UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS
FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES
CARRERA DE MATEMÁTICA

Grupos Finitamente Generados

(Teoría Geométrica de Grupos)

Proyecto de Grado presentado para la obtención del Título de Licenciatura en Matemática

Autor: Mauricio J. Ledezma Montesinos

Tutores: Dr. Javier Guachalla Hurtado (†)
MSc. Ernesto Cupé Clemente

LA PAZ, SEPTIEMBRE DE 2018

Resumen

En este trabajo haremos una introducción a la teoría geométrica de grupos. A partir de un grafo asociado a un grupo respecto a un conjunto finito de generadores, dotaremos al mismo de una estructura de espacio métrico. Desarrollaremos la teoría de los espacios cuasi-isométricos y probaremos el llamado "lema fundamental" de la teoría geométrica de grupos: el lema de Svarc-Milnor.

Abstract

In this paper we will give an introduction to geometric group theory. From an associated graph with a finitely generated group, we will provide it with a structure of metric space. We will develop the quasi-isometric spaces theory and prove the so-called "fundamental lemma" of geometric group theory: the Svarc – Milnor lemma.

Introducción

Los temas que trataremos en este trabajo son parte de las bases de una teoría cuyo nombre aparece en resultados de búsquedas relacionadas con la tarea, nada sencilla, de clasificar los grupos.

La Teoría Geométrica de Grupos investiga la interacción entre las propiedades algebraicas y geométricas de los grupos: si se pueden ver como objetos geométricos y qué propiedades geométricas y algebraicas se relacionan. De forma más general, ¿sobre qué objetos geométricos puede actuar un grupo dado de forma razonable, y si hay propiedades geométricas de estos objetos que se relacionen con las propiedades algebraicas del grupo en cuestión?

Un ejemplo clave en la forma de obtener un objeto geométrico a partir de un grupo es construir el grafo de Cayley respecto a un conjunto de generadores, junto con la métrica de la palabra correspondiente. Por ejemplo, desde el punto de vista geométrico a gran escala, el grafo de Cayley de $\mathbb{Z}$ se asemeja a la recta real, el grafo de Cayley de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ al plano euclidiano mientras que el grafo de Cayley del grupo libre $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$ con dos generadores se asemeja al plano hiperbólico.

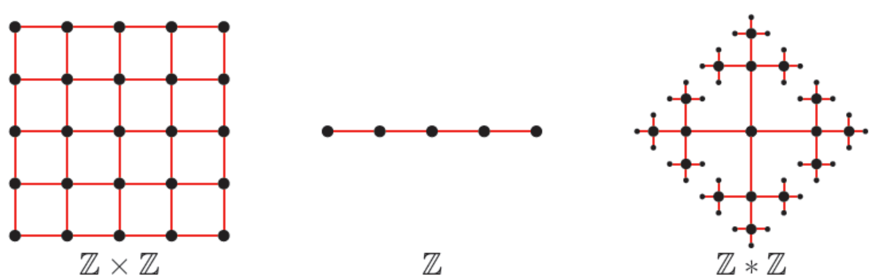


Figura 1: Ejemplos de grafos de Cayley

El interés de estudiar esta teoría radica en que combina aspectos de diferentes campos de la matemática y, por otro lado, en sus numerosas aplicaciones a problemas de diversos campos como la teoría de grupos y la geometría Riemanniana.
En este sentido podemos citar las siguientes aplicaciones:

- Reconociendo que ciertos grupos de matrices son grupos libres; existe un criterio geométrico, el llamado *lema del ping pong*.

- Reconociendo que ciertos grupos son nilpotentes, Mijaíl Grómov encontró una caracterización para grupos finitamente generados virtualmente nilpotentes en términos de función de crecimiento.

- Probando la no existencia de métricas Riemannianas que satisfacen ciertas condiciones de curvatura en ciertas variedades diferenciables.
- La paradoja de Banach-Tarski (una esfera puede dividirse en una cantidad finita de pedazos que pueden ser unidos formando dos esferas congruentes con la original).
- Entender mejor algunos de los grupos conocidos.

Este trabajo apunta a introducir algunas ideas fundamentales de la Teoría Geométrica de Grupos, mostrando la relación entre conceptos geométricos y algebraicos, para lo cual haremos una revisión de grupos libres y grupos finitamente generados en el segundo capítulo e introduciremos el concepto de Grafo de Cayley.

Finalmente, en el cuarto capítulo, revisaremos el concepto de "cuasi-isometría" que nos ayudará a enunciar el lema de Svarc-Milnor, también llamado "observación fundamental de la teoría geométrica de grupos" (De la Harpe, cfr. "A note on curvature and fundamental group" J. Milnor, 1968). Este lema es fundamental ya que nos permite concluir que cierto grupo dado es finitamente generado si cumple con algunas condiciones.

Índice general

Índice de figuras

1 Preliminares

En este capítulo recordaremos algunas definiciones que serán útiles para el desarrollo del trabajo y la notación que utilizaremos.

1.1. Acción de grupos

Iniciaremos la sección recordando la definición de un grupo que actúa sobre un conjunto. Las acciones de grupos son herramientas importantes, más adelante definiremos una de ellas entre un grupo y su grafo de Cayley, es decir entre un objeto algebraico y un grafo.

Definición 1.1.1.

- Sean G un grupo y $S \subset G$ un subconjunto. El *subgrupo generado* por S en G es el subgrupo más pequeño de G que contiene a S; denotaremos al subgrupo generado por S en G por $\langle S \rangle_G$. Diremos que el conjunto S *genera* a G si $\langle S \rangle_G = G$.
- Un grupo es *finitamente generado* si contiene un subconjunto finito que lo genera.

Definición 1.1.2 (Acción de grupos.)**.** Una *acción* por la izquierda de un grupo G sobre un conjunto A es una función que va de $G \times A$ en A, definida por $(g,a) \mapsto g \cdot a$, para todo $g \in G$ y todo $a \in A$. Esta función satisface:

1. $g_1 \cdot (g_2 \cdot a) = (g_1 g_2) \cdot a,$ para todo g_1, g_2 en G y para todo a en A.
2. $1 \cdot a = a$, donde 1 es elemento neutro de G, para todo a en A.

Nota. Todo grupo actúa sobre sí mismo, por la izquierda, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (g,h) &\mapsto gh \end{aligned}$$

1.2. Conceptos topológicos importantes

Ahora recordaremos las herramientas topológicas que nos servirán para introducir las cuasi-isometrías, para demostrar el teorema de Hopf-Rinow y, fundamentalmente, el lema de Svarc-Milnor que es el centro de este trabajo.

Definición 1.2.1. Un *espacio métrico* es un conjunto X con una función $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ llamada *métrica*, que satisface:

1. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, para todo x, y en X.
2. $d(x,y) = d(y,x)$, para todo x, y en X.
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, para todo x, y, z en X.

Definición 1.2.2. Sea $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ una función entre espacios métricos.

- Decimos que f es un *inmersión isométrica* si

  $$d_Y\big(f(x), f(y)\big) = d_X(x,y), \text{ para todo } x, y \text{ en } X.$$

  En este caso, se dice también que f preserva distancias.

- Decimos que f es una *isometría* si es una inmersión isométrica sobreyectiva.

Nota. Toda inmersión isométrica es inyectiva y toda isometría es un homeomorfismo respecto a las topologías inducidas por las métricas.

Definición 1.2.3. Dado un grupo G y un espacio métrico (X,d), una *acción isométrica* de G sobre X es una acción tal que $G \times X \to X$ es una isometría para cada $g \in G$.

En otras palabras, una acción isométrica es un homomorfismo de grupos

$$G \to \mathrm{Isom}(X)$$

Definición 1.2.4. Sea (X,d) un espacio métrico.

- Sea $L \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Una *geodésica* de longitud L en X es una inmersión isométrica $\gamma : [0, L] \to X$, donde el intervalo $[0, L]$ hereda la métrica usual de $\mathbb{R}$, $\gamma(0)$ es el punto inicial y $\gamma(L)$ el punto final.

- Decimos que el espacio métrico (X,d) es *geódesico* si para todo par de elementos $x, y \in X$, existe una geodésica con punto inicial x y punto final y.

Ejemplo 1.2.1.

- Consideremos el plano $\mathbb{R}^2$ con la métrica euclidiana, las geodésicas serán los segmentos que unen a dos puntos cualesquiera.

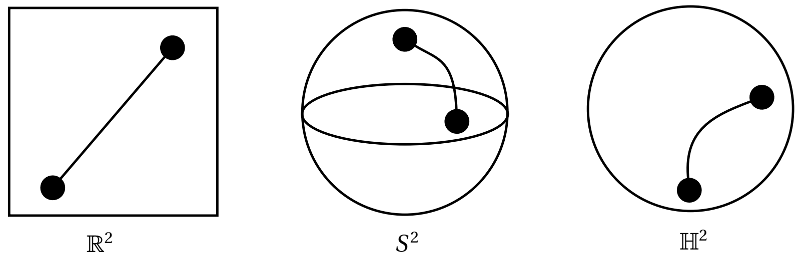


Figura 1.1: Ejemplos de espacios geodésicos

- La esfera S^2 es un espacio geodésico con la métrica (distancia) esférica.
- El plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ es un espacio métrico geodésico.

Definición 1.2.5. Sea (X,d) un espacio métrico. Para $r \geq 0$, la *r—vecindad cerrada* del punto $x \in X$ es el conjunto

$$N(x,r) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}.$$

Podemos también definir la *r—vecindad cerrada de un conjunto* $Q \subset X$ como:

$$N(Q,r) = \bigcup_{x \in Q} N(x,r).$$

Nota. Ocasionalmente haremos referencia a la *r—vecindad abierta* de x dada por:

$$U(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}.$$

Definición 1.2.6. Si $Q \subset (X,d)$, decimos que Q es *r—denso* si $N(Q,r) = X$. Además, Q es *coacotado* si es r—denso para algún $r \geq 0$. Definimos el *diámetro* de Q como:

$$\operatorname{diam}(Q) = \sup\{d(x,y) : x, y \in Q\}.$$

Y, decimos que Q es *acotado* si $\operatorname{diam}(Q) < \infty$.

Definición 1.2.7. Si (X,d) es un espacio métrico y $M \subset X$, una *cobertura* de M es una familia $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de X tal que $M \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$.

Si existe $L' \subset L$ tal que para cada $x \in M$, se puede obtener $\lambda \in L'$ con $x \in C_\lambda$, esto es, $M \subset \bigcup_{\lambda \in L'} C_\lambda$, entonces la subfamilia $(C_\lambda)_{\lambda \in L'}$ se llama *subcobertura*.

Definición 1.2.8. Un espacio métrico (X,d) es *compacto* cuando toda cobertura abierta posee una subcobertura finita.

Un subconjunto $K \subset X$ de un espacio métrico es *compacto* cuando el subespacio métrico K es compacto.

Como esta definición es formulada en términos de abiertos del espacio métrico, se sigue que la compacidad es un invariante topológico (es decir, si X y Y son homeomorfos, entonces X es compacto si, y solo si, lo es Y).

Definición 1.2.9. Una sucesión (x_n) en el espacio métrico (X,d) es de *Cauchy* si, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m,n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon$.

Definición 1.2.10. Decimos que el espacio métrico (X,d) es *completo* cuando toda sucesión de Cauchy en (X,d) es convergente.

Definición 1.2.11. Un espacio métrico (X,d) se llama *localmente compacto* cuando todo punto $x \in X$ posee una vecindad compacta.

1.3. Revisión de la notación en Teoría de Grafos

Antes de introducirnos en los temas que nos interesan haremos una breve revisión de las definiciones y notación en teoría de grafos.

Definición 1.3.1. Un *grafo* es un par $G(V,E)$ de conjuntos disjuntos donde E es un conjunto de subconjuntos de V que contienen exactamente dos elementos.

Los elementos de V son los *vértices* (nodos o puntos) del grafo G y los elementos de E son las *aristas* (o líneas) del grafo.

La forma usual de trazar un grafo es dibujando un punto por cada vértice y unir dos de estos puntos con una línea si los dos vértices correspondientes forman una arista. Cómo se dibujan estos puntos y líneas es irrelevante. Todo lo que importa es la información sobre los pares de vértices que forman aristas y los que no.

Se dice que un grafo con conjunto de vértices V es un grafo sobre V. El conjunto de vértices de un grafo se escribe como $V(G)$ y el conjunto de aristas como $E(G)$. El *orden de un grafo* es el número de vértices que contiene y se escribe como $|G|$ y el número de aristas como $\|G\|$. Los grafos pueden ser finitos o infinitos de acuerdo al orden que tengan.

El grafo vacío se escribe como $(\emptyset, \emptyset)$ o simplemente $\emptyset$. Un grafo de orden 0 o 1 es llamado *grafo trivial*.

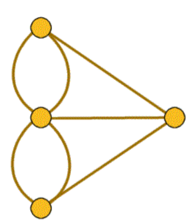


Figura 1.2: Grafo del problema de los puentes Konisberg

Una arista $\{x,y\}$ es escrita usualmente como xy (o yx).

Dos vértices x, y de un grafo G son *adyacentes* o *vecinos*, si xy es una arista de G. Dos aristas $e \neq f$ son adyacentes si tienen un final (extremo) común. Si todos los pares posibles de vértices de un grafo son adyacentes, entonces decimos que el grafo es *completo*.

Dos vértices, o dos aristas, no adyacentes, se llaman *independientes*. Más formalmente, un conjunto de vértices o aristas es independiente si ningún par de elementos son adyacentes.

Ejemplo 1.3.1. El grafo $G(V,E)$, con $V = \{1,\dots,7\}$ y $E = \big\{\{1,2\},\{1,5\},\{2,5\},\{3,4\},\{5,7\}\big\}$ es representado por:

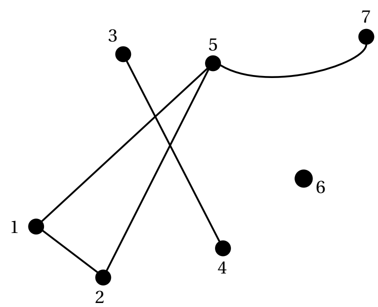


Figura 1.3: Grafo $G(V,E)$

Definición 1.3.2 (Isomorfismo)**.** Sean $G(V,E)$ y $G'(V',E')$ dos grafos. Decimos que G y G' son *isomorfos*, y escribimos $G \simeq G'$, si existe una biyección $\varphi : V \to V'$ con $xy \in E \Leftrightarrow \varphi(x)\varphi(y) \in E'$, para todo $x, y \in V$.

Tal función es llamada *isomorfismo*; si $G = G'$, se llama *automorfismo*. Normalmente, no se hace distinción entre grafos isomorfos. Por lo tanto, escribimos $G = G'$ en lugar de $G \simeq G'$.

Definición 1.3.3 (Camino)**.** Sea $G(V,E)$ un grafo y $n \in \mathbb{N}$. Un *camino* en $G(V,E)$ de longitud n es una sucesión de vértices $v_0,\dots,v_n$ diferentes, con $v_i \in V$, que cumplen $\{v_j, v_{j+1}\} \in E$ para $0 \le j \le n-1$. Si n es finito, decimos que este camino conecta los vértices v_0 y v_n.

El número de aristas de un camino es su longitud, y un camino de longitud k es denotado por P^k.

Definición 1.3.4 (Ciclo)**.** Sea $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$. Un ciclo en $G(V,E)$ de tamaño n es una sucesión $v_0,\dots,v_{n-1}$ de vértices distintos con $\{v_{n-1}, v_0\} \in E$ y además $\{v_j, v_{j+1}\} \in E$, para todo $0 \le j \le n-2$.

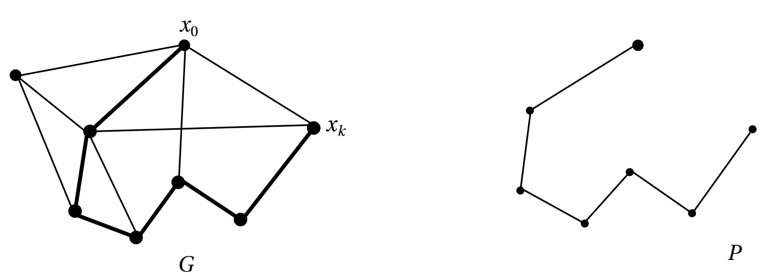


Figura 1.4: El camino $P = P^6$ en el grafo G.

Definición 1.3.5 (Conexo)**.** Un grafo $G(V,E)$ es llamado *conexo* si dos de sus vértices cualesquiera pueden ser conectados por un camino en $G(V,E)$.

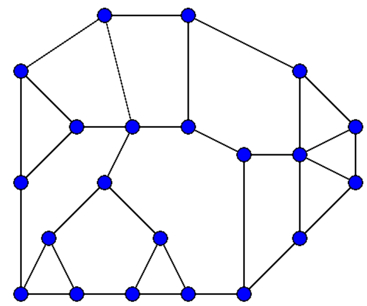


Figura 1.5: Grafo Conexo

Definición 1.3.6 (Árboles y bosques)**.** Un grafo acíclico (uno que no contiene ciclos) es llamado *bosque*. Un bosque conexo es un *árbol*. Entonces, un bosque es un grafo compuesto por árboles.

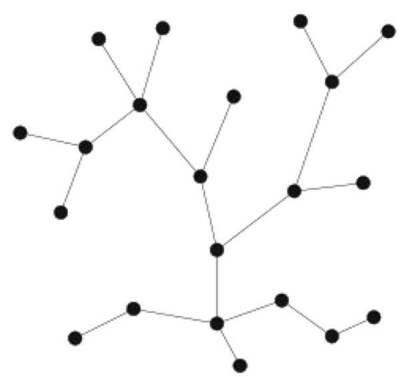


Figura 1.6: Árbol

2 Grupos libres y grafos de Cayley

La teoría geométrica de grupos estudia a estos por medio de sus realizaciones como objetos geométricos o topológicos, así como sus acciones de grupo sobre estos objetos. Los grupos libres son los más adecuados para aplicar este enfoque.

2.1. Definición de grupo libre

Cada espacio vectorial admite conjuntos especiales que lo generan: estos son conjuntos de elementos que tienen pocas relaciones algebraicas entre ellos, es decir, elementos linealmente independientes. En el marco de la teoría de grupos, podemos formular lo que significa que un grupo sea libremente generado, sin embargo, no todos los grupos admiten conjuntos que los generan libremente. Esta es una de las razones por la que la teoría de grupos es mucho más compleja que el álgebra lineal.

Definición 2.1.1 (Propiedad Universal de los Grupos Libres)**.** Un grupo F es un *grupo libre* si existe un conjunto $S \subset F$ con la siguiente propiedad: para todo grupo G y cualquier función $\varphi : S \to G$, existe un único homomorfismo de grupos $\overline{\varphi} : F \to G$ tal que $\overline{\varphi}\big|_S = \varphi$. El conjunto S es llamado *generador libre* de F.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i"'] & G \\ F \arrow[ur, dashed, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Ejemplo 2.1.1. El grupo aditivo $\mathbb{Z}$ es libremente generado por $\{1\}$, en cambio $\mathbb{Z}$ no es libremente generado por $\{2,3\}$; en particular, no todo conjunto generador de un grupo contiene un conjunto generador libre.
Sea $\overline{\varphi} : \mathbb{Z} \to G$ definida por $\overline{\varphi} = g^n$, $n \in \mathbb{Z}$ y $g \in G$.

$$\begin{tikzcd}
\{1\} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i"'] & G \\
\mathbb{Z} \arrow[ur, dashed, "\overline{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

φ una función de $\{1\}$ en el grupo G.
$\overline{\varphi}$ es un homomorfismo.

- $\overline{\varphi}(m+n)=g^{m+n}=g^m g^n$
- $\overline{\varphi}(0)=g^0=1$, donde 1 es el elemento identidad de G

$$\varphi=\overline{\varphi}\circ i$$

en efecto, $(\overline{\varphi}\circ i)(1)$, entonces $\overline{\varphi}\big|_{\{1\}}=\varphi$.

2.2. Unicidad y construcción de los Grupos Libres

Proposición 2.2.1 (Unicidad de los grupos libres)**.** Sea S un conjunto. Entonces, salvo isomorfismo canónico, existe como máximo un grupo libremente generado por S.

Demostración. Sean F y F' dos grupos libremente generados por S. Denotaremos la inclusión de S en F y de S en F' por φ y φ', respectivamente.

Como F es libremente generado por S, existe un homomorfismo de grupos $\overline{\varphi}':F\to F'$ tal que $\overline{\varphi}'\circ\varphi=\varphi'$. Análogamente, existe un homomorfismo de grupos $\overline{\varphi}:F'\to F$ que satisface $\overline{\varphi}\circ\varphi'=\varphi$.

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "\varphi"'] & F' \\
F \arrow[ur, dashed, "\overline{\varphi'}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi'"'] & F \\
F' \arrow[ur, dashed, "\overline{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Ahora probaremos que $\overline{\varphi}\circ\overline{\varphi}'=\mathrm{id}_F$ y que $\overline{\varphi}'\circ\overline{\varphi}=\mathrm{id}_{F'}$, así φ y φ' serán isomorfismos. La composición $\overline{\varphi}\circ\overline{\varphi}':F\to F$ es un homomorfismo de grupos que hace que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi"'] & F \\ F \arrow[ur, dashed, "\mathrm{id}_F"'] & \end{tikzcd}$$

Es más, la función id_F es un homomorfismo de grupos en este diagrama.

Como F es libremente generado por S, la unicidad que exige la propiedad universal nos muestra que estos dos homomorfismos son el mismo.
Estos isomorfismos son canónicos en el siguiente sentido: inducen la función identidad sobre S, y son los únicos (por la propiedad universal) isomorfismos entre F y F' que extienden la identidad en S. $\square$

Antes de construir un grupo libre a partir de un conjunto cualquiera, mostraremos un resultado que será útil en la demostración.

Ejercicio. Sea G un grupo, X un conjunto, $f : G \to X$ una biyección. Entonces existe una única operación en X tal que X es un grupo y f un isomorfismo.

Prueba. Definimos $* : X \times X \to X$ como $f(ab) = f(a) * f(b)$, con $a, b \in G$.
$f(a), f(b), f(a) * f(b) \in X$ pues $a, b \in G$ y f es biyectiva. Afirmamos que $(X, *)$ es un grupo.
En efecto,

- $f(e)$ es el elemento neutro en $(X, *)$
  $f(e) * f(a) = f(ea) = f(a) = f(ae) = f(a) * f(e)$
- $f(a^{-1})$ es el inverso de $f(a)$ en $(X, *)$
  $f(a^{-1}) * f(a) = f(a^{-1}a) = f(e) = f(aa^{-1}) = f(a) * f(a^{-1})$
- f es un isomorfismo por definición.

La operación así definida es única.
Supongamos que $\bullet$ y $*$ son dos operaciones que hacen de $(X, \bullet)$ y $(X, *)$ grupos y $f : G \to (X, \bullet)$, $f : G \to (X, *)$ isomorfismos. Entonces $\mathrm{id}_X : (X, *) \to (X, \bullet)$ es isomorfismo. Si $x_1, x_2 \in X$,

$$x_1 * x_2 = f\big(f^{-1}(x_1)\big) f\big(f^{-1}(x_2)\big)$$
$$x_1 \bullet x_2 = f\big(f^{-1}(x_1)\big) f\big(f^{-1}(x_2)\big)$$
$$\Rightarrow x_1 * x_2 = x_1 \bullet x_2$$

Teorema 2.2.1 (Construcción de grupos libres)**.** Sea X un conjunto, entonces existe un grupo libremente generado por X. (Que por la proposición anterior es único salvo isomorfismo)

Demostración. Sea X un conjunto, X^{-1} un conjunto disjunto de X para el cual existe una biyección

$$X \to X^{-1}$$
$$x \mapsto x^{-1}$$

Sea X' un conjunto unitario disjunto de $X \cup X^{-1}$, denotaremos por 1 al único elemento.

Definimos para $x \in X$, $x^1 = 1$ y $x^0 = 1$.

Una *palabra* en X es una sucesión $w = (a_1, a_2, \ldots)$ donde $a_i \in X \cup X^{-1} \cup \{1\}$, para todo i y $a_i = 1$ para $i > n$.

La sucesión constante $(1, 1, 1, \ldots)$ es llamada palabra vacía y es denotada por 1.

Como las palabras contienen solo una cantidad finita de letras antes de volverse constante, usaremos la siguiente notación para las palabras no vacías:

$$x = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \ldots x_n^{\epsilon_n}$$

donde $x_i \in X$, $\epsilon_i = +1, -1, 0$, $\epsilon_n = \pm 1$. Estas representaciones son únicas; es más, dos sucesiones (a_i) y (b_i) serán iguales si, y solo si, $a_i = b_i$, para todo i.

Definimos la longitud de la palabra vacía como 0 y la longitud de $w = x_n^{-\epsilon_1} \ldots x_1^{-\epsilon_1}$ como n.

Si $w = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \ldots x_n^{\epsilon_n}$ es una palabra, entonces la palabra inversa será $w^{-1} = x_n^{-\epsilon_n} \ldots x_1^{-\epsilon_1}$.

Decimos que una palabra en X es *reducida* si es vacía o si $w = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \ldots x_n^{\epsilon_n}$, donde para todo $x_i \in X$, $\epsilon_i = \pm 1$, y además x y x^{-1} no son adyacentes. La palabra inversa de una palabra reducida es reducida.

Una *subpalabra* de $w = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \ldots x_n^{\epsilon_n}$ es la palabra vacía o una palabra de la forma $v = x_i^{\epsilon_i} \ldots x_j^{\epsilon_j}$, con $1 \le i \le j \le n$.
Así, v es una subpalabra de w si existen subpalabras (posiblemente vacías) w' y w'' con $w = w' v w''$.
Una palabra no vacía es reducida si, y solo si, no contiene subpalabras de la forma $x^{\epsilon} x^{-\epsilon}$ o x^0.

Multiplicamos dos palabras de la siguiente manera: si $w = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \ldots x_n^{\epsilon_n}$ y $u = y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \ldots y_m^{\delta_m}$, entonces $w u = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \ldots x_n^{\epsilon_n} y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \ldots y_m^{\delta_m}$.
Esta multiplicación no define un producto sobre el conjunto de todas las palabras reducidas en X pues $w u$ no es necesariamente reducida (aunque sí lo sean w y u). Entonces podemos definir la multiplicación de palabras reducidas w y u como la palabra reducida obtenida de $w u$ después de las cancelaciones.

Más precisamente, existe una subpalabra v (posiblemente vacía) de w con $w = w' v$ tal que v^{-1} es una subpalabra de u con $u = v^{-1} u''$ y tal que $w' u''$ es reducida.

Definimos el producto de dos palabras reducidas llamado “yuxtaposición” como:

$$w u = w' u''.$$

Sea F el conjunto de todas las palabras reducidas en X. Para cada $x \in X$, consideremos las funciones $|x| : F \to F$, $|x^{-1}| : F \to F$ definidas para $\epsilon = \pm 1$ como

$$|x^{\epsilon}|(x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \dots x_n^{\epsilon_n}) \begin{cases} x^{\epsilon} x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \dots x_n^{\epsilon_n}, & \text{si } x^{\epsilon} \neq x_1^{-\epsilon_1} \\ x_2^{\epsilon_2} \dots x_n^{\epsilon_n}, & \text{si } x^{\epsilon} = x_1^{-\epsilon_1} \end{cases}$$

Las composiciones $|x^{\epsilon}| \circ |x^{-\epsilon}|$, $|x^{-\epsilon}| \circ |x^{\epsilon}|$ son iguales a la identidad $\mathrm{id}_F : F \to F$, se sigue que $|x^{\epsilon}|$ es una permutación de F con inversa $|x^{-\epsilon}|$. Sea S_F el grupo simétrico de F y $\mathscr{F}$ el subgrupo de F generado por $[X] = \{|x| : x \in X\}$. Afirmamos que $\mathscr{F}$ es un grupo libre con base $[X]$.

Notemos que existe una biyección

$$\begin{aligned} \psi : [X] &\to X \\ |x| &\mapsto x \end{aligned}$$

Un elemento arbitrario $g \in \mathscr{F}$ (distinto de la identidad) tiene factorización:

$$g = |x_1^{\epsilon_1}| \circ |x_2^{\epsilon_2}| \circ \dots \circ |x_n^{\epsilon_n}| \tag{$*$}$$

donde $\epsilon_i = \pm 1$ y además, $|x^{\epsilon}|$ y $|x^{-\epsilon}|$ nunca son adyacentes (o se cancelan). Tal factorización de g es única y $g(1) = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \dots x_n^{\epsilon_n}$, observamos antes que las palabras reducidas son únicas.

Para probar que $\mathscr{F}$ es libre con base $[X]$, asumimos que G es un grupo y que $f : [X] \to G$ es una función. Como la factorización $(*)$ es única, la función $\varphi : \mathscr{F} \to G$ dada por

$$\varphi\left(|x_1^{\epsilon_1}| \circ |x_2^{\epsilon_2}| \circ \cdots |x_n^{\epsilon_n}|\right) = f(|x_1^{\epsilon_1}|) f(|x_2^{\epsilon_2}|) \dots f(|x_n^{\epsilon_n}|)$$

Está bien definida y extiende f. Queremos probar que $\varphi \circ i = f$

$$\begin{tikzcd} {[X]} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & G \\ \mathscr{F} \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

En efecto, si $|x| \in [X]$,

$$(\varphi \circ i)|x| = \varphi(i(|x|)) = \varphi(|x|) = f(|x|)$$

Como $[X]$ genera $\mathscr{F}$, nos resta probar que φ es un homomorfismo:

Sean w, u dos palabras reducidas tales que el producto de las dos es una palabra reducida y $w = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \dots x_n^{\epsilon_n}$, $u = y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \dots y_m^{\epsilon_m}$. Entonces

$$\begin{aligned} \varphi\left(|x_1^{\epsilon_1}| \circ |x_2^{\epsilon_2}| \circ \dots \circ |x_n^{\epsilon_n}| \circ |y_1^{\delta_1}| \circ |y_2^{\delta_2}| \circ \dots \circ |y_m^{\delta_m}|\right) &= f(|x_1^{\epsilon_1}|) f(|x_2^{\epsilon_2}|) \dots f(|x_n^{\epsilon_n}|) f(|y_1^{\delta_1}|) f(|y_2^{\delta_2}|) \dots f(|y_m^{\delta_m}|) \\ &= \varphi\left(|x_1^{\epsilon_1}| \circ |x_2^{\epsilon_2}| \circ \dots \circ |x_n^{\epsilon_n}|\right) \varphi\left(|y_1^{\delta_1}| \circ |y_2^{\delta_2}| \circ \dots \circ |y_m^{\delta_m}|\right) \end{aligned}$$

Hemos probado que $\mathscr{F}$ es un grupo libre con base $[X]$.
Sea $\overline{\psi}:\mathscr{F}\to F$ definida por $|x_1^{\epsilon_1}|\circ|x_2^{\epsilon_2}|\circ\ldots\circ|x_n^{\epsilon_n}|\mapsto x_1^{\epsilon_1}x_2^{\epsilon_2}\ldots x_n^{\epsilon_n}$ tal función es una biyección con $\overline{\psi}\big([X]\big)=\psi\big([X]\big)=X$. El ejercicio anterior muestra que podemos considerar a F como un grupo isomorfo a $\mathscr{F}$; así, F es un grupo libre con base X (además, X genera a F porque $[X]$ genera a $\mathscr{F}$). □

Después de esta breve revisión, la cuestión es: ¿cómo dotamos a un grupo de una estructura geométrica o topológica? Una aproximación fundamental es por medio de la construcción de los grafos de Cayley que veremos a continuación.

2.3. Grafos de Cayley

Estos grafos fueron introducidos por Arthur Cayley en 1878 para describir el concepto de grupos abstractos que son generados por un conjunto. Esta definición tiene dos fuentes históricas principales: la teoría de grupos y la teoría de grafos. Es, además, uno de los temas centrales de la Teoría Geométrica de Grupos.

Definición 2.3.1 (Grafo de Cayley)**.** Sea G un grupo y $S\subset G$ un subconjunto que lo genera, el *grafo de Cayley* de G con respecto a S, denotado por $\mathrm{Cay}(G,S)$, puede ser descrito de la siguiente forma:
Los elementos de G formarán el conjunto de vértices del grafo. Para $g,h\in G$, existirá una arista dirigida desde g hasta h si $h=gs$, para algún $s\in S\cup S^{-1}\backslash\{1\}$.

En otras palabras, dos vértices en el grafo de Cayley serán adyacentes si, y sólo si, uno es múltiplo del otro en términos de un elemento perteneciente al conjunto generador en cuestión.

Nota. Supongamos que $h=gs$ para algún $s\in S$. Entonces $g=hs^{-1}$. Si ambos, s y s^{-1} pertenecen a S, podríamos dibujar una arista no dirigida entre g y h. Caso contrario, tendremos una arista dirigida. Aunque no es necesario tomar en cuenta este detalle en nuestro estudio.

Ejemplo 2.3.1. Podemos dibujar el grafo de Cayley, $\mathrm{Cay}(G,S)$, donde G es el grupo de los enteros módulo 6 y $S=\{1,2\}$ de la siguiente forma:

Ejemplo 2.3.2. Sean $G=\mathbb{Z}$ y $S=\{1\}$, entonces $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z},\{1\})$ será:

Ejemplo 2.3.3. Considerando $G=\mathbb{Z}$ y $S=\{2,3\}$, tendremos

2.4. Propiedades elementales de los grafos de Cayley

Los grafos de Cayley cumplen las siguientes propiedades:

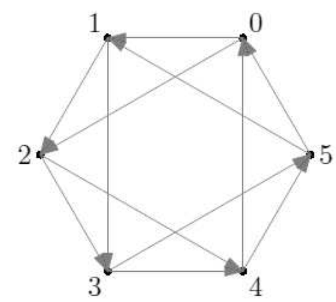


Figura 2.1: Grafo Cay(G, S)

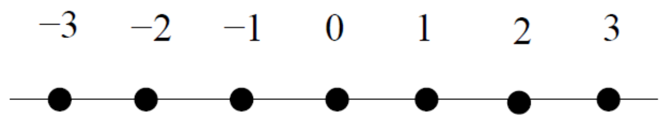


Figura 2.2: Grafo Cay$(\mathbb{Z}, \{1\})$

1. Son conexos, pues todos los vértices g pueden ser "alcanzados" desde el vértice correspondiente al elemento neutro del grupo, "caminando' a través de las aristas correspondientes a la presentación de g en términos de elementos generadores.

2. Los grafos de Cayley son regulares en el sentido de que todos los vértices tienen el mismo número de vecinos (dos vértices son *vecinos* si existe una arista entre ellos).

3. Se dice que un grafo es *localmente finito* si todos los vértices tienen una cantidad finita de vecinos. Un grafo de Cayley es localmente finito si, y sólo si, el conjunto de generadores es finito.

Prueba 1. Sean $g, h \in G, \{g, h\} \in E \Leftrightarrow h = gs$, con $s \in S \cup S^{-1}$. Tomemos $g_1, g_2 \in G$, entonces $g_1 = s_1 s_2 \dots s_n$ y $g_2 = r_1 r_2 \dots r_m$ que son sucesiones de elementos del conjunto generador. Tendremos que $1g_1 = 1(s_1 s_2, \dots s_n)$ y $1g_2 = 1(r_1 r_2 \dots r_m)$, lo que significa que $\{g_1, 1\}, \{g_2, 1\} \in E$.

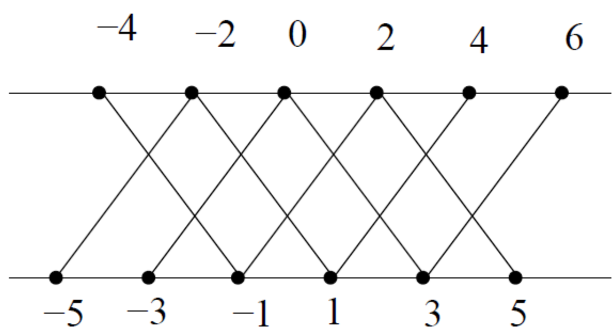
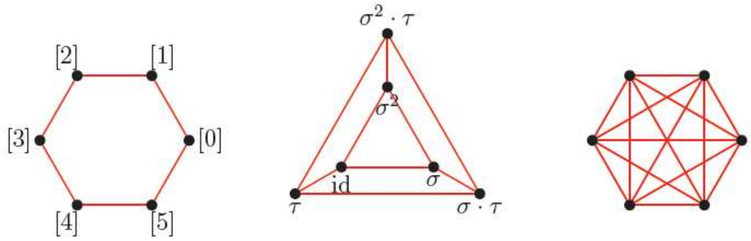


Figura 2.3: Grafo Cay$(\mathbb{Z}, \{2, 3\})$



Cay($\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \{[1]\}$) Cay($S_3, \{\tau, \sigma\}$) Cay($S_3, S_3$)

Figura 2.4: Ejemplos de grafos de Cayley

Además, $1 = g_2(r_1 r_2 \ldots r_m)^{-1}$, entonces $g_1 = g_2(r_1 r_2 \ldots r_m)^{-1}(s_1 s_2 \ldots s_n)$. Por lo tanto, $\{g_1, g_2\} \in E$.

Prueba 2. Existe una arista entre dos vértices $g, h \in G$ del grafo de Cayley de G respecto al conjunto generador S si existe $s \in S$ tal que $h = gs$, como hemos supuesto desde el inicio el conjunto S es finito y la cantidad de elementos para formar aristas entre g y h será $\left|S \cup S^{-1} \backslash \{1\}\right|$.

Prueba 3. Es claro por la misma definición del conjunto de generadores.

Ejemplo 2.4.1. Si $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y $S = \{a = (1,0),\ b = (0,1)\}$, entonces Cay$(G, S)$ será:

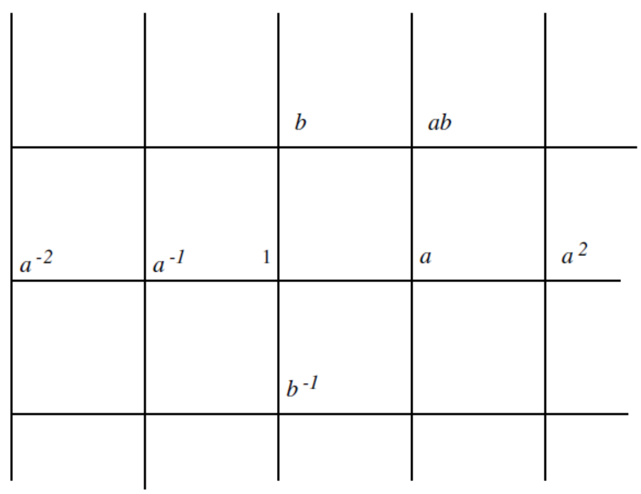


Figura 2.5: Grafo Cay$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \{a, b\})$

Proposición 2.4.1. Sea F un grupo libre, libremente generado por S. Entonces Cay(F, S) es un árbol.

Demostración. Supongamos que Cay(F, S) contiene un ciclo $g_0, g_1, \ldots, g_k = g_0$ donde todos los $g_0, \ldots, g_{k-1}$ son distintos, excepto $g_k = g_0$. Entonces existen $s_1, \ldots, s_k \in S \cup S^{-1}$ tales que $g_i = g_{i-1} S_i$, con $1 \leq i \leq k$. Esto quiere decir que

$$g_1 = g_0 s_1$$
$$g_2 = g_1 s_2$$
$$\vdots$$
$$g_k = g_{k-1} S_k$$

Observamos que $g_2 = g_0 s_1 s_2$ y $g_3 = g_0 s_1 s_2 s_3$, por lo cual $g_0 = g_k = g_0 s_1 s_2 \ldots s_k$.
Entonces $1 = s_1 s_2 \ldots s_k$, lo que quiere decir que existe un j tal que $s_{j+1} = s_j^{-1}$. Sabemos que $g_{j+1} = g_j s_{j+1}$ y que $g_{j+1} = g_{j-1} s_j s_{j+1}$, por lo visto en el párrafo anterior, tendremos que $g_{j+1} = g_{j-1}$. Una contradicción.
En consecuencia, Cay(F, S) es un árbol. □

Ejemplo 2.4.2. Sea $F(S)$ el grupo libre con dos generadores a, b y sea $S = \{a, b\}$. El correspondiente grafo de Cayley. Cay$(F(S), S)$ es un árbol regular de grado 4 — el *grado* de un vértice es el número de vértices incidentes en él — como muestra la figura:

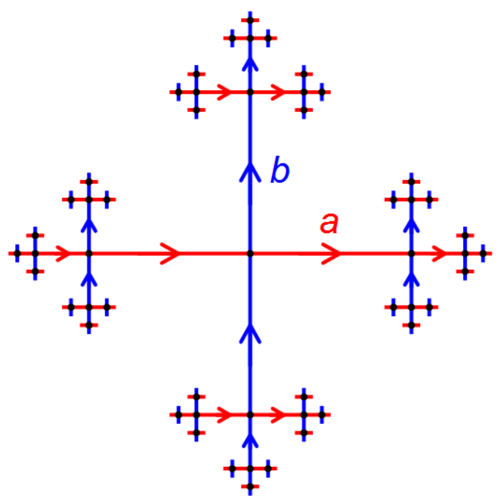


Figura 2.6: Grafo Cay$(F(S), \{a, b\})$

3

Grupos finitamente generados vistos como espacios métricos

La tarea de mostrar cuando un grupo en particular es o no finitamente generado no es fácil, aunque la geometría es capaz de dotarnos de un grupo de herramientas. Con este objetivo, dedicaremos este capítulo a dotar de una métrica a un grafo de Cayley, que depende exclusivamente del conjunto que genera al grupo, logrando así un espacio métrico directamente relacionado con un grupo.

3.1. Métrica de la palabra

Un ejemplo clave sobre la forma de obtener un objeto geométrico a partir de un grupo es considerar su grafo de Cayley (respecto a un conjunto generador ya escogido) junto con la correspondiente métrica de la palabra.

Definición 3.1.1. Sea G un grupo generado finitamente por S, es decir que cada $g \in G$ puede ser escrito como $g = s_1 s_2 \dots s_n$, con $s_1, s_2, \dots, s_n \in S \cup S^{-1}$. Definimos la *norma* de g y escribimos $\|g\|_S$ al más pequeño de los $n \geq 0$ tal que existen $s_1, s_2, \dots, s_n \in S \cup S^{-1}$ y cumplen que $g = s_1 s_2 \dots s_n$ (los s_i no son necesariamente distintos).

Nota. Para el elemento neutro 1 del grupo, tendremos $\|1\|_S = 0$.

3.1.1. Propiedades de $\|\cdot\|_S$

Para cualesquiera $g, h \in G$, se cumple que:

1. $\|g\|_S \geq 0$ y, $\|g\|_S = 0$ si $g = 1$

2. $\|gh\|_S \leq \|g\|_S + \|h\|_S$. En efecto, si $\|g\|_S = n$ y $\|h\|_S = m$, entonces existen $s_1, s_2, \dots, s_n \in S \cup S^{-1}$ y $t_1, t_2, \dots, t_m \in S \cup S^{-1}$, tales que $g = s_1 s_2 \dots s_n$ y $h = t_1 t_2 \dots t_m$, así $gh = s_1 s_2 \dots s_n t_1 t_2 \dots t_m$

y esto quiere decir que gh puede ser escrita como producto de $m+n$ generadores. Entonces $\|gh\|_S \leq m+n$.

3. $\|h\|_S = \|h^{-1}\|_S$

4. $\|g\|_S \leq 1$, si $g \in S$

Definición 3.1.2. Sea Cay(G,S) el grafo de Cayley del grupo G generado por $S \subset G$. Definimos la *métrica de la palabra* en Cay(G,S) de la siguiente forma: para $g,h \in G$, sea $d_S(g,h) = \|g^{-1}h\|_S$. Es decir, la métrica de la palabra es igual a la longitud del camino más corto en Cay(G,S) que conecta g con h.

Nota. Con esta definición, la geometría del espacio métrico resultante depende de la elección del conjunto que genera al grupo.

Notación. G denota al grupo generado por el conjunto finito $S \subseteq G \backslash \{1\}$. Por conveniencia, asumiremos que $S = S^{-1} = \{s^{-1} : s \in S\}$.

Teorema 3.1.1. Cay(G,S) es un espacio métrico con la métrica de la palabra.

Demostración. i. Claramente, la palabra vacía formada por elementos del conjunto de generadores S tiene longitud cero. Entonces para cualquier $g \in G$, tendremos que $d_S(g,g) = 0$.

La única palabra que tiene métrica cero es la palabra vacía y el producto de cualquier palabra con la palabra vacía nos da la misma palabra. Entonces para $g \neq h$ en G, tendremos que $d_S(g,h) > 0$.

ii. Supongamos que $d_S(g,h) = n$, entonces existen $s_1, s_2, \ldots, s_n \in S$ tales que $g^{-1}h = s_1 s_2 \ldots s_n$, entonces $(g^{-1}h)^{-1} = h^{-1}g = s_n^{-1} s_{n-1}^{-1} \ldots s_1^{-1}$. Esta última sucesión es válida para la expresión y podemos decir que $d_S(g,h) \leq d_S(h,g)$.

Finalmente, intercambiando los roles de h y g en el razonamiento anterior, obtenemos la desigualdad contraria y concluimos que $d_S(g,h) = d_S(h,g)$.

iii. Sean $f,g,h \in G$, supongamos que $d_s(f,g) = n$ y que $d_S(g,h) = m$. Es decir, existen $s_1, s_2, \ldots, s_n$ y $r_1, r_2, \ldots, r_m$ sucesiones de elementos en S, tales que:

$$f^{-1}g = s_1 s_2 \ldots s_n$$
$$g^{-1}h = r_1 r_2 \ldots r_m$$

Por otra parte,

$$f^{-1}h = (f^{-1}g)(g^{-1}h) = (s_1 s_2 \ldots s_n)(r_1 r_2 \ldots r_m)$$

Y,

$$h = f(s_1 s_2 \dots s_n)(r_1 r_2 \dots r_m)$$

Entonces

$$d_S(f,h) \le n+m = d_S(f,g)+d_S(g,h).$$

De esta forma, Cay(G,S) es un espacio métrico. □

Nota. Podemos identificar cada arista con el intervalo $[0,1]$ y para $g,h \in G$, la distancia que los separa, como el ínfimo de las longitudes de los caminos que los conectan.

3.2. G actúa sobre el grafo de Cayley

Recordemos que todo grupo actúa sobre sí mismo (por la izquierda) por medio del producto por la izquierda:

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ (g,h) &\mapsto gh \end{aligned}$$

Esta acción se puede extender a cualquier grafo de Cayley: si $\{x, xs\}$ es una arista de Cay(G,S) con vértices x y xs, para $g \in G$, definimos la isometría

$$g : \{x, xs\} \to \{gx, gxs\}$$

En efecto,

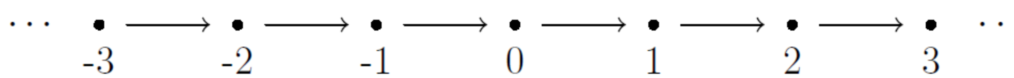
$$\begin{aligned} d_s(gx, gxs) &= \|(gx)^{-1} gxs\|_S \\ &= \|x^{-1} g^{-1} gxs\|_S \\ &= \|s\|_S \\ \text{y,} \quad d_S(x, xs) &= \|x^{-1} xs\|_S = \|s\|_S \end{aligned}$$

4

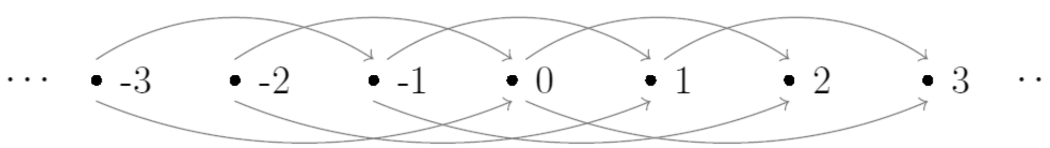
Observación fundamental de la Teoría Geométrica de Grupos (Lema de Svarc-Milnor)

En este capítulo desarrollaremos la teoría de los espacios métricos cuasi-isométricos y probaremos el lema de Svarc-Milnor, llamado con frecuencia *Lema Fundamental de la Teoría Geométrica de Grupos*.

Observemos el grafo de Cayley de $\mathbb{Z}$ considerando dos conjuntos generadores distintos. Si $S = \{1\}$, tendremos:



Y, si consideramos $S = \{2, 3\}$, tendremos:



Notemos que cuando cambiamos el conjunto generador, alteramos drásticamente la estructura local del grafo de Cayley. Sin embargo, lo fundamental es que si nos "alejamos" lo suficiente de cada grafo, ambos lucirán muy "parecidos". En otras palabras, la modificación de los conjuntos generadores no afecta a la estructura gruesa.

Este concepto geométrico es representado por la noción de *cuasi-isometría* entre espacios métricos. Esto como resultado de que podemos dotar a cada grafo de Cayley de una métrica, como vimos en el capítulo anterior. Los dos espacios métricos resultantes son cuasi-isométricos. Desarrollaremos estas ideas formalmente a continuación.

4.1. Teorema de Hopf - Rinow

El siguiente teorema será usado en la formulación del teorema de los grupos finitamente generados (lema de Svarc-Milnor). Aunque no es el resultado central del trabajo, se incluye su demostración por su importancia e interés.

Teorema 4.1.1. Sea (X,d) un espacio métrico completo, localmente compacto y geodésico. Entonces $N(x,r)$ es compacto para todo $x \in X$ y $r \geq 0$.

Demostración. Fijamos un $x \in X$. Sea $A = \{r \in [0,\infty) : N(x,r) \text{ es compacto}\}$. Notemos que $A \neq \{0\}$ pues X es localmente compacto. También, notemos que si $r \in A$, entonces $[0,r] \subset A$.

Supongamos que $R \in A$. Para cada $x_\alpha \in N(x,R)$, existe una vecindad compacta $N(x_\alpha, r_\alpha)$. Entonces $\{U(x_\alpha, r_\alpha)\}$ es una cobertura abierta de $N(x,R)$, por lo tanto tendrá una subcobertura finita $\{U(x_i, r_i)\}$. La unión $\bigcup_i N(x_i, r_i)$ es compacta y contiene a $N(x, R+\epsilon)$, para algún $\epsilon > 0$. Entonces $R+\epsilon \in A$. Así, A es abierto en $[0,\infty)$.

Supongamos que R es un punto límite de A, entonces $[0,R] \subset A$. Sea $\{x_j\}$ una sucesión en $N(x,R)$, y sea $\{\epsilon_j\}$ una sucesión decreciente de números reales que converge a 0.

Asumimos, sin pérdida de generalidad, que $\epsilon_i < R$, para todo i. Como X es un espacio geodésico, podemos encontrar una geodésica entre x y x_j, para cada j. Para cada i a lo largo de esta geodésica, podemos encontrar un punto $y_j^{(i)}$ tal que $y_j^{(i)} \in N\big(x, R-\epsilon_i/2\big)$ y $d(x_j, y_j^{(i)}) \leq \epsilon_i$. Entonces, para cada i, la sucesión $\{y_j^{(i)}\}$ está contenida en $N\big(x, R-\epsilon_i/2\big)$, que es compacto. Podemos, entonces, escoger una subsucesión convergente $\{y_{j(1,k)}^{(1)}\}$ en $\{y_j^{(1)}\}$. Esta subsucesión convergente tiene una subsucesión correspondiente $\{y_{(1,k)}^{(2)}\}$ en $\{y_j^{(2)}\}$. Escogemos una subsucesión convergente $\{y_{j(2,k)}^{(2)}\}$ de $\{y_{j(1,k)}^{(2)}\}$. Continuando de esta manera, escogeremos una subsucesión convergente $\{y_{j(i,k)}^{(i)}\}$ de $\{y_{j(i-1,k)}^{(i)}\}$, para todo i.

Por construcción, la sucesión $\{y_{j(k,k)}^{(i)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge para todo i.

Consideremos la sucesión $\{x_{j(k,k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Si tomamos un $\epsilon > 0$, existe algún i tal que $\epsilon_i < \epsilon$. Como $\{y_{j(k,k)}^{(i)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge, es de Cauchy, entonces existe N tal que para $m,n \geq N$, tendremos $d\big(y_{j(m,m)}^{(i)}, y_{j(n,n)}^{(i)}\big) < \epsilon$. Entonces para $m,n \geq N$, vemos que

$$d\big(x_{j(m,m)}, x_{j(n,n)}\big) \leq d\big(x_{j(m,m)}, y_{j(m,m)}^{(i)}\big) + d\big(y_{j(m,m)}^{(i)}, y_{j(n,n)}^{(i)}\big) + d\big(y_{j(n,n)}^{(i)}, x_{j(n,n)}\big) < 3\epsilon$$

Entonces la sucesión $\{x_{j(k,k)}\}$ es de Cauchy. Como el espacio (X,d) es completo, esta sucesión es convergente. Por lo tanto, $\{x_j\}$ tiene una subsucesión convergente.

La sucesión $\{x_j\}$ es arbitraria, entonces $N(x,R)$ es compacto. Así, $R \in A$ y A es cerrado. El único subconjunto de $[0,\infty)$ que es cerrado y abierto es $[0,\infty)$. □

4.2. Cuasi-isometrías

Recordemos que las isometrías son biyecciones entre espacios métricos que preservan distancias. Geométricamente, esto significa que los espacios métricos implicados tienen un aspecto muy parecido, salvo rotaciones y traslaciones. Esta es una restricción muy rígida dentro el contexto que estamos desarrollando. En particular, las isometrías son continuas, lo que significa que preservan propiedades locales.

Estamos interesados en una condición de las funciones que preserve la geometría a gran escala pero, no necesariamente, propiedades locales. Así, la condición dada debe permitir un margen (error) entre las distancias de los espacios implicados, pero no necesariamente implicar continuidad. Con esto en mente, definimos:

Definición 4.2.1. Decimos que $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ es una *inmersión cuasi-isométrica* si existen constantes $A\geq 1$, $B\geq 0$ tales que para todo $x,y\in X$,

$$\frac{1}{A}d_X(x,y)-B\leq d_Y(f(x),f(y))\leq Ad_X(x,y)+B$$

Si, además, la imagen de f es coacotada, decimos que f es una *cuasi-isometría*. Si existe una cuasi-isometría de X en Y, entonces X es *cuasi-isométrico* a Y.

Ejemplo 4.2.1. La función $x\mapsto\lfloor x\rfloor$ es una cuasi-isometría entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Z}$, basta tomar $A=2$ y $B=0$, para lograr que:

$$\frac{1}{A}d_X(x,y)-B\leq d_Y(\lfloor x\rfloor,\lfloor y\rfloor)\leq Ad_X(x,y)+B$$

$\forall x,y\in\mathbb{R}$. Por lo tanto, $\mathbb{R}$ es cuasi-isométrico a $\mathbb{Z}$.

A continuación enunciaremos algunas propiedades de las cuasi-isometrías. Aunque éstas no son necesariamente invertibles, sí son "cuasi-invertibles", de la misma forma, que sean coacotadas asegura la "cuasi-sobreyectividad".

Definición 4.2.2. Sean las funciones $f,g:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$. Decimos que f y g están dentro una *distancia finita* si existe una constante $C\geq 0$ tal que $d_Y(f(x),g(x))\leq C$, para todo $x\in X$.

Proposición 4.2.1. Si $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ y $g:(Y,d_Y)\to(Z,d_Z)$ son cuasi-isometrías, entonces $g\circ f:(X,d_X)\to(Z,d_Z)$ es una cuasi-isometría.

Demostración. Como f y g son cuasi-isometrías, existen $A\geq 1$ y $B\geq 0$ tales que para todo $x_1,x_2\in X$,

$$\frac{1}{A}d_X(x_1,x_2)-B\leq d_Y(f(x_1),f(x_2))\leq Ad_X(x_1,x_2)+B$$

Y, existen $D\geq 1$ y $E\geq 0$, tales que para todo $y_1,y_2\in Y$,

$$\frac{1}{D}d_Y(y_1,y_2)-E\leq d_Z(g(y_1),g(y_2))\leq D\,d_Y(y_1,y_2)+E$$

Veamos,

$$\begin{aligned}d_Z\big(g(f(x_1)),g(f(x_2))\big)&\leq D\,d_Y(f(x_1),f(x_2))+E\\&\leq DAd_X(x_1,x_2)+DB+E\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} d_X(x_1,x_2) &\leq A d_Y(f(x_1),f(x_2)) + B \\ &\leq AD\, d_Z\big(g(f(x_1)),g(f(x_2))\big) + AD\,E + B \end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{1}{AD} d_X(x_1,x_2) - \left(\frac{B}{AD} + E\right) \leq d_Z\big(g(f(x_1)),g(f(x_2))\big)$$

Con lo cual hemos probado que la composición de dos cuasi-isometrías es una cuasi-isometría.

□

Proposición 4.2.2. Si $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ es una cuasi-isometría, entonces existe una cuasi-isometría $g:(Y,d_Y)\to(X,d_X)$ tal que la composición $g\circ f$ está dentro de una distancia finita de la identidad en (X,d_X) y $f\circ g$ está dentro de una distancia finita de la identidad en (Y,d_Y).

Prueba. Definimos para $y\in Y$, $S_y(r)$ como el conjunto de los $x\in X$ tales que $d_Y(f(x),y)\leq r$. Como la imagen de f es coacotada, existe un $R\geq 0$ tal que $S_y(R)\neq\emptyset$, para todo y. Sea $S_y=S_y(R)$.

Por el axioma de elección, sea g una función de elección sobre la colección de conjuntos S_y. Esto es, para todo y, tenemos que $g(y)\in S_y$.

Para cualquier $y\in Y$, tenemos que $d_Y(f\circ g(y),y)\leq R$. Para cualquier $x\in X$, tenemos que

$$\frac{1}{A} d_X(g\circ f(x),x) - B \leq d_Y(f\circ g\circ f(x), f(x)) \leq R$$

Así, $d_X(g\circ f(x),x)$ es acotada. Por lo tanto, la imagen de g es coacotada.

Resta probar que g es una inmersión cuasi-isométrica, es decir que existen $A'\geq 1$, $B'\geq 0$ tales que para $y_1,y_2\in(Y,d_Y)$ se cumple:

$$\frac{1}{A'} d_Y(y_1,y_2) - B' \leq d_X(g(y_1),g(y_2)) \leq A' d_Y(y_1,y_2) + B'$$

Antes, notemos que si $y_1,y_2\in(Y,d_Y)$, entonces:

$$\begin{aligned} d_Y(f\circ g(y_1), f\circ g(y_2)) &\leq d_Y(f\circ g(y_1),y_1) + d_Y(y_1,y_2) + d_Y(y_2, f\circ g(y_2)) \\ &\leq d_Y(y_1,y_2) + 2R \end{aligned}$$

Para la desigualdad de la derecha:

$$\begin{aligned} d_X(g(y_1),g(y_2)) &\leq A d_Y(f\circ g(y_1), f\circ g(y_2)) + AB \\ &\leq A d_Y(y_1,y_2) + 2AR + AB \end{aligned}$$

ya que f es una cuasi-isometría y por la observación anterior.

Para la desigualdad de la izquierda:

$$\begin{aligned} d_Y(y_1,y_2) &\leq d_Y(y_1, f\circ g(y_1)) + d_Y(f\circ g(y_1), f\circ g(y_2)) + d_Y(f\circ g(y_2), y_2) \\ &\leq d_Y(f\circ g(y_1), f\circ g(y_2)) + 2R \\ &\leq A d_X(g(y_1),g(y_2)) + B + 2R \end{aligned}$$

ésto por la desigualdad triangular y porque f es una cuasi-isometría.

$$\Rightarrow \frac{1}{A} d_Y(y, y_2) - \left(\frac{B+2R}{A}\right) \leq d_X(g(y_1), g(y_2))$$

$\square$

Corolario 4.2.1. Escribiremos $X \sim Y$ si X es cuasi-isométrico a Y. Entonces $\sim$ es una relación de equivalencia.

Demostración. La función identidad es una cuasi-isometría, por lo cual tenemos que $X \sim X$. En la proposición (4.2.1) hemos probado que si $X \sim Y$ y $Y \sim Z$, entonces $X \sim Z$. Además en la proposición anterior probamos que si $X \sim Y$, entonces $Y \sim X$. $\square$

Ahora podemos abordar a los grupos desde este punto de vista.

4.3. Cuasi-isometrías y Grupos

Notemos que los grafos de Cayley de $\mathbb{Z}$ considerando como conjuntos generadores a $\{1\}$ y a $\{2,3\}$ son cuasi-isométricos. Esta afirmación es mucho más interesante si dotamos al grafo de Cayley de una estructura de espacio métrico como hicimos en el capítulo 3, además vimos que la métrica resultante depende *a priori* de la elección del conjunto generador. Esto es cierto cuando consideramos detalles locales como en el ejemplo para $\mathbb{Z}$. Pero, a gran escala, esperamos que al escoger conjuntos generadores distintos, tengamos espacios cuasi-isométricos. Esto resulta cierto cuando los conjuntos generadores son finitos, como en el ejemplo.

Proposición 4.3.1. Sea G un grupo, R y S conjuntos finitos que generan a G. Entonces $\mathrm{Cay}(G,R) \sim \mathrm{Cay}(G,S)$, con las métricas de la palabra correspondientes.

Prueba. Probaremos que la función inclusión $i : (G, d_R) \to (G, d_S)$ es una cuasi-isometría. Sea $C = \max\{d_S(1, r) : r \in R\}$. Entonces para todo $g, h \in G$, tendremos que $d_S(g,h) \leq C\, d_R(g,h)$. Esto se debe a que cuando calculamos la distancia en (G, d_S), cada elemento generador en R puede ser expresado por una palabra de tamaño, a lo más, C. Similarmente, podemos encontrar una constante $D \geq 0$ tal que $d_R(g,h) \leq D\, d_S(g,h)$. La imagen de i es claramente coacotada. $\square$

Definición 4.3.1. Sean G, H dos grupos finitamente generados. Decimos que G es *cuasi-isométrico* a H, denotado por $G \sim H$, si existen los conjuntos generadores $R \subset G$ y $S \subset H$ tales que $\mathrm{Cay}(G,R) \sim \mathrm{Cay}(H,S)$.

Uno de los problemas centrales en la Teoría Geométrica de Grupos es la clasificación de los grupos finitamente generados salvo cuasi-isometría.

4.4. Teorema de los Grupos finitamente generados (Lema de Svarc-Milnor)

El lema de Svarc-Milnor afirma que dada una acción de grupo lo “suficientemente buena” sobre un espacio métrico “suficientemente bueno”, podemos deducir inmediatamente que el grupo en cuestión debe ser finitamente generado y, además, cuasi-isométrico al espacio métrico sobre el que actúa.

Definición 4.4.1. Sea X un conjunto, $S(X)$ el grupo simétrico de X y G un grupo cualquiera. Una acción del grupo G en el conjunto X es un homomorfismo $G \to S(X)$ dado por $g \mapsto \phi_g$. Decimos que el grupo G *actúa* sobre X y escribimos $\phi_g(x)$ como $g \cdot x$.

Definición 4.4.2. Supongamos que G actúa sobre X. La *órbita* de x respecto a la acción es el conjunto $G \cdot x = \{g \cdot x : g \in G\}$. El *cociente* de X dado por esta acción es la colección de todas las órbitas y es denotado por X/G.

Definición 4.4.3. Sea (X, d) un espacio métrico completo, localmente compacto y geodésico, la acción del grupo G sobre X es geométrica si:

- G *actúa isométricamente* sobre X. Esto es, para todo $g \in G$, la función ϕ_g es una isometría en X.
- G *actúa cocompactamente* sobre X. Esto es, el espacio cociente X/G es compacto con la topología cociente.
- G *actúa propia y discontinuamente sobre* X. Esto es, para todo compacto $K \subset X$, el conjunto $\{g \in G : g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$ es finito.

La noción de “propia y discontinuamente” puede ser reformulada de la siguiente manera:

Proposición 4.4.1. Supongamos que el grupo G actúa isométricamente sobre X. Entonces son equivalentes:

1. G actúa propia y discontinuamente sobre X.
2. Para todo $x \in X$ y $r \geq 0$, el conjunto $\{g \in G : d(x, g \cdot x) \leq r\}$ es finito.

Prueba. (1) $\Rightarrow$ (2): Por el teorema (4.1.1), la vecindad cerrada $N(x, r)$ es compacta. Entonces $S = \{g \in G : g \cdot N(x, r) \cap N(x, r) \neq \emptyset\}$ es finito. Pero $\{g \in G : d(x, g \cdot x)\} \leq r$ es subconjunto de S.
(2) $\Rightarrow$ (1): Fijemos $r \geq 0$. Sea $K \subset X$ un compacto y $\{x_n\} \subset K$ una sucesión tal que $\left\{N(x_n, r)\right\}$ es una cobertura de K. Como K es compacto, podemos encontrar una subsucesión finita (x_{n_i}) tal que $\left\{N(x_{n_i}, r)\right\}$ cubre a K. Sea $M = \text{máx}\{d(x_{n_i}, x_{n_j})\}$. Supóngase que $g \in G$ es tal que $g \cdot K \cap K \neq \emptyset$. Entonces existe un $y \in K$ con $g \cdot y \in K$. Para algunos x_{n_i}, x_{n_j}, tendremos $d(y, x_{n_i}) \leq r$ y

$d(g\cdot y, x_{n_j})\leq r$.

Como G actúa isométricamente, tendremos que $d(g\cdot y, g\cdot x_{n_i})\leq r$, entonces $d(g\cdot x_{n_i}, x_{n_j})\leq 2r$ y $d(g\cdot x_{n_i}, x_{n_i})\leq 2r+M$, por la desigualdad triangular. Así,

$$\{g\in G: g\cdot K\cap K\neq\emptyset\}\subset\bigcup_i\{g\in G: d(x_{n_i}, g\cdot x_{n_i})\leq 2r+M\}$$

Donde la parte derecha es finita, como queríamos. □

Proposición 4.4.2. Supongamos que el grupo G actúa propia y discontinuamente sobre el espacio métrico X, entonces X/G es un espacio métrico.

Prueba. Definimos

$$d_Q(G\cdot x, G\cdot y) = \text{mín}\left\{d(p,q): p\in G\cdot x, q\in G\cdot y\right\} = \text{mín}\left\{d(x, g\cdot y): g\in G\right\}$$

Como G actúa propia y discontinuamente, existe sólo una cantidad finita de $g\in G$ tales que:

$$g\cdot N(x, d(x,y))\cap N(x, d(x,y))\neq\emptyset$$

Entonces existe una cantidad finita de $g\in G$ tales que $d(x, g\cdot y)\leq d(x,y)$, y el mínimo es realmente alcanzado. □

Proposición 4.4.3. Supongamos que G actúa propia y discontinuamente e isométricamente sobre (X,d). Entonces son equivalentes:

1. G actúa cocompactamente sobre X.

2. Toda órbita de G es coacotada en X.

Prueba. (1) $\Rightarrow$ (2): Escojamos una órbita $G\cdot x$ en X/G. Existe un r tal que $X/G\subset N(G\cdot x, r)$. Para cualquier $y\in X$, tendremos $d_Q(G\cdot y, G\cdot x)\leq r$, entonces $d(y, g\cdot x)\leq r$ para algún $g\in G$. Así, $G\cdot x$ es coacotado.
(2) $\Rightarrow$ (1): Nuevamente, escogemos $G\cdot x\in X/G$. Supongamos que $G\cdot x$ es $r-$ denso en X. Entonces, para cualquier $y\in X$, existe $g\in G$ tal que $d(x, g\cdot x)\leq r$. Por el teorema (4.1.1), sabemos que $N(x,r)$ es compacto. La función proyección $\pi: X\to X/G$ dada por $x\mapsto G\cdot x$ es continua. Entonces $q(N(x,r)) = X/G$ es compacto. □

Lema 4.4.1 (Svarc-Milnor)**.** Supongamos que el grupo G actúa geométricamente (Def. 4.4.3) sobre el espacio métrico (X,d). Entonces G es finitamente generado y $G\sim X$.

Prueba. Primero mostraremos que G es finitamente generado:
Fijemos un $x\in X$. Por la proposición anterior, sabemos que $G\cdot x$ es $r-$ denso en X, para algún $r\geq 0$. Sea $k = 2r+1$.

Construyamos un grafo de la siguiente forma: G el conjunto de vértices, dibujamos una arista entre g y h que pertenecen a G si $d(g\cdot x, h\cdot x)\leq k$.

Para $g, h \in G$, suponiendo que $L = d(g \cdot x, h \cdot x)$, existe $\gamma : [0, L] \to X$ una geodésica que conecta $g \cdot x$ con $h \cdot x$. También, sea $n = \lfloor L \rfloor + 1$. Notemos que $L/n < 1$.
Podemos escoger puntos $g \cdot x = x_0, x_1, \ldots, x_n = h \cdot x$, a lo largo de γ, tales que $d(x_i, x_{i+1}) = L/n$, para todo $0 \leq i \leq n-2$. Entonces para cada i, podemos encontrar un g_i tal que $d(x_i, g_i \cdot x) \leq r$ (siendo $g_0 = g$ y $g_n = h$). Entonces

$$d(g_i \cdot x, g_{i+1} \cdot x) \leq d(x_i, g_i \cdot x) + d(x_i, x_{i+1}) + d(x_{i+1}, g_{i+1} \cdot x) \leq 2r + 1 = k$$

Ahora, es claro que $g \to g_1 \to \cdots \to h$ es un camino de g hasta h. Entonces el grafo es conexo.

Sea $S = \{g \in G : d(x, g \cdot x) \leq k\}$. Por la proposición (4.4.1), sabemos que S es finito y simétrico (es decir, si $s \in S$, entonces $s^{-1} \in S$). Además, es claro que existe una arista entre g y h si, y solo si, $g^{-1}h \in S$. Como el grafo es conexo, existe un camino desde 1 hasta g, para todo $g \in G$. De todo esto, se sigue que S genera al grupo G y que el grafo del que estamos hablando no es más que Cay(G, S).

Ahora probaremos que $G \sim X$, que es lo mismo que probar que Cay$(G, S) \sim X$.
Sea la función $f : G \to X$ definida por $g \mapsto g \cdot x$. Por hipótesis, $G \cdot x$ es coacotado, entonces la imagen de f es coacotada.

Por el argumento anterior, vemos que para cualesquiera $g, h \in G$,

$$d_S(g, h) \leq n = \lfloor L \rfloor + 1 \leq d(g \cdot x, h \cdot x) + 1 = d(f(g), f(h)) + 1$$

Logrando así, una cota inferior. Para la cota superior, sea $g \to g_1 \to \cdots \to g_t = h$ el camino más corto en Cay(G, S) que conecta g con h. Entonces

$$d(f(g), f(h)) = d(g \cdot x, h \cdot x) \leq d(g \cdot x, g_1 \cdot x) + \cdots + d(g_{t-1} \cdot x, h \cdot x) \leq kt = k d_S(g, h)$$

Por lo tanto, f es una cuasi-isometría. ☐

Nota. Se requiere que (X, d) sea un espacio geodésico. Esto es, que para dos puntos cualesquiera en X, existe una isometría $g : I \to X$ que une esos dos puntos (I es un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$). De hecho, podemos "debilitar" esta condición pidiéndole a (X, d) que sea un espacio "cuasi-geodésico", $g : I \to X$ una cuasi-isometría. La prueba del lema de Svarc-Milnor puede ser fácilmente adaptada con estas condiciones.

5 Conclusiones y recomendaciones

Los resultados expuestos en este trabajo muestran que los grupos pueden ser abordados desde una perspectiva geométrica, es más, es posible probar propiedades que los caracterizan, utilizando herramientas topológicas. Aunque la bibliografía disponible en internet está dirigida en su mayor parte a estudiantes posgraduados, existen trabajos que pueden servir como introducción para el lector interesado (ver sección Bibliografía). Algunas aplicaciones se detallan a continuación.

Es posible utilizar el lema de Svarc-Milnor, el resultado principal de este trabajo, para mostrar que dado un grupo finitamente generado y un subgrupo del mismo, entonces el subgrupo es finitamente generado y cuasi-isométrico al grupo que genera.

Recíprocamente a lo que afirma la proposición 2.4.1, si un grupo es generado por un subconjunto del mismo tal que el producto de cualesquiera dos elementos del conjunto generador es distinto del elemento identidad y el grafo de Cayley del conjunto respecto al conjunto generador es un árbol, entonces el grupo es libre.

Un grupo es hiperbólico cuando su grafo de Cayley es hiperbólico según Gromov, esta definición implica muchas propiedades algebraicas del grupo en cuestión, es más, se busca que los grupos de curvatura negativa preserven tal propiedad aunque el conjunto generador sea distinto.

Para cualquier consulta puede escribir un mensaje de correo a: `mauri.ledezma@gmail.com`

Bibliografía

[1] de la Harpe, P.. (2000). *Topics in Geomeric Group Theory*. Chicago and London: The University of Chicago Press.

[2] Bowditch, B.H.. (2006). *A Course on Geometric Group Theory.* Japan: Mathematical Society of Japan.

[3] Kailasa, S.. (2014, septiembre 6). *Topics in Geometric Group Theory.* 2016, septiembre 7, de University of Chicago Sitio web:
`http://math.uchicago.edu/~may/REU2014/REUPapers/Kailasa.pdf`

[4] Loh, C.. (2010). *Geometric group theory, an Introduction.* 2016, septiembre 9, de Fakultat fur Mathematik Universitat Regensburg Sitio web:
`http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/ggt\_ws1011/lecture\_notes.pdf`

[5] Rotman, J.. (1995). *An Introduction to the Theory of Groups,* 4e.. New York: Springer-Verlag.

[6] Krebs, M., & Shaheen, A.. (2011). *Expander Families and Cayley Graphs.* Oxford: Oxford University Press.