Universidad Mayor de San Andrés
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Carrera de Matemática

GRUPO SIMPLÉCTICO
(Teoría Matricial)

PROYECTO DE GRADO PARA OBTENER

EL TITULO DE LICENCIADA EN MATEMÁTICA

Por: Jacqueline Mónica Ramírez

Tutor: Dr. Efraín Cruz Mullisaca

La Paz-Bolivia
2013

Dedico este trabajo a:
Mi abuelita Ana y
mi madre María Teresa

AGRADECIMIENTOS

Doy gracias a Dios por permitirme cumplir mis objetivos.

Al Dr. Cruz por su trabajo como tutor, por los consejos y guía que me brindó para realizar el presente trabajo.

Al proyecto "Dinámicas de Control" por darme la oportunidad de desarrollar mi trabajo.

A mis tribunales Lic. Raúl Borda y Lic. Miriam Mallea, por los consejos de gran utilidad brindados durante mis seminarios.

A mi familia, por el constante apoyo durante los años de estudio, la comprensión, el amor y el ánimo para culminar mi proyecto.

Índice general

Introducción

En el presente trabajo se estudiarán propiedades de varios grupos de matrices; cuyas entradas están en distintos espacios vectoriales, como por ejemplo la dimensión, conexidad y alguna invarianza entre estos grupos.

Es por eso que se requiere del Álgebra, Álgebra Lineal, Teoría Matricial y algo de Topología.

La parte central está en el estudio de las propiedades del Grupo Simpléctico y ver la existencia de alguna relación de este con algún otro grupo de matrices.

Este Proyecto de Grado se divide en cinco capítulos:

En el primer capítulo, recordamos las definiciones de grupos, subgrupos y homomorfismos. Definimos los Grupos Generales Lineales para los espacios vectoriales de los reales, complejos y cuaterniones.
Introducimos la noción de campo para el caso de los cuaterniones y analizamos la asignación del determinante de valor complejo para matrices cuyas entradas sean cuaterniones.

En el segundo capítulo, analizaremos las propiedades básicas del producto interno tanto en los reales, complejos y cuaterniones.
También definiremos los Grupos Ortogonales y los Grupos Especiales en esos tres espacios vectoriales.

En el tercer capítulo, definiremos una primera invarianza de grupos, su dimensión.
Estudiaremos el espacio de vectores tangentes a un grupo de matrices y veremos que ambos tienen la misma dimensión.

En el cuarto capítulo; parte central del trabajo, estudiaremos las propiedades del grupo simpléctico y el grupo especial ortogonal de matrices de tamaño 3 por 3 y veremos si existe una relación entre estos.
Definiremos los centros de los grupos que nos interesan y los compararemos.

En el apéndice, veremos los desarrollos de la exponencial y el logaritmo aplicados a matrices, estudiando sus propiedades.
Daremos una introducción a grupos a un parámetro y veremos algo acerca de las álgebras de Lie y calcularemos las dimensiones de ciertos grupos de matrices.

Capítulo 1

Grupo General Lineal

Previamente revisaremos los conceptos de grupos y sus propiedades para poder dar una clasificación a ciertos conjuntos de matrices que usaremos en adelante.

En todo el trabajo, tomaremos en cuenta los espacios vectoriales reales, complejos y de los cuaterniones, viendo las propiedades que poseen estos últimos.

Al clasificar a los Grupos Generales Lineales, tendremos cuidado al asignar una determinante compleja para el conjunto de matrices cuadradas cuyas entradas sean cuaterniones.

Definición 1.1. *Sea S un conjunto no vacío.*

Una operación binaria definida en S es una aplicación dada por:

$$\begin{aligned} \rho:\ S\times S &\to\ S \\ (a,b) &\mapsto\ \rho(a,b) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.1. *Sea $\mathbb{N}=\{1,2,...\}$ el conjunto de los números naturales.*

Definimos dos operaciones binarias, las cuales son muy utilizadas:

$$\begin{aligned} +:\ \mathbb{N}\times\mathbb{N} &\to\ \mathbb{N} \\ (a,b) &\mapsto\ +(a,b)=a+b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot:\ \mathbb{N}\times\mathbb{N} &\to\ \mathbb{N} \\ (a,b) &\mapsto\ \cdot(a,b)=ab \end{aligned}$$

Definición 1.2. *Sea G un conjunto no vacío con una operacón binaria denotada por $*$.*
Decimos que G es grupo, si satisface las siguientes condiciones:

1) *Clausura: Si $a,b\in G \Rightarrow a*b\in G$*

2) *Asociatividad: Si $a,b,c\in G \Rightarrow a*(b*c)=(a*b)*c$*

3) Neutro: Existe $e \in G$ tal que para todo $a \in G$, $a * e = a = e * a$

4) Inverso: Para cada $a \in G$, existe $a^{-1} \in G$ tal que $a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$

5) Si además ocurre que $a * b = b * a$ para todo $a, b \in G$, decimos que el grupo G es abeliano.

Ahora veremos las propiedades que poseen el neutro y los inversos de un grupo.

Proposición 1.1. *Un grupo G tiene exáctamente un neutro; y, cada elemento de G posee exáctamente un inverso.*

Prueba: Demostraremos ambas por contradición:

Sean a y e elementos identidad de G distintos, entonces:

Por ser a el elemento identidad, $e * a = e = a * e$; y,

Por ser e elemento identidad, $e * a = a = a * e$.

Luego $e = a$, contradiciendo a la hipótesis.

Por tanto, el elemento identidad es único.

Sean a^{-1} y x^{-1} elementos inversos de a en G distintos, entonces:

Por ser a^{-1} elemento inverso , $a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$; y,

Por ser x^{-1} elemento inverso, $a * x^{-1} = e = x^{-1} * a$.

Como G es grupo, se cumple:

$$\begin{aligned} x^{-1} &= e * x^{-1} \\ &= (a^{-1} * a) * x^{-1} \\ &= a^{-1} * (a * x^{-1}) \\ &= a^{-1} * e \\ &= a^{-1} \end{aligned}$$

Luego $x^{-1} = a^{-1}$, contradiciendo a la hipótesis.

Por tanto, el elemento inverso es único. ∎

Ejemplo 1.2. *Consideremos al conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$.*

$(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo, pues 0 es el neutro y $-a$ es el inverso de cada a.

$(\mathbb{Z}, \cdot)$ no es un grupo, ya que los únicos elementos que poseen inverso son el 1 y el -1.

Notemos también que $(\mathbb{N}, +)$ no es un grupo, puesto que ningún elemento posee inverso.

Definición 1.3. *Se dice que un conjunto no vacío $\mathbb{K}$ con operaciones binarias de multiplicación y adición es un campo, si satisface:*

i) La multiplicación es distributiva respecto de la adición; es decir,

$$a(b+c) = ab + ac$$

ii) $\mathbb{K}$ es un grupo abeliano bajo la adición, cuyo neutro es el 0

iii) $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ es un grupo abeliano bajo la multiplicación.

Ejemplo 1.3. *$\mathbb{R}^2$ es un campo, con las operaciones de adición y multiplicación dadas por:*

$$\begin{aligned}(a,b)+(c,d) &= (a+c, b+d)\\ (a,b)(c,d) &= (ac-bd, ad+bc)\end{aligned}$$

En $(\mathbb{R}^2, +)$ el neutro es $(0,0)$ y el inverso de (a,b) es $(-a,-b)$.

En $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \cdot)$ el neutro es $(1,0)$ y el inverso de (a,b) es

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

Proposición 1.2. *Un campo $\mathbb{K}$ no tiene divisores de cero; es decir, si $a, b \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, entonces $ab \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.*

Prueba: Por contradicción:
Sean $a, b \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ y $ab = 0$.

Como a posee inverso en $\mathbb{K}$,

$$0 = a^{-1}(ab) = (a^{-1}a)b = eb = b$$

Luego, $b = 0$ en contradicción a la hipótesis. ■

OBS. 1.1. *Si en nuestro ejemplo 1.3 definimos la multiplicación coordenada a coordenada*

$$(a,b)(c,d) = (ac, bd),$$

entonces $\mathbb{R}^2$ no sería un campo.

Pues por ejemplo, $(1,0), (0,1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y $(1,0)(0,1) = (0,0)$.

Podemos identificar $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$, mediante la biyección:

$$(a,b) \in \mathbb{R}^2 \leftrightarrow a + ib \in \mathbb{C}.$$

Proposición 1.3. *Las operaciones en $\mathbb{C}$ no pueden ser extendidas a $\mathbb{R}^3$, para hacer de éste un campo.*

Prueba: Para $\mathbb{R}^3$, consideremos los vectores $1 = (1,0,0), i = (0,1,0), j = (0,0,1)$.

Así, cada elemento de $\mathbb{R}^3$ es de la forma:

$$(a,b,c) = a + ib + jc; \quad a,b,c \in \mathbb{R}.$$

Si deseamos tener una multiplicación extendida en $\mathbb{C}$, debe pasar que:

Para $a,b,c \in \mathbb{R}; i,j \in \mathbb{C} : ij = a + ib + jc \in \mathbb{R}^3$,

multiplicando por i y respetando la multiplicación en $\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} -j &= ia - b + ijc \\ &= -b + ia + (a + ib + jc)c \\ &= (ac - b) + i(a + bc) + jc^2 \end{aligned}$$

igualando término a término, $c^2 = -1$.

Pero eso está en contradicción al hecho de que $c \in \mathbb{R}$. ■

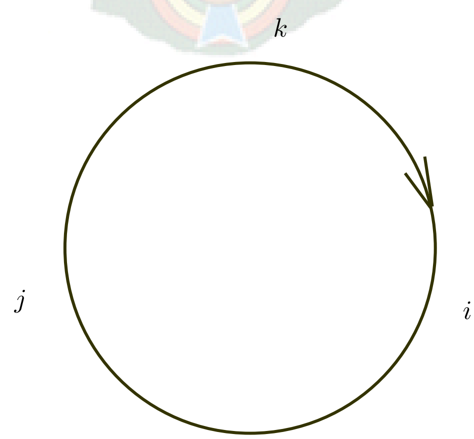
Tomemos los vectores $1 = (1,0,0,0), i = (0,1,0,0), j = (0,0,1,0), k = (0,0,0,1)$ y con estos identificaremos $\mathbb{R}^4$ con el conjunto $\mathbb{H}$ de los cuaterniones, mediante:

$$(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \leftrightarrow a + ib + jc + kd \in \mathbb{H}.$$

Consideremos la siguiente tabla:

·	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

La cual se basada en multiplicar dichos elementos en el sentido de las manecillas del reloj para obtener el signo positivo y en el sentido contrario para obtener el signo negativo, guiándonos por el siguiente gráfico:



La multiplicación en $\mathbb{H}$ está dada por:

$$(a+ib+jc+kd)(x+iy+jz+kw) = (ax-by-cz-dw)+i(ay+bx+cw-dz)+j(az+cx+dy-bw)+k(aw+dx+bz-cy)$$

La adición está dada por:

$$(a+ib+jc+kd)+(x+iy+jz+kw) = (a+x)+i(b+y)+j(c+z)+k(d+w)$$

Proposición 1.4. $\mathbb{H}$ *es un campo no conmutativo.*

Prueba: Por la definición de la suma en $\mathbb{H}$, tenemos la clausura.

El neutro de $(\mathbb{H},+)$ es $0 = 0+i0+j0+k0$.

El inverso de $a+ib+jc+kd$ en $(\mathbb{H},+)$ es $-a-ib-jc-kd$.

Como $(\mathbb{R},+)$ es un grupo conmutativo y asociativo, también lo es $(\mathbb{H},+)$.

Así, se cumple $ii)$ de la definición 1.3.

Por definición de la multiplicación, tenemos la clausura en $(\mathbb{H},\cdot)$.

Veamos cuál es el neutro:
$(a+ib+jc+kd)(x+iy+jz+kw) = (a+ib+jc+kd)$, entonces:

$$\begin{cases} ax-by-cz-dw = a \\ ay+bx+cw-dz = b \\ az+cx-bw+dy = c \\ aw+dx+bz-cy = d \end{cases}$$

Sumando todas las ecuaciones e igualando,

$$a(x+y+z+w)+b(-y+x-w+z)+c(-z+w+x-y)+d(-w-z+x+y) = a+b+c+d$$

Entonces,

$$\begin{cases} x+y+z+w = 1 \\ -y+x-w+z = 1 \\ -z+w+x-y = 1 \\ -w-z+x+y = 1 \end{cases}$$

Sumando las cuatro ecuaciones: $4x = 4 \Rightarrow x = 1$.

Sumando la primera y la última: $2x+2y = 2 \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0$.

Sumando la primera y la segunda: $2x+2z = 2 \Rightarrow 2z = 0 \Rightarrow z = 0$.

Sumando la primera y la tercera: $2x + 2w = 2 \Rightarrow 2w = 0 \Rightarrow w = 0$.

Luego, $x + iy + jz + kw = 1 = 1 + i0 + j0 + k0$ es el neutro.

De la tabla, notamos que este producto no es conmutativo.

Ahora, veamos cuál es el inverso:
$(a + ib + jc + kd)(x + iy + jz + kw) = 1 + i0 + j0 + k0$, entonces:

$$\begin{cases} ax - by - cz - dw = 1 \\ ay + bx + cw - dz = 0 \\ az + cx - bw + dy = 0 \\ aw + dx + bz - cy = 0 \end{cases}$$

Multiplicando la primera igualdad por a, la segunda por b, la tercera por c, la cuarta por d y sumando todas ellas, tenemos

$$x(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = a$$

Como $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ no todos nulos, entonces la suma de sus cuadrados es no nula.

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

Análogamente con las otras variables, tenemos que el inverso es de la forma:

$$x + iy + jz + kw = \frac{a - ib - jc - kd}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

Así, la condición $iii)$ de la definición 1.3 se satisface.

Veamos ahora la asociatividad:

Es un poco laborioso el probar que:

$$(a+ib+jc+kd)[(x+iy+jz+kw)(l+im+jn+kp)] = [(a+ib+jc+kd)(x+iy+jz+kw)](l+im+jn+kp) \quad (\spadesuit)$$

Trabajemos con mucho cuidado cada una de las multiplicaciones:

$$\begin{aligned} (x + iy + jz + kw)(l + im + jn + kp) &= (xl - ym - zn - wp) + i(xm + yl + zp - wn) \\ &\quad + j(xn + zl + wm - yp) + k(xp + wl + yn - zm) \\ &= \alpha + i\beta + j\gamma + k\delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a + ib + jc + kd)(\alpha + i\beta + j\gamma + k\delta) &= (a\alpha - b\beta - c\gamma - d\delta) + i(a\beta + b\alpha + c\delta - d\gamma) \\ &\quad + j(a\gamma + c\alpha + d\beta - b\delta) + k(a\delta + d\alpha + b\gamma - c\beta) \quad (\maltese) \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}(a+ib+jc+kd)(x+iy+jz+kw) &= (ax-by-cz-dw)+i(ay+bx+cw-dz)\\ &\quad +j(az+cx+dy-bw)+k(aw+dx+bz-cy)\\ &= \mu+i\nu+j\omega+k\upsilon\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mu+i\nu+j\omega+k\upsilon)(l+im+jn+kp) &= (\mu l-\nu m-\omega n-\upsilon p)+i(\mu m+\nu l+\omega p-\upsilon n)\\ &\quad +j(\mu n+\omega l+\upsilon m-\nu p)+k(\mu p+\upsilon l+\nu n-\omega m) \quad (\clubsuit)\end{aligned}$$

Desarrollando cada término de (✠) y ($\clubsuit$), tenemos que:

$$\begin{aligned}a\alpha-b\beta-c\gamma-d\delta &= a(xl-ym-zn-wp)-b(xm+yl+zp-wn)-c(xn+zl-yp+wm)\\ &\quad -d(xp+wl+yn-zm)\\ &= (ax-by-cz-dw)l-(ay+bx+cw-dz)m-(az+cx+dy-bw)n\\ &\quad -(aw+bz+dx-cy)p\\ &= \mu l-\nu m-\omega n-\upsilon p\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a\beta+b\alpha+c\delta-d\gamma &= a(xm+yl+zp-wn)-b(-xl+ym+zn+wp)+c(xp+wl+yn-zm)\\ &\quad -d(xn+zl-yp+wm)\\ &= (ax-by-cz-dw)m+(ay+bx+cw-dz)l+(az+cx+dy-bw)p\\ &\quad -(aw+bz+dx-cy)n\\ &= \mu m+\nu l+\omega p-\upsilon n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a\gamma+c\alpha+d\beta-b\delta &= a(xn+zl-yp+wm)-c(-xl+ym+zn+wp)+d(xm+yl+zp-wn)\\ &\quad -b(xp+wl+yn-zm)\\ &= (ax-cz-dw-by)n+(az+cx+dy-bw)l+(aw+dx+bz-cy)m\\ &\quad -(ay+cw+bx-dz)p\\ &= \mu n+\omega l+\upsilon m-\nu p\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a\delta+d\alpha+b\gamma-c\beta &= a(xp+wl+yn-zm)-d(-xl+ym+zn+wp)+b(xn+zl-yp+wm)\\ &\quad -c(xm+yl+zp-wn)\\ &= (ax-dw-by-cz)p+(aw+dx+bz-cy)l+(ay+bx+cw-dz)n\\ &\quad -(az+dy+cx-bw)m\\ &= \mu p+\upsilon l+\nu n-\omega m\end{aligned}$$

Por tanto, la igualdad ($\spadesuit$) es cierta.

Así, se cumple la condición iii) de la definición 1.3.

Sean $\alpha = a + ib + jc + kd, \beta = x + iy + jz + kw, \gamma = p + iq + jr + ks \in \mathbb{H}$.

$$\begin{aligned}
\alpha(\beta+\gamma) &= (a+ib+jc+kd)[(x+iy+jz+kw)+(p+iq+jr+ks)] \\
&= a(x+iy+jz+kw)+a(p+iq+jr+ks)+ib(x+iy+jz+kw)+ib(p+iq+jr+ks) \\
&\quad +jc(x+iy+jz+kw)+jc(p+iq+jr+ks)+kd(x+iy+jz+kw)+kd(p+iq+jr+ks) \\
&= (a+ib+jc+kd)(x+iy+jz+kw)+(a+ib+jc+kd)(p+iq+jr+ks) \\
&= \alpha\beta+\alpha\gamma
\end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned}
(\beta+\gamma)\alpha &= [(x+iy+jz+kw)+(p+iq+jr+ks)](a+ib+jc+kd) \\
&= [(x+p)+i(y+q)+j(z+r)+k(w+s)](a+ib+jc+kd) \\
&= (x+p)(a+ib+jc+kd)+i(y+q)(a+ib+jc+kd)+j(z+r)(a+ib+jc+kd) \\
&\quad +k(w+s)(a+ib+jc+kd) \\
&= (x+iy+jz+kw)(a+ib+jc+kd)+(p+iq+jr+ks)(a+ib+jc+kd) \\
&= \beta\alpha+\gamma\alpha
\end{aligned}$$

Así, se cumple la condición $i)$ de la definición 1.3.

Por tanto, $\mathbb{H}$ es un campo no conmutativo. ∎

Definición 1.4. *Sean $(G,*)$ y $(H,\star)$ grupos, con $*$ y $\star$ sus respectivas operaciones binarias.*

Una función $\sigma : G \to H$ es un homomorfismo, si para cada $a, b \in G$ se tiene:

$$\sigma(a * b) = \sigma(a) \star \sigma(b)$$

Para simplificar la notación, utilizaremos el producto usual.

Proposición 1.5. *Un homomorfismo $\sigma : G \to H$ manda el neutro de G al neutro de H; y, los inversos de G a los inversos de H.*

Prueba: Sean e, e' neutros de G y H respectivamente.

$$\sigma(e) = \sigma(ee) = \sigma(e)\sigma(e)$$

Como H es grupo, entonces $\sigma(e)$ posee un único inverso, al cual lo denotaremos por h.

Luego,

$$e' = h\sigma(e) = h(\sigma(e)\sigma(e)) = (h\sigma(e))\sigma(e) = e'\sigma(e) = \sigma(e).$$

Para $a \in G$, tenemos:

$$\sigma(a)\sigma(a^{-1}) = \sigma(aa^{-1}) = \sigma(e) = e'$$
$$\sigma(a^{-1})\sigma(a) = \sigma(a^{-1}a) = \sigma(e) = e'$$

Así, $\sigma(a^{-1}) = [\sigma(a)]^{-1}$. ∎

Definición 1.5. *Sea $\sigma : G \to H$ un homomorfismo.*

i) *σ es un monomorfismo, si es inyectiva; es decir, dados $a, b \in G$, $\sigma(a) = \sigma(b)$ implica que $a = b$.*

ii) *σ es un epimorfismo, si es sobreyectiva; es decir,*

$$\sigma(G) = H.$$

iii) *σ es un isomorfismo, si es inyectiva y sobreyectiva.*

Ejemplo 1.4. *Consideremos $a \in \mathbb{R}$ $a > 1$, $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}/x > 0\}$ grupo bajo la multiplicación y $\mathbb{R}$ el grupo aditivo de los números reales.*

Veamos que la siguiente función es un isomorfismo.

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto a^x \end{aligned}$$

$\sigma(x+y) = a^{x+y} = a^x a^y = \sigma(x)\sigma(y)$ *Así, σ es un homomorfismo.*

Si $\sigma(x) = \sigma(y)$, entonces $a^x = a^y$.

Multiplicando por el inverso de a^y, $a^{x-y} = a^0$

Como $a \neq 0$, $x - y = 0$, entonces $x = y$.

Así, σ es inyectiva.

Recordemos que si $y \in \mathbb{R}^+$ y $a > 1$, $x = \log_a y = \frac{\log y}{\log a}$, implica que $a^x = y$.

Si $y \in \mathbb{R}^+$, entonces existe $x = \log_a y \in \mathbb{R}$ tal que $\sigma(x) = a^x = y$; es decir, σ es sobreyectiva.

De acuerdo a iii) de la definición 1.5, σ es un isomorfismo.

Definición 1.6. *Sean $\mathbb{K}$ un campo y V un grupo abeliano respecto a la adición.*

Decimos que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, si para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ y todo $v \in V$, existe un elemento $\alpha v \in V$ que satisface:

a) $\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$ $;\alpha \in \mathbb{K}, v_1, v_2 \in V$

b) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ $;\alpha, \beta \in \mathbb{K}, v \in V$

c) $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$ $;\alpha, \beta \in \mathbb{K}, v \in V$

d) $1v = v$ *;para todo $v \in V$ y 1 elemento neutro de $\mathbb{K}$*

OBS. 1.2. *Para* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, *sea* $\mathbb{K}^n = \{(x_1, ..., x_n)/x_i \in \mathbb{K}, i = 1, ..., n\}$.

Sean $x = (x_1, ..., x_n)$ *e* $y = (y_1, ..., y_n)$ *elementos de* $\mathbb{K}^n$.

Definimos entonces:

$$\begin{aligned} + : \ \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n &\to \ \mathbb{K}^n \\ (x, y) &\mapsto \ x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) \end{aligned}$$

Notemos que $\mathbb{K}^n$ *es un grupo abeliano, con neutro* $0 = (0, ..., 0)$ *y para* $c \in \mathbb{K}$,

$$c(x_1, ..., x_n) = (cx_1, ..., cx_n)$$

Así, con estas operaciones, $\mathbb{K}^n$ *es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$.

Definición 1.7. *Una función* $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ *es lineal, si preserva las combinaciones lineales, es decir:*

Dados $c, d \in \mathbb{K}; x, y \in \mathbb{K}^n$

$$\phi(cx + dy) = c\phi(x) + d\phi(y)$$

En particular, $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$.

Luego, una función lineal es un homomorfismo sobre el grupo aditivo $\mathbb{K}^n$.

OBS. 1.3. *Sean* $\phi : (G, +) \to (G, +)$ *un homomorfismo de grupos y* $\psi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ *una función lineal.*

Notemos que $\phi(2a) = \phi(a + a) = \phi(a) + \phi(a) = 2\phi(a)$ *y* $\psi(2a) = 2\psi(a)$.

Es decir, ambos pueden satisfacer la linealidad pero debemos tener cuidado sobre las aplicaciones que se manejan.

Proposición 1.6. *Si* $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ *y* $\psi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ *son funciones lineales, entonces su composición* $\psi \circ \phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ *también lo es.*

Prueba: Sean $c, d \in \mathbb{K}$ y $x, y \in \mathbb{K}^n$.

Usando la hipótesis de que ambas son lineales,

$$\begin{aligned} (\psi \circ \phi)(cx + dy) &= \psi(\phi(cx + dy)) \\ &= \psi(c\phi(x) + d\phi(y)) \\ &= c\psi(\phi(x)) + d\psi(\phi(y)) \\ &= c(\psi \circ \phi)(x) + d(\psi \circ \phi)(y) \end{aligned}$$

■

Recordemos del Álgebra Lineal, que dado $X = \{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., n\}$, entonces

$$\mathcal{F}(X, \mathbb{K}) = \{f : X \to \mathbb{K}/\text{continua}\} = M(m \times n, \mathbb{K}),$$

para $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$.

Definición 1.8. *Denotamos por $M_n(\mathbb{K})$ al conjunto de todas las matrices cuadradas de tamaño $n \times n$ cuyas entradas están en $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$.*

Fijemos la matriz $M \in M_n(\mathbb{K})$, la denotamos por como :

$$M = (m_{ij}); \quad m_{ij} \in \mathbb{K}, i, j = 1, ..., n.$$

Podemos tomar la siguiente función:

$$\begin{aligned} \phi(M): \ \mathbb{K}^n &\to \ M_{1\times n}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n \\ (x_1, ..., x_n) &\mapsto \ \phi(M)(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_n)(m_{ij}) \end{aligned}$$

Es decir, estamos multiplicando una matriz $1 \times n$ por una matriz $n \times n$, resultando así una matriz $1 \times n$, o lo que es lo mismo obtenemos una n-upla.

Proposición 1.7. *$\phi(M)$ es una función lineal:*

Prueba: Sean $c, d \in \mathbb{K}; x, y \in \mathbb{K}^n$.

$$\begin{aligned} \phi(M)(cx + dy) &= ((cx_1, ..., cx_n) + (dy_1, ..., dy_n))(m_{ij}) \\ &= (cx_1, ..., cx_n)(m_{ij}) + (dy_1, ..., dy_n)(m_{ij}) \\ &= c(x_1, ..., x_n)(m_{ij}) + d(y_1, ..., y_n)(m_{ij}) \\ &= c\phi(M)(x) + d\phi(M)(y) \end{aligned}$$

■

OBS. 1.4.

1. *Usamos vectores fila en lugar de vectores columna para no cambiar nada cuando $\mathbb{K} = \mathbb{H}$, ya que $\mathbb{H}$ es un campo no conmutativo.*

2. *Si usamos vectores columna en lugar de vectores fila y los multiplicamos por matrices a izquierda, no siempre son funciones lineales.*

   Por ejemplo, si tomamos $M = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{H}), c = j, d = i \in \mathbb{H}, x = y = (1, 1) \in \mathbb{H}^2$

$$\phi(M)(cx + dy) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j + i \\ j + i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ij + i^2 \\ j^2 + ji \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k - 1 \\ -1 - k \end{pmatrix}$$

Sin embargo,

$$
\begin{aligned}
c\phi(M)(x) + d\phi(M)(y) &= j\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= j\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ji \\ j^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i^2 \\ ij \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -k \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -k-1 \\ -1+k \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

3. *Sea $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ una función lineal y $M \in M_n(\mathbb{K})$ la matriz fijada anteriormente.*

   Notemos que:

$$
\begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(1,0,...,0) \\ \phi(0,1,...,0) \\ \vdots \\ \phi(0,0,...,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(M)(1,0,...,0) \\ \phi(M)(0,1,...,0) \\ \vdots \\ \phi(M)(0,0,...,1) \end{pmatrix}
$$

   Es decir, a partir de las definiciones de las funciones lineales ϕ y $\phi(M)$ podemos encontrar la matriz M de manera única tal que $\phi(M)(e_i) = \phi(e_i)$, donde cada e_i con $i \in \{1, 2, ..., n\}$ son los vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$.

   Es decir, formamos la matriz M cuya i-ésima fila es $\phi(e_i)$.

Definición 1.9. *Decimos que $(V, +, \cdot)$ es un álgebra, si $(V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial con multiplicación distributiva respecto a la adición*

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(B + C)A = BA + CA$$

y además con multiplicación asociativa; es decir,

$$A(BC) = (AB)C.$$

Donde $A, B, C \in V$.

OBS. 1.5. *Cuando usamos la palabra álgebra, siempre nos referiremos a una que posea neutro multiplicativo a ambos lados.*

Ejemplo 1.5. *$(M_n(\mathbb{K}), \cdot, +)$ es un álgebra; donde la matriz cuadrada de tamaño $n \times n$ llamada matriz identidad I, es el neutro multiplicativo.*

Definición 1.10. *Sea G un álgebra. Decimos que $x \in G$ es unidad, si existe algún $y \in G$ tal que*

$$xy = 1 = yx.$$

Es decir, si este elemento tiene inverso multiplicativo.

Proposición 1.8. *Sean G un álgebra con una multiplicación asociativa y $U \subset G$ el conjunto de unidades en G, entonces U es un grupo bajo la multiplicación.*

Prueba:

(i) $x, y \in U$, entonces $x, y \in G$ y existen $a, b \in G$ tales que $xa = 1 = ax, yb = 1 = by$.

$$(xy)(ba) = x(yb)a = x1a = xa = 1;$$

y,

$$(ba)(xy) = b(ax)y = b1y = by = 1$$

Así, $xy \in U$.

(ii) Sean $x, y, z \in U$, entonces existen $a, b, c \in G$ tales que $xa = 1 = ax$, $yb = 1 = by$ y $zc = 1 = cz$.

$[(xa)(yb)](zc) = (1 \cdot 1)1 = 1(1 \cdot 1) = (xa)[(yb)(zc)]$,

$[(ax)(by)](cz) = (1 \cdot 1)1 = 1(1 \cdot 1) = (ax)[(by)(cz)]$.

(ii) Denotemos por 1 al neutro multiplicativo de G, entonces $1 \in U$ ya que existe $1 \in G$ tal que $1{\cdot}1 = 1 = 1{\cdot}1$

(iii) Por la definición, $x^{-1} = a$ para $x \in U$.

Luego, $x^{-1} \in U$ ya que existe $x \in G$ tal que $xx^{-1} = xa = 1 = ax = x^{-1}x$

Por tanto, U es un grupo bajo la multiplicación. ∎

Definición 1.11. *Sean G un grupo y H subconjunto de G.*
Decimos que H es un subgrupo de G, si H es también un grupo con la operación de G.

Proposición 1.9. *H es un subgrupo del grupo G, si $H \subset G$ y además satisface:*

a) $x, y \in H \Rightarrow xy \in H$

b) *el elemento identidad está en H*

c) $x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$

Prueba:

b) $x \in H, x^{-1} \in H$, entonces $e = xx^{-1} \in H$

c) $e, x \in H$, entonces $x^{-1} = ex^{-1} \in H$

a) $x, y \in H$, entonces $xy = x(y^{-1})^{-1} \in H$. ∎

Proposición 1.10. *Sea $\phi : G \to H$ un homomorfismo de grupos. Entonces $\phi(G)$ es subgrupo de H.*

Prueba: Denotemos por e_G y e_H a los neutros respectivos de G y H.

Como ϕ es un homomorfismo, $\phi(e_G) = e_H$, entonces $e_H \in \phi(G)$.

Si $x, y \in \phi(G)$, entonces existen $a, b \in G$ tales que $\phi(a) = x$, $\phi(b) = y$.

De donde, $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b) = xy$, entonces $xy \in \phi(G)$.

Sea $x \in \phi(G)$, entonces existe $a \in G$ tal que $\phi(a) = x$.

Luego $[\phi(a)]^{-1} = x^{-1}$; de donde, $\phi(a^{-1}) = [\phi(a)]^{-1} = x^{-1}$ implica que $x^{-1} \in \phi(G)$.

Por tanto $\phi(G)$ es subgrupo de H. ■

Si $\phi : G \to H$ es un homomorfismo de grupos inyectivo, entonces $\phi : G \to \phi(G)$ es un homomorfismo biyectivo (isomorfismo).

Luego, podemos considerar G como subgrupo de H.

Consideremos ahora la siguiente función:

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{H} &\to M_2(\mathbb{C}) \\ (x + iy + jz + kw) &\mapsto \begin{pmatrix} x + iy & -z - iw \\ z - iw & x - iy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lema 1.1. *La aplicación ψ dada arriba satisface:*

a) $\psi(\alpha + \beta) = \psi(\alpha) + \psi(\beta)$

b) $\psi(\alpha\beta) = \psi(\alpha)\psi(\beta)$

c) ψ *es inyectiva.*

Prueba:

a)

$$\begin{aligned} \psi((a + ib + jc + kd) + (x + iy + jz + kw)) &= \psi((a + x) + i(b + y) + j(c + w) + k(d + w)) \\ &= \begin{pmatrix} (a + x) + i(b + y) & -(c + z) - i(d + w) \\ (c + z) - i(d + w) & (a + x) - i(b + y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a + ib & -c - id \\ c - id & a - ib \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x + iy & -z - iw \\ z - iw & x - iy \end{pmatrix} \\ &= \psi(a + ib + jc + kd) + \psi(x + iy + jz + kw) \end{aligned}$$

b) Sean $q = a + ib + jc + kd$ y $r = x + iy + jz + kw$, entonces:

$$\begin{aligned}
\psi(qr) &= \psi((ax - by - cz - dw) + i(ay + bx + cw - dz) + j(az + cx + dy - bw) + k(aw + dx + bz - cy)) \\
&= \begin{pmatrix} (ax - by - cz - dw) + i(ay + bx + cw - dz) & -(az + cx + dy - bw) - i(aw + dx + bz - cy) \\ (az + cx + dy - bw) - i(aw + dx + bz - cy) & (ax - by - cz - dw) - i(ay + bx + cw - dz) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a + ib & -c - id \\ c - id & a - ib \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + iy & -z - iw \\ z - iw & x - iy \end{pmatrix} \\
&= \psi(q)\psi(r)
\end{aligned}$$

c) $\psi(a + ib + jc + kd) = \psi(x + iy + jz + kw)$, entonces $\begin{pmatrix} a + ib & -c - id \\ c - id & a - ib \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + iy & -z - iw \\ z - iw & x - iy \end{pmatrix}$

de donde, $a + ib + jc + kd = x + iy + jz + kw$. ■

Con la definición de ψ, vamos a construir un homomorfismo inyectivo

$$\begin{aligned}
\Psi :\ GL(n, \mathbb{H}) &\to\ GL(2n, \mathbb{C}) \\
A &\mapsto\ (\psi(a_{ij}))
\end{aligned}$$

Es decir, a la matriz $A \in GL(n, \mathbb{H})$ le hacemos corresponder una matriz compleja de $2n \times 2n$, cuya ij-ésima entrada es un bloque de 2×2 determinado por $\psi(a_{ij})$.

Con la ayuda de este isomorfismo inyectivo, asignaremos como el determinante de $A \in GL(n, \mathbb{H})$ el determinante de $\Psi(A)$, ya que en $\mathbb{H}$ no está definido el determinante.

Para ello, tenemos el siguiente:

Lema 1.2. $\Psi(AB) = \Psi(A)\Psi(B)$.

Prueba: Sean $A = (\alpha_{ij})$, $B = (\beta_{ij}) \in GL(n, \mathbb{H})$, entonces

$$(AB)_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{1j} + ... + \alpha_{in}\beta_{nj}.$$

Por el lema 1.1,

$$(\psi(AB)_{ij}) = \psi(\alpha_{i1})\psi(\beta_{1j}) + ... + \psi(\alpha_{in})\psi(\beta_{nj}).$$

Entonces, $\Psi(AB) = \Psi(A)\Psi(B)$. ■

Mostraremos más adelante que $(GL(n, \mathbb{H}), \cdot)$ es un grupo, así dado $A \in GL(n, \mathbb{H})$ existe $A^{-1} \in GL(n, \mathbb{H})$ tal que $AA^{-1} = I = A^{-1}A$.

Aplicando Ψ y por el lema 1.2,

$$\Psi(A)\Psi(A^{-1}) = \Psi(AA^{-1}) = \Psi(I) = I = \Psi(A^{-1}A) = \Psi(A^{-1})\Psi(A)$$

Luego, $[\Psi(A)]^{-1} = \Psi(A^{-1})$.

Como $\Psi(A)$ posee inversa, entonces es no singular y como $\det(\Psi(A)\Psi(A^{-1})) = \det(\Psi(I)) = \det(I) = 1$, entonces $\det(\Psi(A)) \neq 0$.

Recíprocamente, supongamos que $\det(\Psi(A)) \neq 0$, luego $\Psi(A)$ posee inversa $[\Psi(A)]^{-1}$.

Por la proposición 1.10, $\Psi(GL(n, \mathbb{H}))$ es subgrupo de $GL(2n, \mathbb{C})$; entonces tenemos:

$$[\Psi(A)]^{-1} \in \Psi(GL(n, \mathbb{H})).$$

De aquí, existe $A^{-1} \in GL(n, \mathbb{H})$ tal que $\Psi(A^{-1}) = [\Psi(A)]^{-1}$.

$$\Psi(A)\Psi(A^{-1}) = \Psi(I) = I = \Psi(A^{-1})\Psi(A).$$

Por el lema 1.2 y como Ψ es inyectiva, lo anterior implica que $AA^{-1} = I = A^{-1}A$.

Luego, $A \in GL(n, \mathbb{H})$ posee inversa y así es no singular.

Además $\det(AA^{-1}) = \det(I) = I$, entonces $\det(A) \neq 0$.

De este modo; como afirmamos antes, podemos asignar como el determinante de $\Psi(A)$ al determinante de A.

Definición 1.12. *Con la multiplicación usual de matrices sobre el álgebra $M_n(\mathbb{K})$ para $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, el grupo de unidades en este álgebra se define por:*

$$GL(n, \mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) / \det(A) \neq 0\},$$

y es llamado el Grupo General Lineal.

Una matriz de 1×1 sobre $\mathbb{K}$ es simplemente un elemento de $\mathbb{K}$, por esto

$$GL(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$GL(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$GL(1, \mathbb{H}) = \mathbb{H} \setminus \{0\}$$

En la definición 1.12 tenemos que tener cuidado al asignar una determinante en $M_n(\mathbb{H})$.

Por ejemplo si para $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{H})$ asignamos $\det(A) = \alpha\delta - \beta\gamma$, entonces no podríamos expresar $GL(n, \mathbb{H})$ como en la definición citada.

Pues, $\det \begin{pmatrix} i & j \\ i & j \end{pmatrix} = ij - ji = k - (-k) = 2k \neq 0$, pero posee filas linealmente dependientes por lo que no es invertible.

Por esto, diremos que $A \in M_n(\mathbb{H})$ tiene inversa si, y sólamente si, $\det(A) \neq 0$ (para una determinante apropiada).

Proposición 1.11. $(GL(n, \mathbb{K}), \cdot)$ *es un grupo, para* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$.

Prueba: Sean $A, B \in GL(n, \mathbb{K})$, entonces

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \neq 0$$

Así, $AB \in GL(n, \mathbb{K})$.

Ya que la matriz $I \in M_n(\mathbb{K})$ satisface $A = AI = IA$, para todo $A \in M_n(\mathbb{K})$ y tiene determinante no nulo, entonces I es el neutro multiplicativo de $GL(n, \mathbb{K})$.

Como $A, A^{-1} \in M_n(\mathbb{K})$ son tales que $AA^{-1} = I = A^{-1}A$, entonces $\det(A^{-1})\det(A) = \det(I) = 1$; es decir, $\det(A^{-1}) \neq 0$. Así, $A^{-1} \in GL(n, \mathbb{K})$.

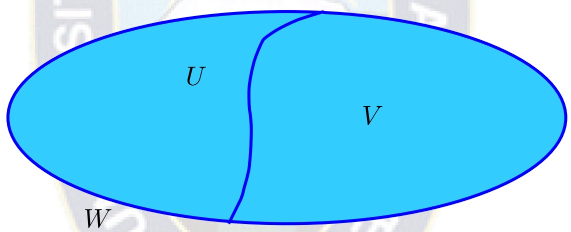
Sean $A, B, C \in GL(n, \mathbb{K})$, entonces se verifica la asociatividad ya que

$$[\det(A)\det(B)]\det(C) = \det((AB)C) = \det(A(BC)) = \det(A)[\det(B)\det(C)]$$

Por tanto, $(GL(n, \mathbb{K}), \cdot)$ es un grupo. ■

Definición 1.13. *Sea W un espacio topológico no vacío.*
Una separación de W es un par U, V de subconjuntos abiertos y no vacíos de W tales que

$$W = U \cup V; \;\; U \cap V = \emptyset.$$



W es conexo, si no existe separación.

Teorema 1.1. *De acuerdo a la definición 1.13, $GL(n, \mathbb{R})$ no es conexo, sin embargo $GL(n, \mathbb{K})$ es conexo.*

Prueba: Veamos la prueba para $GL(n, \mathbb{R})$:

Recordemos que

$$GL^+(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) / \det(A) > 0\}$$
$$GL^-(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) / \det(A) < 0\}$$

Ambos son subconjuntos no vacíos de $GL(n, \mathbb{R})$, pues las matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in GL^+(n, \mathbb{R})$ y

$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in GL^-(n, \mathbb{R})$.

De Cálculo, la función determinante $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es continua y por tanto la imagen inversa de un conjunto abierto es abierto, entonces

$$(\det)^{-1}((0,\infty)) = GL^+(n,\mathbb{R}), \quad (\det)^{-1}((-\infty,0)) = GL^-(n,\mathbb{R}).$$

Es decir, existen subconjuntos $GL^+(n,\mathbb{R})$ y $GL^-(n,\mathbb{R})$ no vacíos, abiertos y disjuntos de $GL(n,\mathbb{R})$ tales que

$$GL(n,\mathbb{R}) = GL^+(n,\mathbb{R}) \cup GL^-(n,\mathbb{R}).$$

Por tanto, $GL(n,\mathbb{R})$ no es conexo.

Veamos la prueba para $GL(n,\mathbb{C})$:

Sean $A, B \in GL(n,\mathbb{C})$; es decir, $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ tales que $\det A \neq 0$ y $\det B \neq 0$.

Consideremos la aplicación

$$P : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$$

dada por $P(z) = \det(zB + (1-z)A)$, para $z \in [0,1]$.

$$P(0) = \det A \neq 0, \quad P(1) = \det B \neq 0$$

Por la continuidad del determinante, $P(z) \neq 0$ para todo $z \in [0,1]$.

Como P es un polinomio en z, denotemos por $z_1, ..., z_r$ a sus raíces.

Existe entonces una aplicación continua

$$e : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{z_1, ..., z_r\}$$

tal que $e(0) = 0$ y e(1)=1.

Es decir, e es un camino en $\mathbb{C}$ que une 0 con el 1 pero que no pasa por ninguna de las raíces de P.

Ahora, la aplicación

$$c : [0,1] \to M_n(\mathbb{C})$$

dada por $c(t) = e(t)B + (1-e(t))A$ es continua.

Notemos que $\det(c(t)) = P(e(t)) \neq 0$.

Entonces $c : [0,1] \to GL(n,\mathbb{C})$ es un camino que une $A = c(0)$ con $B = c(1)$.

Así, $GL(n,\mathbb{C})$ es conexo por camino.

Recordemos que todo espacio X conexo por caminos es conexo, pues:

Supongamos que $X = A \cup B$ es una separación de X y sea $f : [0, 1] \to X$un camino.

Como $[0, 1]$ es conexo, entonces $f([0, 1])$ es conexo y debe estar completamente contenido en A o en B.

Por tanto, no existen caminos que unan puntos de A con los puntos de B, lo cual contradice al hecho de que X es conexo por caminos.

Por tanto, $GL(n, \mathbb{C})$ es conexo. $\blacksquare$

Capítulo 2

Grupos Ortogonales

Desarrollaremos las propiedades del Producto Interno en los espacios vectoriales que nos interesan, para dar una clasificación de otros conjuntos de matrices relacionada a este producto.

A la vez, daremos clasificación a los subconjuntos de los grupos de matrices dados previamente e induciremos un isomorfismo entre el Grupo Simpléctico y uno de los Grupos Especiales Ortogonales que nos será de gran utilidad en la parte central de este trabajo.

2.1. Productos internos:

Para $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, tenemos una "noción de conjugación" dada por:

i) $x \in \mathbb{R}$, entonces $\overline{x} = x$

ii) $x = a + ib \in \mathbb{C}$, entonces $\overline{x} = \overline{a + ib} = a - ib$

iii) $x = a + ib + jc + kd \in \mathbb{H}$, entonces $\overline{x} = \overline{a + ib + jc + kd} = a - ib - jc - kd$

En todos los casos se verifica que $\overline{\overline{x}} = x$.

Veamos qué ocurre con $\overline{x + y}$ y con $\overline{xy}$:

a) Para $\overline{x + y}$:

   i) Sean $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $\overline{x} = x, \overline{y} = y$. Así $\overline{x + y} = x + y = \overline{x} + \overline{y}$

   ii) Sean $x = a + ib, y = u + iv \in \mathbb{C}$, entonces:

$$\overline{x + y} = \overline{(a + ib) + (u + iv)} = \overline{(a + u) + i(b + v)} = (a + u) - i(b + v) = \overline{x} + \overline{y}$$

   iii) Sean $x = a + ib + jc + kd, y = m + in + jp + kq \in \mathbb{H}$, entonces:

$$\overline{x + y} = \overline{(a + m) + i(b + n) + j(c + p) + k(d + q)} = (a+m) - i(b+n) - j(c+p) - k(d+q) = \overline{x} + \overline{y}$$

Es decir, el conjugado de la suma es suma de conjugados.

b) Para $\overline{xy}$:

i) Sean $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $\overline{xy} = xy = \overline{x} \cdot \overline{y}$

ii) Sean $x = a + ib, y = u + iv \in \mathbb{C}$, entonces:

$$\overline{xy} = \overline{(a+ib)(u+iv)} = \overline{(au-bv)+i(av+bu)} = (au-bv) - i(av+bu) = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

iii) Sean $x = a + ib + jc + kd, y = m + in + jp + kq \in \mathbb{H}$, entonces:
$xy = (am - bn - cp - dq) + i(an + bm + cq - dp) + j(ap + cm + dn - bq) + k(aq + dm + bp - cn)$

$\overline{xy} = (am - bn - cp - dq) - i(an + bm + cq - dp) - j(ap + cm + dn - bq) - k(aq + dm + bp - cn)$
Pero notemos que:

$$\begin{aligned}
\overline{y} \cdot \overline{x} &= [m - (in + jp + kq)][a - (ib + jc + kd)] \\
&= am - ibm - jcm - kdm - ian - jap - kaq - bn - cp - dq + kcn - jdn - kbp + idp + jbq - icq \\
&= (am - bn - cp - dq) - i(an + bm + cq - dp) - j(ap + cm + dn - bq) - k(aq + dm + bp - cn) \\
&= \overline{xy}
\end{aligned}$$

Es decir, en $\mathbb{H}$ la conjugación NO es conmutativa.

Con esto, vamos a introducir la noción de producto interno y con la ayuda de las propiedades de esta caracterizaremos el Grupo Ortogonal.

Definición 2.1. *Sea $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$. El producto interno es una aplicación*

$$\langle , \rangle : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$$

dada por $\langle x, y\rangle = \langle (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)\rangle = x_1\overline{y}_1 + ... + x_n\overline{y}_n$.

Proposición 2.1. *Sea $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ con producto interno $\langle , \rangle$.*
Para $a \in \mathbb{K}$, $x, y, z \in \mathbb{K}^n$, $\langle , \rangle$ tiene las siguientes propiedades:

1) $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$

2) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

3) $a\langle x, y\rangle = \langle ax, y\rangle, \quad \langle x, ay\rangle = \langle x, y\rangle\overline{a}$

4) $\overline{\langle x, y\rangle} = \langle y, x\rangle$

5) $\langle x, x\rangle \ \geq 0, \quad \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = (0, ..., 0)$

6) Si $e_1, ..., e_n$ son una base estándar para $\mathbb{K}^n$; donde $e_i = (0, ..., 1_i, ..., 0)$, entonces

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1; & i = j \\ 0; & i \neq j \end{cases}$$

donde, δ_{ij} es llamado el delta de Kronecker.

7) El producto interno es no degenerado; es decir,

$$\langle x, y\rangle = 0; \quad \textit{para todo} \;\; y \Rightarrow x = (0, ..., 0)$$

$$\langle x, y\rangle = 0; \quad \textit{para todo} \;\; x \Rightarrow y = (0, ..., 0)$$

Prueba: Por definición, algunos de estos incisos se deducen.

Vamos a demostrar los incisos que nos interesan.

3)

$$\begin{aligned} a\langle x, y\rangle &= a(x_1\overline{y}_1 + ... + x_n\overline{y}_n) \\ &= (ax_1)\overline{y}_1 + ... + (ax_n)\overline{y}_n \\ &= \langle ax, y\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x, ay\rangle &= x_1\overline{(ay_1)} + ... + x_n\overline{(ay_n)} \\ &= x_1\overline{y}_1\overline{a} + ... + x_n\overline{y}_n\overline{a} \\ &= (x_1\overline{y}_1 + ... + x_n\overline{y}_n)\overline{a} \\ &= \langle x, y\rangle\overline{a} \end{aligned}$$

5) Para esto, consideramos las biyecciones:

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2, \quad a + ib \leftrightarrow (a, b)$$

$$\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4, \quad a + ib + jc + kd \leftrightarrow (a, b, c, d)$$

Así, consideramos $\langle , \rangle : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, para $m = n$, $m = 2n$ ó $m = 4n$.

Sea $x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$, entonces como $\bar{a} = a$ para $a \in \mathbb{R}$ y por la definición del producto interno $\langle x, x\rangle = x_1\bar{x}_1 + ... + x_m\bar{x}_m = x_1^2 + ... + x_m^2 \geq 0$.

Sea ahora $x = (0, ..., 0) \in \mathbb{R}^m$, por lo antes mostrado;
$x = 0$ si y sólo si $\langle x, x\rangle = 0^2 + ... + 0^2 = 0$.

7) Por contradicción; $\langle x, y\rangle = 0$, para todo y y $x \neq 0$.

Si $x \neq 0$, entonces por 5) tenemos que $\langle x, x\rangle > 0$.

Pero existe $y = x \neq 0$ tal que $\langle x, y\rangle > 0$, en contradicción a la hipótesis.

El otro caso es análogo. ■

Definición 2.2. *Sea $x \in \mathbb{K}^n$. Decimos que la longitud de x está dada por:*

$$|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Definición 2.3. *Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$, para $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, cuyas entradas las denotamos por a_{ij}, entonces:*

1) *El conjugado de A; denotado por $\overline{A}$, se obtiene al reemplazar a_{ij} por $\overline{a}_{ij}$.*

2) *La transpuesta de A; denotada por A^t, es obtenida al reemplazar a_{ij} por a_{ji}.*

Afirmación 1. *Estas dos operaciones conmutan; es decir, $\overline{A^t} = \overline{A}^t$.*

En efecto, sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$.

$$\overline{A}^t = \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{12} & \cdots & \overline{a}_{1n} \\ \overline{a}_{21} & \overline{a}_{22} & \cdots & \overline{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a}_{n1} & \overline{a}_{n2} & \cdots & \overline{a}_{nn} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{21} & \cdots & \overline{a}_{n1} \\ \overline{a}_{12} & \overline{a}_{22} & \cdots & \overline{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a}_{1n} & \overline{a}_{2n} & \cdots & \overline{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad y, \quad \overline{A^t} = \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{21} & \cdots & \overline{a}_{n1} \\ \overline{a}_{12} & \overline{a}_{22} & \cdots & \overline{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a}_{1n} & \overline{a}_{2n} & \cdots & \overline{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

Así, $\overline{A^t} = \overline{A}^t$. ∎

Proposición 2.2. *Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{K}^n$ y $A \in M_n(\mathbb{K})$, tenemos que:*

$$\langle xA, y\rangle = \langle x, y\overline{A}^t\rangle$$

Prueba: Sean $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{K}^n$ y $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$, entonces:

$$xA = (x_1, ..., x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (x_1a_{11} + ... + x_na_{n1}, ..., x_1a_{1n} + ... + x_na_{nn})$$

$$y\overline{A}^t = (y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \cdots & \bar{a}_{n1} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix} = (y_1\overline{a}_{11} + ... + y_n\overline{a}_{1n}, ..., y_1\overline{a}_{n1} + ... + y_n\overline{a}_{nn})$$

Luego,

$$\begin{aligned}\langle xA, y\rangle &= (x_1a_{11}+...+x_na_{n1})\overline{y}_1+...+(x_1a_{1n}+...+x_na_{nn})\overline{y}_n\\ &= x_1(a_{11}\overline{y}_1+...+a_{1n}\overline{y}_n)+...+x_n(a_{n1}\overline{y}_1+...+a_{nn}\overline{y}_n)\\ &= \langle x, y\overline{A}^t\rangle.\end{aligned}$$

■

Definición 2.4. *Sea* $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}\}$.
El Grupo Ortogonal está dado por:

$$O(n,\mathbb{K})=\{A\in M_n(\mathbb{K})/\langle xA,yA\rangle=\langle x,y\rangle;\quad \textit{para todo}\ \ x,y\in\mathbb{K}^n\}.$$

Afirmación 2.

$$O(n,\mathbb{K})=\{A\in M_n(\mathbb{K})/A\overline{A^t}=I\}$$

donde denotamos $A^*=\overline{A}^t$.

En efecto, sean $A\in O(n,\mathbb{K})$ y $x,y\in\mathbb{K}^n$.

$$\begin{aligned}AA^*=I &\Leftrightarrow xAA^*y^*=xIy^*\\ &\Leftrightarrow xA(yA)^*=xy^*\\ &\Leftrightarrow \langle xA,yA\rangle=\langle x,y\rangle\end{aligned}$$

■

Proposición 2.3. $O(n,\mathbb{K})$ *es un grupo bajo la multiplicación.*

Prueba: Sean $A,B\in O(n,\mathbb{K})$, $x,y\in\mathbb{K}^n$, entonces:

$$\langle x(AB),y(AB)\rangle=\langle (xA)B,(yA)B\rangle=\langle xA,yA\rangle=\langle x,y\rangle.$$

Así, $AB\in O(n,\mathbb{K})$.

$I\in O(n,\mathbb{K})$, pues $\langle xI,yI\rangle=\langle x,y\rangle$.

Si $A\in O(n,\mathbb{K})$, entonces por la propiedad 6) de la proposición 2.1,

$$\langle e_iA,e_jA\rangle=\langle e_i,e_j\rangle=\delta_{ij}=\begin{cases}1; & i=j\\ 0; & i\neq j\end{cases}.$$

Es decir, e_iA es la i-ésima fila de A, entonces $\langle e_iA,e_jA\rangle$ es la ij-ésima entrada del producto $A\overline{A}^t$.

Así, $A\overline{A}^t=I=\overline{A}^tA$; ya que $(\overline{\overline{A}^tA})^t=(\overline{A}A^t)^t=A\overline{A}^t=I$.

Luego, $\overline{A}^t=A^{-1}$ a izquierda y a derecha.

Finalmente, para $A \in O(n, \mathbb{K}$

$$\langle xA^{-1}, yA^{-1}\rangle = \langle xA^{-1}A, yA^{-1}A\rangle = \langle xI, yI\rangle = \langle x, y\rangle$$

Entonces $A^{-1} \in O(n, \mathbb{K})$.

Por tanto, $O(n, \mathbb{K})$ es un grupo bajo la multiplicación. ∎

NOTA 2.1. *Tenemos la siguiente notación:*

a) Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $O(n, \mathbb{R}) := O(n)$ *es llamado Grupo Ortogonal.*

b) Para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $O(n, \mathbb{C}) := U(n)$ *es llamado Grupo Unitario.*

c) Para $\mathbb{K} = \mathbb{H}$, $O(n, \mathbb{H}) := Sp(n)$ *es llamado Grupo Simpléctico.*

De Álgebra Lineal, sean E un espacio vectorial, $A : E \to E$ un operador lineal y $A^* : E \to E$ el operador adjunto de A.

A es ortogonal, si $AA^* = I = A^*A$; y,

A es unitario, si E es un espacio vectorial complejo y $A^*A = I = AA^*$.

En nuestro caso, estas definiciones están relacionadas a la definición 2.4 y a la demostración de la proposición 2.3, donde vimos que $AA^* = I = A^*A$, con $A^* = \overline{A}^t$.

Teorema 2.1. *Sea* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *y* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$.
Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

i) $A \in O(n, \mathbb{K})$

ii) $\langle e_iA, e_jA\rangle = \delta_{ij}$

iii) A envía bases ortonormales a bases ortonormales

iv) Las filas de A forman una base ortonormal

v) Las columnas de A forman una base ortonormal

vi) $\overline{A}^t = A^{-1}$

Prueba: Para la demostración de este teorema requerimos de las propiedades del producto interno.

i)⇒ ii) Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. $A \in O(n, \mathbb{K})$, entonces $\langle xA, yA\rangle = \langle x, y\rangle$.

En particular, para $x = e_i$, $y = e_j$ se tiene que:

$$\langle e_iA, e_jA\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1; & i = j \\ 0; & i \neq j \end{cases}$$

Entonces $\langle e_iA, e_jA\rangle = \delta_{ij}$.

ii)$\Rightarrow$ iii) Sabemos que $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{K}^n$.

Por la hipótesis, $\langle e_iA, e_jA\rangle = \delta_{ij}$. Así $\{e_1A, e_2A, ..., e_nA\}$ es un conjunto linealmente independiente.

De álgebra lineal, como la dimensión de $\mathbb{K}^n = n$, entonces $\{e_1A, e_2A, ..., e_nA\}$ genera $\mathbb{K}^n$.

Como $|e_iA| = 1$, entonces $\{e_1A, e_2A, ..., e_nA\}$ es una base ortonormal.

Así, A envía bases ortonormales a bases ortonormales.

iii)$\Rightarrow$ iv) Notemos que e_iA es la i-ésima fila de A, para $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Por la hipótesis, las filas de A forman una base ortonormal.

iv)$\Rightarrow$ v)De la hipótesis, notemos que $\langle e_iA, e_jA\rangle = e_iA\overline{A^t}e_j^t = \delta_{ij}$.

Aplicando la transpuesta y la conjugada a ambos lados de la igualdad,

$$e_j\overline{A^t}Ae_i^t = \delta_{ij}.$$

De donde; por definición, $\langle Ae_j^t, Ae_i^t\rangle = \delta_{ij}$.

Notemos también que $|Ae_i^t| = 1$.

Así, $\{Ae_1^t, Ae_2^t, ..., Ae_n^t\}$ es también una base ortonormal.

Dado que Ae_i^t es la i-ésima columna de A, para $i \in \{1, 2, ..., n\}$, entonces las columnas de A forman una base ortonormal.

v)$\Rightarrow$ vi) De la hipótesis, tenemos por definición,

$$\langle Ae_i^t, Ae_j^t\rangle = e_i\overline{A^t}Ae_j^t = \delta_{ij} = e_ie_j^t = e_iIe_j^t$$

También, $\langle e_iA, e_jA\rangle = \langle e_i, e_jA\overline{A^t}\rangle = \delta_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle$.

De donde, obtenemos que $\overline{A}^t = A^{-1}$ a izquierda y a derecha.

vi)$\Rightarrow$ i) De la hipótesis, tenemos las igualdades

$$A\overline{A}^t = I, \quad \text{y} \quad \overline{A}^tA = I.$$

Así, $A \in O(n, \mathbb{K})$. ∎

Definición 2.5. *Sea* $A \in M_n(\mathbb{K})$*, para* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$*.*

A *preserva longitud si, y sólo si,* $\langle xA, xA\rangle = \langle x, x\rangle$ *para todo* $x \in \mathbb{K}^n$*.*

Proposición 2.4. *Sea* $A \in M(n, \mathbb{R})$*. Entonces:*

$A \in O(n, \mathbb{R})$ *si, y sólo si,* A *preserva longitud.*

Prueba: Sea $A \in O(n, \mathbb{R})$, entonces $\langle xA, yA\rangle = \langle x, y\rangle$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

En particular, $\langle xA, xA\rangle = \langle x, x\rangle$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Por la definición 2.5, A preserva longitud.

Recíprocamente, supongamos que $A \in M_n(\mathbb{R})$ preserva longitud.

Entonces para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, se tiene

$$\langle (x+y)A, (x+y)A\rangle = \langle x+y, x+y\rangle$$

Por hipótesis y las propiedades del producto interno,

$\langle xA, xA\rangle + \langle xA, yA\rangle + \langle yA, xA\rangle + \langle yA, yA\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle$.

De donde, $\langle xA, yA\rangle + \langle yA, xA\rangle = \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle$.

Como el producto interno en los reales es conmutativo, sólo nos queda

$\langle xA, yA\rangle = \langle x, y\rangle$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Así, $A \in O(n, \mathbb{R})$. ∎

Proposición 2.5. *La proposición 2.4 también se satisface si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *ó* $\mathbb{K} = \mathbb{H}$*.*

Prueba: Por lo antes visto, $\langle (e_i + e_j)A, (e_i + e_j)A\rangle = \langle e_i + e_j, e_i + e_j\rangle$.

Por las propiedades del producto interno,

$0 = \langle e_i, e_j\rangle + \langle e_j, e_i\rangle = \langle e_iA, e_jA\rangle + \langle e_jA, e_iA\rangle$.

De donde, $\langle e_iA, e_jA\rangle = -\langle e_jA, e_iA\rangle$.

Haciendo que $x = x_ie_i + x_je_j$,

$$\langle xA, xA\rangle = \langle (x_ie_i + x_je_j)A, (x_ie_i + x_je_j)A\rangle = \langle x_ie_i + x_je_j, x_ie_i + x_je_j\rangle = \langle x, x\rangle$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \langle x_i e_i, x_j e_j \rangle + \langle x_j e_j, x_i e_i \rangle \\
&= \langle x_i e_i A, x_j e_j A \rangle + \langle x_j e_j A, x_i e_i A \rangle \\
&= x_i \langle e_i A, e_j A \rangle \bar{x}_j + x_j \langle e_j A, e_i A \rangle \bar{x}_i \\
&= x_i \langle e_i A, e_j A \rangle \bar{x}_j - x_j \langle e_i A, e_j A \rangle \bar{x}_i
\end{aligned}
$$

Si $i = j$, entonces $\langle e_i A, e_j A \rangle = 1$.

Si $i \neq j$, entonces $\langle e_i A, e_j A \rangle = 0$.

Por el Teorema 2.1, $A \in O(n, \mathbb{K})$, para $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{H}\}$. ∎

OBS. 2.1. *De acuerdo a la definición,*

1) $O(1) = \{a \in \mathbb{R}/|a| = 1\}$

2) $U(1) = \{b \in \mathbb{C}/|b| = 1\}$

3) $Sp(1) = \{c \in \mathbb{H}/|c| = 1\}$

En efecto, sean $b \in \mathbb{K}$ y $x, y \in \mathbb{K}^n$, para $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$.

$\langle xb, yb \rangle = \langle x, y \rangle$, entonces

$$x_1 b\bar{b}\overline{y}_1 + x_2 b\bar{b}\overline{y}_2 + ... + x_n b\bar{b}\overline{y}_n = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + ... + x_n\overline{y}_n$$

de donde,

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{b\bar{b}} = \sqrt{\langle b, b \rangle} = |b|.$$

Consideremos la esfera unitaria

$$\mathbb{S}^{k-1} = \{x \in \mathbb{R}^k/|x| = 1\}$$

De la observación 2.1, tenemos que

$$\mathbb{S}^0 = O(1), \quad \mathbb{S}^1 = U(1), \quad \mathbb{S}^3 = Sp(1)$$

Es decir, estas esferas son grupos bajo la multiplicación.

Proposición 2.6. *Sean* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ *y* $A \in O(n, \mathbb{K})$, *entonces:*

$$(\det A)(\det \overline{A}) = 1$$

Prueba: Por la hipótesis, $A^{-1} = \overline{A}^t$, o lo que es lo mismo $A\overline{A}^t = I$, entonces:

$(\det A)(\det \overline{A}) = (\det A)(\det \overline{A}^t) = \det(A\overline{A}^t) = \det I = 1.$ ∎

Si $A \in O(n)$ ó $A \in U(n)$, entonces $\det A \in \{-1, 1\}$.

Definición 2.6. *Recordando la definición 2.4*

$$SO(n) = \{A \in O(n)/ \det A = 1\} \text{ es el Grupo Especial Ortogonal.}$$

$$SU(n) = \{B \in U(n)/ \det B = 1\} \text{ es el Grupo Especial Unitario.}$$

Ejemplo 2.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in O(2) \setminus SO(2)$.
Pues,

$$\begin{aligned} AA^t &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= A^t A \end{aligned}$$

Pero, $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 \neq 1$.

Así, $A \in O(2)$ *y* $A \notin SO(2)$.

Además,

$$\begin{aligned} \left\langle (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, (y_1, y_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle &= \langle (x_1, -x_2), (y_1, -y_2) \rangle \\ &= x_1 \overline{y}_1 + (-x_2)(-\overline{y}_2) \\ &= \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle \end{aligned}$$

Si consideramos los vectores canónicos,

$$(1,0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (1,0)$$

y

$$(0,1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (0,-1) = -(0,1).$$

Ésta es la reflexión en $\mathbb{R}^2$ *sobre el primer eje.*

Recordando la aplicación

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{H} &\to M_2(\mathbb{C}) \\ (x + iy + jz + kw) &\mapsto \begin{pmatrix} x + iy & -z - iw \\ z - iw & x - iy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

tenemos el siguiente

Teorema 2.2. *La función* ψ *induce un isomorfismo entre* $Sp(1)$ *y* $SU(2)$

Prueba: Recordando la prueba del lema 1.1, tenemos que ψ es un homomorfismo inyectivo de $\mathbb{H}$ en $M_2(\mathbb{C})$.

Si restringimos $\mathbb{H}$ a $Sp(1)$, entonces la aplicación continúa siendo un homomorfismo inyectivo.

Para concluir la demostración, necesitamos las siguientes afirmaciones:

Afirmación 3. *Si $a \in Sp(1)$, entonces $\psi(a) \in SU(2)$.*

En efecto, Si $a \in Sp(1)$, entonces es de la forma $a = x + iy + jz + kw$ tal que $|a| = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$.

Entonces, $\psi(a) = \begin{pmatrix} x+iy & -z-iw \\ z-iw & x-iy \end{pmatrix} = A$ satisface:

$$\begin{aligned} A\overline{A}^t &= \begin{pmatrix} x+iy & -z-iw \\ z-iw & x-iy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-iy & z+iw \\ -z+iw & x+iy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2+w^2 & 0 \\ 0 & x^2+y^2+z^2+w^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\det A = (x+iy)(x-iy) - (z-iw)(-z-iw) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$.

Así, $A \in SU(2)$.

Afirmación 4. *Sea $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SU(2)$, entonces $\delta = \overline{\alpha}$ y $\gamma = -\overline{\beta}$.*

En efecto, por el teorema 2.1, las filas de B forman una base ortogonal; es decir,

$$\langle(\alpha,\beta),(\gamma,\delta)\rangle = \alpha\overline{\gamma} + \beta\overline{\delta} = 0$$

$$\langle(\alpha,\beta),(\alpha,\beta)\rangle = \alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} = 1$$

$$\langle(\gamma,\delta),(\gamma,\delta)\rangle = \gamma\overline{\gamma} + \delta\overline{\delta} = 1$$

Con $\det B = \alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Considerando la conmutatividad en $(\mathbb{C},\cdot)$, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma\alpha\overline{\gamma} + \gamma\beta\overline{\delta} \\ &= \alpha\gamma\overline{\gamma} + (\alpha\delta - 1)\overline{\delta} \\ &= \alpha\gamma\overline{\gamma} + \alpha\delta\overline{\delta} - \overline{\delta} \\ &= \alpha - \overline{\delta} \end{aligned}$$

Entonces $\alpha = \overline{\delta}$ ó $\overline{\alpha} = \delta$.

Tenemos también que:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta\alpha\overline{\gamma} + \delta\beta\overline{\delta} \\ &= (1+\beta\gamma)\overline{\gamma} + \beta(1-\gamma\overline{\gamma}) \\ &= \overline{\gamma} + \beta\gamma\overline{\gamma} + \beta - \beta\gamma\overline{\gamma} \end{aligned}$$

Entonces $\overline{\gamma} = -\beta$ ó $\gamma = -\overline{\beta}$.

Así, $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$.

De estas dos afirmaciones, concluimos que:

Para todo $B = \begin{pmatrix} x+iy & -z-iw \\ z-iw & x-iy \end{pmatrix} \in SU(2)$, existe $a = x+iy+jz+kw \in Sp(1)$ tal que $\psi(a) = B$.

Por tanto, $\psi : Sp(1) \to SU(2)$ es un isomorfismo. ■

Capítulo 3

Homomorfismos

Daremos la definición de una curva sobre un grupo de matrices, para con esta hallar su respectivo espacio tangente.

Así, daremos la propiedad de la dimensión entre el grupo matricial y su respectivo espacio tangente.

También clasificaremos otros subconjuntos de los grupos matriciales ya obtenidos y exhibiremos sus dimensiones.

Definición 3.1. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n, el cual podemos identificar con $\mathbb{R}^n$.*

Una curva α en V es una función continua

$$\alpha : (a,b) \to V$$

donde (a,b) es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ que contiene al 0.

Con esta definición y otras procedentes del Cálculo Diferencial vamos a establecer una invarianza entre el grupo G y el conjunto de todos los vectores tangentes a G.

Definición 3.2. *Sean $c \in (a,b) \subset \mathbb{R}$ y $\alpha : (a,b) \in V$ una curva.*

α es diferenciable en c, si el siguiente límite existe:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\alpha(c+h) - \alpha(c)}{h}.$$

Cuando dicho límite existe, es un vector en V denotado por $\alpha'(c)$ y es llamado vector tangente a α en $\alpha(c)$.

Recordemos que $M_n(\mathbb{K})$ es el conjunto de matrices de tamaño $n \times n$, con entradas en $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$.

Denotemos a $A \in M_n(\mathbb{K})$ por (a_{ij}), para $1 \leq i, j \leq n$.

Afirmación 5. *$M_n(\mathbb{K})$ es un espacio vectorial real para $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$.*

Además, $\dim M_n(\mathbb{R}) = n^2$, $\dim M_n(\mathbb{C}) = 2n^2$, $\dim M_n(\mathbb{H}) = 4n^2$.

Prueba: En efecto, sean $A, B, C \in M_n(\mathbb{K})$ y $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1) $A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij}) = B + A$

2) $A + (B + C) = (a_{ij}) + (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) + (c_{ij}) = (A + B) + C$

   $(ab)A = (ab)(a_{ij}) = (ab(a_{ij})) = a(ba_{ij}) = a(bA)$

3) Existe la matriz nula $0 \in M_n(\mathbb{K})$, tal que para todo $A \in M_n(\mathbb{K})$

$$A + 0 = 0 + A = A$$

4) $(a + b)A = (a + b)(a_{ij}) = (aa_{ij} + ba_{ij}) = (aa_{ij}) + (ba_{ij}) = aA + bA$

   $a(A + B) = a(a_{ij} + b_{ij}) = (aa_{ij} + ab_{ij}) = (aa_{ij}) + (ab_{ij}) = aA + aB$

5) Como $1 \in \mathbb{R}$ y $A \in M_n(\mathbb{K})$, entonces $1A = A$

Por tanto, $M_n(\mathbb{K})$ es un espacio vectorial real.

Ahora veamos sus respectivas dimensiones:

a) Para $M_n(\mathbb{R})$, elegimos las matrices $E_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$ dadas por tener la ij-ésima entrada igual a 1 y las restantes igual a 0.

   Estas forman una base de $M_n(\mathbb{R})$ y por tanto, $\dim M_n(\mathbb{R}) = n^2$.

b) Para $M_n(\mathbb{C})$, elegimos las matrices E_{ij} dadas antes y las matrices F_{rs} dadas por tener la rs-ésima entrada igual a i y las restantes igual a 0.

   Al ser estas una base de $M_n(\mathbb{C})$, entonces $\dim M_n(\mathbb{C}) = n^2 + n^2 = 2n^2$.

c) Para $M_n(\mathbb{H})$, elegimos las matrices E_{ij}, F_{rs} anteriores y las matrices G_{rs} cuya rs-ésima entrada es j y las restantes 0, y las matrices H_{rs} dadas por tener la rs-ésima entrada igual a k y las restantes igual a 0.

   Como estas forman una base de $M_n(\mathbb{H})$, entonces $\dim M_n(\mathbb{H}) = n^2 + n^2 + n^2 + n^2 = 4n^2$. ■

Definición 3.3. *Sean $G \subset M_n(\mathbb{K})$ un grupo de matrices con la multiplicación, para $\mathbb{K} = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ y $(a, b) \subset \mathbb{R}$ tal que contiene al 0.*

Decimos que $\alpha : (a, b) \to G$ es una curva en G, si es una curva en $M_n(\mathbb{K})$ tal que $\alpha(u) \in G$ para $u \in (a, b)$.

Entonces esta curva es en realidad una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$ a la cual la denotamos de la siguiente manera:

$$\alpha(u) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}(u) & \alpha_{12}(u) & \cdots & \alpha_{1n}(u) \\ \alpha_{21}(u) & \alpha_{22}(u) & \cdots & \alpha_{2n}(u) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1}(u) & \alpha_{n2}(u) & \cdots & \alpha_{nn}(u) \end{pmatrix} = (\alpha_{ij}(u)); 1 \leq i, j \leq n.$$

Decimos que la curva α es diferenciable en $u \in (a,b)$, si cada α_{ij} es diferenciable en $u \in (a,b)$; para todo $1 \leq i,j \leq n$.

De acuerdo a la definición 3.2, la derivada de la curva se denota por:

$$\alpha'(u) = \begin{pmatrix} \alpha'_{11}(u) & \alpha'_{12}(u) & \cdots & \alpha'_{1n}(u) \\ \alpha'_{21}(u) & \alpha'_{22}(u) & \cdots & \alpha'_{2n}(u) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha'_{n1}(u) & \alpha'_{n2}(u) & \cdots & \alpha'_{nn}(u) \end{pmatrix} = (\alpha'_{ij}(u)); 1 \leq i,j \leq n.$$

que es llamado vector tangente a α en $u \in (a,b)$.

Como $M_n(\mathbb{K})$ es un espacio vectorial real, entonces la matriz $\alpha'(u)$ es considerada como un vector en $M_n(\mathbb{K})$.

Definición 3.4. *Sean $\alpha, \beta : (a,b) \to G$ dos curvas en G. Entonces la curva producto está dada por*

$$(\alpha\beta)(u) = \alpha(u)\beta(u), \quad \textit{para todo} \;\; u \in (a,b)$$

Proposición 3.1. *Sean $\alpha, \sigma : (a,b) \to G$ curvas, las cuales son diferenciables en $c \in (a,b)$. Entonces la curva producto $\alpha\sigma$ también es diferenciable en c; y,*

$$(\alpha\sigma)(c) = \alpha'(c)\sigma(c) + \alpha(c)\sigma'(c)$$

Prueba: Como $\alpha(c), \sigma(c) \in G$, entonces $\alpha(c) = (\alpha_{ij}(c))$; $\sigma(c) = (\sigma_{ij}(c))$, luego:

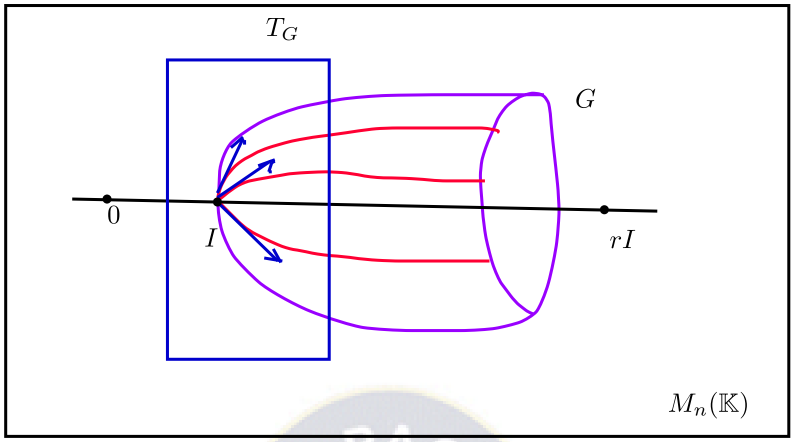
$$(\alpha\sigma)(c) = \alpha(c)\sigma(c) = \left(\sum_k \alpha_{ik}(c)\sigma_{kj}(c) \right).$$

$$\begin{aligned} (\alpha\sigma)'(c) &= \left(\sum_k \{\alpha'_{ik}(c)\sigma_{kj}(c) + \alpha_{ik}(c)\sigma'_{kj}(c)\} \right) \\ &= \left(\sum_k \alpha'_{ik}(c)\sigma_{kj}(c) \right) + \left(\sum_k \alpha_{ik}(c)\sigma'_{kj}(c) \right) \\ &= \alpha'(c)\sigma(c) + \alpha(c)\sigma'(c). \end{aligned}$$

■

Definición 3.5. *Consideremos las curvas diferenciables $\alpha : (a,b) \to G$ tales que $\alpha(0) = I$ matriz identidad.*

La colección de todos los vectores tangentes $\alpha'(0)$ a las curvas α en I es denotado por T_G.



Proposición 3.2. *T_G es subespacio vectorial real de $M_n(\mathbb{K})$.*

Prueba:

i) Por la hipótesis, α es una curva diferenciable y por tanto,

$$0 = I' = \alpha'(0) \in T_G.$$

ii) Sean $\alpha'(0), \beta'(0) \in T_G$ por la definición de curva producto y su respectiva derivada, existe la curva $\alpha\beta : (a,b) \to G$ tal que $(\alpha\beta)(0) = \alpha(0)\beta(0) = I \cdot I = I$ con

$$(\alpha\beta)'(0) = \alpha'(0)\beta(0) + \alpha(0)\beta'(0) = \alpha'(0) + \beta'(0).$$

Por tanto, $\alpha'(0) + \beta'(0) \in T_G$.

iii) Sea $\alpha'(0) \in T_G$ y $r \in \mathbb{R}$.

Existe una curva diferenciable $\beta : (a,b) \to G$ dada por $\beta(u) = \alpha(ru)$ para todo $u \in (a,b)$.

Notemos que $\beta(0) = \alpha(r0) = \alpha(0) = I$.

Para $r \neq 0$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\beta'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\beta(h) - \beta(0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} r\frac{\alpha(rh) - \alpha(0)}{rh} \\
&= r\left(\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x) - \alpha(0)}{x}\right) \\
&= r\alpha'(0)
\end{aligned}$$

Pues si $rh = x$, entonces $x \to 0$ cuando $h \to 0$.

Para $r = 0$, $\beta'(u) = \alpha'(0)$, para todo $u \in (a, b)$.

Por tanto, $r\alpha'(0) \in T_G$.

Como $M_n(\mathbb{K})$ es un espacio vectorial real de dimensión finita, también lo es T_G.

Por tanto, T_G es subespacio de $M_n(\mathbb{K})$. ■

Definición 3.6. *Si $G \subset M_n(\mathbb{K})$ es un grupo de matrices, entonces hacemos corresponder la dimensión del espacio T_G (de vectores tangentes a G en I) a la dimensión de G.*

Ejemplo 3.1. *1) $U(1) = \{A \in M_1(\mathbb{C}) / \langle xA, yA\rangle = \langle x, y\rangle;\ \ \forall x, y \in \mathbb{C}\} = \{a \in \mathbb{C} / |a| = 1\}$.*

Para $v \in U(1)$ fijo, existe la curva diferenciable $\alpha : (a, b) \to U(1)$ dada por $\alpha(t) = tv + 1$.

$\alpha(0) = 1$ y $\alpha'(t) = v;\ \ \forall t \in (a, b)$.

$$T = \{\gamma'(0)/\text{es vector tangente a } \alpha\} = \{v/|v| = 1\}.$$

De hecho, $T \subset U(1)$, pero además $U(1) \subset T$.

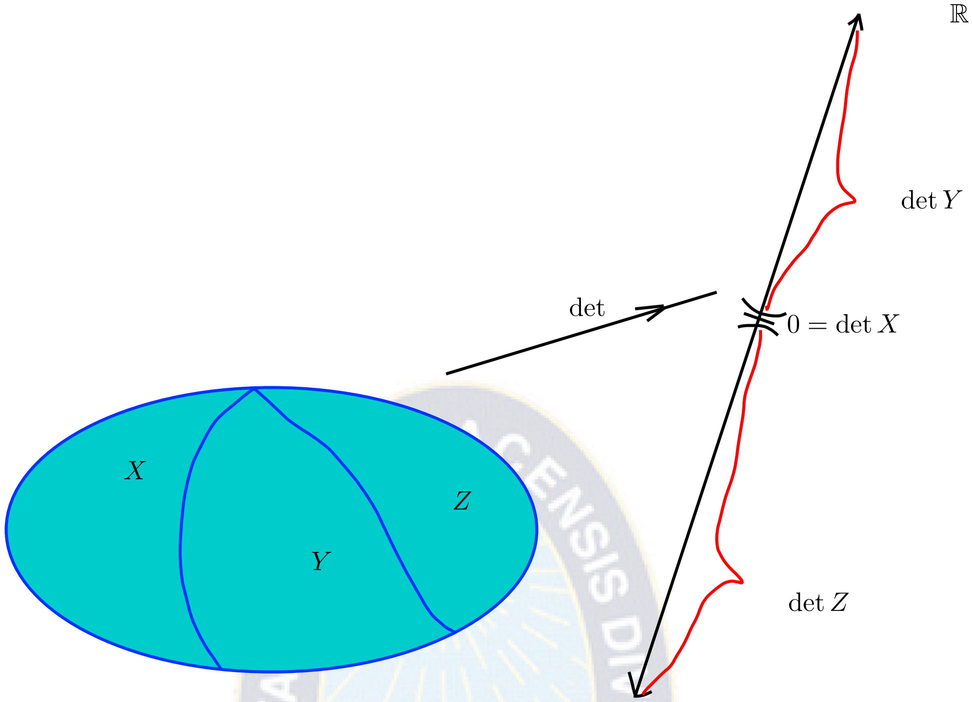
Así, $\dim T = \dim U(1) = 1$.

2) La dimensión de $GL(n, \mathbb{R})$ es n^2.

En efecto, dado $V \in M(n, \mathbb{R})$, existe una curva diferenciable $\beta : (a, b) \to M_n(\mathbb{R})$ dada por $\beta(t) = tV + I$.

Esta curva satisface $\beta(0) = I$ y $\beta'(t) = V$, para todo $t \in (a, b)$.

Sabemos que $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *es una función continua.*



Donde $\det(X) = \{0\}$, $\det(Y) = (0, \infty)$ *y* $\det(Z) = (-\infty, 0)$.

Entonces podemos considerar un entorno de la matriz I*, tal que para una matriz* A *cercana a* I*, obtenemos* $\det(A) \in (0, \infty)$.

Aplicando este criterio para un t *suficientemente pequeño,* $\beta : (a, b) \to GL(n, \mathbb{R})$.

Por tanto, $T = \{\beta'(0)/\beta(t) \in GL(n, \mathbb{R})\} = M_n(\mathbb{R})$.

Así, $\dim T = \dim GL(n, \mathbb{R}) = n^2$.

Definición 3.7. *Ahora caracterizaremos otros conjuntos de matrices en* $M_n(\mathbb{K})$*, para* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$.

1) $A \in M_n(\mathbb{R})$ *es antisimétrica, si* $A + A^t = 0$*; es decir,* $a_{ij} = -a_{ji}$ *para todo* $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.
En particular, los elementos de la diagonal son ceros.

2) $B \in M_n(\mathbb{C})$ *es antihermitiana, si* $B + \overline{B}^t = 0$*; es decir,* $b_{kl} = c + id$ *entonces* $b_{lk} = -c + id$ *para todo* $k, l \in \{1, 2, ..., n\}$.
En particular, los elementos de la diagonal son imaginarios puros.

3) $C \in M_n(\mathbb{H})$ *es antisimpléctica, si* $C + \overline{C}^t = 0$*; es decir,* $c_{mp} = x + iy + jz + kw$*, entonces los* c_{pm} *son de la forma* $c_{pm} = -x + iy + jz + kw$ *para todo* $p, m \in \{1, 2, ..., n\}$.
En particular, los elementos de la diagonal son cuaterniones con parte real nula.

NOTA 3.1. *Daremos las siguientes notaciones:*

$$so(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R})/A \ \text{ es antisimétrica}\}$$

$$su(n) = \{B \in M_n(\mathbb{C})/B \quad es\ antihermitiana\}$$
$$sp(n) = \{C \in M_n(\mathbb{H})/C \quad es\ antisimpléctica\}$$

Teorema 3.1. *De acuerdo a la notación, $so(n), su(n)$ y $sp(n)$ son subespacios vectoriales reales de $M_n(\mathbb{R})$, $M_n(\mathbb{C})$ y $M_n(\mathbb{H})$ respectivamente.*

Además, $\dim so(n) = \frac{n(n-1)}{2}$, $\dim su(n) = n + \frac{2n(n-1)}{2}$ *y* $\dim sp(n) = 3n + \frac{4n(n-1)}{2}$.

Prueba:

i) Para $so(n)$:

$0 \in so(n)$, pues todos sus elementos son nulos.

Sean $A, B \in so(n)$, entonces

$(A+B) + (A+B)^t = (A + A^t) + (B + B^t) = 0$, así $A + B \in so(n)$.

Sean $A \in so(n)$ y $r \in \mathbb{R}$, lo cual implica que $(rA)^t = rA^t$,

$(rA) + (rA)^t = r(A + A^t) = r0 = 0$, así $rA \in so(n)$.

Luego, $so(n)$ es subespacio vectorial real de $M_n(\mathbb{R})$.

Sea F_{ij} la matriz cuya ij-ésima entrada es 1 y la ji-ésima entrada es -1, con las restantes igual a 0.

Si definimos F_{ij} sólo para $i < j$, tenemos que ellos forman una base para $so(n)$.

Pues si definimos estas matrices para $i > j$, tendríamos a $-F_{ij}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}; ..., \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Las matrices que hay son:

$$1 + 2 + ... + n - 1 = \frac{(n-1)[(n-1)+1]}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Como son una base, entonces

$$\dim so(n) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

ii) Para $su(n)$:

$0 \in su(n)$, pues la matriz nula tiene elementos $i0 = 0$ puramente imaginarios.

Sean $X, Y \in su(n)$, entonces

$(X+Y) + \overline{(X+Y)}^t = (X + \overline{X}^t) + (Y + \overline{Y}^t) = 0$, así $X + Y \in su(n)$.

Sean $X \in su(n)$ y $r \in \mathbb{R}$, entonces

$rA + \overline{rA}^t = r(A + \overline{A}^t) = r0 = 0$, así $rA \in su(n)$.

Luego, $su(n)$ es subespacio vectorial real de $M_n(\mathbb{C})$.

Como la diagonal tiene elementos puramente imaginarios, entonces consideramos las matrices

$$\begin{pmatrix} i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}; ..., \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & i \end{pmatrix}$$

cuya cantidad es n.

Como cada $X \in su(n)$ tiene elementos $x_{kl} = a + ib; \quad k \neq l$, entonces:

$$\begin{pmatrix} 0 & i & 0 & \cdots & 0 \\ i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}; ..., \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & i \\ 0 & 0 & \cdots & i & 0 \end{pmatrix}$$

tiene $n(n-1)/2$ de este tipo para la parte imaginaria.

Como $x_{lk} = -a + ib, \quad k \neq l$, entonces

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}; ..., \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene $n(n-1)/2$ de este tipo para la parte real.

Así, como todos ellos forman una base,

$$\dim su(n) = n + \frac{2n(n-1)}{2} = n^2.$$

iii) Para $sp(n)$:

$0 \in sp(n)$, pues $0 = 0 + i0 + j0 + k0$

Sean $U, V \in sp(n)$, entonces

$(U+V) + \overline{(U+V)}^t = (U + \overline{U}^t) + (V + \overline{V}^t) = 0$, así $U + V \in sp(n)$.

Sean $U \in sp(n)$ y $r \in \mathbb{R}$, entonces

$rU + \overline{(rU)}^t = r(U + \overline{U}^t) = r0 = 0$, así $rU \in sp(n)$.

Luego, $sp(n)$ es subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{H})$.

Como los elementos de la diagonal son cuaterniones con parte real nula, entonces:

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}; ..., \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & i \end{pmatrix}$$

existen n de este tipo para i, j, k.

Como cada elemento $u_{mp} = a + ib + jc + kd$; $\quad m \neq p$, entonces:

$$\begin{pmatrix} 0 & i & 0 & \cdots & 0 \\ i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}; ..., \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & i \\ 0 & 0 & \cdots & i & 0 \end{pmatrix}$$

existen $n(n-1)/2$ de este tipo para i, j, k.

Como $u_{pm} = -a + ib + jc + kd$, $\quad m \neq p$, entonces

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}; ..., \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

existen $n(n-1)/2$ de este tipo para la parte real.

Como estos forman una base, entonces

$$\dim sp(n) = 3n + \frac{4n(n-1)}{2} = n(2n+1).$$

■

Proposición 3.3. *Sea* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$.
Si $\beta : (a,b) \to O(n, \mathbb{K})$ *es una curva diferenciable tal que* $\beta(0) = I$, *entonces:*

i) *En* $O(n) \Rightarrow \beta'(0)$ *es antisimétrica.*

ii) *En* $U(n) \Rightarrow \beta'(0)$ *es antihermitiana.*

iii) *En* $Sp(n) \Rightarrow \beta'(0)$ *es antisimpléctica.*

Prueba: Por hipótesis, β es una curva diferenciable a través de la identidad en $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$.

Tomemos a la curva $\overline{\beta}^t : (a,b) \to O(n, \mathbb{K})$ tal que $\overline{\beta}^t(0) = I$ y $(\overline{\beta}^t)' = (\overline{\beta'}^t)$.

Recordemos además que $A \in O(n, \mathbb{K})$ es tal que $A\overline{A}^t = I$.

Usando la curva producto, su derivada y evaluándolas en 0,

$$(\beta\overline{\beta}^t)(0) = \beta(0)\overline{\beta}^t(0) = I$$
$$0 = I' = (\beta\overline{\beta}^t)'(0) = \beta'(0) + (\overline{\beta}^t)'(0).$$

Por tanto, $\beta'(0)$ es antisimétrica, antihermitiana o antisimpléctica según $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ respectivamente. ■

3.1. Homomorfismos diferenciables:

Sean $G, H \subset M_n(\mathbb{K})$ grupos de matrices y $\phi : G \to H$ un homomorfismo. Como G y H están en espacios vectoriales, entonces ϕ es continua.

Dada una curva $\rho : (a,b) \to G$ entonces obtenemos una curva en H, dada por $\phi \circ \rho : (a,b) \to H$.

Definición 3.8. *Un homomorfismo* $\phi : G \to H$ *de grupos de matrices es diferenciable, si para cada curva diferenciable* $\rho : (a,b) \to G$ *la composición* $\phi \circ \rho : (a,b) \to H$ *es una curva diferenciable.*

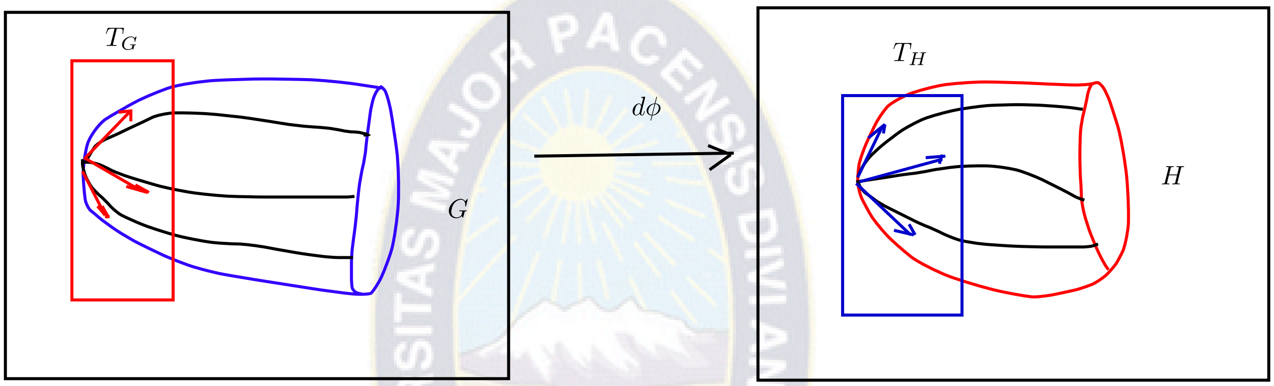
Definición 3.9. *Sean G y H grupos de matrices y $\phi : G \to H$ un homomorfismo diferenciable de grupos de matrices.*

Si $\alpha'(0)$ es un vector tangente a G en I, definimos un vector tangente $d\phi(\alpha'(0))$ a H en I dada por

$$d\phi(\alpha'(0)) = (\phi \circ \alpha)'(0).$$

Denotemos por T_G y T_H los conjuntos de vectores tangentes a G y H en I respectivamente.

La función resultante $d\phi : T_G \to T_H$ es llamada la diferencial de ϕ.



Proposición 3.4. *La diferencial $d\phi : T_G \to T_H$ es una función lineal.*

Prueba: Sean $\rho'(0)$, $\sigma'(0) \in T_G$ y $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} d\phi(a\rho'(0) + b\sigma'(0)) &= [\phi \circ (a\rho + b\sigma)]'(0) \\ &= [a(\phi \circ \rho) + b(\phi \circ \sigma)]'(0) \\ &= [a(\phi \circ \rho)' + b(\phi \circ \sigma)'](0) \\ &= a(\phi \circ \rho)'(0) + b(\phi \circ \sigma)'(0) \\ &= a d\phi(\rho'(0)) + b d\phi(\sigma'(0)). \end{aligned}$$

Por tanto, la diferencial es lineal. ■

Proposición 3.5. *Sean $G, H, K \subset M_n(\mathbb{K})$ grupos de matrices y $\phi : G \to H$, $\psi : H \to K$ dos homomorfismos diferenciables.*

Entonces la composición $\psi \circ \phi$ es también diferenciable y se cumple que

$$d(\psi \circ \phi) = d\psi \circ d\phi.$$

Prueba: Por definición, sean $\alpha : (a, b) \to G$ y $\sigma : (a, b) \to H$ dos curvas diferenciables, tales que:

$$\phi \circ \alpha = \sigma : (a, b) \to H$$

$$\psi \circ \sigma = \mu : (a, b) \to K$$

son curvas diferenciables, entonces:

$$(\psi \circ \phi) \circ \alpha = \psi \circ (\phi \circ \alpha) = \psi \circ \sigma = \mu$$

es una curva diferenciable.

Luego, $\phi \circ \psi$ es un homomorfismo diferenciable.

Tomemos ahora $\alpha'(0) \in T_G$, entonces:

$$\begin{aligned} d(\psi \circ \phi)(\alpha'(0)) &= (\psi \circ \phi \circ \alpha)'(0) \\ &= d\psi((\phi \circ \alpha)'(0)) \\ &= d\psi(d\phi(\alpha'(0))) \\ &= (d\psi \circ d\phi)(\alpha'(0)). \end{aligned}$$

Por tanto, $d(\psi \circ \phi) = d\psi \circ d\phi$. ■

Corolario 3.2. *Dados $G, H \subset M_n(\mathbb{K})$ y $\phi : G \to H$ un isomorfismo diferenciable, entonces $d\phi : T_G \to T_H$ es un isomorfismo lineal y $\dim G = \dim H$.*

Prueba: Por hipótesis, ϕ es un isomorfismo diferenciable, entonces existen $\phi^{-1} : H \to G$ y $d\phi^{-1} : T_H \to T_G$.

Por la proposición 4.5

$$d(\phi^{-1} \circ \phi) = d\phi^{-1} \circ d\phi = Id : T_G \to T_G$$

$$d(\phi \circ \phi^{-1}) = d\phi \circ d\phi^{-1} = Id : T_H \to T_H$$

Como $Id : T_G \to T_G$ es inyectiva, entonces $d\phi$ es inyectiva; como $Id : T_H \to T_H$ es sobreyectiva, entonces $d\phi$ es sobreyectiva.

Así, $d\phi$ es biyectiva.

Por tanto, $d\phi$ es un isomorfismo y por la proposición 3.4, es lineal.

Ya que T_G y T_H son espacios vectoriales de vectores tangentes a G y H en I respectivamente y al ser $d\phi$ un isomorfismo, aplicando la definición 3.6 tenemos que:

$$\dim G = \dim T_G = \dim T_H = \dim H.$$

■

Capítulo 4

$SO(3)$ y $Sp(1)$

Con la ayuda de la clasificación de otros conjuntos de matrices con la asignación de normas apropiadas y algunas identificaciones entre ciertos conjuntos, mostraremos la existencia de un homomorfismo sobreyectivo entre el Grupo Simpléctico y el Grupo Especial Ortogonal de las matrices complejas de 2×2.

Analizaremos sus centros y las propiedades de los Grupos Cocientes para poder asegurar que no existe un isomorfismo entre los grupos antes citados.

4.1. Introducción:

Recordemos que:

$$O(3) = \{A \in M_3(\mathbb{R})/AA^t = I\}$$

$$U(2) = \{B \in M_2(\mathbb{C})/B\overline{B}^t = I\}$$

$$SO(3) = \{A \in M_3(\mathbb{R})/AA^t = I, \det(A) = 1\}$$

$$SU(2) = \{B \in M_2(\mathbb{C})/B\overline{B}^t = I, \det(B) = 1\}$$

Además, si $a \in \mathbb{C}$, entonces $|a|^2 = \langle a, a\rangle = a\bar{a}$.

Proposición 4.1. *Podemos caracterizar a los elementos de $SU(2)$ como sigue:*

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} /a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

Prueba: Sea $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU(2)$.

Por el teorema 2.1,

$$|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 = 1$$

$$c\overline{a} + d\overline{b} = a\overline{c} + b\overline{d} = 0$$

Si $c = 0$, $|d| = 1$, $d\overline{b} = 0$, implica que $b = 0$, $ad = 1$, $|a| = 1$, entonces $c = 0 = \overline{c}$ y $a = \overline{d}$.

Si $c \neq 0$, $c\overline{a} + d\overline{b} = 0$, entonces $\overline{a} = -\frac{d}{c}\overline{b}$. (1)

Por la hipótesis, $\det B = ad - bc = 1$ y por la conmutatividad de $(\mathbb{C}, \cdot)$,

$$\begin{aligned} 1 &= ad - bc \\ &= -\frac{b\overline{d}}{\overline{c}}d - \frac{\overline{c}c}{\overline{c}}b \\ &= \frac{-b(|d|^2 + |c|^2)}{\overline{c}} \\ &= -\frac{b}{\overline{c}} \end{aligned}$$

Luego, $\overline{c} = -b$ ó $c = -\overline{b}$. (2)

(2) en (1), $\overline{a} = d$.

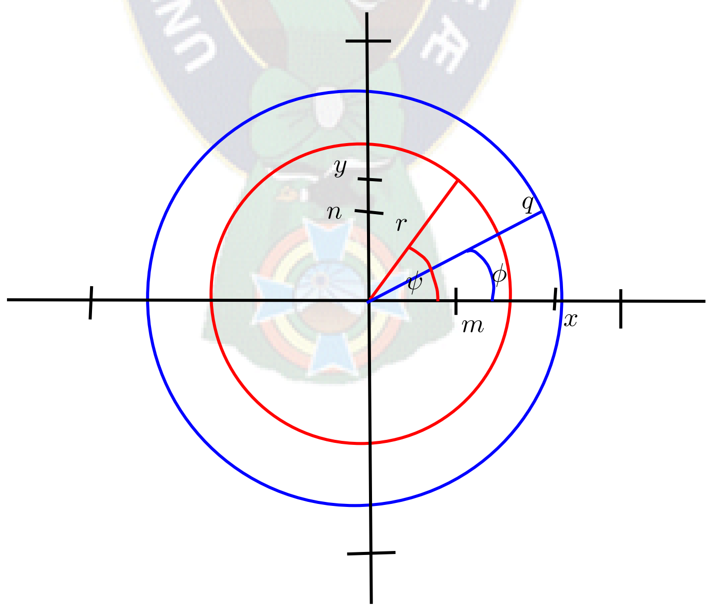
Así, la matriz es $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$. ∎

Lema 4.1. *Para todo $g \in SU(2)$, existe una aplicación continua del intervalo $I = [0,1]$ en $SU(2)$ que aplica 0 sobre la matriz identidad de 2×2 y 1 sobre la matriz g.*

Prueba: Recordemos que:

$$\mathbb{S}^3 = \{(a,b) \in \mathbb{C}^2 / |a|^2 + |b|^2 = 1\}$$

Sean $a, b \in \mathbb{C}$; $r, q \in [0,1]$ y $\phi, \psi \in]-\pi, \pi[$, en coordenadas polares tenemos:



$$a = x + iy = q\cos(\phi) + iq\sin(\phi) = qe^{i\phi},$$

$$b = m + in = r\cos(\psi) + ir\sin(\psi) = re^{i\psi}.$$

Como $|a|^2+|b|^2=q^2+r^2=1$, entonces $q=\sqrt{1-r^2}$.

Así,

$$\mathbb{S}^3=\{(a,b)=(\sqrt{1-r^2}e^{i\phi},re^{i\psi})\in\mathbb{C}^2/r,q\in[0,1],\quad \phi,\psi\in]-\pi,\pi[\}$$

Tomemos ahora la aplicación continua $\gamma:[0,1]\to\mathbb{S}^3$, dada por

$$\gamma(t)=(\sqrt{1-t^2r^2}e^{it\phi},\ tre^{it\psi}).$$

Notemos que $\gamma(0)=(1,0)$ y $\gamma(1)=(a,b)$.

Por la biyección:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix}\in SU(2)\text{tal que }\ |a|^2+|b|^2=1\leftrightarrow(a,b)\in\mathbb{S}^3\text{tal que }\ |a|^2+|b|^2=1.$$

SU(2) se identifica con $\mathbb{S}^3$.

Por tanto, tenemos el resultado pedido. ∎

Proposición 4.2. *Consideremos el conjunto*

$$\mathbb{D}=\left\{\begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z}\end{pmatrix}/z,w\in\mathbb{C}\right\}$$

Entonces $\mathbb{D}$ es subespacio vectorial real de $M_2(\mathbb{C})$ (considerado como espacio vectorial real) y $\mathbb{D}$ es de dimensión 4.

Prueba: La matriz nula $0\in\mathbb{D}$.

Sean $A=\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} m & p \\ -\bar{p} & \bar{m}\end{pmatrix}\in\mathbb{D}$, entonces

$$A+B=\begin{pmatrix} a+m & b+p \\ -(\overline{b+p}) & \overline{a+m}\end{pmatrix}\in\mathbb{D}.$$

Sean $A=\begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib\end{pmatrix}\in\mathbb{D}$ y $r\in\mathbb{R}$.

Notemos que

$$rA=\begin{pmatrix} ra+irb & rc+ird \\ -rc+ird & ra-irb\end{pmatrix}\in\mathbb{D}.$$

Así, $\mathbb{D}$ es subespacio vectorial real de $M_2(\mathbb{C})$.

Los elementos $e_0 = I, e_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ forman una base de $\mathbb{D}$.

En efecto, $xe_0 + ye_1 + ze_2 + we_3 = 0$, entonces $x = y = z = w = 0$.

Sea $A \in \mathbb{D}$, entonces

$$A = \begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = ae_0 + be_1 + ce_2 + de_3$$

Así, $\mathcal{B} = \{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ es un conjunto linealmente independiente y genera $\mathbb{D}$.

Por tanto, $\dim \mathbb{D} = 4$. ∎

OBS. 4.1. *Sean* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & d \\ -\overline{d} & \overline{c} \end{pmatrix} \in \mathbb{D}$, *entonces*

$$AB = \begin{pmatrix} ac - b\overline{d} & ad + b\overline{c} \\ -\overline{a}\overline{d} - \overline{b}c & \overline{a}\overline{c} - \overline{b}d \end{pmatrix} \in \mathbb{D}.$$

Es decir, $\mathbb{D}$ es cerrado bajo la multiplicación de matrices, por lo que es conocido como el Álgebra de los Cuaterniones de Hamilton.

Definición 4.1. *(Producto escalar euclidiano) Definimos un producto escalar euclidiano $\langle , \rangle : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, dado por:*

$$\left\langle \begin{pmatrix} z_1 & w_1 \\ -\overline{w}_1 & \overline{z}_1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} z_2 & w_2 \\ -\overline{w}_2 & \overline{z}_2 \end{pmatrix} \right\rangle = Re(\overline{z}_1 z_2 + \overline{w}_1 w_2).$$

donde $Re(z)$ denota la parte real del número complejo z.

La norma asociada a ésta, es dada por:

$$\left\| \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \right\|^2 = |z|^2 + |w|^2 = \det \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}.$$

Proposición 4.3. *El producto escalar de la definición 4.1 es un producto interno.*

Prueba:

1) Sean $X_p = \begin{pmatrix} a_p + ib_p & c_p + d_p \\ -c_p + id_p & a_p - ib_p \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} m+in & r+is \\ -r+is & m-in \end{pmatrix} \in \mathbb{D}$, para $p = 1, 2$.

$$\begin{aligned}
\langle X_1 + X_2 | Y \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} (a_1+ib_1)+(a_2+ib_2) & (c_1+id_1)+(c_2+id_2) \\ (-c_1+id_1)+(-c_2+id_2) & (a_1-ib_1)+(a_2-ib_2) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} m+in & r+is \\ -r+is & m-in \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= Re(((a_1-ib_1)+(a_2-ib_2))(m+in) + ((c_1-id_1)+(c_2-id_2))(r+is)) \\
&= Re((a_1-ib_1)(m+in) + (c_1-id_1)(r+is)) + Re((a_2-ib_2)(m+in) + (c_2-id_2)(r+is)) \\
&= \langle X_1 | Y \rangle + \langle X_2 | Y \rangle
\end{aligned}$$

2)

$$\langle Y|X_1+X_2\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} m+in & r+is \\ -r+is & m-in \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} (a_1+ib_1)+(a_2+ib_2) & (c_1+id_1)+(c_2+id_2) \\ (-c_1+id_1)+(-c_2+id_2) & (a_1-ib_1)+(a_2-ib_2) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= Re((m-in)((a_1+ib_1)+(a_2+ib_2))+(r-is)((c_1+id_1)+(c_2+id_2)))$$

$$= Re((m-in)(a_1+ib_1)+(r-is)(c_1+id_1))+Re((m-in)(a_2+ib_2)+(r-is)(c_2+id_2))$$

$$= \langle Y|X_1\rangle + \langle Y|X_2\rangle$$

3)

$$\langle \alpha X_1, X_2\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha(a_1+ib_1) & \alpha(c_1+id_1) \\ \alpha(-c_1+id_1) & \alpha(a_1-ib_1) \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} a_2+ib_2 & c_2+id_2 \\ -c_2+id_2 & a_2-ib_2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= Re(\alpha(a_1-ib_1)(a_2+ib_2)+\alpha(c_1-id_1)(c_2+id_2))$$

$$= \alpha Re((a_1-ib_1)(a_2+ib_2)+(c_1-id_1)(c_2+id_2))$$

$$= \alpha\langle X_1|X_2\rangle$$

4)

$$\langle X_1, X_2\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_1+ib_1 & c_1+id_1 \\ -c_1+id_1 & a_1-ib_1 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} a_2+ib_2 & c_2+id_2 \\ -c_2+id_2 & a_2-ib_2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= Re((a_1-ib_1)(a_2+ib_2)+(c_1-id_1)(c_2+id_2))$$

$$= Re((a_2-ib_2)(a_1+ib_1)+(c_2-id_2)(c_1+id_1))$$

$$= \langle X_2|X_1\rangle$$

5)

$$\langle X_1|X_1\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_1+ib_1 & c_1+id_1 \\ -c_1+id_1 & a_1-ib_1 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} a_1+ib_1 & c_1+id_1 \\ -c_1+id_1 & a_1-ib_1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= Re((a_1-ib_1)(a_1+ib_1)+(c_1-id_1)(c_1+id_1))$$

$$= a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2 \geq 0$$

6)

$$\langle X_1|X_1\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_1+ib_1 & c_1+id_1 \\ -c_1+id_1 & a_1-ib_1 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} a_1+ib_1 & c_1+id_1 \\ -c_1+id_1 & a_1-ib_1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= Re((a_1-ib_1)(a_1+ib_1)+(c_1-id_1)(c_1+id_1))$$

$$= a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2$$

Luego, $\langle X_1|X_1\rangle = 0$ si, y sólo si, $X_1 = 0$. ■

OBS. 4.2. *Si consideramos la siguiente biyección:*

$$\begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{pmatrix} \in \mathbb{D} \leftrightarrow (a,b,c,d) \in \mathbb{R}$$

entonces vamos a obtener el producto interno $\langle , \rangle : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$.

Lema 4.2. *Sea $g \in SU(2)$. Las aplicaciones lineales $L_g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ y $R_g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ dadas respectivamente por*

$$L_g(X) = gX$$

y

$$R_g(X) = Xg$$

son ortogonales.

Prueba: Veamos la linealidad y la ortogonalidad para L_g:

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $U, V \in \mathbb{D}$.

$$\begin{aligned} L_g(aU + bV) &= g(aU + bV) \\ &= g(aU) + g(bV) \\ &= a(gU) + b(gV) \\ &= aL_g(U) + bL_g(V). \end{aligned}$$

Como $g \in SU(2)$, entonces $\det(g) = 1$.

$\|gX\|^2 = \det(gX) = (\det(g))(\det(X)) = \det(X) = \|X\|^2$.

Es decir, $\langle L_g X, L_g X\rangle = \langle gX, gX\rangle = \langle X, X\rangle$.

Luego L_g es una aplicación lineal ortogonal.

Análogamente para R_g. ■

Definición 4.2. *Asignamos por $\mathbb{E}$ al siguiente conjunto de matrices:*

$$\mathbb{E} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix} / x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Con el producto escalar euclidiano dado en la definición 4.1 y con norma asociada dada por:

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix} \right\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Notemos que

$$\det X = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix} = -x_1^2 - (x_2^2 - i^2 x_3^2) = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2),$$

$$\det iX = \det \begin{pmatrix} ix_1 & -x_3 + ix_2 \\ x_3 + ix_2 & -ix_1 \end{pmatrix} = -i^2 x_1^2 - (-x_3^2 + i^2 x_2^2) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

Así, $||X||^2 = \det iX = -\det X$.

Teorema 4.1. *Recordemos que $g^* = \overline{g}^t$, entonces:*

(1) Para todo $g \in SU(2)$ y para todo $X \in \mathbb{E}, gXg^* \in \mathbb{E}$.
Además, el operador lineal $\psi(g) : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ dada por $\psi(g)(X) = gXg^*$ es ortogonal.

(2) La aplicación

$$\psi : \begin{cases} SU(2) \to O(3) \\ \\ \qquad g \mapsto \psi(g) \end{cases}$$

es un homomorfismo de grupos.

(3) La imagen de ψ está en $SO(3)$, donde $SO(3)$ es el subgrupo de $O(3)$.

(4) El homomorfismo $\psi(g) : SU(2) \to SO(3)$ es sobreyectivo.

Prueba:

(1) Sean $g = \begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{pmatrix} \in SU(2)$ y $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2+ix_3 \\ x_2-ix_3 & -x_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}$, entonces

$$gXg^* = \begin{pmatrix} y_1 & y_2+iy_3 \\ y_2-iy_3 & -y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}, \text{donde}$$

$y_1 = (a^2+b^2-c^2-d^2)x_1 + (2ac+2bd)x_2 + (2ad-2bc)x_3,$

$y_2 = (2bd-2ac)x_1 + (a^2-b^2-c^2+d^2)x_2 + (-2cd-2ab)x_3,$

$y_3 = (-2ad-2bc)x_1 + (2ab-2cd)x_2 + (a^2-b^2+c^2-d^2)x_3.$

Como para todo $X \in \mathbb{E}$ y todo $g \in SU(2)$, $||gXg^*||^2 = -det(gXg^*) = -det(X) = ||X||^2$.

Luego, $\psi(g)$ es ortogonal.

(2) Sean $g, h \in SU(2)$ y $X \in \mathbb{E}$, entonces

$$\psi(g)(\psi(h)(X)) = \psi(g)(hXh^*) = ghXh^*g^* = (gh)X(gh)^* = \psi(gh)(X)$$

Es decir, $\psi(g) \circ \psi(h) = \psi(gh)$.

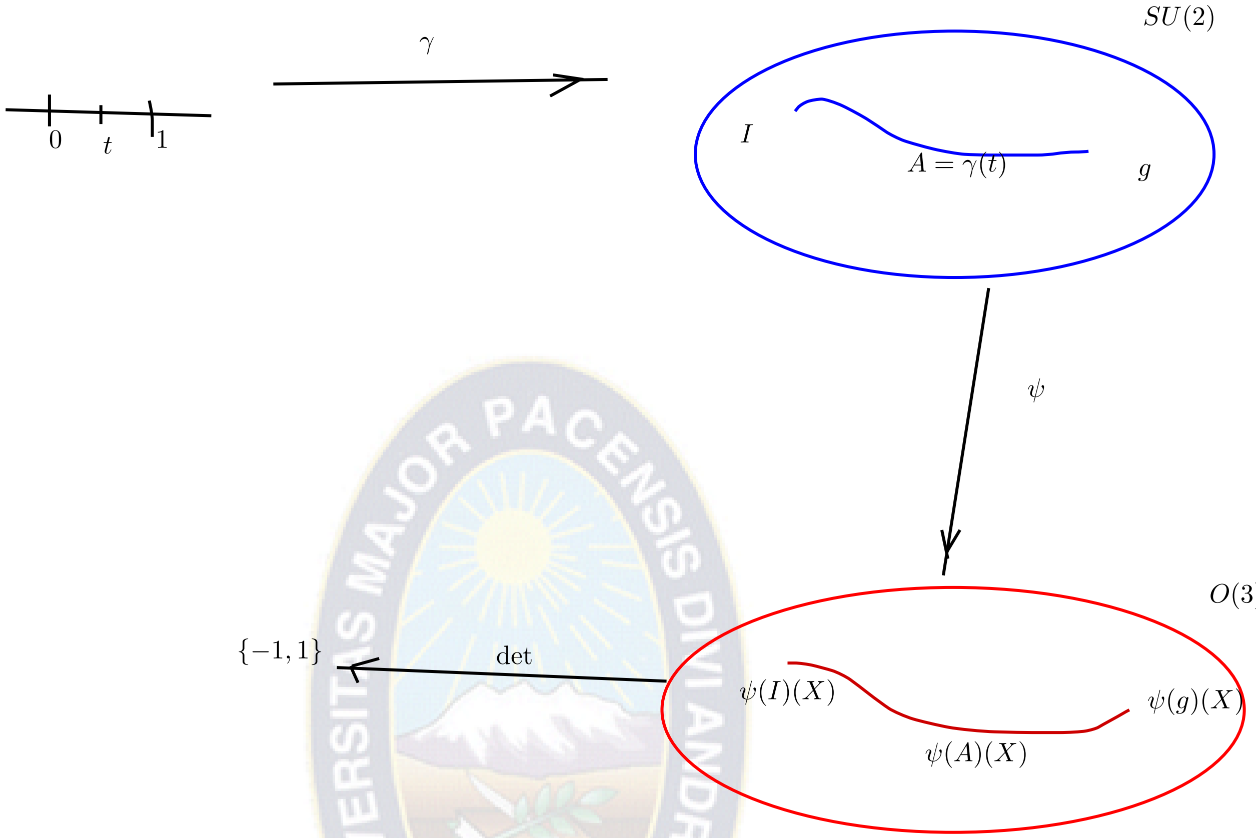
Aquí, estamos considerando a la composición como el producto usual de matrices.

Por tanto, ψ es un homomorfismo de grupos.

(3) Sea $g \in SU(2)$ y consideremos $\gamma : [0,1] \to SU(2)$.

Entonces la aplicación siguiente es continua:

$\delta : [0,1] \to \{1,-1\}$, dada por $\delta(t) = \det(\psi(\gamma(t)))$.



Donde $X \in \mathbb{E}$ y por la proposición 2.6, $\det A \in \{-1, 1\}$, para $A \in O(3)$.

$$\delta(0) = \det(\psi(\gamma(0))) = \det(\psi(e_0)) = \det(I_3) = 1$$

Y por la continuidad

$$\delta(1) = \det(\psi(\gamma(1))) = \det(\psi(g)) = 1.$$

Auí estamos denotando $e_0 = I \in SU(2)$ y a $I_3 = I \in O(3)$.

De (2), $Im(\psi) \subset O(3)$ y como $\det(\psi(g)) = 1$, entonces tenemos que $Im(\psi) \subset SO(3)$.

(4) Para esto, requerimos los lemas siguientes:

Lema 4.3. *Toda rotación en torno a un eje está en la imagen de ψ.*

Prueba: Consideremos $g = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \in SU(2)$ y $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}$.

$$\begin{aligned}
\psi_g(X) &= gX\overline{g}^t \\
&= \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & (x_2 + ix_3)e^{i2\theta} \\ (x_2 - ix_3)e^{-i2\theta} & -x_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & y_2 + iy_3 \\ y_2 - iy_3 & -x_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donde, $y_2 = x_2\cos(2\theta) - x_3\sin(2\theta)$ y $y_3 = x_2\sin(2\theta) + x_3\cos(2\theta)$.

Notemos además que:

$$\mathcal{B} = \left\{ u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base de $\mathbb{E}$, entonces aplicando la función ψ a estos elementos, tenemos:

$$\begin{aligned}
\psi_g(u) &= \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1u + 0v + 0w
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_g(v) &= \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \cos(2\theta) + i\sin(2\theta) \\ \cos(2\theta) - i\sin(2\theta) & 0 \end{pmatrix} = 0u + \cos(2\theta)v + \sin(2\theta)w
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_g(w) &= \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\sin(2\theta) + i\cos(2\theta) \\ -\sin(2\theta) - i\cos(2\theta) & 0 \end{pmatrix} = 0u - \sin(2\theta)v + \cos(2\theta)w
\end{aligned}$$

De este modo, la matriz de ψ en la base $\mathcal{B}$ es:

$$\psi(g) = \psi\left[\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ 0 & -\sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

Resulta que es una rotación entorno a un eje, de un ángulo 2θ.

Lema 4.4. *Para todo $X \in \mathbb{E}$, existe $g \in SU(2)$ tal que*

$$gX\overline{g}^t = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Prueba: Sea $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}$.

Notemos que $Tr(X) = 0$, $\det(X) = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = -r^2$, luego:

$$|X - \lambda I| = \lambda^2 - \lambda \cdot Tr(X) + \det(X) = \lambda^2 - r^2 = 0$$

De donde, $\lambda = \pm r$.

Es decir, los autovalores de X son reales y distintos.

Del Álgebra Lineal, recordemos que si $M \in M_n(\mathbb{C})$ es simétrica, entonces existe una matriz ortogonal Q tal que $Q^{-1}MQ = D$, donde D es una matriz diagonal en $M_n(\mathbb{C})$ formada por los autovalores de M.

Por lo cual, existe $h = Q^{-1} \in U(2)$ con $h^{-1} = h^*$ tal que

$$hXh^* = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix}$$

Como $h \in U(2)$, entonces tiene determinante complejo en $\{-1, 1\}$ y elijamos $\beta = \sqrt{\det(h)} \in \mathbb{C}$, notando que $|\det h| = 1 = \beta\overline{\beta}$.

Ahora, pongamos $g = \beta^{-1}h$, luego

$$gg^* = (\beta^{-1}h)(\beta^{-1}h)^* = (\beta\overline{\beta})^{-1}hh^* = 1I = I$$

$$\det(g) = \det(\beta^{-1}h) = \beta^{-2}\det(h) = \beta^{-2}\beta^2 = 1$$

Así, para todo $X \in \mathbb{E}$, existe $g \in SU(2)$ tal que:

$$gX\overline{g}^t = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix}$$

De los lemas 4.3 y 4.4 obtenemos lo deseado.

■

4.2. Los centros de $\mathbb{S}^3$ y $SO(3)$

Vimos en el teorema 4.1 que no existe un isomorfismo entre $Sp(1)$ y $SO(3)$, aquí trataremos de ver si los podemos identificar mediante sus centros.

Definición 4.3. *El centro de un grupo G está definido por:*

$$\mathrm{C} = \{x \in G / xy = yx; \quad \textit{para todo} \;\; y \in G\}.$$

Teorema 4.2. *El centro de* $\mathbb{S}^3$ *es* $\{-1, 1\}$*, mientras que el centro de SO(3) es* $\{I\}$*.*

Prueba: Recordemos que

$$\mathbb{S}^3 = \{x \in \mathbb{H}/|x| = 1\} = Sp(1).$$

Supongamos que $q = a + ib + jc + kd \in \mathbb{S}^3$ está en el centro de $\mathbb{S}^3$, entonces aplicando la definición 4.3 a los elementos de la base de $\mathbb{H}$,

$$\begin{aligned} qi = iq &\implies ia - b - kc + jd = ia - b + kc - jd \\ &\implies 2(kc - jd) = 0 \\ &\implies kc = jd \\ &\implies c = 0 = d \end{aligned}$$

Así, $q = a + ib$, pues $c, d \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} qj = jq &\implies (a + ib)j = j(a + ib) \\ &\implies ja + kb = ja - kb \\ &\implies 2kb = 0 \\ &\implies b = 0 \end{aligned}$$

Luego, $q = a \in \mathbb{S}^3$ es tal que $|a| = 1$,entonces $q \in \{-1, 1\}$.

Así, el $Centro(\mathbb{S}^3) \subset \{-1, 1\}$.

Como todo cuaternión real conmuta con cualquier otro cuaternión, entonces los cuaterniones reales de norma uno están en el centro de $\mathbb{S}^3$.

Así, $\{-1, 1\} \subset Centro(\mathbb{S}^3)$.

Por tanto, el centro de $\mathbb{S}^3$ es $\{-1, 1\}$.

Para ver cuál es el centro de $SO(3)$, consideremos el siguiente conjunto

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} /\theta \in]-\pi, \pi] \right\} \subset SO(3).$$

También tomemos los vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$ dados por $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ y $e_3 = (0, 0, 1)$.

Afirmación 6. *Si A está en el centro de $\in SO(3)$, entonces A deja fijo e_3.*

Prueba: En efecto, elijamos $B \in T$ una rotación que envía e_1 a e_2, e_2 a $-e_1$ y e_3 a e_3.

Es decir,

$$Be_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_2 \Rightarrow \cos\theta = 0, \sin\theta = -1$$

$$Be_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -e_1 \Rightarrow \sin\theta = -1, \cos\theta = 0$$

Así, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Sea $Ae_3 = ae_1 + be_2 + ce_3$,por la definición 4.3 tenemos que A conmuta también con los elementos de T.

Es decir, dado $B \in T$, entonces $AB = BA$ y evaluando en e_3,

$$BAe_3 = ae_2 - be_1 + ce_3$$

$$ABe_3 = Ae_3 = ae_1 + be_2 + ce_3$$

Igualando, $(a, 0, 0) = (-b, 0, 0)$ y $(0, a, 0) = (0, b, 0)$, entonces $a = 0 = b$.

Como $A \in O(3)$, por la proposición 3.4 A preserva longitud; es decir,

$$1 = \langle e_3, e_3 \rangle = \langle Ae_3, Ae_3 \rangle = \langle ce_3, ce_3 \rangle = c^2 \langle e_3, e_3 \rangle = c^2$$

entonces $c \in \{-1, 1\}$.

Lema 4.5. *Cualquier elemento de $O(2)$ que conmuta con cualquier rotación es también una rotación.*

Prueba: Sean $\phi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(2)$ y $t = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ una rotación, tales que $\phi t = t\phi$.

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} a\cos\theta + c\sin\theta & b\cos\theta + d\sin\theta \\ -a\sin\theta + c\cos\theta & -b\sin\theta + d\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\theta - b\sin\theta & a\sin\theta + b\cos\theta \\ c\cos\theta - d\sin\theta & c\sin\theta + d\cos\theta \end{pmatrix}$$

Igualando entrada por entrada, $c = -b$ y $a = d$.

$\phi = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in O(2)$ y $\det\phi = a^2 + b^2 \neq -1$.

El lema 4.5 prueba en la afirmación 6 que $c = 1$.

Como A está en el centro de $SO(3)$, $\det(A) = 1$ y entonces consideramos $A \in T$.

Sean $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in SO(3)$ y $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in T$.

$$AR = \begin{pmatrix} 0 & \sin\theta & \cos\theta \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} = RA$$

Entonces, $\sin\theta = 0$, $\cos\theta = 1$ y $A = I$.

Luego, $Centro(SO(3)) \subset I$ y como I conmuta con toda matriz de $SO(3)$ concluimos que el centro de $SO(3)$ es $\{I\}$. ∎

4.3. Grupos Cocientes:

Sean G un grupo y H subgrupo de G.

Consideremos la siguiente relación en H

$x \sim y$ si, y sólo si $xy^{-1} \in H$.

Ésta relación es de equivalencia.

En efecto:

i) $x \sim x$, entonces $xx^{-1} \in H$, pues $e \in H$

ii) $x \sim y$, entonces $xy^{-1} \in H$.

Como H es subgrupo, $(xy^{-1})^{-1} = yx^{-1} \in H$, luego $y \sim x$

iii) $x \sim y$, $y \sim z$, entonces $xy^{-1}, yz^{-1} \in H$.

Luego $xz^{-1} = (xy^{-1})(yz^{-1}) \in H$, entonces $x \sim z$.

Así, la relación es de equivalencia.

Definición 4.4. *La clase de equivalencia de " $\sim$ " está dada por:*

$$\overline{a} = [a] = \{x \in G/x \sim a\} = \{x \in G/xa^{-1} \in H\} = \{x \in G/x \in Ha\}.$$

NOTA 4.1. *Denotaremos a la clase lateral derecha de $x \in G$ por:*

$$\mathcal{C}(x) = Hx = \{hx/h \in H\}.$$

Proposición 4.4. *Las siguientes son equivalentes:*

i) $Hx = Hy$

ii) $xy^{-1} \in H$

iii) $y \in C(x)$

iv) $x \in C(y)$

Prueba: i)$\Rightarrow$ ii) $Hx = Hy$, entonces existen $h_1, h_2 \in H$ tales que $h_1 x = h_2 y$.

De donde, $xy^{-1} = h_1^{-1} h_2 \in H$.

ii)$\Rightarrow$ iii) $xy^{-1} \in H$, entonces existe $h_3 \in H$ tal que $xy^{-1} = h_3$.

Luego, $h_3^{-1} x = y$ y así $y \in C(x)$.

iii)$\Rightarrow$ iv) $y \in C(x)$, entonces existe $h_4 \in H$ tal que $y = h_4 x$.

Así, $h_4^{-1} y = x$ y entonces $x \in C(y)$.

iv)$\Rightarrow$ v) $x \in C(y)$, entonces existe $h_5 \in H$ tal que $x = h_5 y$.

Haciendo que $h_5 = h_6^{-1} h_7$ tenemos que $h_6 x = h_7 y$.

Así, $Hx = Hy$. ∎

Ejemplo 4.1. *Sea* $G = \mathbb{S}^3 = Sp(1) = \{x \in \mathbb{R}^4 / |x| = 1\}$, *y sea* $H = \{-1, 1\}$.

Entonces tenemos:

$$Hq = \{-q, q\} = H(-q)$$

Es decir, las clases laterales derechas para cada $q \in Sp(1)$ *están formadas únicamente por dos elementos,* q *y* $-q$.

Definición 4.5. *Sean* G *un grupo y* H *subgrupo de* G.

Decimos que H *es subgrupo normal en* G *si, y sólo si,* $xH = Hx$ *para cada* $x \in G$.

Consideremos ahora al conjunto G/H cuyos elementos son las clases laterales derechas de H en G.

Proposición 4.5. *Si* H *es subgrupo normal de* G, *entonces la operación sobre* G/H, *dada por*

$$(Hx)(Hz) = H(xz)$$

hace a G/H *un grupo.*

Prueba: Veamos primeramente que la operación está bien definida:

Sean $Hx = Hz$ y $Hy = Hw$, entonces $H(xy) = (Hx)(Hy) = (Hz)(Hw) = H(zw)$.

Como $Hy = Hw$, existen $h_2, h_3 \in H$ tales que

$$h_2 y = h_3 w \Rightarrow yw^{-1} = h_2^{-1} h_3 = h_1 \in H$$

Como $Hx = Hz$, existen $h_4, h_5 \in H$ tales que

$$h_4 x = h_5 z \Rightarrow xz^{-1} = h_4^{-1} h_5 = h_6 \Rightarrow z^{-1} = x^{-1} h_6$$

Por ser H subgrupo normal de G, $xH = Hx$, luego existen $h_1, h_7 \in H$ tales que

$$xh_1 = h_7x \Rightarrow xh_1x^{-1} = h_7$$

Con esto,

$$xy(zw)^{-1} = xyw^{-1}z^{-1} = xh_1z^{-1} = xh_1x^{-1}h_6 = h_7h_6 \in H$$

Así, la operación está bien definida.

i) $(Hx)(Hy) = H(xy) = Hx$, entonces $xyx^{-1} = e$.

Así, $Hy = He \in G/H$.

ii) $H(xy) = (Hx)(Hy) = He$, entonces $xy = e$ ó $y = x^{-1}$.

Luego, $Hx^{-1} \in G/H$.

iii) $(Hx)[(Hy)(Hz)] = (Hx)H(yz) = H(x(yz)) = H((xy)z) = H(xy)H(z) = [(Hx)(Hy)](Hz)$.

Así, G/H es un grupo. ■

Ejemplo 4.2. *Sea $G = Sp(1)$ y $H = \{-1, 1\}$.*

Como vimos en el ejemplo 4.1, H es el centro de G y entonces es subgrupo normal de G.

Así, G/H es un grupo.

Definición 4.6. *Sea G un grupo y $x, y \in G$.*

$xyx^{-1}y^{-1}$ es llamado el conmutador de x e y.

Esta denominación se debe a que

$$(xyx^{-1}y^{-1})(yx) = xy$$

OBS. 4.3. *El producto de dos conmutadores, no necesariamente es un conmutador.*

Por ejemplo, sean $xyx^{-1}y^{-1}$, $aba^{-1}b^{-1}$ dos conmutadores.

$$(xyx^{-1}y^{-1})(aba^{-1}b^{-1}) = xyx^{-1}y^{-1}aba^{-1}b^{-1} \neq mnm^{-1}n^{-1}$$

Ahora, hagamos la colección de todos los productos finitos de conmutadores y denotémoslo por:

$$[G, G] = \{x_1x_2...x_k / x_i = a_ib_ia_i^{-1}b_i^{-1}; a_i, b_i \in G; i = 1, ..., k\}$$

Teorema 4.3. *$[G, G]$ es un subgrupo normal de G, y $G/[G, G]$ es un grupo abeliano.*

Prueba: Sean $x, y \in [G,G]$, entonces son de la forma:

$$x = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} ... a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$$

$$y = p_1 q_1 p_1^{-1} q_1^{-1} p_2 q_2 p_2^{-1} q_2^{-1} ... p_k q_k p_k^{-1} q_k^{-1}$$

$xy = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} ... a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1} p_1 q_1 p_1^{-1} q_1^{-1} ... p_k q_k p_k^{-1} q_k^{-1} \in [G,G]$.

Sea $x \in [G,G]$, entonces:

$$x^{-1} = (a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} ... a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1})^{-1} = b_n a_n b_n^{-1} a_n^{-1} .... b_2 a_2 b_2^{-1} a_2^{-1} b_1 a_1 b_1^{-1} a_1^{-1} \in [G,G]$$

Como $x, x^{-1} \in [G,G]$, entonces $e = xx^{-1} \in [G,G]$.

Así, $[G,G]$ es subgrupo de G.

Sean $z \in G, xyx^{-1}y^{-1} \in [G,G]$.

$$\begin{aligned} z(xyx^{-1}y^{-1})z^{-1} &= zxy(z^{-1}(xy)^{-1}(xy)z)x^{-1}((yz)^{-1}(yz))y^{-1}z^{-1} \\ &= [z(xy)z^{-1}(xy)^{-1}][x(yz)x^{-1}(yz)^{-1}][yzy^{-1}z^{-1}] \in [G,G] \end{aligned}$$

Así, $[G,G]$ es subgrupo normal de G.

Además,

$$[G,G]x[G,G]y = [G,G]xy = [G,G]yx = [G,G]y[G,G]x$$

Pues,

$$xy(yx)^{-1} = xyx^{-1}y^{-1} \in [G,G]$$

Por la proposición 4.5, $G/[G,G]$ es un grupo abeliano. ∎

Teorema 4.4. *Para $x \in G$, definamos $\psi(x) : G \to G$ dada por:*

$$\psi(x)(y) = xyx^{-1}y^{-1}.$$

Entonces, G/C tiene centro no trivial si, y sólo si, existe $x \in G \setminus C$ tal que $\psi(x)(G) \subset C$.

Prueba: Por hipótesis, existe $x \in G$ tal que $Cx \neq C$ y para todo $y \in G$, $xyx^{-1}y^{-1} \in C$.

Así, por la proposición 4.5

$$CxCy = Cxy = Cyx = CyCx.$$

Mostrando que Cx está en el centro de $G \setminus C$, el cual es no trivial.

Recíprocamente, $Cx \neq C$, con Cx en el centro de $G \setminus C$ implica que

$$CxCy = Cxy = Cyx = CyCx$$

Luego, $xy(yx)^{-1} = xyx^{-1}y^{-1} \in C$ para todo $y \in G$.

De donde, existe $x \in Cx \setminus C$ tal que $\psi(x)(G) \subset C$. ∎

Apéndice

Exponencial y Logarítmo de matrices

En este capítulo daremos una introducción a las Normas Matriciales para dar la definición de Exponencial y Logarítmo Matricial.

También veremos qué es lo que ocurre al aplicar dichas funciones a matrices en ciertos grupos.

Veremos la existencia y unicidad de los subgrupos a un parámetro clasificados por medio de esas funciones.

Con el producto corchete, veremos que algunos de los conjuntos de matrices vistos previamente serán en sí grupos.

Definición 4.7. *Una función* $||\cdot|| : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *es una Norma Matricial, si para todo* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *satisface:*

i) $||A|| \geq 0$*; y,* $||A|| = 0$ *si, y sólo si,* $A = 0$

ii) $||cA|| = |c| \cdot ||A||$ *para todo* $c \in \mathbb{C}$

iii) $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$

iv) $||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$

Ejemplo 4.3. *Sea* $A \in M_n(\mathbb{R})$*.*

1)La Norma de la Suma, dada por

$$\|A\| = \sum_{i,j} |a_{ij}|$$

es una Norma Matricial.

En efecto,
i)Como $|a_{ij}| \geq 0$*, entonces*

$$\sum_{i,j} |a_{ij}| \geq 0.$$

Ahora, sea

$$||A|| = \sum_{i,j} |a_{ij}| = 0,$$

entonces $|a_{ij}| = 0$ *para todo* i, j*, así* $A = 0$.

Recíprocamente, $A = 0$*, entonces*

$$||A|| = \sum_{i,j} |a_{ij}| = 0.$$

ii)Sea $c \in \mathbb{C}$,

$$||cA|| = \sum_{i,j} |ca_{ij}| = \sum_{i,j} |c||a_{ij}| = |c| \sum_{i,j} |a_{ij}| = |c| \cdot ||A||$$

iii)Notemos que: $|a_{ij} + b_{ij}| \leq |a_{ij}| + |b_{ij}|$

$$||A + B|| = \sum_{i,j} |a_{ij} + b_{ij}| \leq \sum_{i,j} (|a_{ij}| + |b_{ij}|) \leq \sum_{i,j} |a_{ij}| + \sum_{i,j} |b_{ij}| = ||A|| + ||B||$$

iv)

$$||AB|| = \sum_{i,j} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right| \leq \sum_{i,j} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \cdot |b_{kj}| \right) = \left(\sum_{i,j} |a_{ik}| \right) \left(\sum_{i,j} |b_{kj}| \right) = ||A|| \cdot ||B||$$

2)La Norma del Máximo, dada por

$$||A|| = \max_{i,j} |a_{ij}|$$

no es una Norma Matricial.

En efecto,

i)Como $|a_{ij}| \geq 0$*, entonces* $\max_{i,j} |a_{ij}| \geq 0$ *y así,* $||A|| \geq 0$.

Sea $A = 0$*, entonces* $|a_{ij}| = 0$ *y* $\max_{i,j} |a_{ij}| = 0$*, luego* $||A|| = 0$.

Recíprocamente, $||A|| = 0$*, entonces* $\max_{i,j} |a_{ij}| = a_{ij} = 0$*. Luego,* $A = 0$.

ii)Sea $c \in \mathbb{C}$

$$||cA|| = \max_{i,j} |ca_{ij}| = |c| \max_{i,j} |a_{ij}| = |c| \cdot ||A||$$

iii)

$$||A + B|| = \max_{i,j} |a_{ij} + b_{ij}| \leq \max_{i,j} |a_{ij}| + \max_{i,j} |b_{ij}| = ||A|| + ||B||$$

iv)Sean $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$*, entonces* $AB = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 20 & 0 \end{pmatrix}$.

Notemos que $||A|| = 8, ||B|| = 2$*, entonces* $||A|| \cdot ||B|| = 16$*, pero* $||AB|| = 20$.

De donde, $||AB|| \nleq ||A|| \cdot ||B||$.

Por tanto, $||A|| = \max_{i,j} |a_{ij}|$ *no es una norma matricial.*

3)La Norma dada por

$$||A|| = n \max_{i,j} |a_{ij}|;$$

donde n es el tamaño de la matriz A, es una norma matricial.

En efecto,

i)Como $n \geq 0$ y $|a_{ij}| \geq 0$, entonces $||A|| \geq 0$.

Sea $||A|| = 0$, entonces $n \max_{i,j} |a_{ij}| = 0$, de donde $\max_{i,j} |a_{ij}| = 0$.

Así, $|a_{ij}| = a_{ij} = 0$ y $A = 0$.

Recíprocamente, $A = 0$, entonces $n \max_{ij} |a_{ij}| = 0$.

Luego, $||A|| = 0$.

ii)Sea $c \in \mathbb{C}$,

$$||cA|| = n \max_{i,j} |ca_{ij}| = n|c| \max_{i,j} |a_{ij}| = |c| n \max_{i,j} |a_{ij}| = |c| \cdot ||A||$$

iii)

$$||A + B|| = n \max_{i,j} |a_{ij} + b_{ij}| \leq n(\max_{i,j} |a_{ij}| + \max_{i,j} |b_{ij}|) = n \max_{i,j} |a_{ij}| + n \max_{i,j} |b_{ij}| = ||A|| + ||B||$$

iv)

$$\begin{aligned} ||AB|| = n \max_{i,j} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right| &\leq n \max_{i,j} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}||b_{kj}| \\ &\leq n \sum_{k=1}^{n} \left(\max_{i,j} |a_{ik}| \right) \left(\max_{i,j} |b_{kj}| \right) \\ &\leq n \sum_{k=1}^{n} \frac{||A||}{n} \frac{||B||}{n} \\ &= n \frac{||A||}{n} \frac{||B||}{n} \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= n \frac{||A||}{n} \frac{||B||}{n} n \\ &= ||A|| \cdot ||B||. \end{aligned}$$

Los resultados que daremos a continuación son análogas para $\mathbb{C}$ y $\mathbb{H}$.

Por ello, para las demostraciones utilizaremos el Criterio del Cociente aplicada a matrices reales.

4.4. Exponencial Matricial:

Definición 4.8. *Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$.*

La exponencial de A, está determinada por la serie

$$\exp(A) = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + ... \tag{4.1}$$

donde, $A^0 = I, \quad A^{m+n} = A^m A^n.$

Decimos que la serie 5.1 converge, si cada una de las n^2 *series reales convergen; es decir,*

$$(I)_{ij} + (A)_{ij} + \frac{(A^2)_{ij}}{2!} + \frac{(A^3)_{ij}}{3!} + ...$$

converge para todo $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Teorema 4.5. *Para cualquier matriz* $A \in M_n(\mathbb{R})$, *la serie de la exponencial*

$$I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + ...$$

converge

Prueba: Demostraremos que las n^2 series convergen.

Para ello, denotemos por m al elemento más grande de A; es decir, $\max_{i,j} |a_{ij}| = m$.

Aplicando la Norma Matricial

$$||A|| = n \max_{i,j} |a_{ij}| :$$

$||I|| = n$, $||A|| = nm$, $||A^2|| \leq n^2m^2$,..., $||A^{k-1}|| \leq n^{k-1}m^{k-1}$, $||A^k|| \leq n^k m^k$,...

Pues,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$|A_{ij}| = n \max_{i,j} |a_{ij}| = nm.$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \sum_k a_{1k}a_{k1} & \sum_k a_{1k}a_{k2} & \cdots & \sum_k a_{1k}a_{kn} \\ \sum_k a_{2k}a_{k1} & \sum_k a_{2k}a_{k2} & \cdots & \sum_k a_{2k}a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_k a_{nk}a_{k1} & \sum_k a_{nk}a_{k2} & \cdots & \sum_k a_{nk}a_{kn} \end{pmatrix}$$

$|A^2_{ij}| = \max_{i,j} |\sum_k a_{ik}a_{kj}| = \sum_k (\max_{i,j} |a_{i1}|)(\max_{i,j} |a_{j1}|) = \sum_k mm = nm^2.$

$$A^3 = \begin{pmatrix} \sum_s(\sum_k a_{1k}a_{ks})a_{s1} & \sum_s(\sum_k a_{1k}a_{ks})a_{s2} & \cdots & \sum_s(\sum_k a_{1k}a_{ks})a_{sn} \\ \sum_s(\sum_k a_{2k}a_{ks})a_{s1} & \sum_s(\sum_k a_{2k}a_{ks})a_{s2} & \cdots & \sum_s(\sum_k a_{2k}a_{ks})a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_s(\sum_k a_{nk}a_{ks})a_{s1} & \sum_s(\sum_k a_{nk}a_{ks})a_{s2} & \cdots & \sum_s(\sum_k a_{nk}a_{ks})a_{sn} \end{pmatrix}, ...$$

$|A^3_{ij}| = \text{máx}\, i,j| \sum_s (\sum_k a_{ik}a_{ks})a_{sj}| = \sum_s (\text{máx}_{i,j} \mid \sum_k a_{ik}a_{ks}|)(\text{máx}_{i,j} \, |a_{sj}) = \sum_s nm^2m = n^2m^3$,...

Considerando para cada $i, j \in \{1, ..., n\}$, la siguiente serie de términos positivos

$$a_1 = n, \quad a_2 = nm, \quad a_3 = \frac{n^2m^2}{2!}, ..., \quad a_k = \frac{n^{k-1}m^{k-1}}{(k-1)!}, \quad a_{k+1} = \frac{n^km^k}{k!}, ...$$

Aplicando el Criterio del Cociente,

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{n^km^k}{k!} \frac{(k-1)!}{n^{k-1}m^{k-1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{nm}{k} \right| = 0 < 1.$$

Entonces como n y m son fijos, la serie converge (absolutamente). ■

Proposición 4.6. *Sean* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$*.*
Si $AB = BA$*, entonces* $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$*.*

Prueba: Usaremos la siguiente:

Afirmación 7. *Sean* $A, B, Q \in M_n(\mathbb{R})$*.*
Si $AQ = QB$*, entonces* $\exp(A)Q = Q\exp(B)$*.*

En efecto, como $AQ = QB$, entonces $A^jQ = QB^j$ para cada $j \in \mathbb{N}$.

Por inducción sobre j,

$$A^2Q = A(AQ) = A(QB) = (AQ)B = (QB)B = QB^2$$
$$A^3Q = A(A^2Q) = AQB^2 = QBB^2 = QB^3$$

Sea $A^{k-1}Q = QB^{k-1}$ nuestra hipótesis de inducción, entonces

$$A^kQ = A(A^{k-1}Q) = AQB^{k-1} = QBB^{k-1} = QB^k.$$

$$\exp(A)Q = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right) Q = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A^kQ)}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(QB^k)}{k!} = Q \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} \right) = Q\exp(B).$$

Veamos la derivada de la exponencial, respecto de t

$$\begin{aligned}
\exp'(tA) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{t^{k-1}}{k!} A^k \right) \\
&= A \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^{k-1} \right) \\
&= A \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} A^r \right) \\
&= A\exp(tA).
\end{aligned}$$

Aplicando la derivada al producto $\exp(tA)\exp(tB)$ y por la afirmación 7, $B\exp(tC) = \exp(tC)B$

$$\begin{aligned}(\exp(tA)\exp(tB))' &= \exp'(tA)\exp(tB) + \exp(tA)\exp'(tB)\\ &= A\exp(tA)\exp(tB) + \exp(tA)B\exp(tB)\\ &= A\exp(tA)\exp(tB) + B\exp(tA)\exp(tB)\\ &= (A+B)\exp(tA)\exp(tB).\end{aligned}$$

De Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, la solución de

$$\dot{x} = Ax; \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad A \in M_n(\mathbb{R}), \quad x(0) = x_0$$

es $x(t) = \exp(A)x_0$.

Consideremos las ecuaciones:

$\dot{x}_1 = (A+B)x_1$, cuya solución es $x_1(t) = \exp t(A+B)x_{01}$

$\dot{x}_2 = (A+B)x_2$, cuya solución es $x_2(t) = \exp(tA)\exp(tB)x_{02}$.

Por la unicidad de las soluciones, x_1 es la única solución de $\dot{x}_2$.
Así,

$$\exp t(A+B)x_0 = (\exp tA)(\exp tB)x_0; \quad \text{para todo} \quad x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Con $t = 1$, $\exp(A+B) = (\exp A)(\exp B)$. ∎

Corolario 4.6. *Para cualquier $A \in M_n(\mathbb{R})$, la exponencial de A es no singular.*

Prueba: Como $A(-A) = -A^2 = (-A)A$, entonces por la proposición 5.1:

$$I = \exp(0) = \exp(A + (-A)) = \exp(A)\exp(-A).$$

Entonces,

$$1 = \det I = \det(\exp(A))\det(\exp(-A)).$$

Luego,

$$\det(\exp(A)) \neq 0.$$

∎

OBS. 4.4. *De lo anterior, precisamos el codominio de la exponencial.*

$$\exp : M_n(\mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R}).$$

Proposición 4.7. *Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es antisimétrica, entonces la exponencial de A es ortogonal.*

Prueba: Recordemos que

$$O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) / AA^t = I = A^tA\}$$

$$so(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) / A + A^t = 0\}$$

A es antisimétrica, entonces $A + A^t = 0$ ó $A^t = -A$.

Como $AA^t = A(-A) = -A^2 = (-A)A = A^tA$ y por la proposición 5.1,

$$I = \exp(0) = \exp(A + A^t) = \exp(A)\exp(A^t) = \exp(A)[\exp(A)]^t$$

■

OBS. 4.5. *Se sigue que*

$$\exp : so(n) \to O(n).$$

Ejemplo 4.4. *Una matriz antisimétrica en* $M_2(\mathbb{R})$ *es de la forma* $\begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}$.
Calculemos su exponencial:

$$A^0 = I, \quad A = x\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = xU, \quad A^2 = xUxU = x^2U^2 = x^2(-I) = -x^2I, \quad A^3 = -x^3U, \quad A^4 = x^4I, ...$$

$$\begin{aligned} \exp(A) &= I + xU + (-x^2)\frac{I}{2!} + (-x^3)\frac{U}{3!} + x^4\frac{I}{4!} + ... \\ &= I\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ...\right) + U\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ...\right) \\ &= I\cos x + U\sin x \\ &= \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La cual es una rotación de x *grados en el plano.*

Como $\det(\exp A) = 1$, *entonces* $\exp(A) \in SO(2)$.

OBS. 4.6. *Sea* $A \in M_n(\mathbb{R})$.
Si la exponencial de A *es la matriz* $I \in M_n(\mathbb{R})$, *no necesariamente* $A = 0$ *matriz nula.*

Pues, sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{pmatrix}$.

Entonces por el ejemplo 5.2, $\exp(A) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi) & \sin(2\pi) \\ -\sin(2\pi) & \cos(2\pi) \end{pmatrix} = I$.

Proposición 4.8. *Sean* $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, *con* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ *y* B *no singular.*
Entonces

$$\exp(BAB^{-1}) = B\exp(A)B^{-1}.$$

Prueba: Primeramente notemos que:

$$(BAB^{-1})^n = (BAB^{-1})(BAB^{-1})...(BAB^{-1}) = BA^nB^{-1}$$

$$B(C+D)B^{-1} = BCB^{-1} + BDB^{-1}$$

$$\begin{aligned}
\exp(BAB^{-1}) &= I + (BAB^{-1}) + \frac{(BAB^{-1})^2}{2!} + ... \\
&= I + BAB^{-1} + \frac{BA^2B^{-1}}{2!} + ... \\
&= B(I + A + \frac{A^2}{2!} + ...)B^{-1} \\
&= B\exp(A)B^{-1}.
\end{aligned}$$

■

4.5. Logarítmo Matricial:

Sabemos que en los reales el logaritmo está definido sólo para números mayores que 0, lo cual nos motiva a la definición siguiente

Definición 4.9. *Sea $X \in M_n(\mathbb{R})$, el logaritmo de X está dado por la serie*

$$\log(X) = (X-I) - \frac{(X-I)^2}{2} + \frac{(X-I)^3}{3} - \frac{(X-I)^4}{4} + ...$$

Teorema 4.7. *Para $X \in M_n(\mathbb{R})$ cerca de la matriz identidad I, la serie del logaritmo converge.*

Prueba: Sea $Y = X - I$ y supongamos que $|y_{ij}| < \epsilon$, para $\epsilon > 0$.

Por la definición de Norma Matricial,

$$\left|\left|Y - \frac{Y^2}{2} + \frac{Y^3}{3} - ...\right|\right| \leq ||Y|| + \frac{||Y||^2}{2} + \frac{||Y||^3}{3} + ...$$

Sea $Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}$

$|Y_{ij}| = |y_{ij}| < \epsilon$.

$$Y^2 = \begin{pmatrix} \sum_k y_{1k}y_{k1} & \sum_k y_{1k}y_{k2} & \cdots & \sum_k y_{1k}y_{kn} \\ \sum_k y_{2k}y_{k1} & \sum_k y_{2k}y_{k2} & \cdots & \sum_k y_{2k}y_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_k y_{nk}y_{k1} & \sum_k y_{nk}y_{k2} & \cdots & \sum_k y_{nk}y_{kn} \end{pmatrix}, k \in \{1, ..., n\}$$

$|Y^2_{ij}| = |\sum_k y_{ik}y_{kj}| = \sum_k |y_{ik}y_{kj}| < \sum_k \epsilon^2 = n\epsilon^2$.

$$Y^3 = \begin{pmatrix} \sum_s(\sum_k y_{1k}y_{ks})y_{s1} & \sum_s(\sum_k y_{1k}y_{ks})y_{s2} & \cdots & \sum_s(\sum_k y_{1k}y_{ks})y_{sn} \\ \sum_s(\sum_k y_{2k}y_{ks})y_{s1} & \sum_s(\sum_k y_{2k}y_{ks})y_{s2} & \cdots & \sum_s(\sum_k y_{2k}y_{ks})y_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_s(\sum_k y_{nk}y_{ks})y_{s1} & \sum_s(\sum_k y_{nk}y_{ks})y_{s2} & \cdots & \sum_s(\sum_k y_{nk}y_{ks})y_{sn} \end{pmatrix}, k, s \in \{1, ..., n\}, ...$$

$|Y^3_{ij}| = |\sum_s(\sum_k y_{1k}y_{ks})y_{s1}| = \sum_s |\sum_k y_{1k}y_{ks}||y_{s1}| < \sum_s n\epsilon^2\epsilon = n^2\epsilon^3, ...$

Como $||Y|| \leq \epsilon$, $||Y||^2 \leq n\epsilon^2$,..., $||Y||^k \leq n^{k-1}\epsilon^k$, $||Y||^{k+1} \leq n^k\epsilon^{k+1}$,...

Consideremos la serie

$$a_1 = \epsilon, \quad a_2 = \frac{1}{2}n\epsilon^2, ..., a_k = \frac{1}{k}n^{k-1}\epsilon^k, a_{k+1} = \frac{1}{k+1}n^k\epsilon^{k+1}, ...$$

Aplicando el Criterio del Cociente,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k+1}n^k\epsilon^{k+1}}{\frac{1}{k}n^{k-1}\epsilon^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1}n\epsilon = n\epsilon$$

Si hacemos que $\epsilon < \frac{1}{n}$, entonces

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = n\epsilon < n\frac{1}{n} = 1.$$

Por tanto, la serie converge. ■

Proposición 4.9. *Sean $U, V, I, 0 \in M_n(\mathbb{R})$, tales que U es un entorno de I donde el logaritmo está definido y V es un entorno del 0 tal que $\exp(V) \subset U$. Entonces:*

i)Para $X \in U$, $\exp(\log X) = X$.

ii)Para $A \in V$, $\log(\exp(A)) = A$.

Proposición 4.10. *Sean $X, Y, I \in M_n(\mathbb{R})$.*
Si X, Y están cerca de I y $\log X, \log Y$ conmutan, entonces:

$$\log(XY) = \log X + \log Y$$

Prueba: Por las proposiciones 5.1 y 5.4,

$\exp(\log XY) = XY = \exp(\log X)\exp(\log Y) = \exp(\log X + \log Y)$.

Sean $\log XY = A$ y $\log X + \log Y = B$, entonces $\exp A = \exp B$.

Nuevamente por la proposición 5.4, $A = \log(\exp A) = \log(\exp B) = B$.

Por tanto,

$$\log(XY) = \log X + \log Y.$$

■

Corolario 4.8. *Sean $X, I \in M_n(\mathbb{R})$.*
Si X está cerca de I y es ortogonal, entonces el logarítmo de X es antisimétrica.

Prueba: Por hipótesis, $XX^t = I = X^tX$ ó $X^t = X^{-1}$, entonces:

$$\log(X^t) = \log(X^{-1}) = -\log(X)$$

$$\log(X)\log(X^t) = -\log(X)^2 = \log(X^t)\log(X)$$

Por la proposición 5.5,

$0 = \log I = \log XX^t = \log X + \log X^t = (\log X) + (\log X)^t.$

Por tanto, el logarítmo de X es antisimétrica. ■

4.6. Subgrupos 1-parámetro:

Definición 4.10. *Sea G un grupo de matrices y $\alpha : \mathbb{R} \to G$ un homomorfismo diferenciable. Entonces decimos que α es un subgrupo a un parámetro.*

Ejemplo 4.5. *Sean $A \in M_n(\mathbb{K}), \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ y consideremos la función exponencial*

$\alpha : \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{K})$, dada por $\alpha(t) = \exp(tA)$.

Sean $t, r \in \mathbb{R}$ y considerando la proposición 5.1,

$$\begin{aligned} \alpha(t+r) &= \exp((t+r)A) \\ &= \exp(tA + rA) \\ &= \exp(tA)\exp(rA) \\ &= \alpha(t)\alpha(r) \end{aligned}$$

Así, $\alpha(t) = \exp(tA)$ es un homomorfismo.

Como $\alpha'(t) = \exp'(tA) = A\exp(tA) = A\alpha(t)$, entonces es un homomorfismo diferenciable.

$\det(\alpha(t)) = \det(\exp tA) \neq 0$, entonces $\alpha(t) \in GL(n, \mathbb{R})$.

$\alpha(0) = \exp t0 = \exp 0 = I$ y $\alpha'(0) = A\alpha(0) = AI = A$.

Por tanto, α es un subgrupo a un parámetro de $GL(n, \mathbb{R})$.

Teorema 4.9. *Sea α un subgrupo a un parámetro de $GL(n, \mathbb{K})$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$. Entonces existe $A \in M_n(\mathbb{K})$ tal que*

$$\alpha(u) = \exp(uA).$$

Prueba: Consideremos $\sigma : (a, b) \to M_n(\mathbb{K})$ una curva diferenciable dada por $\sigma(u) = \log(\alpha(u))$.

Como α es un subgrupo a un parámetro, entonces es un homomorfismo diferenciable.

Así,

$$\begin{aligned}
\sigma'(u) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sigma(u+h)-\sigma(u)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\log(\alpha(u+h))-\log(\alpha(u))}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\log(\alpha(u)\alpha(h))-\log(\alpha(u))}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\log(\alpha(h))}{h}\\
&= \sigma'(0).
\end{aligned}$$

Pues, como $(uA)(hA)=(hA)(uA)$, entonces:

$$\begin{aligned}
\alpha(u)\alpha(h) &= \exp(uA)\exp(hA)\\
&= \exp(uA+hA)\\
&= \exp(hA+uA)\\
&= \exp(hA)\exp(uA)\\
&= \alpha(h)\alpha(u)
\end{aligned}$$

De donde,

$$\log(\alpha(u)\alpha(h)) = \log(\alpha(u)) + \log(\alpha(h)).$$

Esto prueba que $\sigma'(u)$ es independiente de $u\in(a,b)$ y que $\sigma(u)$ es una línea a través de la matriz nula 0 en $M_n(\mathbb{K})$.

Por lo cual, existe $A\in M_n(\mathbb{R})$ tal que $uA=\sigma(u)=\log(\alpha(u))$.

Por tanto, existe $A\in M_n(\mathbb{K})$ tal que $\alpha(u)=\exp(uA)$. ∎

Teorema 4.10. *Sea $A\in M_n(\mathbb{K})$ un vector tangente a $O(n,\mathbb{K})$. Entonces existe un único subgrupo a un parámetro α en $O(n,\mathbb{K})$ tal que $A=\alpha'(0)$.*

Prueba: Por la hipótesis, existe una curva diferenciable $\rho:(a,b)\to O(n,\mathbb{K})$, tal que $\rho(0)=I$ y $A=\rho'(0)$.

De donde, $\rho(u)\overline{\rho(u)}^t=I$.

Derivando, $\rho'(u)\overline{\rho(u)}^t+\rho(u)\overline{\rho'(u)}^t=I'=0$.

Evaluando en $u=0$,

$$\begin{aligned}
0 &= \rho'(0)\overline{\rho(0)}^t+\rho(0)\overline{\rho'(0)}^t\\
&= AI+I\overline{A}^t\\
&= A+\overline{A}^t
\end{aligned}$$

Por el teorema 5.5, $\alpha(u) = \exp(uA)$ es un subgrupo a un parámetro de $GL(n, \mathbb{K})$, pero

$$\begin{aligned}
\alpha(u)\overline{\alpha(u)}^t &= \exp(uA)\overline{\exp(uA)}^t \\
&= \exp(uA)\exp(u\overline{A}^t) \\
&= \exp u(A + \overline{A}^t) \\
&= \exp(0) = I
\end{aligned}$$

además, $\alpha(0) = I$ y $\alpha'(t) = A\exp(tA)$, entonces $\alpha'(0) = A$.

Por lo cual $\alpha : \mathbb{R} \to O(n, \mathbb{K})$ es un subgrupo a un parámetro de $O(n, \mathbb{K})$.

Así, existe un único subgrupo a un parámetro en $O(n, \mathbb{K})$ que es $\rho(u) = \alpha(u) = \exp(uA)$ tal que $\alpha'(0) = \rho'(0) = A$. ∎

Definición 4.11. *Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$, para $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$.*
La traza de A; denotada por $Tr(A)$, es la suma de los elementos de la diagonal de A.

Proposición 4.11. *Sean $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ y $a \in \mathbb{R}$.*
La traza de una matriz satisface:

i) $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$

ii) $Tr(aA) = aTr(A)$

iii) Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ ó $A \in M_n(\mathbb{C})$, entonces $Tr(AB) = Tr(BA)$

iv) $Tr(I) = n$

v) Si B es no singular, entonces $Tr(BAB^{-1}) = Tr(A)$

Prueba: i) y ii). Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $A, B \in M_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned}
Tr(aA + bB) &= [(aa_{11} + bb_{11}) + (aa_{22} + bb_{22}) + ... + (aa_{nn} + bb_{nn})] \\
&= a(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}) + b(b_{11} + b_{22} + ... + b_{nn}) \\
&= aTr(A) + bTr(B).
\end{aligned}$$

iii)Si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, para $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, entonces $a_{is}b_{sj} = b_{sj}a_{is}$ para $i, j, s = 1, .., n$.

$$Tr(AB) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij}\right) = Tr(BA)$$

iv)

$$Tr(I) = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

v)

$$Tr(BAB^{-1}) = Tr(B(AB^{-1})) = Tr((AB^{-1})B) = Tr(A(B^{-1}B)) = Tr(AI) = Tr(A).$$

∎

4.7. Álgebras de Lie:

Recordemos que:

$$so(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) / A + A^t = 0\}$$
$$su(n) = \{B \in M_n(\mathbb{C}) / B + \overline{B}^t = 0\}$$
$$sp(n) = \{C \in M_n(\mathbb{H}) / C + \overline{C}^t = 0\}$$

Notemos que no son cerrados bajo la multiplicación de matrices.

Por ejemplo, para $x \neq 0$:

$$A \in so(2) \;\Rightarrow\; A = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow\; A^2 = \begin{pmatrix} -x^2 & 0 \\ 0 & -x^2 \end{pmatrix} = -x^2 I$$

Como $I \notin so(2)$, entonces $A^2 \notin so(2)$.

De esta manera consideraremos una aplicación sobre estos conjuntos de matrices, de tal forma que éstos sean grupos bajo la multiplicación.

Definición 4.12. *Sean $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, para $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$.*
Definimos una operación sobre $M_n(\mathbb{K})$, $[,]$ dada por:

$$[A, B] = AB - BA$$

llamada Corchete de Lie.

Proposición 4.12. *$so(n)$, $su(n)$ y $sp(n)$ son cerrados bajo la operación $[,]$.*

Prueba: Como $A, B \in \{so(n), su(n), sp(n)\}$, entonces $A + \overline{A}^t = 0$ y $B + \overline{B}^t = 0$.

$$\begin{aligned}
[A,B] + \overline{[A,B]}^t &= AB - BA + \overline{(AB - BA)}^t \\
&= AB - BA + \overline{B}^t\overline{A}^t - \overline{A}^t\overline{B}^t \\
&= AB + (A\overline{B}^t - A\overline{B}^t) - BA + (-B\overline{A}^t + B\overline{A}^t) + \overline{B}^t\overline{A}^t - \overline{A}^t\overline{B}^t \\
&= A(B + \overline{B}^t) - (A + \overline{A}^t)\overline{B}^t - B(A + \overline{A}^t) + (B + \overline{B}^t)\overline{A}^t \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Pues, dadas $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$, entonces:

$$
\begin{aligned}
(AB)^* &= \begin{pmatrix} \sum_k a_{1k}b_{k1} & \sum_k a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum_k a_{1k}b_{kn} \\ \sum_k a_{2k}b_{k1} & \sum_k a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum_k a_{2k}b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_k a_{nk}b_{k1} & \sum_k a_{nk}b_{k2} & \cdots & \sum_k a_{nk}b_{kn} \end{pmatrix}^* \\
&= \begin{pmatrix} \sum_k \bar{b}_{k1}\bar{a}_{1k} & \sum_k \bar{b}_{k2}\bar{a}_{1k} & \cdots & \sum_k \bar{b}_{kn}\bar{a}_{1k} \\ \sum_k \bar{b}_{k1}\bar{a}_{2k} & \sum_k \bar{b}_{k2}\bar{a}_{2k} & \cdots & \sum_k \bar{b}_{kn}\bar{a}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_k \bar{b}_{k1}\bar{a}_{nk} & \sum_k \bar{b}_{k2}\bar{a}_{nk} & \cdots & \sum_k \bar{b}_{kn}\bar{b}_{nk} \end{pmatrix}^t \\
&= \begin{pmatrix} \sum_k \bar{b}_{k1}\bar{a}_{1k} & \sum_k \bar{b}_{k1}\bar{a}_{2k} & \cdots & \sum_k \bar{b}_{k1}\bar{a}_{nk} \\ \sum_k \bar{b}_{k2}\bar{a}_{1k} & \sum_k \bar{b}_{k2}\bar{a}_{2k} & \cdots & \sum_k \bar{b}_{k2}\bar{a}_{nk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_k \bar{b}_{kn}\bar{a}_{1k} & \sum_k \bar{b}_{kn}\bar{a}_{2k} & \cdots & \sum_k \bar{b}_{kn}\bar{b}_{nk} \end{pmatrix}^t \\
&= B^*A^*
\end{aligned}
$$

■

Proposición 4.13. *Sean* $A, B, C \in M_n(\mathbb{K})$ *, para* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ *y* $r \in \mathbb{R}$. *Entonces el corchete* $[,]$ *de la definición 5.6 satisface*

i) $[A, B] = -[B, A]$

ii) $[A, B + C] = [A, B] + [A, C], \quad [A + B, C] = [A, C] + [B, C]$

iii) $r[A, B] = [rA, B] = [A, rB]$

iv) Identidad de Jacobi $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$

Prueba: i)

$$[A, B] = AB - BA = -(BA - AB) = -[B, A]$$

ii)

$$
\begin{aligned}
[A, B + C] &= A(B + C) - (B + C)A \\
&= AB + AC - BA - CA \\
&= AB - BA + AC - CA \\
&= [A, B] + [A, C]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[A + B, C] &= (A + B)C - C(A + B) \\
&= AC + BC - CA - CB \\
&= AC - CA + BC - CB \\
&= [A, C] + [B, C]
\end{aligned}
$$

iii)

$$\begin{aligned} r[A,B] &= r(AB-BA) \\ &= (rA)B - B(rA) \\ &= [rA,B] \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} r(AB-BA) &= A(rB)-(rB)A \\ &= [A,rB] \end{aligned}$$

Así, $r[A,B]=[rA,B]=[A,rB]$.
iv)

$$\begin{aligned} [A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]] &= [A,BC-CB]+[B,CA-AC]+[C,AB-BA] \\ &= A(BC-CB)-(BC-CB)A+B(CA-AC) \\ &\quad -(CA-AC)B+C(AB-BA)-(AB-BA)C \\ &= ABC-ACB-BCA+CBA+BCA-BAC \\ &\quad -CAB+ACB+CAB-CBA-ABC+BAC \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Definición 4.13. *Un espacio vectorial con el corchete $[,]$ como su producto, que satisface la proposición 5.8 es llamado un Álgebra de Lie.*

Ejemplo 4.6. *1) Sean $x,y\in\mathbb{R}$, entonces*

$$[x,y]=x[1,y]=xy[1,1]=(xy)0=0.$$

Luego, el corchete $[,]$ es trivial para todo $x,y\in\mathbb{R}$.

2) Consideremos $i=(1,0,0), j=(0,1,0), k=(0,0,1)\in\mathbb{R}^3$ y recordemos que $i^2=j^2=k^2=-1$.

Definimos $[i,j]=ij=k$, $[j,k]=jk=i$ y $[k,i]=ki=j$.

Este corchete satisface la proposición 5.8 pero no la Identidad de Jacobi.

En efecto,
i)

$$[i,j]=ij=k=-(ji)=-[j,i]$$

$$[j,k]=jk=i=-(kj)=-[k,j]$$

$$[k,i]=ki=j=-(ik)=-[i,k]$$

ii)

$$[i+j,k] = (i+j)k = ik + jk = [i,k] + [j,k]$$

$$[i,j+k] = i(j+k) = ij + ik = [i,j] + [i,k]$$

Análogamente con los otros casos.

iii)Sea $r \in \mathbb{R}$

$$r[i,j] = r(ij) = (ri)j = [ri,j]$$

y,

$$r[i,j] = r(ij) = i(rj) = [i,rj]$$

Análogamente con los otros casos.

iv)

$$[i+[j,k]] + [j,[k,i]] + [k,[i,j]] = [i,i] + [j,j] + [k,k] = -3 \neq 0.$$

3) Sea $V = \{A, B \in M_n(\mathbb{K}) / AB = BA\}$*, para* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$*.*

El corchete $[,]$ *dado por*

$$[A,B] = AB - BA$$

es el corchete trivial en V*.*

Pues $[A,B] = 0$*, para todo* $A, B \in V$*.*

4) $sl(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{K}) / Tr(A) = 0\}$*, para* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$*. Sean* $X, Y \in sl(n)$*, entonces*

$$\begin{aligned} Tr([X,Y]) &= Tr(XY - YX) \\ &= Tr(XY) - Tr(YX) \\ &= Tr(XY) - Tr(XY) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Tomando en cuenta la proposición 5.6.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En el desarrollo del Proyecto de Grado, se enfatizó la clasificación de grupos de matrices cuyas entradas están en son reales, complejas o cuaterniónicas, dando especial atención al Grupo Simpléctico.

Para su comprensión se hizo uso de la Teoría Matricial y del Álgebra Lineal para dar una exacta descripción de dichos grupos.

El resultado central es el de encontrar alguna relación entre el Grupo Simpléctico y algún otro grupo de matrices, y a la vez encontrar alguna relación entre los grupos de matrices detallados en este trabajo.

Además de presentar una serie de resultados referentes a la Exponencial y Logaritmo de matrices.

Estos grupos de matrices aquí estudiados, sirven para realizar el estudio del Toro Maximal con el estudio de su topología, la conjugación de sus toros maximales y estudiar las relaciones entre ellos, sus dimensiones, centros y rango.

Bibliografía

[1] Morton L. Curtis, *Matrix Groups*, Springer Verlag, 1979.

[2] Roger Horn, Charles Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge, 1985.

[3] Elon Lages Lima, *Álgebra Lineal*, IMPA, Brasil, 1965.

[4] Peter Lancaster, *Análisis Matricial*.

[5] Pierre de la Harpe, *Aritmética y complementos del Álgebra Lineal*