0} + t_0\vec{q} + \vec{q}\vec{q_0} \\ &:= tt_0 + t\vec{q_0} + t_0\vec{q} - \langle \vec{q}, \vec{q_0} \rangle + \vec{q} \times \vec{q_0} \end{aligned}$$

donde, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interior en $\mathbb{R}^3$ y $\times$ es el producto vectorial de $\mathbb{R}^3$. Finalmente, la norma de $q \in \mathbb{H}$ satisface

$$\|q\|^2 = t^2 + \|\vec{q}\|^2 \tag{1.4}$$

donde $\|\vec{q}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$ es la norma del vector $ix + jy + kz \simeq (x, y, z)$ en $\mathbb{R}^3$.

SECCIÓN 1.4

La raíz cuadrada de un cuaternio

Considere un cuaternio $q \in \mathbb{H}$. Diremos que un cuaternio q_0 es una raíz cuadrada de q si satisface $q_0^2 = q$. Aquí, q_0^2 significa el producto de q_0 consigo mismo.

La expresión algebraica de la raíz cuadrada q_0 de un cuaternio $q = t + \vec{q}$ es descrita de la siguiente manera:

1. Si $\vec{q} \neq \vec{0}$, entonces q tiene dos raíces cuadradas dadas por la expresión

$$q_0 = \pm \left[\sqrt{\frac{\|q\| + t}{2}} + \frac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|} \sqrt{\frac{\|q\| - t}{2}} \right].$$

2. Si $\vec{q} = \vec{0}$, tenemos dos casos a tratar:

   a) si $t \geq 0$, q tiene dos raíces cuadradas dadas por

$$q_0 = \pm\sqrt{t}.$$

   b) si $t < 0$, q tiene infinitas raíces cuadradas dadas por

$$q_0 = \pm\sqrt{-t}\; u,$$

   donde u es un cuaternio unitario y puro (es decir, $\|u\| = 1$ y $\mathcal{R}e(u) = 0$).

En efecto, escribiendo $q = t + \vec{q}$, $q_0 = t_0 + \vec{q_0} \in \mathbb{H}$ la relación $q_0^2 = q$ se traduce en $(t_0 + \vec{q_0})^2 = t + \vec{q}$, es decir,

$$t_0^2 + 2t_0\vec{q_0} - \langle \vec{q_0}, \vec{q_0} \rangle + \vec{q_0} \times \vec{q_0} = t + \vec{q}. \tag{1.5}$$

Igualando la parte real y la parte pura de ambos lados de (1.5), ya que $\vec{q_0} \times \vec{q_0} = \vec{0}$, tenemos el sistema

$$\begin{cases} t_0^2 - \langle \vec{q_0}, \vec{q_0} \rangle & = t \\ 2t_0\vec{q_0} & = \vec{q} \end{cases} \tag{1.6}$$

Tomando normas en la segunda ecuación de (1.6) tenemos $\|2t_0\vec{q_0}\|^2 = 4t_0^2\|\vec{q_0}\|^2 = \|\vec{q}\|^2$ y reemplazando en esta última la primera ecuación de (1.6) conseguimos $4t_0^2(t_0^2 - t) = \|\vec{q}\|^2$, es decir, tenemos la ecuación cuadrática en t_0

$$4(t_0^2)^2 - 4t(t_0^2) - \|\vec{q}\|^2 = 0. \tag{1.7}$$

Resolviendo la ecuación cuadrática (1.7), por medio de la fórmula general, tenemos

$$t_0^2 = \frac{4t \pm \sqrt{(4t)^2 + 4(4)(\|\vec{q}\|^2)}}{2(4)} = \frac{t \pm \sqrt{t^2 + \|\vec{q}\|^2}}{2} = \frac{t \pm \|q\|}{2} \tag{1.8}$$

la última igualdad es válida por (1.4). En este punto debemos considerar dos casos:

1. Caso $t + \|q\| \geq 0$. Esta desigualdad es válida para todo $q = t + \vec{q} \in \mathbb{H}$; por lo tanto, de (1.8) tenemos

$$t_0 = \pm\sqrt{\frac{t + \|q\|}{2}}, \tag{1.9}$$

reemplazando esto en la segunda igualdad de (1.6) conseguimos

$$\vec{q_0} = \frac{1}{2t_0}\vec{q} = \pm\frac{1}{2\sqrt{\frac{t+\|q\|}{2}}}\vec{q}.$$

Note que, para todo $q = t + \vec{q} \in \mathbb{H}$, $\|q\| - t > 0$ si y sólo si $\vec{q} \neq \vec{0}$. En efecto

$$\begin{aligned} \|q\| - t > 0 \ &\Leftrightarrow \ \|q\|^2 > t^2 \\ &\Leftrightarrow \ \|q\|^2 - t^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow \ t^2 + \|\vec{q}\|^2 - t^2 \ \Leftrightarrow \ \|\vec{q}\|^2 > 0 \ \Leftrightarrow \ \vec{q} \neq 0. \end{aligned}$$

En este caso podemos racionalizar la última igualdad y obtener

$$\vec{q_0} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\vec{q}\sqrt{\|q\| - t}}{\sqrt{\|q\|^2 - t^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\vec{q}\sqrt{\|q\| - t}}{\sqrt{\|\vec{q}\|^2}} = \pm\frac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|}\sqrt{\frac{\|q\| - t}{2}}.$$

Por lo tanto, $q = t + \vec{q} \in \mathbb{H}$ con $\vec{q} \neq \vec{0}$, tiene dos raíces cuadradas dadas por la ecuación

$$q_0 = \pm\left[\sqrt{\frac{\|q\| + t}{2}} + \frac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|}\sqrt{\frac{\|q\| - t}{2}}\right].$$

En el caso en que $\vec{q} = \vec{0}$, tenemos dos posibilidades:

a) $t \geq 0$. Ya que $\|q\| = |t| = t$, de (1.9) conseguimos

$$t_0 = \pm\sqrt{\frac{t+|t|}{2}} = \pm\sqrt{t}.$$

Si $t = 0$, entonces $t_0 = 0$, y usando la primera igualdad de (1.6) tenemos que $\vec{q_0} = \vec{0}$; por lo tanto, la raíz cuadrada de $q = 0$ es

$$q_0 = 0.$$

Si $t > 0$, entonces $t_0 > 0$, y usando la segunda igualdad de (1.6) concluimos que $\vec{q_0} = \vec{0}$; así, las raíces cuadradas de $q = t + \vec{0}$, con $t > 0$ son

$$q_0 = \pm\sqrt{t} + \vec{0}.$$

b) $t < 0$. Ya que $\|q\| = |t| = -t$, de (1.9) conseguimos

$$t_0 = \pm\sqrt{\frac{t+|t|}{2}} = 0.$$

De la primera igualdad en (1.6) deducimos que $\|\vec{q_0}\| = \pm\sqrt{-t}$. De esta manera, las raíces cuadradas de un cuaternio $q = t + \vec{0}$, con $t < 0$, vienen dadas por

$$q_0 = 0 + (\pm\sqrt{-t})\ \frac{\vec{q_0}}{\|\vec{q_0}\|}.$$

Podemos generalizar esto escribiendo que un cuaternio $q = t + \vec{0}$, con $t < 0$, tiene infinitas raíces cuadradas que son de la forma

$$q_0 = \pm\sqrt{-t}\ u,$$

donde u es un cuaternio unitario y puro. Esto es evidente pues la condición unitario y puro implican que $u^2 = -1$.

2. Caso $t - \|q\| \geq 0$. Este caso es equivalente a $t \geq 0$ y $\vec{q} = \vec{0}$. En efecto

$$\begin{aligned} t - \|q\| \geq 0 \ &\Leftrightarrow\ t^2 \geq \|q\|^2 \\ &\Leftrightarrow\ t^2 \geq t^2 + \|\vec{q}\|^2 \ \Leftrightarrow\ 0 \geq \|\vec{q}\|. \end{aligned}$$

La última desigualdad es válida si $t \geq 0$ y $\vec{q} = 0$, que fue analizado encima.

Ejemplo 1. *Si* $q = t + ix + jy + kz \in \mathbb{H}$, *la ecuación cuaterniónica* $q^2 + 1 = 0$, *tiene infinitas soluciones. En efecto, como* $q^2 = -1$ *implica*

$$\left(t^2 - x^2 - y^2 - z^2\right) + i(2tx) + j(2ty) + k(2tz) = -1$$

igualando la parte escalar y la parte vectorial tenemos que:

$$\begin{cases} t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = -1 \\ 2tx = 0 \\ 2ty = 0 \\ 2tz = 0 \end{cases} . \tag{1.10}$$

Para satisfacer las tres últimas ecuaciones del sistema (1.10) $t = 0$ *ó bien* $x = y = z = 0$, *este último caso es imposible ya que en la primera ecuación del sistema* (1.10), *implicaría que*

$$t^2 = -1$$

lo cual es una contradicción porque $t \in \mathbb{R}$. *Por otro lado si* $t = 0$, *luego en la primera ecuación del sistema* (1.10) *tenemos que:*

$$\begin{aligned} -x^2 - y^2 - z^2 &= -1 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1. \end{aligned}$$

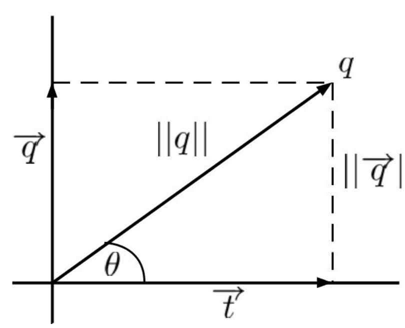
Por lo tanto la ecuación $q^2 + 1 = 0$ *con* $q \in \mathbb{H}$ *tiene como solución los puntos de la esfera* $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ *de centro* 0 *y de radio* 1.

SECCIÓN 1.5

Representación polar de un cuaternio

Considere $q = t + \vec{q} \in \mathbb{H}$, un cuaternio tal que $\vec{q} \neq \vec{0}$. A q le podemos asociar un (único) ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$ a través de las relaciones

$$\cos\theta = \frac{t}{||q||} \quad \text{y} \quad \sin\theta = \frac{||\vec{q}||}{||q||}$$



que se obtienen usando la definición de la función seno y coseno (vea la figura). Note que se satisface la relación

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

Por lo tanto, todo cuaternio $q = t + \vec{q}$, con $\vec{q} \neq \vec{0}$, puede representarse en forma polar como

$$q = \|q\| \left(\cos\theta + \frac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|} \sin\theta \right) \tag{1.11}$$

En un sistema de coordenadas polares, el ángulo θ es el ángulo entre el vector $q \in \mathbb{R}^4$ y el eje real. Llamaremos a θ el argumento o amplitud del cuaternio q, y lo denotaremos por $\theta := \operatorname{Arg}(q)$, donde $0 \leq \theta < 2\pi$. El ángulo θ es positivo cuando se mide en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj y negativo cuando se mide en el sentido de movimiento de las agujas del reloj.
Para cada $\vec{q} \in \mathbb{R}^3 = \mathcal{P}u(\mathbb{H})$, definimos la *unidad cuaterniónica* asociada por la relación

$$u(\vec{q}) := \frac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|} \quad \in \quad \mathbb{H};$$

notemos que $u(\vec{q})$ es un cuaternio unitario y puro, además, satisface la relación fundamental

$$u(\vec{q})^2 = \frac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|} \cdot \frac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|} = \frac{\vec{q} \cdot \vec{q}}{\|\vec{q}\|^2} = \frac{-\langle \vec{q}, \vec{q} \rangle + \vec{q} \times \vec{q}}{\|\vec{q}\|^2} = -1.$$

Esta igualdad justifica, en algún sentido, el nombre de unidad cuaterniónica para $u(q)$.

La fórmula de De Moivre. Considere $\vec{q} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^3 = \mathcal{P}u(\mathbb{H})$ y θ un número real. Para cualquier entero n, se satisface la fórmula

$$(\cos\theta + u(\vec{q}) \sin\theta)^n = \cos(n\theta) + u(\vec{q}) \sin(n\theta) \tag{1.12}$$

Demostración. Demostraremos esta fórmula usando inducción (cuando este es positivo) sobre n. En el caso en que es negativo, la prueba es similar.

Si $n = 0$, la igualdad es trivial.

Para $n = 1$, la igualdad es válida. Supogamos que la fórmula es válida para cierto valor n y veamos que el resultado es válido para $n + 1$. *En efecto,* tenemos

$$\begin{aligned}
(\cos\theta + u(\vec{q}) \sin\theta)^{n+1} &= (\cos\theta + u(\vec{q}) \sin\theta)^n (\cos\theta + u(\vec{q}) \sin\theta) \\
&= (\cos(n\theta) + u(\vec{q}) \sin(n\theta)) (\cos\theta + u(\vec{q}) \sin\theta) \\
&= \cos(n\theta) \cos\theta + u(\vec{q}) [\sin(n\theta) \cos\theta + \cos(n\theta) \sin\theta] - \sin(n\theta) \sin\theta \\
&= \cos(n+1)\theta + u(\vec{q}) \sin(n+1)\theta
\end{aligned}$$

como queríamos. □

CAPÍTULO 2

Diferenciabilidad sobre los cuaternios

> Ninguna cantidad de experimentación puede probar definitivamente que tengo razón; pero un solo experimento puede probar que estoy equivocado.
>
> Albert Einstein.

En este capítulo desarrollaremos y estudiaremos la teoría de diferenciabilidad sobre los cuaternios $\mathbb{H}$.

El desarrollo de este capítulo está dividido en cinco secciones. En la primera sección definiremos la derivada cuaterniónica como límite de un cociente incremental, donde veremos que la derivada con la noción de límite no es útil. En la segunda sección estudiaremos las formas diferenciales sobre $\mathbb{H}$ cuaterniónicas valuadas, que es de suma importancia para el desarrollo y estudio del presente trabajo. En la tercera sección, demostraremos el teorema que afirma que las únicas funciones $\mathbb{H}-$derivables son las funciones afines. En la cuarta sección definiremos de otra manera la noción de la derivada cuaterniónica, introducimos la noción de función regular que será equivalente a las ecuaciones de Cauchy-Riemann-Fueter. Finalmente, en la última sección desarrollaremos una teoría para construir funciones regulares de variable cuaterniónica, para la comprensión y el seguimiento de este capítulo, se recomienda [11].

La definición estándar de la derivada de una función requiere el estudio del comportamiento de un cociente incremental. En el caso de una función compleja $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, la derivada compleja en $z \in \mathbb{C}$ está definida por la expresión

$$g'(z) = \lim_{h\to 0} \; h^{-1} \left[g(z+h) - g(z)\right], \qquad h \in \mathbb{C}. \tag{2.1}$$

La conmutatividad de los números complejos garantiza que la expresión (2.1) no sea ambigua, en efecto, tenemos

$$h^{-1} \left[g(z+h) - g(z)\right] = \left[g(z+h) - g(z)\right] h^{-1}. \tag{2.2}$$

para todo $z,\ h \in \mathbb{C}$. En contraste, si consideramos una función cuaterniónica de variable cuaterniónica, $g : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, la igualdad (2.2) no necesariamente es válida para $z,\ h \in \mathbb{H}$ arbitrarios.

SECCIÓN 2.1

La derivada cuaterniónica

Considerando el comentario de encima, vamos a definir la derivada de una función cuaterniónica de variable cuaterniónica de la siguiente manera.

Definición 1. *Sea $\mathcal{U} \subset \mathbb{H}$ un conjunto abierto y conexo en la topología de $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$. Dada una función cuaterniónica de variable cuaterniónica $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, entonces*

1) diremos que f es $\mathbb{H}-$derivable a la **izquierda** *en $q \in \mathcal{U}$, si el límite*

$$\lim_{h\to 0} \left[h^{-1}\left(f(q+h) - f(q)\right)\right], \quad h \in \mathbb{H}$$

existe;

2) diremos que f es $\mathbb{H}-$derivable a la **derecha** *en $q \in \mathcal{U}$, si el límite*

$$\lim_{h\to 0} \left[\left(f(q+h) - f(q)\right)h^{-1}\right], \quad h \in \mathbb{H}$$

existe.

Observación 1. *La teoría de funciones $\mathbb{H}-$derivables a la derecha es análoga a la teoría de funciones $\mathbb{H}-$derivables a la izquierda, por lo tanto, sólo consideraremos el último caso, y denotaremos dicha $\mathbb{H}-$derivada (a la izquierda) por*

$$\frac{df}{dq} = \lim_{h\to 0} \left[h^{-1}\left(f(q+h) - f(q)\right)\right], \quad h \in \mathbb{H}$$

El primer resultado conserniente a la $\mathbb{H}-$derivada cuaterniónica es el siguiente.

Proposición 1. *Si $f,\ g : \mathcal{U} \subset \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ son funciones $\mathbb{H}-$derivables a la izquierda en $q \in \mathcal{U}$, entonces $f+g$ es $\mathbb{H}-$derivable en $q \in \mathcal{U}$, y se tiene la fórmula*

$$\frac{d(f+g)}{dq} = \frac{df}{dq} + \frac{dg}{dq}.$$

Demostración. Para $h \in \mathbb{H}$, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} h^{-1}\left[(f+g)(q+h) - (f+g)(q)\right] &= h^{-1}\left[f(q+h) + g(q+h) - f(q) - g(q)\right] \\ &= h^{-1}\left[(f(q+h) - f(q)) + (g(q+h) - g(q))\right] \\ &= h^{-1}\left[f(q+h) - f(q)\right] + h^{-1}\left[g(q+h) - g(q)\right]; \end{aligned}$$

como f y g son $\mathbb{H}-$derivables a la izquierda en $q \in \mathcal{U}$, aplicando límite con $h \to 0$ en ambos lados de la igualdad anterior, tenemos que $f+g$ es $\mathbb{H}-$derivable en q y además

$$\frac{d(f+g)}{dq} = \frac{df}{dq} + \frac{dg}{dq}$$

como queríamos. □

Ejemplo 2. *Consideremos una función cuaterniónica constante $f(q) = c$, con $c \in \mathbb{H}$, entonces*

$$h^{-1}\left[f(q+h) - f(q)\right] = h^{-1}(c-c) = 0$$

para todo $q \in \mathbb{H}$; deducimos que f es $\mathbb{H}-$derivable en todo q y su derivada es

$$\frac{df}{dq} = \lim_{h\to 0}\left[h^{-1}\left(f(q+h) - f(q)\right)\right] = 0.$$

Ejemplo 3. *La función identidad, $f(q) = q$, satisface*

$$h^{-1}\left[f(q+h) - f(q)\right] = h^{-1}\left[(q+h) - q\right] = h^{-1}h = 1$$

para todo $q \in \mathbb{H}$; por lo tanto, la función identidad es $\mathbb{H}-$derivable y su derivada es

$$\frac{df}{dq} = \lim_{h\to 0}\left[h^{-1}\left(f(q+h) - f(q)\right)\right] = 1.$$

Ejemplo 4. *Dada la función, $f(q) = q^2$ donde $q \in \mathbb{H}$, notemos que*

$$f(q+h) = (q+h)^2 = (q+h)(q+h) = q(q+h) + h(q+h) = q^2 + qh + hq + h^2$$

(el orden de la multiplicación es importante), por lo tanto,

$$\begin{aligned} h^{-1}\left[f\left(q+h\right) - f\left(q\right)\right] &= h^{-1}\left(q^2 + qh + hq + h^2 - q^2\right) \\ &= h^{-1}\left(qh + hq + h^2\right) \\ &= h^{-1}qh + q + h. \end{aligned}$$

Ya que $\mathbb{H}$ no es conmutativo, afirmamos que

$$\lim_{h\to 0}\left(h^{-1}qh\right)$$

no existe. En efecto, al tomar direcciones distintas:

a) si $h = a \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lim_{h\to 0}\left(h^{-1}qh\right) = \lim_{a\to 0}\left(a^{-1}qa\right) = q;$$

b) si $h = ia \in \mathbb{H}$, $a \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\left(h^{-1}qh\right) &= \lim_{a\to 0}\left[(ia)^{-1}q(ia)\right]\\ &= \lim_{a\to 0}\left[-\frac{(ia)}{a^2}q(ia)\right]\\ &= -iqi;\end{aligned}$$

pero en general $q \neq -iqi$, (para $q \in \mathbb{R}$ se tiene una igualdad, caso contrario no es cierto, por ejemplo para $q = j$) concluimos que no existe la derivada f.

Esto no es casualidad ya que más adelante demostraremos un teorema que indica que las únicas funciones cuaterniónicas $\mathbb{H}-$derivables son las funciones cuaterniónicas afines.

La siguiente proposición demuestra que la noción de derivada cuaterniónica extiende la noción de derivada real.

Proposición 2. *Si $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ es una función $\mathbb{H}-$derivable a la izquierda en $q \in \mathcal{U}$, entonces f es real diferenciable en $q \in \mathcal{U}$ y su derivada viene dada por*

$$df_q(h) = h\frac{df}{dq}, \qquad h \in \mathbb{H}. \tag{2.3}$$

Demostración. Ya que f es $\mathbb{H}-$derivable a la izquierda en $q \in \mathcal{U}$, se tiene que

$$\frac{df}{dq} = \lim_{h\to 0}\left[h^{-1}\left(f(q+h) - f(q)\right)\right]$$

equivalentemente

$$\lim_{h\to 0}\left[h^{-1}\left(f(q+h) - f(q)\right) - \frac{df}{dq}\right] = 0.$$

Definimos la función $r(h) := f(q+h) - f(q) - h\dfrac{df}{dq} \in \mathbb{H}$, luego

$$f(q+h) - f(q) = h\frac{df}{dq} + r(h). \tag{2.4}$$

Afirmamos que la aplicación $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ dada por

$$T(h) := h\frac{df}{dq}$$

es lineal y que la aplicación r satisface $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{|h|} = 0$. En efecto, la primera condición es directa, para $h_1, h_2 \in \mathbb{H}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos

$$T(\lambda h_1 + h_2) = (\lambda h_1 + h_2)\frac{df}{dq} = \lambda h_1 \frac{df}{dq} + h_2 \frac{df}{dq} = \lambda T(h_1) + T(h_2);$$

por otro lado, tomando $\varphi(h) = h^{-1}r(h) \in \mathbb{H}$, la igualdad (3.9) se reescribe como

$$f(q+h) - f(q) = h\frac{df}{dq} + h\varphi(h)$$

es decir,

$$h^{-1}\left(f(q+h) - f(q)\right) - \frac{df}{dq} = \varphi(h),$$

usando la hipótesis tenemos $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h) = 0$; ya que $|\varphi(h)| = |h^{-1}||r(h)| = \dfrac{|r(h)|}{|h|}$ tenemos $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{r(h)}{|h|} = 0$. Concluimos que la función f es real diferenciable en $q \in \mathcal{U}$, y su aplicación derivada está dada por

$$df_q(h) = h\frac{df}{dq}.$$

$\square$

Remarca 1. *Usaremos la siguiente identificación de los cuaternios con pares de números complejos. Dado $q = t + ix + jy + kz \in \mathbb{H}$, tenemos*

$$q = t + ix + jy + kz = (t + ix) + j(y - iz) = u + jv \quad \in \quad \mathbb{C} \oplus j\mathbb{C},$$

donde, $u := t + ix$ y $v := y - iz$ son números complejos, esto nos brinda una identificación de álgebras $\mathbb{H} \simeq \mathbb{C} \oplus j\mathbb{C}$. Note que un número complejo no conmuta con la unidad imaginaria j, pero tenemos lo siguiente

$$wj = j\overline{w},$$

para todo $w \in \mathbb{C}$. En particular, una función cuaterniónica $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ puede ser escrita en la forma

$$f(q) = g(u,v) + jh(u,v), \quad q = u + jv \in \mathbb{H}$$

donde las funciones g y h son funciones complejas de dos variables complejas $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Remarca 2. *Sobre el conjunto de funciones complejas de dos variables complejas $\mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definimos los operadores diferenciales (de derivación parcial compleja)*

$$\frac{\partial}{\partial u} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\frac{\partial}{\partial x}\right) \qquad y \qquad \frac{\partial}{\partial v} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y} + i\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

De manera análoga, los operadores diferenciales conjugados

$$\frac{\partial}{\partial \overline{u}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\frac{\partial}{\partial x}\right) \qquad y \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{v}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y} - i\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Teorema 1. *Si $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ es una función cuaterniónica $\mathbb{H}-$derivable a la izquierda en $\mathcal{U}$, entonces f es de la forma,*

$$f(q) = A + qB$$

donde A, B son constantes cuaterniónicas.

La demostración del teorema (1) es muy larga así que la presentamos la demostración con todo el detalle en la Sección 2.3.

SECCIÓN 2.2

Formas diferenciales cuaterniónicas valuadas

En esta sección estudiaremos las formas diferenciales sobre los cuaternios con valores cuaterniónicos que es de suma importancia para el desarrollo y estudio del resto del trabajo.

Sea $p \in \mathbb{H}$. El conjunto de vectores $q - p$, $q \in \mathbb{H}$ (que tienen origen en p) se llamará espacio tangente de $\mathbb{H}$ en p y se denotará por $\mathbb{H}_p$. Naturalmente, podemos identificar $\mathbb{H}_p \simeq \mathbb{H}$, para todo $p \in \mathbb{H}$.

0-formas diferenciales. En analogía al estudio de formas diferenciales en $\mathbb{R}^n$, definimos una 0-forma diferencial sobre $\mathbb{H}$, con valores en $\mathbb{H}$, como una función

$$f : \mathbb{H} \to \mathbb{H},$$

diferenciable, en el sentido real.

1-formas diferenciales. Una 1-forma diferencial sobre $\mathbb{H}$ con valores en $\mathbb{H}$, es una aplicación α que asocia a cada punto $p \in \mathbb{H}$, una aplicación lineal

$$\alpha_p : \mathbb{H}_p \to \mathbb{H},$$

del espacio tangente a p en $\mathbb{H}$.

Ejemplos 1. *Fijemos las coordenadas $q = t + ix + jy + kz \simeq (t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{H}$.*

1) Consideremos las 1-formas diferenciales canónicas de $\mathbb{R}^4$, es decir: dt, dx, dy y dz. Por ejemplo, tenemos que

$$\begin{aligned} dx : \mathbb{H}_p &\to \mathbb{R} \subset \mathbb{H} \\ a + ib + jc + kz &\mapsto b, \end{aligned}$$

es la proyección sobre la segunda coordenada.

Note que, podemos tomar cualquier combinación cuaterniónica de las 1-formas reales dt, dx, dy, dz y obtener nuevas 1-formas diferenciales sobre $\mathbb{H}$ con valores en $\mathbb{H}$. Por ejemplo, considere la 1-forma diferencial

$$\begin{aligned} \alpha = dx + idy : \mathbb{H}_p &\to \mathbb{H} \\ a + ib + jc + kz &\mapsto b + ic. \end{aligned}$$

2) De particular interés es la siguiente 1-forma diferencial

$$dq := dt + i\ dx + j\ dy + k\ dz : \mathbb{H}_p \to \mathbb{H}$$

(la diferencial de la aplicación identidad $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$) dada por

$$\begin{aligned} dq : \mathbb{H}_p &\to \mathbb{H} \\ h &\mapsto dq(h) = h, \end{aligned} \tag{2.5}$$

en efecto, para $h = a + ib + jc + kd \in \mathbb{H}$ tenemos

$$\begin{aligned} dq(h) &= dt(h) + idx(h) + jdy(h) + kdz(h) \\ &= a + ib + jc + kd \\ &= h. \end{aligned}$$

Ahora notemos lo siguiente: una 1-forma diferencial α sobre $\mathbb{H}$ con valores cuaterniónicos es una aplicación

$$\alpha_p : \mathbb{H}_p \to \mathbb{H}$$

que puede ser escrita como

$$\alpha_p := \alpha_p^1 + i\ \alpha_p^2 + j\ \alpha_p^3 + k\ \alpha_p^4 \tag{2.6}$$

donde las componentes $\alpha_p^i : \mathbb{H}_p \to \mathbb{R}$ con $i = 1, 2, 3, 4$, (el índice nos indica posición) son 1-formas diferenciales en $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{H}$, que en la base de 1-formas diferenciales en $\mathbb{R}^4$ pueden ser escritas como:

$$\alpha_p^i := a^i\ dt + b^i\ dx + c^i\ dy + d^i\ dz,$$

para ciertas constantes reales a^i, b^i, c^i y d^i.

Consideremos ahora el conjunto

$$\bigwedge^1 (\mathbb{H}, \mathbb{H}) := \Big\{ \text{1-formas diferenciales sobre } \mathbb{H} \text{ cuaterniónicas valuadas} \Big\}.$$

Con la definición usual de suma de 1-formas y la multiplicación por un real, no es difícil probar que $\bigwedge^1 (\mathbb{H}, \mathbb{H})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

De (2.6) tenemos que $\bigwedge^1(\mathbb{H},\mathbb{H}) = \bigwedge^1(\mathbb{R}^4) \oplus i\bigwedge^1(\mathbb{R}^4) \oplus j\bigwedge^1(\mathbb{R}^4) \oplus k\bigwedge^1(\mathbb{R}^4)$. Donde $\bigwedge^1(\mathbb{R}^4)$ es el conjunto de 1-formas diferenciales sobre $\mathbb{R}^4$ y por el Apéndice A sabemos que $\dim \bigwedge^1(\mathbb{R}^4) = 4$, por lo tanto, tenemos que $\dim_{\mathbb{R}}\left(\bigwedge^1(\mathbb{H},\mathbb{H})\right) = 16$.

Notemos que podemos definir el producto de un cuaternio con una 1-forma diferencial:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{H} \times \bigwedge^1(\mathbb{H},\mathbb{H}) & \to & \bigwedge^1(\mathbb{H},\mathbb{H}) \\ (q_0,\alpha) & \mapsto & q_0 \cdot \alpha, \end{array}$$

donde $q_0 \cdot \alpha$ toma un punto $p \in \mathbb{H}$ y lo envía a la aplicación lineal

$$\begin{array}{rcl} q_0 \cdot \alpha_p : \mathbb{H}_p & \to & \mathbb{H} \\ q & \mapsto & q_0 \cdot \alpha_p(q), \end{array}$$

donde $q_0 \cdot \alpha_p(q)$ es el producto cuaterniónico.

Definamos el conjunto de funciones (real) diferenciables como

$$Diff(\mathbb{H},\mathbb{H}) := \Big\{ f : \mathbb{H} \to \mathbb{H} \mid f \text{ es una función real diferenciable} \Big\}.$$

Notemos que podemos multiplicar una función diferenciable con una 1-forma diferencial

$$\begin{array}{rcl} Diff(\mathbb{H},\mathbb{H}) \times \bigwedge^1(\mathbb{H},\mathbb{H}) & \to & \bigwedge^1(\mathbb{H},\mathbb{H}) \\ (f,\alpha) & \mapsto & f \cdot \alpha, \end{array}$$

que en cada punto $p \in \mathbb{H}$, toma el valor

$$\begin{array}{rcl} (f \cdot \alpha)_p := f(p) \cdot \alpha_p : \mathbb{H}_p & \to & \mathbb{H} \\ q & \mapsto & f(p) \cdot \alpha_p(q), \end{array}$$

siendo el último, $f(p) \cdot \alpha_p(q)$ el producto cuaterniónico.

2-formas diferenciales. Una 2-forma diferencial sobre $\mathbb{H}$ con valores en $\mathbb{H}$, es una aplicación η que asocia a cada punto $p \in \mathbb{H}$ una función

$$\eta_p : \mathbb{H}_p \times \mathbb{H}_p \to \mathbb{H}$$

que es:

1. η_p es bilineal (es decir, lineal en cada variable): para todo $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{H}_p$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\eta_p(\lambda q_1 + q_2, q_3) = \lambda \eta_p(q_1, q_3) + \eta_p(q_2, q_3)$$
$$\eta_p(q_3, \lambda q_1 + q_2) = \lambda \eta_p(q_3, q_1) + \eta_p(q_3, q_2)$$

2. η_p alternante; para todo $q \in \mathbb{H}_p$ se tiene.

$$\eta_p(q,q) = 0.$$

Escribiendo,

$$\eta_p := \eta_p^1 + i\ \eta_p^2 + j\ \eta_p^3 + k\ \eta_p^4 \tag{2.7}$$

en componentes, tenemos que $\eta_p^i : \mathbb{H}_p \times \mathbb{H}_p \to \mathbb{R}$ con $i = 1,2,3,4$, (el índice nos indica posición) son 2-formas diferenciales en $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{H}$, que en la base de 2-formas diferenciales en $\mathbb{R}^4$ se escriben como:

$$\eta_p^i := a^i\ dt \wedge dx + b^i\ dt \wedge dy + c^i\ dt \wedge dz + d^i\ dx \wedge dy + e^i\ dx \wedge dz + f^i\ dy \wedge dz.$$

para ciertos reales $a^i,\ b^i,\ c^i,\ d^i,\ e^i$ y f^i. Definamos el conjunto

$$\bigwedge\nolimits^2(\mathbb{H},\mathbb{H}) := \Big\{\text{2-formas diferenciales sobre } \mathbb{H} \text{ cuaterniónicas valuadas}\Big\}.$$

Con la definición usual de suma de 2-formas y la multiplicación por un real, no es difícil probar que $\bigwedge^2(\mathbb{H},\mathbb{H})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

De (2.7) tenemos que $\bigwedge^2(\mathbb{H},\mathbb{H}) = \bigwedge^2(\mathbb{R}^4) \oplus i \bigwedge^2(\mathbb{R}^4) \oplus j \bigwedge^2(\mathbb{R}^4) \oplus k \bigwedge^2(\mathbb{R}^4)$. Donde $\bigwedge^2(\mathbb{R}^4)$ es el conjunto de 2-formas diferenciales sobre $\mathbb{R}^4$ y por el Apéndice A, sabemos que $\dim \bigwedge^2(\mathbb{R}^4) = 6$, por lo tanto, tenemos que $\dim_{\mathbb{R}}\left(\bigwedge^2(\mathbb{H},\mathbb{H})\right) = 24$.

Definimos el producto de un cuaternio con una 2-forma diferencial como sigue:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{H} \times \bigwedge^2(\mathbb{H},\mathbb{H}) & \to & \bigwedge^2(\mathbb{H},\mathbb{H}) \\ (q_0,\eta) & \mapsto & q_0 \cdot \eta, \end{array}$$

que en cada $p \in \mathbb{H}$, le asocia la aplicación

$$\begin{array}{rcl} q_0 \cdot \eta_p : \mathbb{H}_p \times \mathbb{H}_p & \to & \mathbb{H} \\ (u,v) & \mapsto & q_0 \cdot \eta_p(u,v), \end{array}$$

que en efecto es bilineal y alternada. También podemos multiplicar una función diferenciable con una 2-forma diferencial:

$$\begin{array}{rcl} Diff(\mathbb{H},\mathbb{H}) \times \bigwedge^2(\mathbb{H},\mathbb{H}) & \to & \bigwedge^2(\mathbb{H},\mathbb{H}) \\ (f,\eta) & \mapsto & f \cdot \eta \end{array}$$

que en cada $p \in \mathbb{H}$, le asocia

$$\begin{array}{rcl} (f \cdot \eta)_p := f(p) \cdot \eta_p : \mathbb{H}_p \times \mathbb{H}_p & \to & \mathbb{H} \\ (u,v) & \mapsto & f(p) \cdot \eta_p(u,v). \end{array}$$

que evidentemente es una aplicación bilineal y alternada.

3-formas diferenciales. Una 3-forma diferencial sobre $\mathbb{H}$ con valores en $\mathbb{H}$, es una aplicación γ que asocia a cada punto $p \in \mathbb{H}$ una función trilineal y alternada

$$\gamma_p : \mathbb{H}_p \times \mathbb{H}_p \times \mathbb{H}_p \to \mathbb{H}.$$

Escribiendo,

$$\gamma_p := \gamma_p^1 + i\ \gamma_p^2 + j\ \gamma_p^3 + k\ \gamma_p^4, \tag{2.8}$$

en componentes $\gamma_p^i : \mathbb{H}_p \times \mathbb{H}_p \times \mathbb{H}_p \to \mathbb{R}$ con $i = 1, 2, 3, 4$, (el índice nos indica posición) que son 3-formas diferenciales trilineales y alternadas en $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{H}$, y que pueden ser escritas en la base de 3-formas diferenciales en $\mathbb{R}^4$, como

$$\gamma_p^i := a^i\ dt \wedge dx \wedge dy + b^i\ dt \wedge dx \wedge dz + c^i\ dt \wedge dy \wedge dz + d^i\ dx \wedge dy \wedge dz,$$

donde cada a^i, b^i, c^i y d^i son constantes reales.
Consideremos el conjunto

$$\bigwedge^3 (\mathbb{H}, \mathbb{H}) := \Big\{\text{3-formas diferenciales sobre } \mathbb{H} \text{ cuaterniónicas valuadas}\Big\}.$$

Con las operaciones de suma de 3-formas y la multiplicación por un real, no es difícil probar que $\bigwedge^3 (\mathbb{H}, \mathbb{H})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

De (2.8) tenemos que $\bigwedge^3 (\mathbb{H}, \mathbb{H}) = \bigwedge^3 (\mathbb{R}^4) \oplus i \bigwedge^3 (\mathbb{R}^4) \oplus j \bigwedge^3 (\mathbb{R}^4) \oplus k \bigwedge^3 (\mathbb{R}^4)$. Tal que $\bigwedge^3 (\mathbb{R}^4)$ es el conjunto de 3-formas diferenciales sobre $\mathbb{R}^4$ y por el Apéndice A, sabemos que $\dim \bigwedge^3 (\mathbb{R}^4) = 4$, de donde, tenemos que $\dim_{\mathbb{R}} \left(\bigwedge^3 (\mathbb{H}, \mathbb{H})\right) = 16$.

A continuación definimos el producto de un cuaternio con una 3-forma diferencial

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{H} \times \bigwedge^3 (\mathbb{H}, \mathbb{H}) & \to & \bigwedge^3 (\mathbb{H}, \mathbb{H}) \\ (q_0, \gamma) & \mapsto & q_0 \cdot \gamma \end{array}$$

que en cada punto $p \in \mathbb{H}$, le asocia la aplicación

$$\begin{array}{rcl} q_0 \cdot \gamma_p : \mathbb{H}_p \times \mathbb{H}_p \times \mathbb{H}_p & \to & \mathbb{H} \\ (u, v, w) & \mapsto & q_0 \cdot \gamma_p(u, v, w), \end{array}$$

que en efecto es trilineal y alternada.

Veamos ahora el producto de una función diferenciable con una 3-forma diferencial.

$$\begin{array}{rcl} Diff\,(\mathbb{H}, \mathbb{H}) \times \bigwedge^3 (\mathbb{H}, \mathbb{H}) & \to & \bigwedge^3 (\mathbb{H}, \mathbb{H}) \\ (f, \gamma) & \mapsto & f \cdot \gamma \end{array}$$

definida en cada $p \in \mathbb{H}$, por

$$\begin{array}{rcl}(f\cdot\gamma)_p := f(p)\cdot\gamma_p : \mathbb{H}_p\times\mathbb{H}_p\times\mathbb{H}_p & \to & \mathbb{H}\\ (u,v,w) & \mapsto & f(p)\cdot\gamma_p(u,v,w),\end{array}$$

que también es trilineal y alternada.

Remarca 3. *La 3-forma diferencial sobre $\mathbb{H}$, de particular interés es: Dq que asocia a cada punto $p \in \mathbb{H}$, una función*

$$(Dq)_p : \mathbb{H}_p\times\mathbb{H}_p\times\mathbb{H}_p \to \mathbb{H},$$

definida por

$$Dq := dx\wedge dy\wedge dz - i\ dt\wedge dy\wedge dz - j\ dt\wedge dz\wedge dx - k\ dt\wedge dx\wedge dy.$$

4-formas diferenciales. Una 4-forma diferencial sobre $\mathbb{H}$ con valores en $\mathbb{H}$, es una aplicación δ que asocia a cada punto $p \in \mathbb{H}$ una función 4-lineal y alternada

$$\delta_p : \mathbb{H}_p\times\mathbb{H}_p\times\mathbb{H}_p\times\mathbb{H}_p \to \mathbb{H}.$$

dada por,

$$\delta_p := \delta_p^1 + i\ \delta_p^2 + j\ \delta_p^3 + k\ \delta_p^4, \tag{2.9}$$

donde $\delta_p^i : \mathbb{H}_p\times\mathbb{H}_p\times\mathbb{H}_p\times\mathbb{H}_p \to \mathbb{R}$ con $i = 1, 2, 3, 4$, (el índice nos indica posición) son 4-formas diferenciales 4-lineales y alternadas en $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{H}$, que en términos de la base de 4-formas diferenciales de $\mathbb{R}^4$, se escriben como sigue

$$\delta_p^i := a^i\ dt\wedge dx\wedge dy\wedge dz,$$

donde a^i son constantes reales.
Definamos el conjunto

$$\bigwedge^4(\mathbb{H},\mathbb{H}) := \Big\{\text{4-formas diferenciales sobre } \mathbb{H} \text{ cuaterniónicas valuadas}\Big\}.$$

De forma análoga con la suma de 4-formas y la multiplicación por un real, no es difícil probar que $\bigwedge^4(\mathbb{H},\mathbb{H})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

De (2.9) tenemos que $\bigwedge^4(\mathbb{H},\mathbb{H}) = \bigwedge^4(\mathbb{R}^4) \oplus i\bigwedge^4(\mathbb{R}^4) \oplus j\bigwedge^4(\mathbb{R}^4) \oplus k\bigwedge^4(\mathbb{R}^4)$. Donde $\bigwedge^4(\mathbb{R}^4)$ es el conjunto de 4-formas diferenciales sobre $\mathbb{R}^4$ y por el Apéndice A, sabemos que $\dim\bigwedge^4(\mathbb{R}^4) = 1$, de donde, tenemos que $\dim_{\mathbb{R}}\left(\bigwedge^4(\mathbb{H},\mathbb{H})\right) = 4$.

Note que también podemos definir el producto de un cuaternio con una 4-forma diferencial

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{H}\times\bigwedge^4(\mathbb{H},\mathbb{H}) & \to & \bigwedge^4(\mathbb{H},\mathbb{H})\\ (q_0,\delta) & \mapsto & q_0\cdot\delta\end{array}$$

que a cada $p \in \mathbb{H}$, le asocia la aplicación

$$\begin{array}{rcl} q_0 \cdot \delta_p : \mathbb{H}_p \times \mathbb{H}_p \times \mathbb{H}_p \times \mathbb{H}_p & \to & \mathbb{H} \\ (u,v,w,r) & \mapsto & q_0 \cdot \delta_p(u,v,w,r), \end{array}$$

que es 4-lineal y alternada. Finalmente veamos ahora el producto de una función diferenciable con una 4-forma diferencial

$$\begin{array}{rcl} Diff\left(\mathbb{H},\mathbb{H}\right) \times \bigwedge^4 \left(\mathbb{H},\mathbb{H}\right) & \to & \bigwedge^4 \left(\mathbb{H},\mathbb{H}\right) \\ (f,\delta) & \mapsto & f \cdot \delta \end{array}$$

dada en $p \in \mathbb{H}$ por

$$\begin{array}{rcl} \left(f \cdot \delta\right)_p := f(p) \cdot \delta_p : \mathbb{H}_p \times \mathbb{H}_p \times \mathbb{H}_p \times \mathbb{H}_p & \to & \mathbb{H} \\ (u,v,w,r) & \mapsto & f(p) \cdot \delta_p(u,v,w,r), \end{array}$$

que en efecto también es 4-lineal y alternada.

Remarca 4. *La 4-forma diferencial sobre $\mathbb{H}$ con valores en $\mathbb{H}$, de particular interés es: ν que asocia a cada punto $p \in \mathbb{H}$, una función*

$$\nu_p : \mathbb{H}_p \times \mathbb{H}_p \times \mathbb{H}_p \times \mathbb{H}_p \to \mathbb{H},$$

definida por

$$\nu := dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz.$$

PRODUCTO EXTERIOR DE FORMAS SOBRE $\mathbb{H}$. En esta parte desarrollaremos una noción importante como es el producto exterior de formas diferenciales cuaterniónicas valuadas.

Producto exterior de 1-formas diferenciales sobre $\mathbb{H}$. Dada las 1-formas diferenciales α y β cuaterniónicas valuadas, definimos el producto exterior de α y β como la aplicación que a cada $p \in \mathbb{H}$, le asocia

$$\left(\alpha \wedge \beta\right)_p : \mathbb{H}_p \times \mathbb{H}_p \to \mathbb{H}$$

que es una 2-forma diferencial sobre $\mathbb{H}$, definida por

$$\begin{aligned} \left(\alpha \wedge \beta\right)_p &:= \left(\alpha_p^1 + i\alpha_p^2 + j\alpha_p^3 + k\alpha_p^4\right) \wedge \left(\beta_p^1 + i\beta_p^2 + j\beta_p^3 + k\beta_p^4\right) \\ &:= \left(\alpha_p^1 \wedge \beta_p^1 - \alpha_p^2 \wedge \beta_p^2 - \alpha_p^3 \wedge \beta_p^3 - \alpha_p^4 \wedge \beta_p^4\right) + i\left(\alpha_p^2 \wedge \beta_p^1 + \alpha_p^1 \wedge \beta_p^2 + \alpha_p^3 \wedge \beta_p^4 - \alpha_p^4 \wedge \beta_p^3\right) \\ &\quad j\left(\alpha_p^1 \wedge \beta_p^3 + \beta_p^1 \wedge \alpha_p^3 + \alpha_p^4 \wedge \beta_p^2 - \alpha_p^2 \wedge \beta_p^4\right) + k\left(\alpha_p^1 \wedge \beta_p^4 + \beta_p^1 \wedge \alpha_p^4 + \alpha_p^2 \wedge \beta_p^3 - \alpha_p^3 \wedge \beta_p^2\right), \end{aligned}$$

donde $\alpha_p^i \wedge \beta_p^j$ es el producto exterior de 1-formas diferenciales en $\mathbb{R}^4$.

Remarca 5. *De particular interés es la derivada exterior de la 1-forma diferencial dq, consigo mismo que está dada por:*

$$\begin{aligned} dq \wedge dq &= (dt + idx + jdy + kdz) \wedge (dt + idx + jdy + kdz) \\ &= i\ dy \wedge dz + j\ dz \wedge dx + k\ dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Producto exterior de 1-formas con 2-formas diferenciales sobre $\mathbb{H}$. Sea α una 1-forma y η una 2-forma, definimos el producto exterior de α y η como la aplicación que a cada $p \in \mathbb{H}$, le asocia la aplicación

$$(\alpha \wedge \eta)_p : \mathbb{H}_p \times \mathbb{H}_p \times \mathbb{H}_p \to \mathbb{H}$$

que es una 3-forma diferencial sobre $\mathbb{H}$, que puede ser escrito como

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \eta)_p &:= \left(\alpha_p^1 + i\alpha_p^2 + j\alpha_p^3 + k\alpha_p^4\right) \wedge \left(\eta_p^1 + i\eta_p^2 + j\eta_p^3 + k\eta_p^4\right) \\ &:= \left(\alpha_p^1 \wedge \eta_p^1 - \alpha_p^2 \wedge \eta_p^2 - \alpha_p^3 \wedge \eta_p^3 - \alpha_p^4 \wedge \eta_p^4\right) + i\left(\alpha_p^2 \wedge \eta_p^1 + \alpha_p^1 \wedge \eta_p^2 + \alpha_p^3 \wedge \eta_p^4 - \alpha_p^4 \wedge \eta_p^3\right) \\ &\quad j\left(\alpha_p^1 \wedge \eta_p^3 + \eta_p^1 \wedge \alpha_p^3 + \alpha_p^4 \wedge \eta_p^2 - \alpha_p^2 \wedge \eta_p^4\right) + k\left(\alpha_p^1 \wedge \eta_p^4 + \eta_p^1 \wedge \alpha_p^4 + \alpha_p^2 \wedge \eta_p^3 - \alpha_p^3 \wedge \eta_p^2\right). \end{aligned}$$

donde $\alpha_p^i \wedge \eta_p^i$ es el producto exterior usual de 1-formas con 2-formas diferenciales en $\mathbb{R}^4$.

Producto exterior de 1-formas con 3-formas diferenciales sobre $\mathbb{H}$. Sea α una 1-forma y γ una 3-forma, definimos el producto exterior de α y γ como la aplicación que a cada $p \in \mathbb{H}$, le asocia la aplicación

$$(\alpha \wedge \gamma)_p : \mathbb{H}_p \times \mathbb{H}_p \times \mathbb{H}_p \times \mathbb{H}_p \to \mathbb{H}$$

que es una 4-forma diferencial sobre $\mathbb{H}$, que puede ser escrito como

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \gamma)_p &:= \left(\alpha_p^1 + i\alpha_p^2 + j\alpha_p^3 + k\alpha_p^4\right) \wedge \left(\gamma_p^1 + i\gamma_p^2 + j\gamma_p^3 + k\gamma_p^4\right) \\ &:= \left(\alpha_p^1 \wedge \gamma_p^1 - \alpha_p^2 \wedge \gamma_p^2 - \alpha_p^3 \wedge \gamma_p^3 - \alpha_p^4 \wedge \gamma_p^4\right) + i\left(\alpha_p^2 \wedge \gamma_p^1 + \alpha_p^1 \wedge \gamma_p^2 + \alpha_p^3 \wedge \gamma_p^4 - \alpha_p^4 \wedge \gamma_p^3\right) \\ &\quad j\left(\alpha_p^1 \wedge \gamma_p^3 + \gamma_p^1 \wedge \alpha_p^3 + \alpha_p^4 \wedge \gamma_p^2 - \alpha_p^2 \wedge \gamma_p^4\right) + k\left(\alpha_p^1 \wedge \gamma_p^4 + \gamma_p^1 \wedge \alpha_p^4 + \alpha_p^2 \wedge \gamma_p^3 - \alpha_p^3 \wedge \gamma_p^2\right). \end{aligned}$$

donde $\alpha_p^i \wedge \gamma_p^i$ es el producto exterior usual de 1-formas con 3-formas diferenciales en $\mathbb{R}^4$.

Producto exterior de 2-formas diferenciales sobre $\mathbb{H}$. Dada las siguientes 2-formas diferenciales cuaterniónicas valuadas α y β definimos el producto exterior de α y β como la aplicación que a cada $p \in \mathbb{H}$, le asocia la aplicación.

$$(\alpha \wedge \beta)_p : \mathbb{H}_p \times \mathbb{H}_p \times \mathbb{H}_p \times \mathbb{H}_p \to \mathbb{H}$$

que es una 4-forma diferencial sobre $\mathbb{H}$, donde

$$\begin{aligned}(\alpha\wedge\beta)_p &:= \left(\alpha_p^1+i\alpha_p^2+j\alpha_p^3+k\alpha_p^4\right)\wedge\left(\beta_p^1+i\beta_p^2+j\beta_p^3+k\beta_p^4\right)\\ &:= \left(\alpha_p^1\wedge\beta_p^1-\alpha_p^2\wedge\beta_p^2-\alpha_p^3\wedge\beta_p^3-\alpha_p^4\wedge\beta_p^4\right)+i\left(\alpha_p^2\wedge\beta_p^1+\alpha_p^1\wedge\beta_p^2+\alpha_p^3\wedge\beta_p^4-\alpha_p^4\wedge\beta_p^3\right)\\ &\quad j\left(\alpha_p^1\wedge\beta_p^3+\beta_p^1\wedge\alpha_p^3+\alpha_p^4\wedge\beta_p^2-\alpha_p^2\wedge\beta_p^4\right)+k\left(\alpha_p^1\wedge\beta_p^4+\beta_p^1\wedge\alpha_p^4+\alpha_p^2\wedge\beta_p^3-\alpha_p^3\wedge\beta_p^2\right).\end{aligned}$$

donde $\alpha_p^i\wedge\beta_p^i$ es el producto exterior usual de 2-formas diferenciales en $\mathbb{R}^4$.

DERIVADA EXTERIOR DE FORMAS SOBRE $\mathbb{H}$. En esta parte estudiaremos y desarrollaremos también una noción importante que es que es la derivada exterior de formas diferenciales cuaterniónicas valuadas.

Derivada exterior de 1-formas diferenciales sobre $\mathbb{H}$. Dada la 1-forma diferencial α que en componentes se escribe por $\alpha_p=\alpha_p^1+i\alpha_p^2+j\alpha_p^3+k\alpha_p^4$. Definimos la derivada exterior de α, como la aplicación $d\alpha$ que en cada $p\in\mathbb{H}$, le asocia la función

$$(d\alpha)_p:\mathbb{H}_p\to\mathbb{H}$$

que es una 2-forma diferencial sobre $\mathbb{H}$, dada por

$$(d\alpha)_p:=d\alpha_p^1+i\ d\alpha_p^2+j\ d\alpha_p^3+k\ d\alpha_p^4,$$

siendo $d\alpha_p^i$ la derivada exterior usual de 1-formas diferenciales en $\mathbb{R}^4$.

Remarca 6. *Si $f:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ es una función real diferenciable, entonces*

$$d\,(df)=d^2f=0.$$

La prueba es análoga como en las formas diferenciales en $\mathbb{R}^4$.

Derivada exterior de 2-formas diferenciales sobre $\mathbb{H}$. Dada la 2-forma diferencial cuaterniónica valuada η. Definimos la derivada exterior de η como la aplicación $d\eta$ que en cada $p\in\mathbb{H}$, le asocia la siguiente aplicación

$$(d\eta)_p:\mathbb{H}_p\to\mathbb{H}$$

que es una 3-forma diferencial sobre $\mathbb{H}$, definida por

$$(d\eta)_p:=d\eta_p^1+i\ d\eta_p^2+j\ d\eta_p^3+k\ d\eta_p^4,$$

donde $d\eta_p^i$ es la derivada exterior usual de 2-formas diferenciales en $\mathbb{R}^4$.

Derivada exterior de 3-formas diferenciales sobre $\mathbb{H}$. Dada la 3-forma diferencial cuaterniónica valuada γ, que en componentes en $p \in \mathbb{H}$, se escribe por $\gamma_p = \gamma_p^1 + i\gamma_p^2 + j\gamma_p^3 + k\gamma_p^4$. Definimos la derivada exterior de γ como la aplicación $d\gamma$ que en cada $p \in \mathbb{H}$, está dada por

$$(d\gamma)_p : \mathbb{H}_p \to \mathbb{H}$$

que es una 4-forma diferencial sobre $\mathbb{H}$, definida por

$$(d\gamma)_p := d\gamma_p^1 + i\ d\gamma_p^2 + j\ d\gamma_p^3 + k\ d\gamma_p^4,$$

donde $d\gamma_p^i$ es la derivada exterior usual de 3-formas diferenciales en $\mathbb{R}^4$.

Observación 2. *Note que, hablar de la derivada exterior de una 4-forma diferencial sobre $\mathbb{H}$ no tiene sentido porque una 5-forma diferencial sobre $\mathbb{H}$ es identicamente cero. Así una $(n+1)$-forma diferencial sobre $\mathbb{H}$, para $n \geq 4$ es identicamente cero en $\mathbb{H}$.*

SECCIÓN 2.3

Demostración del Teorema 1

Ya que f es $\mathbb{H}-$derivable a la izquierda en cada punto $q \in \mathcal{U}$, la Proposición 2 implica que f es real diferenciable en q, y su derivada (real) es $df_q(h) = h\dfrac{df}{dq}$. Usando la expresión (3.10) para la $1-$forma dq, tenemos $df_q(h) = dq(h)\frac{df}{dq}$; omitiendo el valor variable h, la igualdad anterior se escribe como

$$df_q = dq\frac{df}{dq},$$

que a su vez, puede ser escrito como

$$\frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = (dt + idx + jdy + kdz)\frac{df}{dq}.$$

En la igualdad de encima, $\dfrac{df}{dq} \in \mathbb{H}$, por tanto podemos multiplicar en el lado derecho y después igualar los coeficientes de las $1-$formas diferenciales canónicas de $\mathbb{R}^4$ (y linealmente independientes) $dt,\ dx,\ dy$ y dz; conseguimos las ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{dq}\ , \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = i\ \frac{df}{dq}\ , \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = j\ \frac{df}{dq}\ , \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = k\ \frac{df}{dq}\ ,$$

equivalentemente

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{dq}\ , \qquad -i\ \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dq}\ , \qquad -j\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{dq}\ , \qquad -k\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{df}{dq}.$$

Las igualdades de encima se escriben a su vez como

$$\frac{df}{dq} = \frac{\partial f}{\partial t} = -i\frac{\partial f}{\partial x} = -j\frac{\partial f}{\partial y} = -k\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{2.10}$$

Usando la Remarca 1, si escribimos las función cuaterniónica f en coordendas complejas,

$$f(q) = g(u,v) + jh(u,v),$$

las igualdades en (2.10) toman la siguiente forma

$$\frac{\partial g}{\partial t} + j\frac{\partial h}{\partial t} = -i\left(\frac{\partial g}{\partial x} + j\frac{\partial h}{\partial x}\right) = -j\left(\frac{\partial g}{\partial y} + j\frac{\partial h}{\partial y}\right) = -k\left(\frac{\partial g}{\partial z} + j\frac{\partial h}{\partial z}\right);$$

equivalentemente,

$$\frac{\partial g}{\partial t} + j\frac{\partial h}{\partial t} = \left(-i\frac{\partial g}{\partial x}\right) + j\left(i\frac{\partial h}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right) + j\left(-\frac{\partial g}{\partial y}\right) = \left(i\frac{\partial h}{\partial z}\right) + j\left(i\frac{\partial g}{\partial z}\right).$$

Igualando la parte real y la parte imaginaria, respecto de la unidad imaginaria j, la igualdad de encima puede separarse en dos conjuntos de ecuaciones complejas, a saber,

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -i\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} = i\frac{\partial h}{\partial z}$$

y

$$\frac{\partial h}{\partial t} = i\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y} = i\frac{\partial g}{\partial z}.$$

De la Remarca (1) y de las igualdades de encima, deducimos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial \overline{u}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial t} + i\frac{\partial g}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial t}\right) = 0, &\quad \frac{\partial g}{\partial u} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial t} - i\frac{\partial g}{\partial x}\right)\\
\frac{\partial h}{\partial \overline{v}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial y} - i\frac{\partial h}{\partial z}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial y}\right) = 0, &\quad \frac{\partial h}{\partial v} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial y} + i\frac{\partial h}{\partial z}\right)\\
\frac{\partial g}{\partial v} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial y} + i\frac{\partial g}{\partial z}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial y}\right) = 0, &\quad \frac{\partial g}{\partial \overline{v}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial y} - i\frac{\partial g}{\partial z}\right)\\
\frac{\partial h}{\partial u} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial t} - i\frac{\partial h}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial h}{\partial t}\right) = 0, &\quad \frac{\partial g}{\partial \overline{u}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial t} + i\frac{\partial h}{\partial x}\right)
\end{aligned}$$

que de manera resumida se pueden escribir como

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{u}} = \frac{\partial h}{\partial \overline{v}} = \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial h}{\partial u} = 0, \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial h}{\partial v} \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial h}{\partial \overline{u}} = -\frac{\partial g}{\partial \overline{v}}; \tag{2.13}$$

la ecuación (2.11) muestra que g es una función holomorfa compleja en las variables u y $\overline{v}$; análogamente, h es una función holomorfa compleja en las variables v y $\overline{u}$, así, de los resultados del análisis complejo se tiene que g y h tienen derivadas parciales continuas.

Las igualdades (2.11)–(2.13) nos permitiran encontrar la forma explícita de g y h, y por tanto, la forma explícita de f. Es lo que haremos a continuación.

De la ecuación (2.12), usando el teorema de Schwarz

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right) = 0, \tag{2.14}$$

la última igualdad es válida por (2.11); al integrar (2.14) respecto de u, conseguimos

$$\frac{\partial g}{\partial u} = C_1\left(\overline{u}, v, \overline{v}\right),$$

que al derivar respecto de $\overline{u}$ nos da

$$\frac{\partial C_1}{\partial \overline{u}}\left(\overline{u}, v, \overline{v}\right) = \frac{\partial}{\partial \overline{u}}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial \overline{u}}\right) = 0,$$

donde de nuevo, la última igualdad es válida por (2.11), concluímos así que $\frac{\partial g}{\partial u} = C_1\left(v, \overline{v}\right).$ Derivando de nuevo respecto de v, por (2.11),

$$\frac{\partial C_1}{\partial v}\left(v, \overline{v}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right) = 0,$$

luego $\frac{\partial g}{\partial u} = C_1\left(\overline{v}\right)$, la cual finalmente integramos repecto de u, obteniendo:

$$g(u, v) = C_1\left(\overline{v}\right) u + C_2\left(\overline{v}\right), \tag{2.15}$$

Veremos ahora que C_1 y C_2 son funciones afines. Derivando dos veces la igualdad (2.15) respecto de $\overline{v}$, y una vez respecto de u, conseguimos

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial^2 g}{\partial \overline{v}^2}\right] = \frac{\partial}{\partial u}\left[C_1''(\overline{v})u + C_2''(\overline{v})\right] = C_1''(\overline{v})$$

usando (2.13) y (2.11), el lado izquierdo de la igualdad anterior es cero, así $C_1''(\overline{v}) = 0$, es decir, $C_1(\overline{v}) = a\overline{v} + b$ para algunos $a, b \in \mathbb{C}$. La igualdad (2.15) se convierte en

$$g(u, v) = (a\overline{v} + b)u + C_2(\overline{v});$$

de manera análoga, usando (2.13) y (2.11) conseguimos

$$0 = \frac{\partial}{\partial \overline{u}}\left(\frac{\partial h}{\partial \overline{v}}\right) = -\frac{\partial}{\partial \overline{v}}\left(\frac{\partial g}{\partial \overline{v}}\right) = -C_2''(\overline{v})$$

por lo tanto, $C_2(\overline{v}) = c\overline{v}+d$ para algunos $c, d \in \mathbb{C}$. Finalmente, conseguimos la forma explícita de la función g :

$$g(u, v) = (a\overline{v} + b)u + c\overline{v} + d,$$

para algunos $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. De manera análoga obtenemos:

$$h(u, v) = (a_1\overline{u} + b_1)v + c_1\overline{u} + d_1,$$

para algunos $a_1, b_1, c_1, d_1 \in \mathbb{C}$.

Las ecuaciones (2.12) y (2.13) nos brindan relaciones entre las constantes complejas que describen a las funciones g y h, en efecto,

$$\begin{array}{llll} \dfrac{\partial g}{\partial v} = \dfrac{\partial h}{\partial v} & \Rightarrow \quad a\overline{v} + b = a_1\overline{u} + b_1, & \dfrac{\partial}{\partial \overline{v}}\left(\dfrac{\partial g}{\partial v}\right) = \dfrac{\partial}{\partial \overline{v}}\left(\dfrac{\partial h}{\partial v}\right) & \Rightarrow \quad a = 0, \\ \dfrac{\partial h}{\partial \overline{u}} = -\dfrac{\partial g}{\partial \overline{v}} & \Rightarrow \quad a_1 v + c_1 = -au - c, & \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial h}{\partial \overline{u}}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial g}{\partial \overline{v}}\right) & \Rightarrow \quad a_1 = 0, \end{array}$$

de donde, $b = b_1$ y $c_1 = -c$, por último, la expresión explícita de g y h es

$$\begin{cases} g(u, v) = bu + c\overline{v} + d \\ h(u, v) = bv - c\overline{u} + d_1 \end{cases},$$

para algunas constantes complejas b, c, d y d_1.

Para concluir el teorema, reemplazamos las expresiones de g y h, conseguimos así

$$\begin{aligned} f(q) &= g(u, v) + jh(u, v) \\ &= (bu + c\overline{v} + d) + j(bv - c\overline{u} + d_1) \\ &= bu + c\overline{v} + d + jbv - jc\overline{u} + jd_1 \\ &= (d + jd_1) + (\overline{v} - j\overline{u})c + (u + jv)b \\ &= (d + jd_1) + (-jj\overline{v} - j\overline{u})c + (u + jv)b \\ &= (d + jd_1) + (jv + u)(-jc) + (u + jv)b \\ &= (d + jd_1) + (u + jv)(b - jc) \\ &= A + qB \end{aligned}$$

donde $A := d+jd_1$ y $B := b-jc$ son constantes cuaterniónicas, por lo tanto, f es una función afín, como queríamos.

SECCIÓN 2.4

Funciones regulares sobre los cuaternios

En las Secciones 2.1 y 2.3 vimos que la definición natural de la derivada de una función cuaterniónica, como el límite de un cociente incremental, no brinda un conjunto de funciones interesante para su estudio (vea el Teorema 1); debemos entonces definir de otra manera la noción de función $\mathbb{H}-$derivable.

En el caso de variable compleja, una función (real diferenciable) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa ($\mathbb{C}-$derivable) si existe una constante $f'(z) \in \mathbb{C}$ tal que

$$df = f'(z)dz,$$

donde $dz = dx + idy$ es la $1-$forma diferencial (usual) compleja valuada; alternativamente, la igualdad de encima es equivalente a

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$$

conocida como las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Definiremos una función regular (cuaterniónica de variable cuaterniónica) como las funciones que satisfacen una condición similar a la del párrafo de encima. El nombre es usado con el fin de distinguir a las funciones estudiadas en las secciones anteriores.

Ahora daremos una definición de función regular para una función de una variable cuaterniónica que es satisfecha por una gran clase de funciones y que conduce a un desarrollo similar de la teoría de funciones holomorfas de una variable compleja.

Definición 2. *Una función $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ es regular (a la izquierda) en $q \in \mathcal{U}$, si es real diferenciable en q y existe una constante cuaterniónica $f'(q)$ tal que*

$$d\left[(dq \wedge dq) \cdot f\right] = Dq \cdot f'(q). \tag{2.16}$$

En la definición de encima, el lado izquierdo de la igualdad representa la derivada exterior de la $2-$forma diferencial $(dq\wedge dq)\cdot f$, que es el producto cuaterniónico de la $2-$forma $dq\wedge dq$, definida en la Remarca (5) de la Sección 2.2 por f. El lado derecho representa el producto cuaterniónico de la $3-$forma diferencial Dq, definida en la Remarca (3) de la Sección 2.2, con la constante cuaterniónica $f'(q)$.

Observación 3. *Es posible definir la noción de función regular (a la derecha) de una función cuaterniónica, sin embargo, la teoría que se obtiene es similar a la teoría que obtendremos.*

Definimos el *operador de Cauchy-Riemann-Fueter izquierdo* como:

$$\overline{\partial}_l := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\,\frac{\partial}{\partial x} + j\,\frac{\partial}{\partial y} + k\,\frac{\partial}{\partial z}\right) \quad y \quad \partial_l := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\,\frac{\partial}{\partial x} - j\,\frac{\partial}{\partial y} - k\,\frac{\partial}{\partial z}\right);$$

y el operador de *Cauchy-Riemann-Fueter derecho* como:

$$\overline{\partial}_r := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\,i + \frac{\partial}{\partial y}\,j + \frac{\partial}{\partial z}\,k\right) \quad y \quad \partial_r := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\,i - \frac{\partial}{\partial y}\,j - \frac{\partial}{\partial z}\,k\right).$$

La siguiente proposición describe la noción de función regular en términos de ecuaciones análogas a las ecuaciones de Cauchy-Riemann de la teoría de funciones de variable compleja.

Proposición 3 (Ecuaciones de Cauchy-Riemann-Fueter)**.** *Una función real diferenciable $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ es regular en $q \in \mathbb{H}$ si y sólo si $\overline{\partial}_l f = 0$, es decir, si y sólo si*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + i\,\frac{\partial f}{\partial x} + j\,\frac{\partial f}{\partial y} + k\,\frac{\partial f}{\partial z} = 0. \tag{2.17}$$

Demostración. Usando las propiedades de la derivada exterior, desarrollando el lado izquierdo de la igualdad (2.16), ya que $d(dq) = 0$, tenemos:

$$\begin{aligned}
&d\left[(dq \wedge dq)\cdot f\right] = d(dq \wedge dq) \wedge f + (dq \wedge dq) \wedge df = \\
&= (dq \wedge dq) \wedge df \\
&= (idy \wedge dz + jdz \wedge dx + kdx \wedge dy) \wedge \left(\frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right) \\
&= (dx \wedge dy \wedge dz)\left(i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z}\right) + (idy \wedge dz \wedge dt + jdz \wedge dx \wedge dt + kdx \wedge dy \wedge dt)\,\frac{\partial f}{\partial t} \\
&= (dx \wedge dy \wedge dz)\left(i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z}\right) + (idt \wedge dy \wedge dz + jdt \wedge dz \wedge dx + kdt \wedge dx \wedge dy)\,\frac{\partial f}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, desarrollando el lado derecho de (2.16) (recuerde que $f'(q) \in \mathbb{H}$ es un valor desconocido) tenemos

$$\begin{aligned}
Dq \cdot f'(q) &= (dx \wedge dy \wedge dz - idt \wedge dy \wedge dz - jdt \wedge dz \wedge dx - kdt \wedge dx \wedge dy)\ f'(q) \\
&= (dx \wedge dy \wedge dz)\ f'(q) - (idt \wedge dy \wedge dz + jdt \wedge dz \wedge dx + kdt \wedge dx \wedge dy)\ f'(q)
\end{aligned}$$

de donde tenemos $d\left[(dq \wedge dq)\cdot f\right] = Dq \cdot f'(q)$ si y sólo si

$$\begin{cases} f'(q) &= i\dfrac{\partial f}{\partial x} + j\dfrac{\partial f}{\partial y} + k\dfrac{\partial f}{\partial z} \\ f'(q) &= -\dfrac{\partial f}{\partial t} \end{cases},$$

es decir, si y sólo si (2.17) es válido. □

Ejemplo 5. *Sea* $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *una función constante cuaterniónica,* $f(q) = c$ *donde* $c \in \mathbb{H}$. *Escribiendo* $f(q) = c_0 + i\ c_1 + j\ c_2 + k\ c_3$, *con* c_0, c_1, c_2 *y* c_3 *constantes reales, tenemos*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(c_0 + ic_1 + jc_2 + kc_3) = \frac{\partial}{\partial t}(c_0) + i\frac{\partial}{\partial t}(c_1) + j\frac{\partial}{\partial t}(c_2) + k\frac{\partial}{\partial t}(c_3) = 0.$$

Análogamente,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

por lo tanto,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

así, f *es una función regular sobre* $\mathbb{H}$.

Ejemplo 6. *Consideremos* $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *la función identidad,* $f(q) = q$ *donde* $q \in \mathbb{H}$. *Escribiendo* $q = t + i\ x + j\ y + k\ z$ *tenemos* $f(q) = t + i\ x + j\ y + k\ z$, *luego*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(t + i\ x + j\ y + k\ z) = \frac{\partial}{\partial t}(t) + i\frac{\partial}{\partial t}(x) + j\frac{\partial}{\partial t}(y) + k\frac{\partial}{\partial t}(z) = 1.$$

Análogamente,

$$i\frac{\partial f}{\partial x} = j\frac{\partial f}{\partial y} = k\frac{\partial f}{\partial z} = -1,$$

por lo tanto,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z} = -2,$$

luego, para cualquier $q \in \mathbb{H}$, f *no es una función regular.*

Ejemplo 7. *Consideremos la función* $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *dada por,* $f(q) = q^2$ *donde* $q \in \mathbb{H}$. *Así tenemos*

$$f(q) = (t^2 - x^2 - y^2 - z^2) + i(2tx) + j(2ty) + k(2tz).$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(t^2 - x^2 - y^2 - z^2) + i\frac{\partial}{\partial t}(2tx) + j\frac{\partial}{\partial t}(2ty) + k\frac{\partial}{\partial t}(2tz) = 2t + i2x + j2y + k2z.$$

Análogamente,

$$i\frac{\partial f}{\partial x} = -i2x - 2t, \qquad j\frac{\partial q^2}{\partial y} = -j2y - 2t, \qquad y \qquad k\frac{\partial q^2}{\partial z} = -k2z - 2t$$

Así,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z} = -4t;$$

luego f *es regular en todos los puntos* $q \in \mathbb{H}$ *tal que* $\mathcal{R}e(q) = t = 0$.

Proposición 4. *Con la notación de la Remarca (1), una función cuaterniónica escrita en la forma $f(q) = g(u, v) + jh(u, v)$, donde las funciones g y h son funciones complejas de dos variables complejas, es regular si y sólo si*

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{u}} = \frac{\partial h}{\partial v} \qquad y \qquad \frac{\partial g}{\partial \overline{v}} = -\frac{\partial h}{\partial u}.$$

Demostración. Recuerde que $q = t + ix + jy + kz = u + jv \in \mathbb{C} \oplus j\mathbb{C}$, donde $u := t + ix$ y $v := y - iz$ son números complejos. Usando la Proposición 3, las ecuaciones de Cauchy-Riemann-Fuerter, (2.17), se escribe como

$$\left(\frac{\partial g}{\partial t} + j\frac{\partial h}{\partial t}\right) + i\left(\frac{\partial g}{\partial x} + j\frac{\partial h}{\partial x}\right) + j\left(\frac{\partial g}{\partial y} + j\frac{\partial h}{\partial y}\right) + k\left(\frac{\partial g}{\partial z} + j\frac{\partial h}{\partial z}\right) = 0,$$

las partes real e imaginaria (en la descomposición $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus j\mathbb{C}$), satisfacen

$$\left(\frac{\partial g}{\partial t} + i\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial y} - i\frac{\partial h}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial h}{\partial t} - i\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} - i\frac{\partial g}{\partial z}\right) = 0,$$

es decir,

$$\frac{\partial g}{\partial t} + i\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial y} - i\frac{\partial h}{\partial z} = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial h}{\partial t} - i\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} - i\frac{\partial g}{\partial z} = 0.$$

De las igualdades de encima se deduce

$$\frac{\partial g}{\partial t} + i\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} + i\frac{\partial h}{\partial z} \quad y \quad \frac{\partial g}{\partial y} - i\frac{\partial g}{\partial z} = -\left(\frac{\partial h}{\partial t} - i\frac{\partial h}{\partial x}\right),$$

que se convierten en el par de ecuaciones complejas

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{u}} = \frac{\partial h}{\partial v} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial g}{\partial \overline{v}} = -\frac{\partial h}{\partial u},$$

como queríamos. □

Observación 4. *La Proposición 9 nos brinda un par de ecuaciones que pueden verse como la complejificación de las ecuaciones de Cauchy-Riemann para una función de una variable compleja; por otro lado, nos brinda una alternativa para la construcción de funciones cuaterniónicas regulares.*

Ejemplo 8. *Sea $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ la función cuaterniónica dada por,*

$$f(q) = f(u + jv) = \overline{u} + jv.$$

Tenemos

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{u}} = 1 = \frac{\partial h}{\partial v} \qquad y \qquad \frac{\partial g}{\partial \overline{v}} = 0 = -\frac{\partial h}{\partial u},$$

por la Proposición 9, f es una función regular para todo $q \in \mathbb{H}$.

Ejemplo 9. *Consideremos* $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *la función cuaterniónica dada por*

$$f(q) = f(u + jv) = 2\overline{u} + j(2v).$$

Se tiene

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{u}} = 2 = \frac{\partial h}{\partial v} \qquad y \qquad \frac{\partial g}{\partial \overline{v}} = 0 = -\frac{\partial h}{\partial u}.$$

Así, f *es una función regular para todo* $q \in \mathbb{H}$.

Ejemplo 10. *Tomemos la función cuaterniónica* $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *dada por*

$$f(q) = f(u + jv) = (u^2 + v^3) - j(\lambda\overline{u}), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Entonces

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{u}} = 0 = \frac{\partial h}{\partial v} \qquad y \qquad \frac{\partial g}{\partial \overline{v}} = 0 = -\frac{\partial h}{\partial u},$$

por lo tanto f *es una función regular para todo* $q \in \mathbb{H}$.

Ejemplo 11. *Considerando la siguiente función cuaterniónica* $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *dada por,*

$$f(q) = f(u + jv) = (2u^5 - u^4 + 3u^2\overline{v}^2) - j(2u^3\overline{v}).$$

Tenemos

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{u}} = 0 = \frac{\partial h}{\partial v} \qquad y \qquad \frac{\partial g}{\partial \overline{v}} = 6u^2\overline{v} = -\frac{\partial h}{\partial u},$$

luego f *es una función regular para todo* $q \in \mathbb{H}$.

Ejemplo 12. *Tomemos la siguiente función cuaterniónia* $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *dada por*

$$f(q) = f(u + jv) = \left(\frac{u}{u^2 + v^3}\right) + j\left(\frac{\overline{u}}{\overline{u} + \overline{v}}\right).$$

Entonces

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{u}} = 0 = \frac{\partial h}{\partial v} \quad y \quad \frac{\partial g}{\partial \overline{v}} = 0 = -\frac{\partial h}{\partial u}.$$

Así, f *es una función regular para todo* $q \in \mathbb{H}$.

Todos los ejemplos anteriores pueden ser generalizados considerando lo siguiente: si consideremos una función cuaterniónica de la forma

$$f(q) = g(u, v) + jh(\overline{u}, \overline{v})$$

donde $q = t + ix + j(y - iz) = u + jv$. Entonces la condición suficiente en la Proposición 9 es válida, por lo tanto, la función f es regular. Tenemos así, una familia de funciones cuaterniónicas regulares.

SECCIÓN 2.5

Construcción de funciones regulares

En esta sección nos dedicaremos a construir funciones regulares de una variable cuaterniónica. El siguiente resultado que citamos a continuación es de suma importancia para este propósito.

Proposición 5. *Si una función $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ es regular y dos veces (real) diferenciable, entonces f es una función armónica, es decir, su laplaciano sobre $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$*

$$\Delta_4 f := \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

es identicamente cero.

Demostración. Como f es una función regular usando la Proposición 3, tenemos $\overline{\partial}_l f = 0$, luego, de un cálculo directo

$$\begin{aligned}
0 &= 4\ \partial_l\ \left(\overline{\partial}_l f\right) \\
&= 4\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\frac{\partial}{\partial x} - j\frac{\partial}{\partial y} - k\frac{\partial}{\partial z}\right)\right]\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right] \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t} - i\frac{\partial}{\partial x} - j\frac{\partial}{\partial y} - k\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial t} + i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z}\right) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\
&= \Delta_4 f
\end{aligned}$$

es decir, f es una función armónica. □

Remarca 7. *La Proposición 5 nos brinda una manera de construir funciones $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ regulares a partir de funciones reales armónicas sobre $\mathbb{R}^4$. En efecto, si $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ es una función armónica, usando la relación entre los operadores de Cauchy-Riemann-Fueter a izquierda $\partial_l\left(\ \overline{\partial}_l\ \right) = \overline{\partial}_l\left(\ \partial_l\ \right)$, entonces la función $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ definida por*

$$\begin{aligned}
f &:= \partial_l h \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial t} - i\frac{\partial h}{\partial x} - j\frac{\partial h}{\partial y} - k\frac{\partial h}{\partial z}\right)
\end{aligned}$$

satisface

$$\overline{\partial}_l f = \overline{\partial}_l\ \left(\partial_l h\right) = \partial_l\ \left(\overline{\partial}_l h\right) = \frac{1}{4}\Delta h = 0,$$

es decir, f es una función regular.

Ejemplo 13. *La función* $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ *dada por* $h(t, x, y, z) = t^2 - x^2 + y^2 - z^2$ *es armónica. Esta afirmación es inmediato de verificar,*

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 2 - 2 + 2 - 2 = 0.$$

Entonces la función $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *dada por*

$$\begin{aligned} f(q) = \partial_l h(q) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial t} - i\frac{\partial h}{\partial x} - j\frac{\partial h}{\partial y} - k\frac{\partial h}{\partial z}\right) \\ &= t + ix - jy + kz \end{aligned}$$

es una función regular. La última afirmación es sencilla de verificar

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z} &= [1 + i(i) + j(-j) + k(k)] \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 14. *Sea* $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ *la función dada por* $h(t, x, y, z) = tx + yz$. *La función* h *es armónica, pues*

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0.$$

La función $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *dada por*

$$\begin{aligned} f(q) &= \partial_l h(q) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial t} - i\frac{\partial h}{\partial x} - j\frac{\partial h}{\partial y} - k\frac{\partial h}{\partial z}\right) \\ &= \frac{1}{2}(x - it - jz - ky) \end{aligned}$$

es una función regular, en efecto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2}[-i + i + j(-k) + k(-j)] \\ &= \frac{1}{2}(-jk + jk) = 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 15. *Consideremos* $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ *la función dada por,* $h(t, x, y, z) = 2t - x^3 + 3xy^2 + 2z$ *que es armónica, pues*

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = -6x + 6x = 0.$$

La función $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ dada por

$$\begin{aligned} f(q) = \partial_l h(q) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial t} - i\frac{\partial h}{\partial x} - j\frac{\partial h}{\partial y} - k\frac{\partial h}{\partial z}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[2 - i(-3x^2 + 3y^2) - j(6xy) - k(2)\right] \\ &= 1 + i\frac{1}{2}\left(3x^2 - 3y^2\right) - j(3xy) - k \end{aligned}$$

es regular, pues,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z} &= i(i3x - j3y) + j(i3y - j3x) \\ &= -3x - k3y - k3y + 3x = 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 16. *Tomemos la función $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dada por $h(t, x, y, z) = \frac{t^2}{2} + \frac{x^2 y}{2} - \frac{y^3}{6} - \frac{z^2}{2}$ que es armónica ya que*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} &= 1 + y - y - 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Entonces la función $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ dada por

$$\begin{aligned} f(q) = \partial_l h(q) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial t} - i\frac{\partial h}{\partial x} - j\frac{\partial h}{\partial y} - k\frac{\partial h}{\partial z}\right) \\ &= \frac{t}{2} - i\frac{xy}{2} + j\frac{y^2}{4} + k\frac{z}{2} \end{aligned}$$

es, como en los ejemplos anteriores, una función regular.

Ejemplo 17. *Sea $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la función dada por, $h(t, x, y, z) = x^2 tz - y^2 tz$ que es una función armónica, pues*

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = tz - tz = 0.$$

Luego, la función $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ definida por

$$\begin{aligned} f(q) = \partial_l h(q) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial t} - i\frac{\partial h}{\partial x} - j\frac{\partial h}{\partial y} - k\frac{\partial h}{\partial z}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[(x^2 z - y^2 z) - i(2xtz) - j(-2ytz) - k(x^2 t - y^2 t)\right] \\ &= \frac{1}{2}(x^2 z - y^2 z) - i(xtz) + j(ytz) - k\frac{1}{2}(x^2 t - y^2 t) \end{aligned}$$

es una función regular.

Proposición 6. *Sean $u(t,x)$ y $v(y,z)$ funciones reales armónicas en el plano, entonces la función $h:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dada por*

$$h(t,x,y,z) = u(t,x) \cdot v(y,z),$$

es armónica.

Demostración. Como $u(t,x)$ y $v(y,z)$ son funciones armónicas en el plano, entonces satisfacen la ecuación de Laplace, es decir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad y \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0,$$

luego tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot v + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot v + u \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + u \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\
&= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \cdot v + u \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la función $h(t,x,y,z) = u(t,x) \cdot v(y,z)$ es armónica. □

Ejemplo 18. *Las funciones $u(t,x) = t^2 - x^2$ y $v(y,z) = e^y \operatorname{sen} z$ son armónicas en el plano. Por la proposición anterior, la función*

$$\begin{aligned}
h(t,x,y,z) &= \left(t^2 - x^2\right) \cdot \left(e^y \operatorname{sen} z\right) \\
&= t^2 e^y \operatorname{sen} z - x^2 e^y \operatorname{sen} z,
\end{aligned}$$

es una función real armónica sobre $\mathbb{R}^4$, esta afirmación es sencilla de verificar,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} &= 2e^y \operatorname{sen} z - 2e^y \operatorname{sen} z + t^2 e^y \operatorname{sen} z - x^2 e^y \operatorname{sen} z \\
&\quad - t^2 e^y \operatorname{sen} z + x^2 e^y \operatorname{sen} z \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Entonces la función $f:\mathbb{H} \to \mathbb{H}$, dada por

$$\begin{aligned}
f(q) = \partial_l h(q) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial t} - i\frac{\partial h}{\partial x} - j\frac{\partial h}{\partial y} - k\frac{\partial h}{\partial z} \right) \\
&= \frac{1}{2}\left[2te^y \operatorname{sen} z - i(-2xe^y \operatorname{sen} z) - j(t^2 e^y \operatorname{sen} z - x^2 e^y \operatorname{sen} z) - k(t^2 e^y \cos z - x^2 e^y \cos z)\right] \\
&= (te^y \operatorname{sen} z) + i(xe^y \operatorname{sen} z) - j\frac{1}{2}(t^2 e^y \operatorname{sen} z - x^2 e^y \operatorname{sen} z) - k\frac{1}{2}(t^2 e^y \cos z - x^2 e^y \cos z),
\end{aligned}$$

satisface

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t} &= e^y \operatorname{sen} z - jte^y \operatorname{sen} z - kte^y \cos z \\
i\frac{\partial f}{\partial x} &= i\left(ie^y \operatorname{sen} z + jxe^y \operatorname{sen} z + kxe^y \cos z\right) \\
&= -e^y \operatorname{sen} z + kxe^y \operatorname{sen} z - jxe^y \cos z. \\
j\frac{\partial f}{\partial y} &= j\left[te^y \operatorname{sen} z + i(xe^y \operatorname{sen} z) - j\frac{1}{2}(t^2e^y \operatorname{sen} z - x^2e^y \operatorname{sen} z) - k\frac{1}{2}(t^2e^y \cos z - x^2e^y \cos z)\right] \\
&= jte^y \operatorname{sen} z - k(xe^y \operatorname{sen} z) + \frac{1}{2}(t^2e^y \operatorname{sen} z - x^2e^y \operatorname{sen} z) - i\frac{1}{2}(t^2e^y \cos z - x^2e^y \cos z). \\
k\frac{\partial f}{\partial z} &= k\left[te^y \cos z + i(xe^y \cos z) - j\frac{1}{2}(t^2e^y \cos z - x^2e^y \cos z) + k\frac{1}{2}(t^2e^y \operatorname{sen} z + x^2e^y \operatorname{sen} z)\right] \\
&= kte^y \cos z + j(xe^y \cos z) + i\frac{1}{2}(t^2e^y \cos z - x^2e^y \cos z) - \frac{1}{2}(t^2e^y \operatorname{sen} z - x^2e^y \operatorname{sen} z).
\end{aligned}$$

Al sumar las igualdades de encima, tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial t} + i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

es decir, f es una función regular.

Remarca 8. *En esta sección vimos como construir funciones regulares de una variable cuaterniónica, a partir de funciones reales armónicas sobre $\mathbb{R}^4$. En el siguiente capítulo veremos, que a partir de cualquier función (real diferenciable) arbitraria sobre $\mathbb{R}^4$, vamos a construir funciones regulares de una variable cuaterniónica que es un resultado mucho más elegante al que obtuvimos en este capítulo.*

CAPÍTULO 3

Teoría de integración sobre los cuaternios

> Las matemáticas no conocen razas o límites geográficos. Para las matemáticas, el mundo cultural es un país.
>
> David Hilbert.

En el presente capítulo se desarrollarán los resultados centrales del presente proyecto de grado.

El desarrollo de este capítulo esta dividido en cinco secciones. En la primera sección desarrollaremos algunos resultados importantes que nos permitirán demostrar teoremas fundamentales del presente trabajo. En la segunda sección introduciremos notación el gradiente, la divergencia y el rotacional, para demostrar de una manera eficaz y sencilla el teorema de Liouville. En la tercera sección se obtiene un resultado importante y elegante para construir funciones regulares de una variable cuaterniónica de una manera general. En la cuarta sección con todas las heramientas del capítulo dos y de la primera sección de este capítulo demostraremos el teorema de Cauchy. Finalmente demostraremos la fórmula integral de Cauchy. Para el seguimiento de este capítulo se recomienda [1], sin embargo también se puede consultar [11].

SECCIÓN 3.1

Resultados fundamentales

Una ventaja conveniente del análisis cuaterniónico es que está basado en unos cuantos, aunque poderosos, teoremas sencillos, de los cuales se siguen la mayoria de los resultados importantes. Entre estos teoremas, los principales son los siguientes: El teorema de Liouville, el teorema de Cauchy y la fórmula integral de Cauchy.

La base algebraica de estos teoremas es la siguiente proposición:

Proposición 7. *Sean $f, g : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ funciones diferenciables (en el sentido real), entonces*

$$d(g \cdot Dq \cdot f) = dg \wedge Dq \cdot f - g \cdot Dq \wedge df. \tag{3.1}$$

Demostración. Podemos ver a g como una 0-forma, ya que $Dq \cdot f$ es una 3-forma, (producto cuaterniónico de la 3-forma Dq por f), luego $d(Dq) = 0$ (vea la definición de la 3-forma Dq) y de las propiedades de la derivada exterior tenemos,

$$\begin{aligned}
d\left(g \cdot Dq \cdot f\right) &= d\left(g \wedge Dq \cdot f\right) \\
&= dg \wedge Dq \cdot f + (-1)^0 g \wedge d(Dq \cdot f) \\
&= dg \wedge Dq \cdot f + g \wedge d(Dq \wedge f) \\
&= dg \wedge Dq \cdot f + g \wedge \left[d(Dq) \wedge f + (-1)^3 Dq \wedge df\right] \\
&= dg \wedge Dq \cdot f - g \wedge Dq \wedge df \\
&= dg \wedge Dq \cdot f - g \cdot Dq \wedge df
\end{aligned}$$

como queriamos. □

Recordando los operadores de Cauchy-Riemann-Fueter izquierda y derecha, que se definió en el Capítulo 2, tenemos el siguiente corolario, que es una consecuencia directa de la proposición anterior.

Corolario 1. *Sean $f, g : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ funciones diferenciables (en el sentido real), entonces*

$$d\left(g \cdot Dq \cdot f\right) = \left[\left(\overline{\partial}_r g\right) \cdot f + g \cdot \left(\overline{\partial}_l f\right)\right] v. \tag{3.2}$$

Donde $v = dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz$, es la 4-forma de volumen sobre $\mathbb{H}$ definida en la Remarca (4).

Demostración. Desarrollando el lado derecho de la ecuación (3.1) tenemos;

$$\begin{aligned}
& dg \wedge Dq \cdot f = \\
&= \left(\frac{\partial g}{\partial t}dt + \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial z}dz\right) \wedge (dx \wedge dy \wedge dz - idt \wedge dy \wedge dz - jdt \wedge dz \wedge dx - kdt \wedge dx \wedge dy) \cdot f \\
&= \left(\frac{\partial g}{\partial t}dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz - \frac{\partial g}{\partial x}dx \wedge idt \wedge dy \wedge dz - \frac{\partial g}{\partial y}dy \wedge jdt \wedge dz \wedge dx - \frac{\partial g}{\partial z}dz \wedge kdt \wedge dx \wedge dy\right) \cdot f \\
&= \left(\frac{\partial g}{\partial t}dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial g}{\partial x}idt \wedge dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial g}{\partial y}jdt \wedge dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial g}{\partial z}kdt \wedge dx \wedge dy \wedge dz\right) \cdot f \\
&= \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x}i + \frac{\partial g}{\partial y}j + \frac{\partial g}{\partial z}k\right)(dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz) \cdot f \\
&= \left(\overline{\partial}_r g\right)(v) \cdot f.
\end{aligned}$$

Por otro lado tenemos

$$
\begin{aligned}
&g \cdot Dq \wedge df = \\
=&g \cdot (dx \wedge dy \wedge dz - idt \wedge dy \wedge dz - jdt \wedge dz \wedge dx - kdt \wedge dx \wedge dy) \wedge \left(\frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right) \\
=&g \cdot \left(dx \wedge dy \wedge dz \wedge \frac{\partial f}{\partial t} dt - idt \wedge dy \wedge dz \wedge \frac{\partial f}{\partial x} dx - jdt \wedge dz \wedge dx \wedge \frac{\partial f}{\partial y} dy - kdt \wedge dx \wedge dy \wedge \frac{\partial f}{\partial z} dz \right) \\
=&g \cdot \left(-\frac{\partial f}{\partial t} dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz - i\frac{\partial f}{\partial x} dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz - j\frac{\partial f}{\partial y} dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz - k\frac{\partial f}{\partial z} dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz \right) \\
=&-g \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial t} + i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z} \right) (dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz) \\
=&-g \cdot \left(\overline{\partial}_l f \right) (v).
\end{aligned}
$$

Así, de la ecuación (3.1) tenemos:

$$
\begin{aligned}
d\left(g \cdot Dq \cdot f\right) =& dg \wedge Dq \cdot f - g \cdot Dq \wedge df \\
=& \left[\left(\overline{\partial}_r g \right) \cdot f + g \cdot \left(\overline{\partial}_l f \right) \right] v,
\end{aligned}
$$

como queriamos. □

Proposición 8. *Una función diferenciable (en el sentido real) $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ es regular si y sólo si*

$$Dq \wedge df_q = 0.$$

Demostración. Tomemos $g = 1$ (pues una función constante es regular) en la ecuación (3.1) y usando (3.2) tenemos

$$
\begin{aligned}
Dq \wedge df &= -d\left(Dq \cdot f\right) \\
&= -\left(\overline{\partial}_l f \right) v.
\end{aligned}
$$

Así, $\overline{\partial}_l f = 0$ si y sólo si $Dq \wedge df_q = 0$. □

SECCIÓN 3.2

Terema de Liouville

En esta sección introduciremos el gradiente, la divergencia y el rotacional, para demostrar de manera sencilla el teorema de Liouville, y además obtendremos un resultado que será de suma importancia para construir funciones regulares.

Comencemos definiendo el gradiente, la divergencia y el rotacional. Para eso recordemos que $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$, donde la parte vectorial de $\mathbb{H}$ es $\mathbb{R}^3$ en las variables $x,\ y,\ z$.

Dada $f = \phi + \psi : \mathbb{H} \to \mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$ una función cuaterniónica, donde $\phi : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ es una función escalar y $\psi : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^3$ una función vectorial, definimos:

- El *gradiente* (3 - dimensional, es decir, en la parte vectorial vectorial de $\mathbb{H}$, $\mathbb{R}^3$ de variable x, y, z), de ϕ es la aplicación, $\nabla\phi : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^3$, dada por:

$$\nabla\phi := i\,\frac{\partial\phi}{\partial x} + j\,\frac{\partial\phi}{\partial y} + k\,\frac{\partial\phi}{\partial z}.$$

- La *divergencia* en la parte vectorial de $\mathbb{H}$, de una función vectorial $\psi = i\,\psi_1 + j\,\psi_2 + k\,\psi_3$ es la aplicación $\operatorname{div}(\psi) : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\operatorname{div}(\psi) := \frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \frac{\partial\psi_2}{\partial y} + \frac{\partial\psi_3}{\partial z}.$$

- El *rotacional* en la parte vectorial de $\mathbb{H}$, de una función vectorial $\psi = i\,\psi_1 + j\,\psi_2 + k\,\psi_3$ es la aplicación $\operatorname{rot}(\psi) : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$\operatorname{rot}(\psi) := i\,\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial y} - \frac{\partial\psi_2}{\partial z}\right) + j\,\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial z} - \frac{\partial\psi_3}{\partial x}\right) + k\,\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x} - \frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right).$$

Proposición 9. *Sea $\mathcal{U} \subset \mathbb{H}$ un dominio (abierto y conexo) y $f, g : \mathcal{U} \subset \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ funciones, tales que $\nabla f = \nabla g$, entonces*

$$f = g + c,$$

donde c es una constante real.

Demostración. Sea $u \in \mathbb{R}^3$ y $q \in \mathbb{H}$, así

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(q), u \rangle &= \langle \nabla g(q), u \rangle \\ df_q(u) &= dg_q(u) \\ f &= g + c, \end{aligned}$$

como queriamos. $\square$

Teorema 2. *Una función $f = \phi + \psi : \mathbb{H} \to \mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$, donde $\phi : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ y $\psi : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^3$, es regular si y sólo si ϕ y ψ satisfacen el sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi}{\partial t} = \operatorname{div}(\psi) \\ \nabla\phi = -\dfrac{\partial\psi}{\partial t} - \operatorname{rot}(\psi) \end{cases} . \tag{3.3}$$

Demostración. Como $f = \phi + \psi$, entonces tenemos

$$\begin{aligned}\overline{\partial}_l f &= \overline{\partial}_l (\phi + \psi) \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial t}(\phi+\psi) + i\,\frac{\partial}{\partial x}(\phi+\psi) + j\,\frac{\partial}{\partial y}(\phi+\psi) + k\,\frac{\partial}{\partial z}(\phi+\psi)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial t}(\phi+\psi) + \nabla\cdot(\phi+\psi)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial t} + \nabla\cdot\phi + \nabla\cdot\psi\right),\end{aligned}$$

de un cálculo directo se puede ver que $\nabla\cdot\psi = -\mathrm{div}(\psi) + \mathrm{rot}(\psi)$, (visto como un producto cuaterniónico de los cuaternios puros $\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$ y $\psi = i\psi_1 + j\psi_2 + k\psi_3$) así tenemos:

$$\overline{\partial}_l f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial t} + \nabla\phi - \mathrm{div}(\psi) + \mathrm{rot}(\psi)\right) = 0.$$

De donde, f es regular si y sólo si

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\phi}{\partial t} = \mathrm{div}(\psi) \\ \nabla\phi = -\dfrac{\partial\psi}{\partial t} - \mathrm{rot}(\psi),\end{cases}$$

como queriamos. □

SECCIÓN 3.3

Construcción de funciones regulares y aplicaciones

En el Capítulo 2 deducimos resultados importantes de como construir funciones regulares, a continuación, usando el teorema (2) vamos a obtener un resultado que permitirá construir más ejemplos de funciones regulares de variable cuaterniónica.

Remarca 9. *Si consideramos $\psi = \nabla\varphi$, donde $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, luego en el sistema (3.3) se tiene que:*

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\phi}{\partial t} = div(\nabla\varphi) \\ \nabla\phi = -\dfrac{\partial}{\partial t}(\nabla\varphi) - rot(\nabla\varphi)\end{cases};$$

ya que $div(\nabla\varphi) = \Delta_3\varphi$ (Laplaciano 3-dimensional en las variables x, y, z) y $rot(\nabla\varphi) = 0$, el sistema se convierte en

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\phi}{\partial t} = \Delta_3\varphi \\ \nabla\phi = -\dfrac{\partial}{\partial t}(\nabla\varphi)\end{cases};$$

por lo tanto, $f = \phi + \nabla\varphi$ es regular si y sólo si

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial t} = \Delta_3 \varphi \\ \nabla \phi = \nabla \left(-\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \end{cases} . \tag{3.4}$$

Nos hacemos la siguiente pregunta: dada $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ una función arbitraría (real diferenciable), ¿existe ϕ tal que el sistema (3.4) es válido?. Si la respuesta es afirmativa, tenemos que la función $f = \phi + \nabla\varphi$ es regular. A continuación veremos que (3.4) siempre es soluble. En la segunda igualdad del sistema (3.4) $\nabla\phi = \nabla\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$, luego por la Proposición (1) tenemos

$$\phi = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c(t), \tag{3.5}$$

derivando parcialmente respecto de t, se tiene

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + c'(t),$$

reemplazando la primera igualdad de (3.4), en la igualdad anterior

$$\Delta_3 \varphi = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + c'(t)$$
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \Delta_3 \varphi = c'(t)$$

Así, $\Delta_4 \varphi = c'(t)$ integrando esta última igualdad respecto de t obtenemos

$$c(t) = \int \Delta_4 \varphi \, dt, \tag{3.6}$$

reemplazando (3.6), en (3.5), obtenemos

$$\phi = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \int \Delta_4 \varphi \, dt,$$

por lo tanto, dada $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ una función arbitraría (real diferenciable), se obtiene que

$$f = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \int \Delta_4 \varphi \, dt \right) + \nabla \varphi, \tag{3.7}$$

es una función regular de variable cuaterniónica.

El resultado que se acaba de obtener es importante, pues a partir de cualquier función $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ (real diferenciable) dada, se obtiene una función regular de variable cuaterniónica, a continuación citamos algunos ejemplos.

Ejemplo 19. *Consideremos* $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ *la función dada por* $\varphi(t, x, y, z) = 2x^2 + 3ty + z$. *Se tiene que*

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -3y.$$

$$\int \Delta_4 \varphi \; dt = \int \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) \; dt = 4 \int \; dt = 4t + c; \qquad c \in \mathbb{R}.$$

$$\nabla \varphi = i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z} = i4x + j3t + k.$$

De (3.7), *obtenemos*

$$f(q) = f(t + ix + jy + kz) = (-3y + 4t + c) + i4x + j3t + k,$$

así, f *es una función regular de variable cuaterniónica, pues*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + i \frac{\partial f}{\partial x} + j \frac{\partial f}{\partial y} + k \frac{\partial f}{\partial z} = 4 + j3 + i(i4) + j(-3) = 0.$$

Ejemplo 20. *Sea* $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ *la función dada por* $\varphi(t, x, y, z) = tx + e^y \operatorname{sen} z$. *Luego tenemos que*

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -x.$$

$$\int \Delta_4 \varphi \; dt = \int \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) \; dt = \int (e^y \operatorname{sen} z - e^y \operatorname{sen} z) \; dt = c; \qquad c \in \mathbb{R}.$$

$$\nabla \varphi = i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z} = it + je^y \operatorname{sen} z + ke^y \cos z.$$

De (3.7), *se tiene que*

$$f(q) = f(t + ix + jy + kz) = (-x + c) + it + je^y \operatorname{sen} z + ke^y \cos z,$$

así, f *es una función regular de variable cuaterniónica, en efecto,*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + i \frac{\partial f}{\partial x} + j \frac{\partial f}{\partial y} + k \frac{\partial f}{\partial z} &= i + i(-1) + j(je^y \operatorname{sen} z + ke^y \cos z) + k(je^y \cos z - ke^y \operatorname{sen} z) \\ &= -e^y \operatorname{sen} z + ie^y \cos z - ie^y \cos z + e^y \operatorname{sen} z = 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 21. *Tomemos la función* $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ *dada por* $\varphi(t,x,y,z) = t^2 + e^y x + \ln z$. *Así tenemos*

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -2t.$$

$$\begin{aligned}\int \Delta_4 \varphi \; dt &= \int \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) \; dt = \int (2 + e^y x - \frac{1}{z^2}) \; dt \\ &= (2 + e^y x - \frac{1}{z^2}) t + c; \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

$$\nabla \varphi = i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z} = i e^y + j e^y x + k \frac{1}{z}.$$

De (3.7), *conseguimos*

$$f(q) = f(t + ix + jy + kz) = (e^y x - \frac{1}{z^2}) t + c + i e^y + j e^y x + k \frac{1}{z},$$

así, f *es una función regular de variable cuaterniónica.*

Ejemplo 22. *Consideremos la siguiente función* $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ *dada por* $\varphi(t,x,y,z) = te^x + \operatorname{sen}^2 y + \cos^2 z$. *Luego tenemos lo siguiente*

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -e^x.$$

$$\begin{aligned}\int \Delta_4 \varphi \; dt &= \int (te^x + 2\cos^2 y - 2\operatorname{sen}^2 y + 2\operatorname{sen}^2 z - 2\cos^2 z) \; dt \\ &= \frac{t^2}{2} e^x + (2\cos^2 y - 2\operatorname{sen}^2 y + 2\operatorname{sen}^2 z - 2\cos^2 z) t + c; \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \varphi &= i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ &= i t e^x + j 2 \operatorname{sen} y \cos y - k 2 \cos z \operatorname{sen} z.\end{aligned}$$

De (3.7), *tenemos*

$$\begin{aligned}&f(q) = f(t + ix + jy + kz) \\ &= -e^x + \frac{t^2}{2} e^x + (2\cos^2 y - 2\operatorname{sen}^2 y + 2\operatorname{sen}^2 z - 2\cos^2 z) t + c + i t e^x + j 2 \operatorname{sen} y \cos y - k 2 \cos z \operatorname{sen} z,\end{aligned}$$

así, f *es una función regular de variable cuaterniónica.*

Corolario 2. *Sea* $f = \phi + \psi$*, donde* $\phi : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ *y* $\psi : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^3$*, una función regular, entonces cada componente de* f *satisface la ecuación de Laplace en las variables* $t,\ x,\ y,\ z$*.*

Demostración. Como f es una función regular, por el Teorema 2, ϕ y ψ satisfacen el siguiente sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial t} = \operatorname{div}(\psi) \\ \nabla \phi = -\dfrac{\partial \psi}{\partial t} - \operatorname{rot}(\psi). \end{cases} \tag{3.8}$$

Luego aplicando la divergencia $\operatorname{div}(\cdot)$ en la segunda igualdad de (3.8), tenemos

$$\operatorname{div}(\nabla\phi) = -\operatorname{div}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) - \operatorname{div}(\operatorname{rot}(\psi)),$$

de un cálculo directo se puede ver que $\operatorname{div}(\nabla\phi) = \Delta_3\phi$ y $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\psi)) = 0$, luego en la igualdad de encima y de la primera igualdad de (3.8) tenemos

$$\Delta_3\phi = -\operatorname{div}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}(\psi)) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \Delta_3\phi &= 0 \\ \Delta_4\phi &= 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, aplicando el rotacional $\operatorname{rot}(\cdot)$ en la segunda igualdad de (3.8), tenemos

$$\operatorname{rot}(\nabla\phi) = -\operatorname{rot}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) - \operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}(\psi)\right),$$

como $\operatorname{rot}(\nabla\phi) = 0$ y $\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}(\psi)\right) = \nabla\left(\operatorname{div}(\psi)\right) - \Delta_3\psi$, así en la igualdad de encima tenemos

$$0 = -\operatorname{rot}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) - \nabla\left(\operatorname{div}(\psi)\right) + \Delta_3\psi = -\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot}(\psi)) - \nabla\left(\operatorname{div}(\psi)\right) + \Delta_3\psi,$$

luego del sistema (3.8), en la expresión de encima tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial t} - \nabla\phi\right) - \nabla\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) + \Delta_3\psi \\ &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\phi) - \nabla\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) + \Delta_3\psi \\ &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\phi) - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\phi) + \Delta_3\psi = \Delta_4\psi. \end{aligned}$$

Por lo tanto ϕ y ψ satisfacen la ecuación de Laplace. □

Remarca 10. *Una consecuencia directa del corolario anterior es que, si $f = \phi + \psi$ es regular, entonces f es real diferenciable.*

Proposición 10 (Principio del máximo para funciones armónicas)**.** *Sea u una función armónica en un dominio $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^4$, y alcanza un máximo absoluto en $\mathcal{U}$ (i.e. para todo $x \in \mathcal{U}$, $u(x) \leq \sup u(x_0)$ tal que $x_0 \in \mathcal{U}$), entonces u es constante.*

La demostración se encuentra en el libro de Gilbard, David. *Elliptic partial differential equations of second order* [4].

Corolario 3 (Teorema de Liouville)**.** *Sea $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ una función regular y acotada en todo $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{H}$, entonces f es constante.*

Demostración. Como $f = \phi + \psi$ es regular, entonces ϕ y ψ son armónicas por el Corolario 2 y además acotadas así alcanzan su máximo absoluto, luego por el principio del máximo ϕ y ψ son constantes, por lo tanto f es constante. □

Aplicación. Como aplicación de estudio de funciones regulares en $\mathbb{H}$, veremos como reescribir las ecuaciones de Maxwell, de la teoría electromagnética, como una sola ecuación diferencial cuaterniónica.

Las **ecuaciones de Maxwell** son un conjunto de cuatro ecuaciones vectoriales (originalmente 20 ecuaciones escalares) que describen por completo los fenómenos de interacción entre el campo eléctrico y el campo magnético. La gran contribución de James Clerk Maxwell fue reunir en estas ecuaciones largos años de resultados experimentales, debidos a Coulomb, Gauss, Ampere, Faraday y otros, introduciendo los conceptos de campo y corriente de desplazamiento, unificando los campos eléctricos y magnéticos en un solo concepto: el campo electromagnético.

Las ecuaciones de Maxwell como ahora conocemos son cuatro que citamos a continuación.

$$\mathrm{div}(\mathrm{E}) = \rho \tag{3.9}$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{H}) = 0 \tag{3.10}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t} + \mathrm{rot}(\mathrm{E}) = 0 \tag{3.11}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t} + \mathrm{J} = \mathrm{rot}(\mathrm{H}) \tag{3.12}$$

donde E es el campo eléctrico, H es el campo magnético y J es la densidad de la corriente; la ecuación (3.9) y (3.10) son la ley de Gauss para el campo eléctrico y magnético respectivamente. La ecuación (3.11) y (3.12) es la ley de Faraday y Ampére respectivamente.

Consideremos el operador diferencial cuaterniónico

$$\square^* := -\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \nabla,$$

actuando sobre funciones de variable cuaterniónica sobre $\mathbb{H}$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío y ∇ es el operador gradiente en las variables x, y y z.

Proposición 11. *Las ecuaciones de Maxwell son equivalentes a la ecuación diferencial cuateniónica*

$$\square^* (E + iH) = -\rho + iJ,$$

donde E es el campo elétrico, H es el campo magnético, ρ la densidad de la carga eléctrica y J es la densidad de la corriente.

Demostración. De un cálculo directo tenemos:

$$\begin{aligned}
\square^* (\mathrm{E} + i\mathrm{H}) &= \left(-\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \nabla\right)(\mathrm{E} + i\mathrm{H}) \\
&= \left(-\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \nabla\right)(\mathrm{E}) + i\left(-\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \nabla\right)(\mathrm{H}) \\
&= -\frac{i}{c}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t} + \nabla\cdot\mathrm{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t} + i\nabla\cdot\mathrm{H} \\
&= -\frac{i}{c}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t} - \mathrm{div}(\mathrm{E}) + \mathrm{rot}(\mathrm{E}) + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t} + i\left(-\mathrm{div}(\mathrm{H}) + \mathrm{rot}(\mathrm{H})\right) \\
&= [-\mathrm{div}(\mathrm{E})] + [-i\mathrm{div}(\mathrm{H})] + \left[\frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t} + \mathrm{rot}(\mathrm{E})\right] + i\left[-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t} + \mathrm{rot}(\mathrm{H})\right] \\
&= -\rho + i\mathrm{J}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene las ecuaciones de Maxwell si y sólo si

$$\square^* (\mathrm{E} + i\mathrm{H}) = \rho + i\mathrm{J}.$$

□

Las siguientes secciones vamos a dedicar a los objetivos propuestos de este proyecto de grado que era obtener los teoremas fundamentales de integración.

SECCIÓN 3.4

El teorema de Cauchy

Estudiaremos en esta parte una de las cuestiones fundamentales sobre la teoría de variable cuaterniónica como es el teorema de Cauchy.

Teorema 3 (El teorema de Cauchy)**.** *Si una función $f:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ es regular y continuamente diferenciable (en el sentido real) en un dominio $\Omega\subset\mathbb{H}$, entonces*

$$\int_{\partial\Omega} Dq\cdot f=0,$$

donde $\partial\Omega$ es una hipersuperficie cerrada (3-dimensional).

Demostración. Como f es regular en Ω, entonces es regular en cada punto $q\in\Omega$, y por la Proposición 8 se deduce que $Dq\wedge df_q=0$, para todo $q\in\Omega$. Integrando la igualdad anterior sobre $\Omega\subset\mathbb{H}$ tenemos

$$\int_{\Omega} Dq\wedge df_q=0. \tag{3.13}$$

De las propiedades de la derivada exterior es inmediato ver que $d(Dq\cdot f)=-Dq\wedge df$, luego en la ecuación (3.13), aplicando el teorema de Stokes tenemos

$$0=\int_{\Omega} Dq\wedge df_q=-\int_{\Omega} d(Dq\cdot f)=-\int_{\partial\Omega} Dq\cdot f,$$

de donde

$$\int_{\partial\Omega} Dq\cdot f=0,$$

como queriamos. □

A continuación citamos un resultado más general de teorema de Cauchy.

Lema 1. *Sean $f,g:\mathcal{U}\subset\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ funciones continuamente diferenciables (en el sentido real) en $\mathcal{U}$. Si f es regular a la izquierda en $\mathcal{U}\setminus\{q_0\}$ y g es regular a la derecha en $\mathcal{U}\setminus\{q_0\}$, entonces*

$$\int_{\partial\Omega} g\cdot Dq\cdot f=0,$$

para cualquier hipersuperficie cerrada $\partial\Omega$ (3-dimensional) en $\mathcal{U}$, que contiene a q_0.

Demostración. La prueba es inmediata utilizando el corolario 1, tenemos

$$d\left(g\cdot Dq\cdot f\right)=\left[\left(\overline{\partial}_r g\right)\cdot f+g\cdot\left(\overline{\partial}_l f\right)\right]v,$$

donde $v=dt\wedge dx\wedge dy\wedge dz$ es una 4-forma diferencial sobre $\mathbb{H}$. Por hipotesis tenemos que f es regular a la izquierda (es decir $\overline{\partial}_l f=0$) y g es regular a la derecha (es decir $\overline{\partial}_r g=0$), así en la igualdad anterior tenemos

$$d\left(g\cdot Dq\cdot f\right)=0,$$

luego integrando sobre una región $\Omega\subset\mathbb{H}$, la igualdad de encima y aplicando el teorema de

Stokes, obtenemos

$$0 = \int_{\Omega} d\left(g \cdot Dq \cdot f\right) = \int_{\partial\Omega} g \cdot Dq \cdot f,$$

por lo tanto se tiene el resultado. □

SECCIÓN 3.5

La fórmula integral de Cauchy

La fórmula integral de Cauchy expresa que los valores de una función regular están completamente determinados en cualquier lugar del interior de un dominio $\Omega \subset \mathbb{H}$ por sus valores a lo largo de $\partial\Omega$ hipersuperficie cerrada (3-dimensional), y da una fórmula explícita que relaciona estos valores.

Teorema 4 (La fórmula integral de Cauchy)**.** *Sea $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ una función regular a la derecha en $\mathcal{U}$, si $\partial\Omega$ es una hipersuperficie cerrada (3-dimensional) en $\mathcal{U}$ que contiene a q_0, entonces*

$$f(q_0) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\partial\Omega} f(q) \cdot Dq \cdot \Delta_4 \left(q - q_0\right)^{-1}.$$

Demostración. Sea $q_0 \in \Omega$ fijo, luego consideremos la forma diferencial $[f(q) - f(q_0)] \cdot Dq \cdot \Delta_4(q - q_0)^{-1}$, donde $[f(q) - f(q_0)]$ es una función regular a la derecha en $\mathcal{U}$, por otro lado es inmediato verificar que $\Delta_4(q - q_0)^{-1}$ es regular a la izquierda en $\mathcal{U} \setminus \{q_0\}$ (i.e. $\overline{\partial}_l \left[\Delta_4(q - q_0)^{-1}\right] = 0$). Luego por el Lema 1 tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Omega} [f(q) - f(q_0)] \cdot Dq \cdot \Delta_4(q - q_0)^{-1} \\ &= \int_{\partial\Omega} f(q) \cdot Dq \cdot \Delta_4(q - q_0)^{-1} - \int_{\partial\Omega} f(q_0) \cdot Dq \cdot \Delta_4(q - q_0)^{-1}, \end{aligned}$$

y de un cálculo directo se puede verificar que $\Delta_4(q - q_0)^{-1} = 4\,\dfrac{(q - q_0)^{-1}}{\|q - q_o\|^2}$, así de la igualdad anterior tenemos

$$\int_{\partial\Omega} f(q) \cdot Dq \cdot \Delta_4(q - q_0)^{-1} = 4 \int_{\partial\Omega} f(q_0) \cdot Dq \cdot \frac{(q - q_0)^{-1}}{\|q - q_0\|^2}, \tag{3.14}$$

luego la última integral sobre $\partial\Omega$, se puede integrar sobre una 3-esfera de centro q_0, normalizando $(q - q_0)$, (i.e. $q - q_0 = \frac{q - q_0}{\|q - q_0\|}$ tal que $\|q - q_0\| = 1$). Luego es claro que

$$Dq = dS \cdot \frac{(q - q_0)}{\|q - q_0\|},$$

pues, tomando normas se tiene una igualdad. De manera equivalente

$$Dq \cdot \frac{(q-q_0)^{-1}}{\|q-q_0\|^2} = \frac{1}{\|q-q_0\|^3} \cdot dS,$$

donde Dq es el elemento de volumen cuaterniónico de $\partial\Omega$ y dS es el elemento de volumen de la 3-esfera unitaria de centro q_0. Así, en la ecuación (3.14) tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} f(q)\cdot Dq\cdot \Delta_4(q-q_0)^{-1} &= 4 \int_{\mathbb{S}(q_0,1)} \frac{f(q_0)}{\|q-q_0\|^3}\cdot dS \\ &= 4\ f(q_0)\int_{\mathbb{S}(q_0,1)} dS \\ &= 4\ f(q_0)\ 2\pi^2 \\ &= 8\pi^2\ f(q_0)\end{aligned}$$

por lo tanto se tiene

$$f(q_0) = \frac{1}{8\pi^2}\int_{\partial\Omega} f(q)\cdot Dq\cdot \Delta_4(q-q_0)^{-1}$$

como queriamos. □

CAPÍTULO 4

Conclusiones

> En las matemáticas el arte de proponer una pregunta debe tener un valor más alto que resolverlo.
>
> GEORG CANTOR.

Una de las características del presente trabajo de grado es que proporciona una descripción autocontenida de la teoría del análisis cuaterniónico y además presenta su transversalidad a varias ramas de la matemática, como ser Topología, Álgebra, Análisis y Geometría Diferencial.

En el presente trabajo desarrollamos una teoría de álgebra de los cuaternios, diferenciabilidad sobre los cuaternios e intregración sobre los cuaternios. Entre los resultados importantes que se obtuvieron son: construcción de funciones regulares de una variable cuaterniónica, ademas como aplicación de estudio de funciones regulares en $\mathbb{H}$, vimos como reescribir las ecuaciones de Maxwell, de la teoría electromagnética, como una sola ecuación diferencial cuaterniónica y finalmente los teoremas fundamentales como ser; teorema de Liouville, teorema de Cauchy y la fórmula integral de Cauchy, que era nuestro objetivo.

Con este estudio del análisis cuaterniónico podemos realizar estudios posteriores en geometría diferencial: si consideramos una superficie en $\mathbb{R}^3 \simeq \mathcal{P}u(\mathbb{H})$ o $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{H}$ usando el producto cuaterniónico desaríamos describir las principales propiedades de una superficie en $\mathbb{R}^3$ o en los cuaternios $(\mathbb{R}^4)$.

APÉNDICE A

Formas diferenciales en $\mathbb{R}^4$

> Las ciencias matemáticas exhiben particularmente orden, simetría y límites; y esas son las más grandes formas de belleza.
>
> ARISTÓTELES.

En este apéndice desarrollamos la teoría de formas diferenciales en $\mathbb{R}^4$, para tener mejor comprensión del material presentado en los capítulos dos y tres de este proyecto. Sin embargo, por la notación la mejor referencia para consultar este material es [2]. Si bien el objetivo es que este proyecto sea completo y autocontenido, vale la pena señalar que una exposición completa de todos los temas empleados regularmente en el estudio de análisis cuaterniónico es sencillamente inviable.
Además de la teoría que se desarrolla en esta sección, se asume que el lector tiene al menos una comprensión fundamental de áreas como el análisis real, análisis complejo y la teoría básica de grupos, anillos y campos.

Sea p un punto de $\mathbb{R}^4$. El conjunto de vectores $q - p$, $q \in \mathbb{R}^4$. (que tienen origen en p) se llamará *espacio tangente* de $\mathbb{R}^4$ en p y se denotará por $\mathbb{R}^4_p$. Naturalmente, podemos identificar $\mathbb{H}_p \simeq \mathbb{H}$, para todo $p \in \mathbb{H}$.

Los vectores $e_1 := (1,0,0,0)$, $e_2 := (0,1,0,0)$, $e_3 := (0,0,1,0)$, $e_4 := (0,0,0,1)$ de la base canónica de $\mathbb{R}^4_0$ se identificaran como $(e_1)_p$, $(e_2)_p$, $(e_3)_p$, $(e_4)_p$ en el punto p.

Campo vectorial. Un campo vectorial en $\mathbb{R}^4$, es una aplicación v que asocia a cada punto $p \in \mathbb{R}^4$, un vector $v(p) \in \mathbb{R}^4_p$. Donde podemos escribir v como:

$$v(p) = \lambda_1(p)(e_1)_p + \lambda_2(p)(e_2)_p + \lambda_3(p)(e_3)_p + \lambda_4(p)(e_4)_p.$$

Donde $\lambda_i : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, con $i = 1, 2, 3, 4$, son funciones en $\mathbb{R}^4$, que caracterizan al campo vectorial υ. Diremos que υ es diferenciable si y sólo si las funciones λ_i, son diferenciales.

A cada espacio tangente $\mathbb{R}^4_p$ podemos asociar su espacio dual $\left(\mathbb{R}^4_p\right)^*$ que es el conjunto de funcionales lineales $\varphi : \mathbb{R}^4_p \to \mathbb{R}$. A continuación vamos a definir las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} (dx_i)_p : \mathbb{R}^4_p &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto (dx_i)_p (u) := \langle u, e_i \rangle, \qquad i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

es inmediato ver que $(dx_i)_p$ es una funcional lineal.

Proposición 12. *El conjunto* $\left\{ (dx_1)_p , (dx_2)_p , (dx_3)_p , (dx_4)_p \right\}$ *es una base de* $\left(\mathbb{R}^4_p\right)^*$, *que por lo tanto tiene dimensión 4.*

Demostración. a) Veamos primero que el cunjunto dado es L.I. para eso consideremos una combinación lineal nula, tomando α_1 , α_2 , α_3 , α_4 constantes reales tenemos:

$$\alpha_1 (dx_1)_p + \alpha_2 (dx_2)_p + \alpha_3 (dx_3)_p + \alpha_4 (dx_4)_p = 0 \tag{A.1}$$

evaluando en la igualdad anterior $e_1 := (1, 0, 0, 0)$ tenemos

$$\begin{aligned} &\alpha_1 (dx_1)_p (e_1) + \alpha_2 (dx_2)_p (e_1) + \alpha_3 (dx_3)_p (e_1) + \alpha_4 (dx_4)_p (e_1) = 0 \\ &\alpha_1 \langle e_1, e_1 \rangle + \alpha_2 \langle e_1, e_2 \rangle + \alpha_3 \langle e_1, e_3 \rangle + \alpha_4 \langle e_1, e_4 \rangle = 0 \\ &\alpha_1 = 0 \end{aligned}$$

análogamente evaluando $e_2 := (0, 1, 0, 0)$, $e_3 := (0, 0, 1, 0)$ y $e_4 := (0, 0, 0, 1)$ en la igualdad (A.1) se obtiene que $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$ y $\alpha_4 = 0$ respectivamente. Así el conjunto dado es L.I.

b) Por otro lado veamos que el conjunto dado genera a $\left(\mathbb{R}^4_p\right)^*$. Sea $\varphi \in \left(\mathbb{R}^4_p\right)^*$, luego se tiene que $\varphi : \mathbb{R}^4_p \to \mathbb{R}$ es una funcional lineal, si $u \in \mathbb{R}^4_p$ entonces, $u = \beta_1(e_1)_p + \beta_2(e_2)_p + \beta_3(e_3)_p + \beta_4(e_4)_p$, pues $\{(e_1)_p, (e_2)_p, (e_3)_p, (e_4)_p\}$ es una base de $\mathbb{R}^4_p$. Luego

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \varphi\left(\beta_1(e_1)_p + \beta_2(e_2)_p + \beta_3(e_3)_p + \beta_4(e_4)_p\right) \\ &= \beta_1\, \varphi\left((e_1)_p\right) + \beta_2\, \varphi\left((e_2)_p\right) + \beta_3\, \varphi\left((e_3)_p\right) + \beta_4\, \varphi\left((e_4)_p\right) \\ &= \varphi\left((e_1)_p\right) \beta_1 + \varphi\left((e_2)_p\right) \beta_2 + \varphi\left((e_3)_p\right) \beta_3 + \varphi\left((e_4)_p\right) \beta_4 \\ &= \varphi\left((e_1)_p\right) \langle u, e_1 \rangle + \varphi\left((e_2)_p\right) \langle u, e_2 \rangle + \varphi\left((e_3)_p\right) \langle u, e_3 \rangle + \varphi\left((e_4)_p\right) \langle u, e_4 \rangle \\ &= \varphi\left((e_1)_p\right) (dx_1)_p (u) + \varphi\left((e_2)_p\right) (dx_2)_p (u) + \varphi\left((e_3)_p\right) (dx_3)_p (u) + \varphi\left((e_4)_p\right) (dx_4)_p (u) \end{aligned}$$

así el conjunto dado genera a $\left(\mathbb{R}^4_p\right)^*$. Por lo tanto dicho conjunto es una base de $\left(\mathbb{R}^4_p\right)^*$.

□

1-formas diferenciales. Una 1-forma diferencial en $\mathbb{R}^4$, es una aplicación ω que asocia a cada $p \in \mathbb{R}^4$, un elemento $\omega(p) \in \left(\mathbb{R}^4_p\right)^*$.

1) Usando la base $\left\{ (dx_i)_p \,,\ i = 1, 2, 3, 4 \right\}$, existen funciones $a_i : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$. Tal que

$$\omega(p) = a_1(p)\,(dx_1)_p + a_2(p)\,(dx_2)_p + a_3(p)\,(dx_3)_p + a_4(p)\,(dx_4)_p$$

equivalentemente

$$\omega = \sum_{i=1}^{4} a_i dx_i.$$

2) Diremos que ω es una 1-forma diferencial si y sólo si las funciones a_i, son diferenciales (en el sentido real).

Posteriormente, consideremos $\Lambda^2\left(\mathbb{R}^4_p\right)^*$ es el conjunto de funciones $\varphi : \mathbb{R}^4_p \times \mathbb{R}^4_p \to \mathbb{R}$, donde:

i) φ es bilineal (es decir lineal en cada variable)

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha u + v, w) &= \alpha\varphi(u, w) + \varphi(v, w) \\ \varphi(w, \alpha u + v) &= \alpha\varphi(w, u) + \varphi(w, v) \end{aligned}$$

ii) φ alternante

$$\varphi(u, v) = -\varphi(v, u).$$

Note que con las operaciones habituales de funciones, el conjunto $\Lambda^2\left(\mathbb{R}^4_p\right)^*$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Por otro lado tomando $\varphi_1\ ,\varphi_2 \in \left(\mathbb{R}^4_p\right)^*$ funcionales lineales, definimos el producto cuña:

$$\begin{aligned} \varphi_1 \wedge \varphi_2 : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R} \\ (v_1, v_2) &\mapsto \det\left(\varphi_i(v_j)\right), \quad i, j = 1, 2 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \left(\varphi_1 \wedge \varphi_2\right)(v_1, v_2) := \det\begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & \varphi_1(v_2) \\ \varphi_2(v_1) & \varphi_2(v_2) \end{pmatrix} \\ = \varphi_1(v_1)\varphi_2(v_2) - \varphi_1(v_2)\varphi_2(v_1). \end{aligned}$$

Así, se tiene que $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \Lambda^2\left(\mathbb{R}^4_p\right)^*$, es decir es bilineal y alternanate.

Remarca 11. *Sean* $\varphi_1,\ \varphi_2 \in \left(\mathbb{R}^4_p\right)^*$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$, *luego respecto al producto cuña tenemos:*

a) $\varphi_1 \wedge \varphi_1 = 0.$

b) $\varphi_1 \wedge \varphi_2 = -\varphi_2 \wedge \varphi_1.$

c) $\varphi_1 \wedge (\lambda\varphi_2 + \varphi_3) = \lambda\varphi_1 \wedge \varphi_2 + \varphi_1 \wedge \varphi_3.$

El elemento $(dx_i)_p \wedge (dx_j)_p \in \Lambda^2\left(\mathbb{R}^4_p\right)^*$, es decir es bilineal y alternante, luego denotaremos como $\left(dx_i \wedge dx_j\right)_p$, con $i, j = 1, 2, 3, 4$.

Proposición 13. *El conjunto dado por:*

$$\left\{(dx_1 \wedge dx_2)_p, (dx_1 \wedge dx_3)_p, (dx_1 \wedge dx_4)_p, (dx_2 \wedge dx_3)_p, (dx_2 \wedge dx_4)_p, (dx_3 \wedge dx_4)_p\right\}$$

es una base de $\Lambda^2\left(\mathbb{R}^4_p\right)^*$, *que por lo tanto tiene dimensión*

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!\ 2!} = 6.$$

Demostración. La prueba es análoga a la Proposición (12). $\square$

2-formas diferenciales. Una 2-forma diferencial en $\mathbb{R}^4$, es una aplicación ω que asocia a cada $p \in \mathbb{R}^4$, un elemento $\omega(p) \in \Lambda^2\left(\mathbb{R}^4_p\right)^*$.

1) Usando la base $\left\{\left(dx_i \wedge dx_j\right)_p,\ i < j\right\}$, existen funciones $a_{ij} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$. Tal que

$$\begin{aligned}\omega(p) = {} & a_{12}(p)\left(dx_1 \wedge dx_2\right)_p + a_{13}(p)\left(dx_1 \wedge dx_3\right)_p + a_{14}(p)\left(dx_1 \wedge dx_4\right)_p \\ & + a_{23}(p)\left(dx_2 \wedge dx_3\right)_p + a_{24}(p)\left(dx_2 \wedge dx_4\right)_p + a_{34}(p)\left(dx_3 \wedge dx_4\right)_p\end{aligned}$$

equivalentemente

$$\omega = \sum_{i<j} a_{ij} dx_i \wedge dx_j, \qquad i, j \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

2) Diremos que ω es una 2-forma diferencial si y sólo si las funciones a_{ij}, son diferenciales (en el sentido real).

Posteriormente se generalizará los resultados anteriores, así tratemos k-formas en $\mathbb{R}^4$, donde $k = 1, 2, 3, 4$, para eso consideremos $\Lambda^k\left(\mathbb{R}^4_p\right)^*$ el conjunto de funciones $\varphi : \underbrace{\mathbb{R}^4_p \times \ldots \times \mathbb{R}^4_p}_{k\ -\ veces} \to \mathbb{R}$, donde:

i) φ es k-lineal (es decir lineal en cada entrada)

$$\begin{aligned}\varphi(v_1, \ldots, v_{i-1}, (\alpha u_i + w_i), v_{i+1}, \ldots, v_k) = {} & \alpha\varphi(v_1, \ldots, v_{i-1}, u_i, v_{i+1}, \ldots, v_k) \\ & + \varphi(v_1, .., v_{i-1}, w_i, v_{i+1} \ldots, v_k)\end{aligned}$$

ii) φ alternate es decir

$$\varphi\left(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)}\right) = \varepsilon(\sigma)\varphi(v_1, ..., v_k),$$

donde $\varepsilon(\sigma)$ es el signo de permutación, es $''+''$ si la permutación es par y $''-''$ si la permutación es impar.

El conjunto $\Lambda^k\left(\mathbb{R}^4_p\right)^*$ es un espacio vectorial con las operaciones habituales de funciones. Sean $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k \in \left(\mathbb{R}^4_p\right)^*$ funcionales lineales, luego definimos el producto cuña:

$$\begin{aligned} \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_k : \mathbb{R}^4_p \times ... \times \mathbb{R}^4_p &\to \mathbb{R} \\ (v_1, v_2, ..., v_k) &\mapsto \det\left(\varphi_i(v_j)\right), \qquad i, j = 1, 2, ..., k. \end{aligned}$$

De donde $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_k \in \Lambda^k\left(\mathbb{R}^4_p\right)^*$. Se deduce de las propiedades de los determinantes que $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_k$ es en realidad k-lineal y alternante.
El elemento $(dx_{i_1})_p \wedge (dx_{i_2})_p \wedge ... \wedge (dx_{i_k})_p \in \Lambda^k\left(\mathbb{R}^4_p\right)^*$, es decir k-lineal y alternate, y denotaremos como $(dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_k})_p$ con $i_1, i_2, ..., i_k = 1, 2, ..., 4$.

Proposición 14. *El conjunto dado por;* $\left\{ (dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_k})_p, \;\; 1 \leq i_1 < ... < i_k \leq 4, \;\; i_j \in \{1, 2, ..., 4\}, \right\}$ *es una base de* $\Lambda^k\left(\mathbb{R}^4_p\right)^*$, *que por lo tanto tiene dimensión*

$$\binom{4}{k} = \frac{4!}{(4-k)! \; k!}.$$

Demostración. a) Veamos que el conjunto dado es L.I. para eso consideremos una combinación lineal nula, tomando $b_{i_1 \ldots i_k}$ constantes tenemos:

$$\sum_{i_1 < \ldots < i_k} b_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_k} = 0$$

evaluando en $(e_{j_1}, ..., e_{j_k})$, $\;j_1 < ... < j_k$, $\;j_l \in \{1, 2, ..., n\}$ la igualdad de encima tenemos

$$\begin{aligned} &\sum_{i_1 < \ldots < i_k} b_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_k}(e_{j_1}, ..., e_{j_k}) = 0 \\ &\sum_{i_1 < \ldots < i_k} b_{i_1 \ldots i_k} \det\left(dx_{i_j}\right)\left(e_{j_l}\right) = 0 \\ &b_{j_1 \ldots j_k} = 0. \end{aligned}$$

pues

$$\left(dx_{i_j}\right)\left(e_{j_l}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si} \;\; i_j = j_l \\ 0 & \text{si} \;\; i_j \neq j_l. \end{cases}$$

b) Ahora mostraremos que si $f \in \Lambda^k\left(\mathbb{R}_p^n\right)^*$ entonces f es combinación lineal de la forma.

$$f = \sum_{i_1<\ldots<i_k} b_{i_1\ldots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

para eso, estableceremos

$$g = \sum_{i_1<\ldots<i_k} f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

de donde $g \in \Lambda^k\left(\mathbb{R}_p^n\right)^*$, luego evaluando en $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$ la igualdad anterior tenemos lo siguiente:

$$g(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) = f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}).$$

Para todo $i_1, \ldots, i_k$, así $f = g$. Estableciendo $f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) = b_{i_1\ldots i_k}$, obtenemos la expresión anterior para f. De donde se concluye que el conjunto dado es una base de $\Lambda^k\left(\mathbb{R}_p^n\right)^*$.

□

k-formas diferenciales. Una k-forma diferencial en $\mathbb{R}^4$, es una aplicación ω que asocia a cada $p \in \mathbb{R}^4$, un elemento $\omega(p) \in \Lambda^k\left(\mathbb{R}_p^4\right)^*$.

1) Usando la base $\left\{(dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k})_p, \quad 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq 4\right\}$, existen funciones $a_{i_1\ldots i_k} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$. Tal que

$$\omega(p) = \sum_{i_1<\ldots<i_k} a_{i_1\ldots i_k}(p) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}, \quad i_j \in \{1, 2, \ldots, 4\}$$

2) Diremos que ω es una k-forma diferencial si y sólo si las funciones $a_{i_1\ldots i_k}$, son diferenciales (en el sentido real).

Para mayor comodidad de notación denotaremos por I la k-upla $(i_1, \ldots, i_k)$, $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq 4$ con $i_j \in \{1, 2, \ldots, 4\}$ y usaremos la siguiente notación para la k-forma ω.

$$\omega = \sum_I a_I dx_I.$$

De ahora en adelante, nos restringiremos a las k-formas diferenciables y las llamaremos simplemente k-formas.

A continuación estudiaremos y desarrollaremos nociones importantes que son el producto exterior y la derivada exterior de formas diferenciales en $\mathbb{R}^4$. Note que es posible sumar formas diferenciales en $\mathbb{R}^4$ del mismo grado, como se define a continuación.

Sean ω y φ k-formas en $\mathbb{R}^4$:

$$\omega = \sum_I a_I dx_I, \quad I = (i_1, ..., i_k), \ 1 \leq i_1 < ... < i_k \leq 4,$$
$$\varphi = \sum_I b_I dx_I, \quad I = (i_1, ..., i_k), \ 1 \leq i_1 < ... < i_k \leq 4,$$

luego definimos la suma de ω y φ como:

$$\omega + \varphi := \sum_I (a_I + b_I)\, dx_I.$$

SECCIÓN A.1

Producto exterior de formas en $\mathbb{R}^4$

En esta parte estudiaremos y desarrollaremos una noción importante que es el producto exterior. Si ω es una k-forma y φ es una s-forma en $\mathbb{R}^4$, podemos definir su *producto exterior* $\omega \wedge \varphi$, que es una $(k+s)$-forma de la siguiente forma.

Definición 3. *Dados ω una k-forma y φ una s-forma en $\mathbb{R}^4$, tal que*

$$\omega = \sum_I a_I dx_I, \quad I = (i_1, ..., i_k), \ 1 \leq i_1 < ... < i_k \leq 4$$
$$\varphi = \sum_J b_J dx_J, \quad J = (i_1, ..., i_s), \ 1 \leq i_1 < ... < i_s \leq 4.$$

luego el producto exterior de ω y φ se define como:

$$\begin{aligned} \wedge : \Lambda^k \times \Lambda^s &\to \Lambda^{k+s} \\ (\omega, \varphi) &\mapsto \omega \wedge \varphi \end{aligned}$$

donde

$$\omega \wedge \varphi := \sum_{IJ} a_I b_J dx_I \wedge dx_J.$$

Ejemplo 23. *Sea $\omega = x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3$ una 1-forma en $\mathbb{R}^3$ y $\varphi = x_1dx_1 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_3$ una 2-forma en $\mathbb{R}^3$. Sabiendo que $dx_i \wedge dx_i = 0$ y $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ para $i \neq j$, tenemos*

$$\begin{aligned} \omega \wedge \varphi &= (x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3) \wedge (x_1dx_1 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_3) \\ &= x_2dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + x_3x_1dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &= -x_2dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + x_3x_1dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &= (x_3x_1 - x_2)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \end{aligned}$$

donde $\omega \wedge \varphi$ es una 3-forma.

Proposición 15. *Sea ω una k-forma, φ una s-forma y θ una r-forma. Entonces:*

a) $(\omega \wedge \varphi) \wedge \theta = \omega \wedge (\varphi \wedge \theta)$,

b) $(\omega \wedge \varphi) = (-1)^{ks}(\varphi \wedge \omega)$,

c) $\omega \wedge (\varphi + \theta) = \omega \wedge \varphi + \omega \wedge \theta$, *si* $r = s$.

Demostración. La prueba de (a) y (c) es inmediato, para ejemplificar veamos la (b). Sean

$$\begin{aligned}
\omega &= \sum_I a_I dx_I, \quad I = (i_1, ..., i_k), \quad 1 \leq i_1 < ... < i_k \leq 4,\\
\varphi &= \sum_J b_J dx_J, \quad J = (i_1, ..., i_s), \quad 1 \leq i_1 < ... < i_s \leq 4.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\omega \wedge \varphi &= \sum_{IJ} a_I b_J dx_I \wedge dx_J\\
&= \sum_{IJ} a_I b_J dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_s}\\
&= \sum_{IJ} b_J a_I (-1) dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_{k-1}} \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{i_k} \wedge ... \wedge dx_{j_s}\\
&= \sum_{IJ} b_J a_I (-1)^k dx_{j_1} \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_2} \wedge ... \wedge dx_{j_s}.
\end{aligned}$$

Como J tiene s elementos, obtenemos repitiendo el argumento anterior para dx_{j_l}, $j_l \in J$,

$$\begin{aligned}
\omega \wedge \varphi &= \sum_{JI} b_J a_I (-1)^{ks} dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_s} \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}\\
&= (-1)^{ks} \sum_{JI} b_J a_I dx_J \wedge dx_I\\
&= (-)^{ks} \varphi \wedge \omega,
\end{aligned}$$

como queriamos. □

Remarca 12. *Aunque $dx_i \wedge dx_i = 0$, no es cierto que para cualquier forma $\omega \wedge \omega = 0$, si $\omega = x_1 dx_1 \wedge dx_2 + x_2 dx_3 \wedge dx_4$, entonces*

$$\begin{aligned}
\omega \wedge \omega &= (x_1 dx_1 \wedge dx_2 + x_2 dx_3 \wedge dx_4) \wedge (x_1 dx_1 \wedge dx_2 + x_2 dx_3 \wedge dx_4)\\
&= x_1 dx_1 \wedge dx_2 \wedge x_2 dx_3 \wedge dx_4 + x_2 dx_3 \wedge dx_4 \wedge x_1 dx_1 \wedge dx_2\\
&= 2 x_1 x_2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4.
\end{aligned}$$

SECCIÓN A.2

Derivada exterior de formas en $\mathbb{R}^4$

Definición 4. *Sea* $\omega = \sum_I a_I dx_I$ *una* k*-forma en* $\mathbb{R}^4$. *La derivada exterior* $d\omega$ *de* ω *se define como:*

$$\begin{aligned} d : \Lambda^k &\to \Lambda^{k+1} \\ \omega &\mapsto d\omega \end{aligned}$$

donde

$$d\omega := \sum_I da_I \wedge dx_I.$$

Ejemplo 24. *Sea* $\omega = xyzdx + yzdy + (x+z)dz$ *y calculemos* $d\omega$.

$$\begin{aligned} d\omega &= d(xyz) \wedge dx + d(yz) \wedge dy + d(x+z)dz \\ &= (yzdx + xzdy + xydz) \wedge dx + (zdy + ydz) \wedge dy + (dx + dz) \wedge dz \\ &= xzdy \wedge dx + xydz \wedge dx + ydz \wedge dy + dx \wedge dz \\ &= -xzdx \wedge dy + (1 - xy)dx \wedge dz - ydy \wedge dz. \end{aligned}$$

Proposición 16. *Citamos algunas propiedades de la derivada exterior.*

a) $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$, *donde* ω_1 *y* ω_2 *son* k*-formas,*

b) $d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi + (-1)^k \omega \wedge d\varphi$, *donde* ω *es una* k*-forma y* φ *es una* s*-forma,*

c) $d(d\omega) = d^2(w) = 0$.

Demostración. La prueba de (a) y (b) es inmediato, para ejemplificar veamos la prueba de (c), para eso consideremos dos casos.

1. Supongamos primero que ω es una 0-forma. Es decir ω es una función $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ que asocia a cada $(x_1, ..., x_4)$ en $\mathbb{R}^4$ el valor $f(x_1, ..., x_4)$ en $\mathbb{R}$. Entonces

$$d(df) = d\left(\sum_{j=1}^{4} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j\right) = \sum_{j=1}^{4} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \wedge dx_j = \sum_{j=1}^{4} \left(\sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j\right).$$

Ya que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ y $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i, \quad i \neq j$, luego se obtiene que

$$d(df) = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right) dx_i \wedge dx_j = 0.$$

2. Sea $\omega = \sum_I a_I dx_I$, por (a) podemos restringir al caso $\omega = a_I dx_I$ y luego por (b), tenemos

$$d\omega = d(a_I dx_I) = d(a_I \wedge dx_I) = da_I \wedge dx_I + a_I \wedge d(dx_I).$$

pero se tine que $d(dx_I) = d(1) \wedge dx_I = 0$. Por lo tanto,

$$d(d\omega) = d(da_I \wedge dx_I) = d(da_I) \wedge dx_I + da_I \wedge d(dx_I) = 0,$$

ya que por el primer caso $d(da_I) = 0$ y $d(dx_I) = 0$

como queriamos. □

Definición 5. *Dada ω una k-forma diferencial, luego se tiene las siguientes*

a) Una k-forma diferencial $\omega = \sum_I a_I dx_I$ se llama cerrada si su derivada exterior es cero es decir:

$$d\omega = 0.$$

b) Una k-forma diferencial $\omega = \sum_I a_I dx_I$ se denomina exacta si existe otra una $(k-1)$-forma ν tal que su derivada exterior es precisamente ω es decir:

$$d\nu = \omega.$$

Finalmente citamos el siguiente resultado importante, donde se emplea en la prueba del teorema de Cauchy y la fórmula integral de Cauchy.

Teorema 5 (Teorema de Stokes)**.** *Sea ω una forma diferencial de clase $\mathcal{C}^1$, de grado m, con soporte compacto, en una hipersuperficie orientada M, de dimensión $m+1$, cuya frontera ∂M está proporcionado de la orientación inducida. Entonces*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

La demostración se encuentra en libro de Elon Lages Lima. *Curso de análisis volumen 2* [7].

Bibliografía

[1] C.A. Deavours. *The quaternion calculus*, Amer. Math. Monthly **80** (1973)

[2] M.P. Do Carmo. *Differential Forms and Applications*, Springer-Verlag 2000.

[3] R. Fueter. *Uber die analytische Darstellung der regularen Funktionen einer Quaternionenvariablen,* Comment. Math. Helv. **8** (1936) 371-378.

[4] D. Gilbarg *Elliptic partial differential equations of second order* , Berlin, Heidelberg, New York, Barcelona; Springer, 2001.

[5] W.R. Hamilton. *Elements of Quaternionic*, Longmans Green, New York, 1969.

[6] E. Lages Lima. *Álgebra Exterior*, Rio de Janeiro IMPA, 2009.

[7] E. Lages Lima. *Curso de análisis, volumen 2.* Rio de Janeiro IMPA, 2000.

[8] M.E. Luna Elizarrarás, Michael Shapiro, Daniele C. Struppa, Adrian Vajiac. *Biocomplex Holomorphic Functions*, Birkhäuser, 2015.

[9] J.P. Morais, S. Georgiev. *Real Quaternionic Calculus Handbook*, Birkhäuser Basel, 2014.

[10] M. Spivak. *Cálculo en Variedades*, Barcelona - Buenos Aires - México, 1970.

[11] A. Sudbery. *Quaternionic Analysis*, Math. Proc. Cambringe. Philos. Soc. **85** (1979) 199-225.