

UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS
FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES
CARRERA DE MATEMÁTICA



DESCOMPOSICIÓN DE MORSE

(Teoría Sistemas Dinámicos)

Autor: Univ. Willy Alejandro Apaza Pérez.

Tutor: Dr. Efraín Cruz Mullisaca.

PROYECTO DE GRADO PRESENTADA PARA LA OBTENCIÓN
DEL TÍTULO DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

LA PAZ-BOLIVIA

2011

Descomposición de Morse

(Teoría Sistemas Dinámicos)

Por

Willy Alejandro Apaza Pérez.

REMITIDO EN CUMPLIMIENTO PARCIAL DE LOS
REQUISITOS PARA LA OBTENCIÓN DEL GRADO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICA
EN LA
UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS.

LA PAZ-BOLIVIA

JULIO 2011

*A mis queridos padres
Nicolás y Teodora.*

Índice general

Agradecimientos	IV
Introducción	V
1. Preliminares	1
1.1. Sistemas Dinámicos Topológicos	1
1.1.1. Sistemas Dinámicos continuos	2
1.1.2. Órbitas, órbitas periódicas	4
1.2. Conjuntos Límites	6
1.2.1. Topológicamente transitiva, mixing	19
2. Atractores, Repulsores y Cadenas	25
2.1. Atractores	25
2.2. Repulsores	27
2.2.1. Par Atractor-Repulsor y Descomposición del Espacio de fases .	28
2.3. Cadenas	33
2.3.1. Cadena Transitiva	34
2.3.2. Cadena Recurrente	36
2.4. Conjunto Cadena Límite y Atractores	47
3. DESCOMPOSICIÓN DE MORSE	51
3.1. Descomposición de Morse	51
3.1.1. Descomposición Morse Fina	56
3.1.2. Sistemas Perturbados	58
3.2. Descomposición de Morse y Atractores	59
3.3. Descomposición de Morse y Cadena Recurrente	64
4. Conclusiones y Recomendaciones	67

A. Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales	71
A.1. Ecuaciones y sistemas autónomos	72
A.1.1. Soluciones y órbitas	73
A.2. Teoría cualitativa ecuaciones autónomas	76
A.3. Teoría cualitativa de sistemas planos	77
A.3.1. Cálculo de los puntos críticos	77

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer en primer lugar a Dios; claramente mis estudios se vieron privilegiados al contar con el profesor Efraín Cruz, mi profesor tutor por todas sus sugerencias y apoyo durante la elaboración de este trabajo con el cual no sólo se aprende un montón de matemática, sino que se gana una amistad más, del mismo modo quiero agradecer al Seminario "Sistemas de Control Bilineal" de la carrera de Matemática que esta a cargo del Prof. Efraín Cruz, que me acogió desde los inicios de este trabajo, brindándome un grato ambiente de trabajo, con las mejores consideraciones científicas y humanas; y por brindarme la oportunidad de poder desarrollarme matemáticamente. Expresar mi gratitud al M. Sc. Miguel Yucra, M. Sc. Willy Condori y M. Sc. Charly Lozano que confiaron en mi. Y claro, a quienes de una u otra forma contribuyeron en mi formación matemática, a mis profesores.

Por supuesto, este trabajo nunca hubiera sido posible realizar sin el apoyo, paciencia, confianza y amor de mi familia, muy especialmente de mis padres Nicolás y Teodora, por quienes mi deuda siempre será infinita.

A mi casa de estudios que me entrego la formación académica y valórica que marcara mi camino hacia el futuro. Especialmente a la carrera de Matemática de nuestra universidad.

Quiero agradecer a todos mis compañeros y amigos de carrera Hector, Omar, Vither, Freddy, Nelson, Hugo, Silvia, Paola y tantos otros que será imposible citarlos a todos pero que siempre perduraran en mi pensamiento y que jamás olvidaré, pues con ellos he compartido momentos muy gratos, en lo académico y en lo no académico. Me gustaría terminar con un agradecimiento muy especial a mi hermano Freddy por ser más que mi hermano, mi amigo.

W. Alejandro

Julio, 2011.

INTRODUCCIÓN

Se podrá decir que los sistemas dinámicos es un área "joven" de la matemática, aunque se remontan a Newton con sus estudios de Mecánica Celeste y a Henri Poincaré, quien inicio el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales, pues en ese entonces no todos los problemas de ecuaciones diferenciales se podían resolver; es decir, encontrar su solución explícitamente, pero Poincaré indica que podemos conocer el comportamiento y propiedades de la solución sin conocerla explícitamente esa solución, ya que esta solución define un sistema dinámico. Sin embargo, fue hace apenas unos 40 años que los sistemas dinámicos se establecieron como un área propiamente dicha, gracias al trabajo destacado de matemáticos e ingenieros como: S. Smale, V. Arnold, Lyapunov, etc.

Si tratamos de precisar el concepto de sistema dinámico, podríamos decir burdamente que se trata del estudio de sistemas determinísticos, es decir, consideramos situaciones que dependen de algún parámetro dado, que frecuentemente suponemos es el tiempo, y que varían de acuerdo a las leyes establecidas. De manera que el conocimiento de la situación en un momento dado, nos permite reconstruir el pasado y predecir el futuro. Varios han sido las formas de estudiar el comportamiento de estos sistemas dinámicos como mediante el estudio de la estabilidad, estabilidad asintótica, y en entre otras que es a través de la Descomposición de Morse, la que se desarrollará en este trabajo. El propósito de este trabajo es realizar un análisis de las propiedades de la Descomposición de Morse para sistemas dinámicos continuos en espacios métricos compactos. Para lograr desarrollar estos objetivos introducimos en el primer capítulo algunos conceptos de sistemas dinámicos a tiempo continuo como ser: órbitas (trayectorias), órbitas periódicas y los conjuntos límites que son los puntos alcanzados cuando los tiempos tienden al infinito de las órbitas, para recordar un resultado primordial que es: dado un sistema dinámico continuo $\Phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$; si X es un espacio métrico compacto, entonces para cualquier subconjunto Y no vacío, los conjuntos límites son

distintos del vacío, invariantes y compactos, además si Y es conexo entonces los conjuntos límites son conexos: estas propiedades nos permitirá desarrollar los conceptos de conjuntos atractores y repulsores, dotándoles de estas propiedades; ver la relación con propiedades de topológicamente transitivo y mixing, además de la existencia de conjuntos minimales. En el segundo capítulo estudiamos las propiedades de los conjuntos Atractores y como a partir de un conjunto atractor podemos construir un conjunto repulsor llamado el complementario repulsor (este resultado es válido en el caso de tener un repulsor construir a partir de ello su complemento atractor), lo cual da una propiedad de descomponer el espacio de estados X , fue una de las primeras muestras de la Descomposición de Morse y de cierta forma entender el comportamiento de los sistemas dinámicos (aunque no brindaba mucha información acerca de la dinámica pero fue uno de los inicios del estudio de la Descomposición de Morse); además se desarrollará conceptos de cadenas (recurrentes, transitivas, límites), esta propiedad que cumplen algunos subconjuntos cuyos elementos se pueden conectar a través de órbitas salvo un pequeño margen de error; el cual cumple algunas propiedades topológicas: un subconjunto cerrado Y de un espacio métrico compacto X es cadena transitiva si este es subconjunto del conjunto cadena recurrente y conexo, recíprocamente, si el sistema dinámico en X es cadena transitiva, entonces X es conexo; las componentes conexas del conjunto cadena recurrente (este conjunto es la colección de todos los puntos cadena recurrente) coincide con los conjuntos cadena transitivas maximales (con respecto a la inclusión). Además, el flujo restringido a una componente conexa del conjunto cadena recurrente es una cadena transitiva; y relaciones entre conjuntos Atractores, su complemento repulsor con conjuntos Cadenas Recurrentes. En el tercer capítulo empezamos con la definición de Descomposición de Morse y podremos afirmar que un sistema dinámico continuo en un espacio métrico compacto posee al menos una Descomposición de Morse que sería trivial considerando al espacio mismo como conjunto de Morse, entre las propiedades existe una clase especial de descomposición que es la Descomposición de Morse Fina la cual no siempre tiene un sistema dinámico continuo, para el estudio de ambos la realizaremos a través de algunas equivalencias con Pares Atractor-Repulsor y cadenas transitivas maximales de la siguiente manera:

- Si tenemos una Descomposición de Morse, entonces podemos encontrar una secuencia finita estrictamente creciente de Atractores. Recíprocamente es válida, es decir, si construimos una secuencia finita estrictamente creciente de atractores tal que el más grande sea el espacio de estados, entonces podemos encontrar una

Descomposición de Morse.

- Como mencionamos anteriormente no siempre un sistema dinámico continuo posee una Descomposición de Morse Fina: ver la cardinalidad de las componentes conexas del conjunto cadena recurrente y si esta es finita podemos garantizar la existencia de una Descomposición de Morse Fina, los conjuntos de Morse coinciden con las componentes conexas del conjunto cadena recurrente.



PRELIMINARES

Veremos algunos de los conceptos y definiciones dentro de la teoría de los sistemas dinámicos topológicos.

1.1. Sistemas Dinámicos Topológicos

Un sistema dinámico es una triada (X, G, T) donde X es un conjunto no vacío (espacio métrico, espacio vectorial, espacio topológico, variedad diferenciable, etc.) al que llamamos espacio de fases (o espacio de estados), G es un semigrupo que actúa sobre el espacio X , es decir:

$$\begin{aligned} T : G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\rightarrow T(g, x) \end{aligned}$$

tal que se cumple $T(g, T(h, x)) = T(gh, x)$ y $T(e, x) = x$ para todo $g, h, e \in G$, donde e es el elemento neutro del semigrupo, $x \in X$ además definimos $\forall g \in G; T_g : X \rightarrow X$ se cumple $T_{gh} = T_g \circ T_h$.

A la definición se ha dado diferentes denominaciones, por ejemplo en la teoría de Sistemas Dinámicos podemos identificar tres subcampos entre otros que difieren por la estructura que se le impone sobre el espacio X y la función T . Por ejemplo:

- ❶ DINÁMICA DIFERENCIABLE: Actúan funciones diferenciables sobre Variedades Diferenciales $T_t : X \rightarrow X$.
- ❷ DINÁMICA TOPOLÓGICA: Actúan funciones continuas sobre espacios topológicos, usualmente espacios métricos compactos.
- ❸ TEORÍA ERGÓDICA: Actúan funciones medibles sobre espacios de medida, usualmente espacios de medida finita.

De donde se clasifica en dos ámbitos:

$$\begin{aligned} \star \text{ Sistemas Dinámicos Discretos : } & \begin{cases} G = (\mathbb{N}_0, +) \\ G = (\mathbb{Z}, +) \end{cases} \\ \star \text{ Sistemas Dinámicos Continuos : } & \begin{cases} G = (\mathbb{R}_0^\pm, +) \\ G = (\mathbb{R}, +) \end{cases} \end{aligned}$$

Trabajaremos principalmente con sistemas dinámicos topológicos continuos con el grupo \mathbb{R} , con énfasis en espacios métricos compactos X .

1.1.1. Sistemas Dinámicos continuos

Continuaremos con algunos conceptos y propiedades básicas para sistemas dinámicos continuos sobre espacios métricos compactos con énfasis en la teoría de **Charles Conley**, quien fue uno de los matemáticos en dedicar parte de su vida en estudiar la Descomposición de Morse, a través de conjuntos invariantes; por lo cual su teoría esta orientada a esta, desde el punto de vista de los sistemas dinámicos.

Definición 1.1. *Un flujo o sistema dinámico continuo en un espacio métrico X , esta dada por una función continua $\Phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ tal que satisface $\Phi(0, x) = x$ y $\Phi(t + s, x) = \Phi(t, \Phi(s, x))$; para todo elemento $x \in X$ y números $s, t \in \mathbb{R}$.*

Podemos ver un ejemplo en la cual cumple las propiedades de un sistema dinámico continuo.

Ejemplo 1.1. *Consideremos el sistema dinámico en $X = \mathbb{R}$ dado por:*

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(t, x) \longmapsto \Phi(t, x) = e^t(1 + x) - 1$$

que cumple $\Phi(0, x) = x$ y $\Phi(t + s, x) = \Phi(t, \Phi(s, x))$.

Nota.- Veamos algunas notaciones que usaremos en el desarrollo del tema:

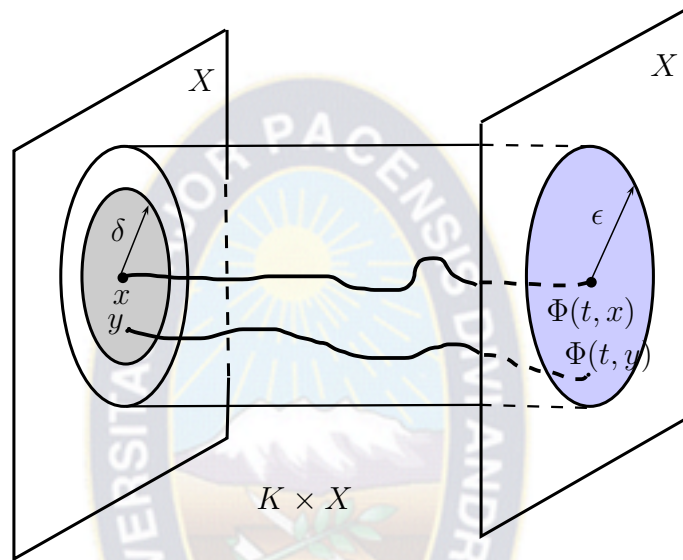
1. Tomemos en cuenta la siguiente notación:

$$\Phi(t, x) = \Phi_t(x) = x \cdot t; \quad \text{para todo } x \in X, t \in \mathbb{R}.$$

2. El sistema reversible Φ^* esta dado por $\Phi^*(t, x) = \Phi(-t, x)$.

3. De aquí en adelante nos referiremos al espacio X como un espacio métrico compacto, salvo que se diga de forma explícita lo contrario.

Ahora recordemos un hecho conocido en análisis (una función continua en un conjunto compacto es uniformemente continua), pero ahora adaptada a sistemas dinámicos en general.



Teorema 1.1. *Dado un sistema dinámico $\Phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ en un espacio métrico compacto X . Para cada punto $x \in X$, subconjunto compacto $K \subset \mathbb{R}$ y cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$d(\Phi(t, x), \Phi(t, y)) < \epsilon$$

para todo $y \in X$ y $t \in K$ tal que $d(x, y) < \delta$.

Demostración. Por la continuidad de Φ en (t, x) , existe $\delta_t > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta_t$ y $|s - t| < \delta_t$, entonces

$$d(\Phi(t, x), \Phi(s, y)) < \frac{\epsilon}{2}$$

Sea $V_t := (t - \delta_t, t + \delta_t)$. La colección $\{V_t : t \in K\}$ es un cubrimiento del conjunto compacto K , nosotros podemos escoger los elementos $t_1, \dots, t_n \in K$ tal que $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_{t_i}$. Tomemos $\delta := \min\{\delta_{t_i} : 1 \leq i \leq n\} > 0$. Ahora observemos que para cada $t \in K$

nosotros tenemos a algún t_i tal que $t \in V_{t_i}$. Así, si $d(x, y) < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} d(\Phi(t, x), \Phi(t, y)) &\leq d(\Phi(t, x), \Phi(t_i, x)) + d(\Phi(t_i, x), \Phi(t, y)) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

□

1.1.2. Órbitas, órbitas periódicas

Las órbitas son a menudo llamados trayectorias en el espacio fase y son los puntos por donde pasa la solución de la dinámica.

Definición 1.2. Sea $\Phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ un flujo, la órbita de x es

$$\mathcal{O}(x) = \{\Phi(t, x) : t \in \mathbb{R}\} = x \cdot \mathbb{R}$$

- La órbita positiva de x es $\mathcal{O}^+(x) = \{\Phi(t, x) : t \geq 0\}$.
- La órbita negativa de x es $\mathcal{O}^-(x) = \{\Phi(t, x) : t \leq 0\}$.

Veamos un ejemplo para ilustrar la diferencia de órbita positiva y negativa; en algunos casos estas serán la misma.

Ejemplo 1.2. Consideremos la ecuación diferencial autónoma:

$$\dot{x} = x(x-1)(x-2)^2(x-3) \text{ en el intervalo } X = [0, 3]$$

Sea $\varphi(t, x)$ la solución de esta ecuación con $\varphi(0, x) = x$, son únicas y existe para todo $t \in \mathbb{R}$.

De aquí definimos un sistema dinámico continuo:

$$\Phi : \mathbb{R} \times [0, 3] \rightarrow [0, 3]$$

$$(t, x) \mapsto \Phi(t, x) = \varphi(t, x)$$

donde tenemos:

$$\mathcal{O}^+(x) = \begin{cases} [x, 1] & \text{si } x \in (0, 1) \\ (1, x] & \text{si } x \in (1, 2) \\ (2, x] & \text{si } x \in (2, 3) \\ \{x\} & \text{si } x = 0, 1, 2, 3 \text{ (puntos fijos)} \end{cases} \quad \mathcal{O}^-(x) = \begin{cases} (0, x] & \text{si } x \in (0, 1) \\ [x, 2) & \text{si } x \in (1, 2) \\ [x, 3) & \text{si } x \in (2, 3) \\ \{x\} & \text{si } x = 0, 1, 2, 3. \end{cases}$$

Cuando estudiamos sistemas dinámicos continuos en \mathbb{R} y si las órbitas se intersecan estas son la misma órbita, esto nos servirá para tener una idea del comportamiento de las órbitas.

Proposición 1.1. *Dos órbitas distintas no se intersecan.*

Demostración.- Supongamos que dos órbitas se intersecan, entonces existe un

$$x \in \mathcal{O}(x_0) \cap \mathcal{O}(x_1).$$

Luego existen $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ tal que $x = \phi(t_0, x_0) = \phi(t_1, x_1)$. Para todo $t \in \mathbb{R}$ se cumple:

$$\begin{aligned} \phi(t, x_0) &= \phi(t - t_0 + t_0, x_0) \\ &= \phi(t - t_0, \phi(t_0, x_0)) \\ &= \phi(t - t_0, x) \\ &= \phi(t - t_0, \phi(t_1, x_1)) \\ &= \phi(t - t_0 + t_1, x_1). \end{aligned}$$

Entonces $\mathcal{O}(x_0) \subset \mathcal{O}(x_1)$. Análogamente se demuestra la otra inclusión. □

En algunos casos los puntos de la solución de la dinámica pueden permanecer en el mismo punto al transcurrir el tiempo o retornar al mismo después de un tiempo determinado, esta clase de puntos nos dará una información inmediata cuando lleguemos a estudiar los conjuntos límites.

Definición 1.3. *Dado un sistema dinámico continuo (flujo) $\Phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ en un espacio métrico compacto X ,*

⇒ *Un punto $p \in X$ se dice **punto fijo** (o de equilibrio) si*

$$\Phi(t, p) = p, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

⇒ *Un punto $p \in X$ se dice **punto periódico** si existe $t > 0$ tal que $\Phi(t, p) = p$. Se llama periodo de p al $\min\{t > 0 : \Phi(t, p) = p\}$.*

Veamos algunos ejemplos para ilustrar estos conceptos:

Ejemplo 1.3. Consideremos el ejemplo 1.2 que tenía como ecuación diferencial autónoma:

$$\dot{x} = x(x-1)(x-2)^2(x-3) \text{ en el intervalo } X = [0, 3]$$

los puntos fijos de este flujo son 0, 1, 2 y 3.

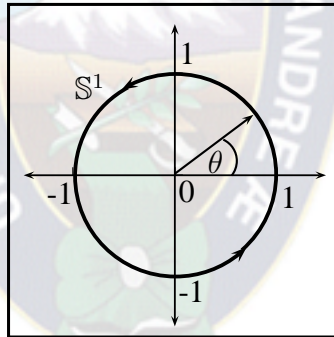
Ejemplo 1.4. Considere la ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{x} = -(x+2)(x^2-1)x^2$$

sobre el intervalo compacto $X = [-2, 1]$. La solución $\varphi(t, x)$ de esta ecuación con $\varphi(0, x) = x$ es única y existe para todo $t \in \mathbb{R}$. Por tanto define un sistema dinámico $\phi : \mathbb{R} \times [-2, 1] \rightarrow [-2, 1]$ a través de $\phi(t, x) = \varphi(t, x)$. Los puntos fijos de este flujo son -2, -1, 0 y 1.

Ejemplo 1.5. Sea el flujo dado por:

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$$



definida en coordenada angular $\Phi(t, e^{\theta i}) = e^{(\theta+t)i}$ en la cual se tiene $\Phi(T, e^{\theta i}) = e^{\theta i}$ para cualquier $e^{\theta i}$ y el período es $T = 2\pi$.

1.2. Conjuntos Límites

Los puntos de adherencia de las órbitas respecto al tiempo juega un papel muy importante y da paso a una nueva definición.

Definición 1.4. Dado un sistema dinámico continuo $\Phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$, el conjunto ω -límite está dado por:

$$\omega(\Phi, x) = \left\{ y \in X : \begin{array}{l} \text{Existen } t_k \rightarrow +\infty \\ \text{tal que } \Phi(t_k, x) \rightarrow y \end{array} \right\}$$

y el conjunto α -límite.

$$\alpha(\Phi, x) = \left\{ y \in X : \begin{array}{l} \text{Existen } t_k \rightarrow -\infty \\ \text{tal que } \Phi(t_k, x) \rightarrow y \end{array} \right\}$$

Nota 1. En el caso de que el sistema sea explícito y no haya problemas de confusión denotaremos $\omega(\Phi, x) = \omega(x)$.

Si la órbita por x_0 es periódica, o si x_0 es un punto fijo, entonces

$$\omega(x_0) = \alpha(x_0) = \mathcal{O}(x_0).$$

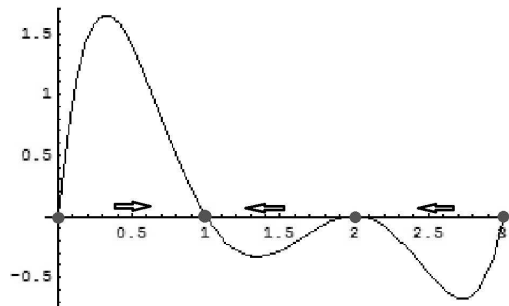
Pues si x_0 es punto fijo es evidente la igualdad anterior, pero si x_0 es periódico de periodo T , definimos $t_n = nT \rightarrow \infty$; donde $n \in \mathbb{N}$ vemos que se cumple $\Phi(t_n, x_0) = x_0 \rightarrow x_0$, i.e. $\mathcal{O}(x_0) \subset \omega(x_0)$, la otra inclusión es inmediata por definición de conjunto límite.

Veamos algunos ejemplos para ilustrar los conceptos hasta aquí vistos:

Ejemplo 1.6. Consideremos el Ejemplo 1.2 que tenía la ecuación diferencial autónoma:

$$\dot{x} = x(x-1)(x-2)^2(x-3) \text{ en el intervalo } X = [0, 3]$$

Para entender mejor veamos el gráfico:



Gráfica de $f(x) = x(x-1)(x-2)^2(x-3)$

De aquí definimos un sistema dinámico continuo:

$$\Phi : \mathbb{R} \times [0, 3] \rightarrow [0, 3]$$

$$(t, x) \mapsto \Phi(t, x) = \varphi(t, x)$$

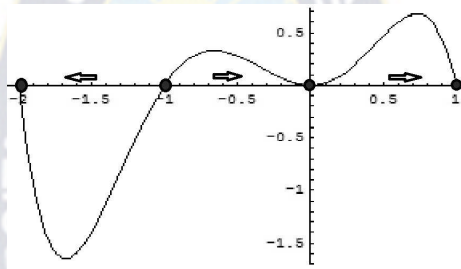
Los conjuntos límites de este sistema son de la siguiente forma:

$$\omega(\Phi, x) = \begin{cases} \{0\} & \text{para } x = 0 \\ \{1\} & \text{para } x \in (0, 2) \\ \{2\} & \text{para } x \in [2, 3) \\ \{3\} & \text{para } x = 3 \end{cases} \quad \alpha(\Phi, x) = \begin{cases} \{0\} & \text{para } x \in [0, 1) \\ \{1\} & \text{para } x = 1 \\ \{2\} & \text{para } x \in (1, 2) \\ \{3\} & \text{para } x \in (2, 3] \end{cases}$$

Ejemplo 1.7. Considere la ecuación diferencial ordinaria dada en el Ejemplo 1.4:

$$\dot{x} = -(x+2)(x^2-1)x^2$$

Gráfica de $f(x) = -(x+2)(x^2-1)x^2$



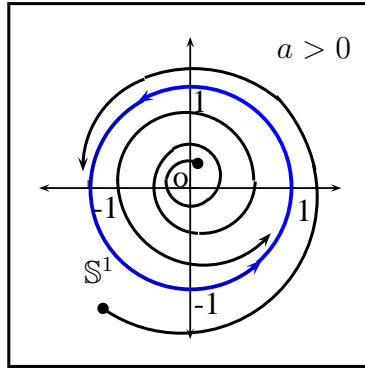
sobre el intervalo compacto $X = [-2, 1]$. La solución $\varphi(t, x)$ de esta ecuación con $\varphi(0, x) = x$ es única y existe para todo $t \in \mathbb{R}$. Por tanto define un sistema dinámico $\phi : \mathbb{R} \times [-2, 1] \rightarrow [-2, 1]$ a través de $\phi(t, x) = \varphi(t, x)$.

Los conjuntos límites de este sistema son de la siguiente forma, para elementos $x \in [-2, 1]$ tenemos:

$$\omega(\phi, x) = \begin{cases} \{1\} & \text{para } x \in (0, 1] \\ \{0\} & \text{para } x \in (-1, 0) \\ \{-1\} & \text{para } x = -1 \\ \{-2\} & \text{para } x \in [-2, -1) \end{cases} \quad \alpha(\phi, x) = \begin{cases} \{1\} & \text{para } x = 1 \\ \{0\} & \text{para } x \in [0, 1) \\ \{-1\} & \text{para } x \in (-2, 0) \\ \{-2\} & \text{para } x = -2 \end{cases}$$

Ejemplo 1.8. Consideremos el sistema dinámico en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, dado por la ecuación diferencial en su forma polar para $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$ y $a \neq 0$

$$\dot{r} = 1 - r, \quad \dot{\theta} = a$$



Para cada $x \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ el ω -límite, $\omega(x) = S^1 = \{(r, \theta), r = 1, \theta \in [0, 2\pi)\}$. El espacio estado $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ no es compacto, el conjunto α -límite existe sólo si $x \in S^1$ y tenemos $\alpha(x) = S^1$.

Puede suceder que las trayectorias de un conjunto dado este siempre contenido en si mismo en el transcurso del tiempo.

Definición 1.5. Un conjunto $K \subset X$ es llamado INVARIANTE si

$$\Phi(t, K) \subset K \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Ahora veamos resultados inmediatos al contar con conjuntos con estas características a través del siguiente lema.

Lema 1.1. Las siguientes afirmaciones son válidas:

- i) La intersección y unión arbitraria de conjuntos invariantes es invariante.
- ii) La clausura de un conjunto invariante es invariante.
- iii) Si U y V son conjuntos invariantes, entonces el conjunto $U \setminus V$ es también invariante.

Prueba.-

i) Consideremos $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha$ la unión de conjuntos invariantes U_α , donde Γ (conjunto de índices).

Sea $x \in \bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha$, entonces existe $\alpha \in \Gamma$ tal que $x \in U_\alpha$, por la invarianza para

cualquier $t \in \mathbb{R}$ tenemos $\Phi(t, x) \in U_\alpha$; por tanto $\Phi(t, x) \in \bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha$.

De forma análoga se procede para la intersección.

- ii) Sea U invariante. Consideremos un elemento $x \in \overline{U}$, entonces existe $x_n \in U$ tal que $x_n \rightarrow x$. Fijamos un $t \in \mathbb{R}$ cualquiera, se cumple por la invarianza de U , $\Phi(t, x_n)$ y la continuidad de Φ :

$$\Phi(t, x_n) \rightarrow \Phi(t, x) \in \overline{U}$$

Así, \overline{U} es invariante.

- iii) Si $U \setminus V = \emptyset$, que es invariante.

Sea $x \in U \setminus V$, supongamos que $\mathcal{O}(x) \cap V \neq \emptyset$, entonces existe $y \in \mathcal{O}(x) \cap V$ de donde tenemos $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(y) \subset V$; contradiciendo $x \notin V$, por tanto

$$\mathcal{O}(x) \subset U \setminus V.$$

□

Para entender mejor este concepto veamos una consecuencia, que nos da ha entender que los puntos en conjuntos invariantes permanecen en esta para cualquier tiempo.

Proposición 1.2. $G \subset X$ es:

Invariante si, y solo si, $\mathcal{O}(x) \subset G$ para todo $x \in G$

Prueba.- Probemos ambos sentidos:

\Rightarrow] Sea G invariante, tomemos $y \in \mathcal{O}(x)$; entonces existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $\Phi(r, x) = y$.

Pero por hipótesis $y = \Phi(r, x) \in \Phi(r, G) \subset G$.

\Leftarrow] Sea $y \in \Phi(t, G)$, para cualquier $t \in \mathbb{R}$.

Entonces existe $u \in G$ tal que $\Phi(t, u) = y$, por tanto $y \in \mathcal{O}(u) \subset G$ (hipótesis); así $y \in G$.

□

Veamos un ejemplo para ilustrar este concepto:

Ejemplo 1.9. Consideremos el sistema dinámico en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, viendo el gráfico del ejemplo 1.8 dado por la ecuación diferencial en su forma polar para $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$ y $a \neq 0$

$$\dot{r} = 1 - r, \quad \dot{\theta} = a.$$

Los conjuntos $S^1 = \{(r, \theta), r = 1, \theta \in [0, 2\pi)\}$, $B_{[0,1]} = \{(r, \theta), r \leq 1, \theta \in [0, 2\pi)\}$ son algunos conjuntos invariantes.

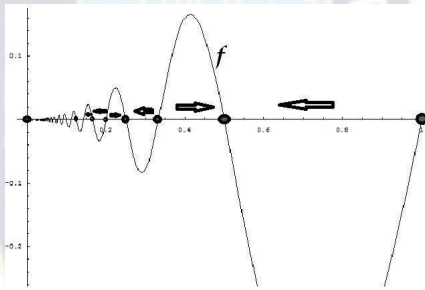
La siguiente definición nos da la noción de cuando en una vecindad existe un conjunto invariante maximal contenida en el, a la cual denominaremos conjunto invariante aislado.

Definición 1.6. Un conjunto compacto $K \subset X$ es llamado INVARIANTE AISLADO, si este es invariante y existe una vecindad N de K tal que $x \cdot \mathbb{R} \subset N$ implica $x \in K$.

Veamos un ejemplo en el cual un conjunto sea invariante pero no aislado:

Ejemplo 1.10. Otro ejemplo es considerado en el intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ la ecuación diferencial

$$\dot{x} = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{\pi}{x}) & \text{para } x \in (0, 1] \\ 0 & \text{para } x = 0 \end{cases}$$



El cual tiene al conjunto unitario $\{0\}$ como un conjunto invariante pero no aislado ya que para cualquier abierto $U(0, \epsilon)$ existirá un punto de la forma $x = \frac{1}{m} < \epsilon$ con m suficientemente grande y que es un punto fijo pero $x \notin \{0\}$.

La siguiente definición de conjunto ω -límite es para un conjunto cualesquiera, la dada anteriormente fue para un punto en particular.

Definición 1.7. El conjunto ω -límite de un subconjunto $Y \subset X$ es definido como:

$$\omega(Y) = \left\{ y \in X, \begin{array}{l} \text{Existen } t_k \rightarrow \infty \text{ e } y_k \in Y \\ \text{tal que } y_k \cdot t_k \rightarrow y \end{array} \right\}.$$

Similarmente,

$$\alpha(Y) = \left\{ y \in X, \begin{array}{l} \text{Existen } t_k \rightarrow -\infty \text{ e } y_k \in Y \\ \text{tal que } y_k \cdot t_k \rightarrow y \end{array} \right\}.$$

Observemos que en general, $\omega(Y)$ será más grande que la unión de todos los $\omega(y)$, $y \in Y$, es decir $\bigcup_{y \in Y} \omega(y) \subset \omega(Y)$.

Lema 1.2. *Si N es un conjunto invariante, entonces $\omega(N) = \overline{N}$ y $\alpha(N) = \overline{N}$.*

Demostración.- Veamos ambas inclusiones:

$\omega(N) \subset \overline{N}$ Sea $z \in \omega(N)$, entonces existe $t_k \rightarrow \infty$ e $y_k \in N$ tal que $\Phi(t_k, y_k) \rightarrow z$; por la invarianza de N , tenemos que $\Phi(t_k, y_k) \in N$; por tanto $z \in \overline{N}$.

$\overline{N} \subset \omega(N)$ Sea $z \in \overline{N}$, entonces existe

$$z_k \rightarrow z \quad \text{donde } z_k \in N,$$

consideremos una secuencia creciente de tiempos $t_k \rightarrow \infty$, por la invarianza de N

tenemos $z'_k = (-t_k, z_k) \in N$ donde vemos que

$$\Phi(t_k, z'_k) \rightarrow z;$$

por tanto $z \in \omega(N)$.

De forma análoga se prueba en el caso de $\alpha(N) = \overline{N}$.

□

Ahora veamos una equivalencia de conjuntos límites que nos permitirá demostrar propiedades de forma óptima más adelante.

Proposición 1.3. *Sea $Y \subset X$. Entonces:*

$$\omega(Y) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{(Y \cdot [t, \infty))}.$$

Similarmente,

$$\alpha(Y) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{(Y \cdot (-\infty, -t])}.$$

Demostración.- Probemos para el conjunto ω -límite:

1) $\boxed{\omega(Y) \subset \bigcap_{t \geq 0} \overline{(Y \cdot [t, \infty))}}$ Sea $y \in \omega(Y)$ entonces existe $t_n \rightarrow \infty$ e $y_n \in Y$ tal que

$$\Phi(t_n, y_n) \rightarrow y$$

y como la secuencia de tiempos es creciente, además si $t_1 < t_2$; tenemos $\overline{\Phi([t_2, \infty), Y)} \subset \overline{\Phi([t_1, \infty), Y)}$ luego:

$$y \in \overline{\Phi([t, \infty), Y)} \quad \text{para todo } t \in [0, \infty).$$

2) $\boxed{\bigcap_{t \geq 0} \overline{(Y \cdot [t, \infty))} \subset \omega(Y)}$ Sea $y \in \bigcap_{t \geq 0} \overline{\Phi([t, \infty), Y)}$, entonces

$$y \in \overline{\Phi([t, \infty), Y)} \quad \text{para todo } t \in [0, \infty)$$

escojamos una secuencia creciente de tiempos $t_n \in [0, \infty)$ e $y_n \in Y$ tal que

$$d(\Phi(t_n, y_n), y) < \frac{1}{n};$$

luego haciendo $n \rightarrow \infty$ obtenemos

$$d(\Phi(t_n, y_n), y) \rightarrow 0.$$

De forma análoga se demuestra para $\alpha(Y)$.

□

Esta equivalencia también es válida para los conjuntos límites en el caso puntual.

Lema 1.3. *Sea $x \in X$. Entonces:*

$$\omega(x) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{(x \cdot [t, \infty))} \quad \alpha(x) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{(x \cdot (-\infty, -t])}.$$

La demostración es inmediata por la Proposición 1.3, considerando $Y = \{x\}$.

En el siguiente teorema mostramos una de las ventajas que obtenemos al estudiar la dinámica en espacios métricos compactos con respecto a los conjuntos límites.

Teorema 1.2. *Dado un sistema dinámico continuo $\Phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$. Si X es un espacio métrico compacto, entonces para cualquier subconjunto $Y \subset X$ no vacío los conjuntos límites:*

1. $\alpha(Y)$, $\omega(Y)$ son distintos del vacío.
2. $\alpha(Y)$, $\omega(Y)$ son invariantes.
3. $\alpha(Y)$, $\omega(Y)$ son compactos.
4. Si Y es conexo, entonces $\omega(Y)$ y $\alpha(Y)$ son conexos.

Demostración.- Demostraremos para el conjuntos ω -límite ya que para el conjunto α -límite se procede de forma análoga:

❶ Distinto del vacío.

Sea Y no vacío, entonces existe $x \in Y$ consideremos la siguiente sucesión:

$$(x, \Phi(1, x), \Phi(2, x), \dots, \Phi(n, x), \dots),$$

en el espacio métrico compacto X entonces posee una sub-sucesión convergente, es decir existe $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\Phi(t_n, x) \rightarrow y$ donde $y \in X$, con ello definimos $t_n \rightarrow \infty$ y $x_n = x \in Y$ donde $\Phi(t_n, x_n) \rightarrow y$.

Así, $y \in \omega(Y)$ por tanto;

$$\omega(Y) \neq \emptyset.$$

❷ Invariante.

Sea $y \in \omega(Y)$, entonces existe $t_n \rightarrow \infty$ y $x_n \in Y$ donde $\Phi(t_n, x_n) \rightarrow y$.

Ahora fijamos $t \in \mathbb{R}$ y por la continuidad de Φ tenemos que $t_n + t \rightarrow \infty$ y $x_n \in Y$ donde

$\Phi(t_n + t, x_n) \rightarrow \Phi(t, y)$, por tanto

$$\Phi(t, y) \in \omega(Y) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

❸ Compacto.

Primero veamos que es cerrado.

Sea r un punto de acumulación de $\omega(Y)$, entonces para todo entorno V de r existe $y \in V \cap \omega(Y)$ por el cual existe $x_n \in Y$ y $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\Phi(t_n, x_n) \rightarrow y$ por la definición de límite, existe algún $T = t_n$ (para cierto n) que puede elegirse tan grande como se quiera, entonces podemos construir de forma que $\Phi(T_j, x_j) \in V_j$, sea $V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset \dots$ una base local numerable de entornos del punto r de modo que

$$T_{j+1} > T_j \quad \text{y} \quad \Phi(T_j, x_0) \in V_j$$

entonces $\Phi(T_j, x_0) \rightarrow r$ cuando $j \rightarrow \infty$. Así $r \in \omega(Y)$.

Como el espacio de estados en el cual estamos trabajando es compacto, tenemos que $\omega(Y)$ es compacto.

④ Si Y es conexo, entonces $\omega(Y)$ es conexo.

Recordemos que $\Phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ es continua, además $[t, \infty) \times Y$ es conexo, entonces $\Phi([t, \infty) \times Y) = Y \cdot [t, \infty)$ es conexo (para cualquier $t \in \mathbb{R}$). La cerradura de un conjunto conexo es conexo $\overline{Y \cdot [t, \infty)}$, entonces

$$\bigcap_{t \geq 0} \overline{Y \cdot [t, \infty)}$$

es conexo que no es más que la intersección decreciente de conjuntos conexos, por tanto

$$\omega(Y) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{Y \cdot [t, \infty)}$$
 es conexo.

□

El corolario siguiente es un caso particular del anterior teorema, pues si consideramos al conjunto $Y = \{x\}$, coincidiremos con la definición de conjuntos límites dada de forma puntual al principio.

Corolario 1.1. *Los conjuntos $\omega(x)$ y $\alpha(x)$ son no vacíos, invariantes, compactos y conexos; donde el espacio fase X es compacto.*

Veamos algunos ejemplos para ilustrar estos conceptos y propiedades.

Ejemplo 1.11. *Veamos el Ejemplo 1.2 con ecuación diferencial autónoma:*

$$\dot{x} = x(x-1)(x-2)^2(x-3) \text{ en el intervalo } X = [0, 3].$$

Algunos conjuntos límites de este sistema son de la siguiente forma:

$$\omega(\Phi, Y) = \begin{cases} [1, 2] & \text{para } Y = [a, b] \text{ con } a \in (0, 1] \text{ y } b = [2, 3), \\ [1, 3] & \text{para } Y = [a, 3] \text{ con } a \in (0, 1], \\ \{1\} & \text{para } Y = [1/2, 3/2). \end{cases}$$

$$\alpha(\Phi, Y) = \begin{cases} [2, 3] & \text{para } Y = (a, 3] \text{ con } a \in (1, 2], \\ [a, 1] & \text{para } Y = (a, 1] \text{ con } a \in [0, 1], \\ \{3\} & \text{para } Y = \{3\}. \end{cases}$$

Ejemplo 1.12. Consideremos la ecuación diferencial autónoma:

$$\dot{x} = -(x+2)(x^2-1)x^2 \text{ en el intervalo } X = [-2, 1].$$

Sea $\varphi(t, x)$ la solución de esta ecuación con $\varphi(0, x) = x$, son únicas y existe para todo $t \in \mathbb{R}$.

De aquí definimos un sistema dinámico continuo:

$$\Phi : \mathbb{R} \times [-2, 1] \rightarrow [-2, 1]$$

$$(t, x) \mapsto \Phi(t, x) = \varphi(t, x)$$

Algunos conjuntos límites de este sistema son de la siguiente forma:

$$\omega(\Phi, Y) = \begin{cases} [0, 1] & \text{para } Y = [a, 1] \text{ con } a \in (-1, 0] \\ \{0\} & \text{para } Y = \left[\frac{1}{n} - 1, -\frac{1}{n}\right] \text{ con } n \in \{3, 4, 5, 6, 7, \dots\} \\ \{-2\} & \text{para } Y = [-2, b] \text{ con } b \in (-2, -1) \end{cases}$$

Veamos algunos ejemplos en el que el espacio de fases no es compacto:

Ejemplo 1.13. Consideremos la ecuación diferencial:

$$\dot{y} = e_1$$

con el cual definimos

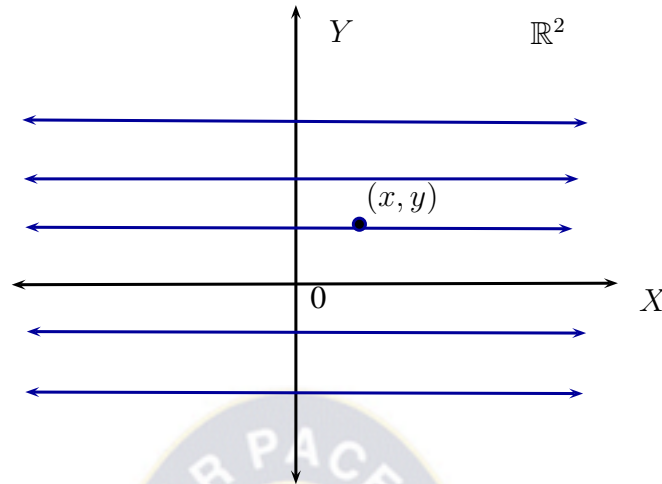
$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (1, 0)$$

de donde el flujo asociado es

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(t, (x, y)) \mapsto (x+t, y)$$



del cual obtenemos que $\omega((x, y)) = \emptyset$ y $\alpha((x, y)) = \emptyset$.

Ejemplo 1.14. Consideremos el sistema dinámico visto en el Ejemplo 1.8 en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, dado por la ecuación diferencial en su forma polar para $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$ y $a \neq 0$

$$\dot{r} = 1 - r, \quad \dot{\theta} = a$$

observando el gráfico dado en el Ejemplo 1.8 es evidente ver que si $y \notin \mathbb{S}^1$ el conjunto límite, $\alpha(y) = \emptyset$; esto sucede por que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ no es compacto.

Si la órbita de un punto cuando el tiempo tiende al infinito interseca a cualquier entorno que contiene al punto dado, se la denominará recurrente, una situación particular de los conjuntos límites, este tipo de puntos su existencia es garantizada en espacios métricos compactos, como lo veremos a través de una proposición posteriormente.

Definición 1.8. Un punto $x \in X$ de un sistema dinámico continuo $\Phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ es llamado recurrente si $x \in \omega(x)$.

Los puntos fijos (periódicos) en un sistema dinámico son ejemplos triviales de puntos recurrentes, pues $\omega(x) = \{x\}$ ($\omega(x) = \mathcal{O}(x)$) donde x es un punto fijo (periódico).

Proposición 1.4. Sea X un espacio topológico compacto y sea $\Phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ un sistema dinámico continuo en X , entonces existe algún punto recurrente.

Demostración.- Sea $\mathfrak{F} = \{F \subset X : F \text{ es cerrado e invariante}, F \neq \emptyset\}$. Como $X \in \mathfrak{F}$, entonces $\mathfrak{F} \neq \emptyset$. Dotamos a \mathfrak{F} de un orden parcial $F_1 \leq F_2$ si y sólo si, $F_1 \supset F_2$. Sea $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ una cadena, entonces $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} F_\alpha \neq \emptyset$ y es cerrado e invariante. Luego, por el Lema A.1 de Zorn, entonces existe G elemento maximal. Por definición de orden, G es un conjunto minimal compacto. Luego, toda órbita de G es recurrente.

□

Un concepto más fuerte que el de punto recurrente es el de topológicamente transitiva en ello se da el caso de órbitas que son densas con respecto al espacio de fases.

Definición 1.9. *Un flujo en un espacio métrico X es llamado TOPOLÓGICAMENTE TRANSITIVA si existe $x \in X$ tal que $\omega(x) = X$.*

El saber que un flujo es topológicamente transitiva nos garantiza la existencia de al menos un punto cuya órbita es densa en el espacio fase, como lo muestra el siguiente resultado.

Proposición 1.5. *Dado un flujo $\Phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ en un espacio métrico compacto X :*

Φ es topológicamente transitiva, implica que existe $x \in X$ tal que $\overline{\mathcal{O}(x)} = X$

Demostración.- Veamos:

\Rightarrow] Como Φ es topológicamente transitiva, existe $x \in X$ tal que $\omega(x) \subset \overline{\mathcal{O}(x)}$, lo último por definición de conjunto límite, y por hipótesis tenemos lo siguiente:
 $X = \omega(x) \subset \overline{\mathcal{O}(x)} \subset X$ de donde concluimos $\overline{\mathcal{O}(x)} = X$.

□

La siguiente definición nos ayuda a ver si un sistema dinámico continuo es topológicamente transitivo a través de algunas propiedades que se mostrará posteriormente.

Definición 1.10. *Consideremos un sistema dinámico en un espacio topológico X . Un subconjunto $G \subset X$ es minimal si:*

1. G es cerrado e invariante.
2. Si $A \subset G$, $A \neq \emptyset$, A cerrado e invariante, entonces $A = G$

La siguiente proposición nos muestra que si el espacio es minimal entonces cualquier punto de ella cumple la condición de topológicamente transitivo.

Proposición 1.6. *Sea $G \subset X$ subconjunto compacto. Entonces*

G es minimal si, y solo si $\omega(x) = G$ si, y solo si, $\alpha(x) = G$ para todo $x \in G$

Demostración.- Veamos:

(\Rightarrow) Sea G compacto y $x \in G$, entonces $\omega(x) \neq \emptyset$ lo que implica $\omega(x)$ es cerrado, invariante y $\omega(x) \subset G$. Luego, $\omega(x) = G$.

(\Leftarrow) Sea $A \subset G$ cerrado e invariante y no vacío, y sea $x \in A$. Entonces, $G = \omega(x) \subset A \subset G$ implica $A = G$.

□

Los flujos restringidos a una órbita periódica (punto fijo) da un flujo topológicamente mixing (que se vera más adelante), es más de la proposición dada anteriormente nos muestra que la órbita es un conjunto minimal. El siguiente corolario es un resultado inmediato de la proposición anterior por lo cual no desarrollaremos su demostración.

Corolario 1.2. *Si G es minimal compacto, entonces toda órbita de $x \in G$ es recurrente.*

Ahora veamos otras propiedades:

1.2.1. Topológicamente transitiva, mixing

La siguiente definición nos indica que para cualquier par de subconjunto abiertos del espacio de estados existen órbitas en común que los interseca.

Definición 1.11. *El sistema dinámico continuo (flujo) es denominado TOPOLÓGICAMENTE MIXING si para cualquier par de subconjuntos abiertos $V_1, V_2 \subset X$ existe $T > 0$ tal que $V_1 \cdot (-T) \cap V_2 \neq \emptyset$.*

El conjunto de todos los puntos que cumplen la condición de topológicamente transitiva forman un conjunto particular que cumple la condición del conjunto residual, que definimos como sigue:

Definición 1.12. Un subconjunto $R \subset X$ es llamado residual si contiene una intersección numerable de subconjuntos abiertos y densos.

Para un subconjunto A de X el diámetro de A está dado por

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) / x, y \in A\}$$

y la distancia de dos subconjuntos A, B por: $d(A, B) = \inf\{d(x, y) / x \in A, y \in B\}$.

El teorema de Cantor que presentamos a continuación será utilizado para entender la demostración del teorema de Baire, que nos ayudara en la demostración que en un flujo que es topológicamente mixing, este es entonces topológicamente transitiva.

Teorema 1.3. Sea (X, d) un espacio métrico completo. Toda familia decreciente $\{C_n\}$ de cerrados en X no vacíos tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(C_n) = 0$ tiene intersección no vacía.

Demostración.- Para cada n tomamos $x_n \in C_n$, como $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(C_n) = 0$, es claro que la sucesión (x_n) es de Cauchy. Su límite x está en cada C_n por ser cerrado y $\{C_n\}$ decreciente.

□

Un sistema dinámico continuo topológicamente mixing contiene una familia numerable de conjuntos densos que es lo que veremos más adelante.

Teorema 1.4. (Baire). En un espacio métrico completo, la intersección de una familia numerable de abiertos densos es un conjunto denso.

Demostración.- Sea X un espacio métrico completo y $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es una intersección numerable de abiertos G_n densos en X . Basta probar que G interseca a toda bola abierta $B_r(x)$. Como G_1 es denso en X existe un $r_1 > 0$, que podemos tomar menor que $r/2$, tal que

$$\overline{B}_{r_1}(x_1) \subset G_1 \cap B_r(x).$$

Inductivamente podemos construir una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de X y una sucesión $\{r_n\}$ de números reales positivos de modo que

$$\overline{B}_{r_n}(x_n) \subset G_n \cap B_{r_{n-1}}(x_{n-1}) \quad (*)$$

y $r_n < r/n$ para todo n . Por el teorema anterior, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_{r_n}}(x_n) \neq \emptyset$, luego por (*) implica que

$$G \cap B_r(x) \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} (G_n \cap B_{r_{n-1}}(x_{n-1})) \neq \emptyset,$$

de donde

$$G \cap B_r(x) \neq \emptyset.$$

□

El siguiente teorema la utilizaremos para la propiedad de Dependencia Sensitiva en Condiciones Iniciales.

Teorema 1.5. (Blaschke). *El conjunto de subconjuntos no vacíos y compactos de un espacio métrico compacto es un espacio métrico compacto bajo la métrica de Hausdorff*

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \max_{a \in A} \left[\min_{b \in B} d(a, b) \right], \max_{b \in B} \left[\min_{a \in A} d(a, b) \right] \right\}$$

El siguiente resultado nos indica si un sistema dinámico es topológicamente mixing podemos afirmar la existencia de un punto tal que sus puntos de adherencia respecto al tiempo es todo el espacio.

Proposición 1.7. *Si un flujo en un espacio métrico completo es topológicamente mixing, entonces es topológicamente transitiva y $\{x \in X, \omega(x) = X\}$ es residual.*

Demostración.- Topológicamente mixing implica que para cualquier par de subconjuntos abiertos $V_1, V_2 \subset X$ existe una secuencia

$$t_k \rightarrow \infty \text{ tal que } V_1 \cdot (-t_k) \cap V_2 \neq \emptyset.$$

Así para todo abierto $V \subset X$ el conjunto $\bigcup_{t \geq 0} V \cdot (-t)$ es denso en X , porque por otra

parte existiría conjuntos abiertos V_1 y V_2 con $\left(\bigcup_{t \geq 0} V_1 \cdot (-t) \right) \cap V_2 = \emptyset$. Ahora para una base contable V_n de la topología y $m, n \in \mathbb{N}$ los conjuntos $V_n \cdot (-m)$ son abiertos. Entonces los conjuntos

$$X_{m,n} := \bigcup_{t \geq m} V_n \cdot (-t) := \bigcup_{t \geq 0} (V_n \cdot (-m)) \cdot (-t)$$

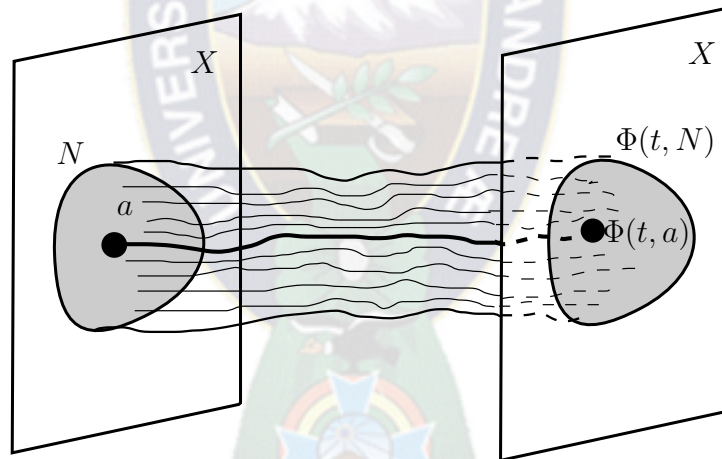
son abiertos y densos. Por teorema de Baire la intersección $\bigcap_{m,n \in \mathbb{N}} X_{mn}$ es no vacía. Nosotros exigimos que para cada x en este $\omega(x) = X$. Basta mostrar que el cierre de cada conjunto base V_n tiene intersección no vacía con $\omega(x)$. Claramente, $x \in \bigcap_{m,n \in \mathbb{N}} X_{m,n} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{t \geq m} (V_n \cdot (-t))$. Esto muestra que $x \cdot t_m \in V_n$ para cada secuencia $t_m \rightarrow \infty$.

□

La siguiente definición nos ayudará a entender cuando un flujo tiene dependencia sensitiva en condiciones iniciales.

Definición 1.13. *Un flujo $\Phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$, en un espacio métrico X y $a \in X$. Decimos que la órbita $\mathcal{O}(a)$ es estable si para todo ϵ , existe un entorno N de a tal que, para todo $y \in N$ se tiene:*

$$d(\Phi(t, a), \Phi(t, y)) < \epsilon \quad \text{para todo } t > 0$$



La siguiente definición nos indica cuando un flujo tiene todas sus órbitas inestables y que lo denominaremos dependencia sensitiva en condiciones iniciales.

Definición 1.14. *Un flujo Φ en un espacio métrico X tiene DEPENDENCIA SENSITIVA EN CONDICIONES INICIALES. Si existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in X$ y cada entorno N de x hay $y \in N$ y $T > 0$ tal que*

$$d(y \cdot T, x \cdot T) > \delta$$

La inestabilidad de las órbitas es una situación dada regularmente en los problemas de aplicación en situaciones de la vida real, ahora veamos algunas condiciones para garantizar que un sistema dinámico tiene todas sus órbitas inestables.

Proposición 1.8. *Consideremos un flujo Φ en un espacio métrico X que no es solo órbita periódica. Si el flujo es topológicamente transitiva y tiene un subconjunto denso de puntos periódicos, entonces tiene dependencia sensitiva en condiciones iniciales.*

Demostración.- Primero observemos que hay un número $\delta_0 > 0$ tal que para todo $x \in X$ existe un punto periódico $q \in X$ cuya órbita es una distancia por lo menos $\delta_0/2$ de x . De hecho, escojamos arbitrariamente dos puntos periódicos q_1 y q_2 cuyas órbitas disjuntas son $q_1 \cdot \mathbb{R}$ y $q_2 \cdot \mathbb{R}$. Sea δ_0 denota la distancia entre los dos conjuntos compactos $q_1 \cdot \mathbb{R}$ y $q_2 \cdot \mathbb{R}$. Entonces por la desigualdad triangular, cada punto $x \in X$ esta a una distancia por lo menos $\delta_0/2$ de una de las órbitas periódicas escogidas. Nosotros mostraremos que Φ tiene dependencia sensitiva en condiciones iniciales con constante sensitiva $\delta = \delta_0/8$.

Sea x un punto arbitrario en X y sea N algún entorno de x . Por lo que los puntos periódicos de Φ son densos, existe un punto periódico p en $U = N \cap B_\delta(x)$ de N con la bola abierta $B_\delta(x)$ de radio δ y centro x . Sea T que denota el período de p . En la demostración, existe un punto periódico $q \in X$ cuya órbita esta por lo menos una distancia 4δ de x . Sea

$$V = \bigcap_{0 \leq t \leq T} (B_\delta(q \cdot t) \cdot (-t)).$$

Por dependencia continua en el valor inicial, el conjunto V es abierto y no vacío porque $q \in V$. Consecuentemente, porque Φ es topológicamente transitiva, existe $y \in U$ y $\tau > 0$ tal que $y \cdot \tau \in V$.

Ahora sea j la parte entera de $\tau/T + 1$. Entonces $0 \leq j \cdot T - \tau \leq T$ y por construcción, uno tiene

$$y \cdot (jT) = (y \cdot \tau) \cdot (jT - \tau) \in V \cdot (jT - \tau) \subset B_\delta(q \cdot (jT - \tau)).$$

Ahora $p \cdot (jT) = p$ y por la desigualdad triangular

$$\begin{aligned} d(p \cdot (jT), y \cdot (jT)) &= d(p, y \cdot (jT)) \\ &\geq D(x, q \cdot (jT - \tau)) - d(q \cdot (jT - \tau), y \cdot (jT)) - d(p, x). \end{aligned}$$

Consecuentemente, por que $y \cdot (jT) \in B_\delta(q \cdot (jT - \tau))$, uno tiene

$$d(p \cdot (jT), y \cdot (jT)) > 4\delta - \delta - \delta = 2\delta.$$

Así, usando la desigualdad triangular, o $d(x \cdot (jT), y \cdot (jT)) > \delta$ o $d(x \cdot (jT), p \cdot (jT)) > \delta$. En cualquier caso, nosotros hemos encontrado un punto en N cuya imagen después del tiempo jT está a más distancia δ de la imagen de x .

□



ATRACTORES, REPULSORES Y CADENAS

Se pretende mostrar las propiedades de los conjuntos Atractores y de que forma a partir de ellos construir conjuntos repulsores. Además de ver las propiedades de los conjuntos cadenas recurrentes y ver sus componentes conexas que no es más que las cadenas transitivas maximales con respecto a la inclusión.

2.1. Atractores

Si en una vecindad todos los puntos en tiempos positivos convergen hacia un conjunto a este lo denominaremos bajo ciertas condiciones conjunto atractor.

Definición 2.1. *Para un flujo en un espacio métrico compacto X un conjunto compacto invariante A es un atractor si este admite una vecindad N tal que $\omega(N) = A$.*

También consideramos al conjunto vacío como un atractor. Una vecindad N como en la definición es llamado una *vecindad atractora*. Cada atractor es compacto e invariante. Además, si A es un atractor en X y $Y \subset X$ es un conjunto compacto invariante, entonces $A \cap Y$ es un atractor para el flujo restringido a Y .

Lema 2.1. *Un conjunto Atractor es invariante aislado.*

Demostración.- Sea A un conjunto atractor, entonces existe una vecindad atractora N de A con

$$A \subset \text{int}(N) \subset N \quad \text{tal que } \omega(N) = A.$$

Consideremos también que $\Phi(t, x) \in N$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y algún $x \in K$, consideremos cualquier secuencia creciente de tiempos $t_k \rightarrow \infty$ e $y_k = \Phi(-t_k, x) \in N$, de donde se ve que $\Phi(t_k, y_k) \rightarrow x$, así: $x \in \omega(N) = A$

□

Veamos algunos ejemplos para ilustrar estos conceptos:

Ejemplo 2.1. Consideremos la ecuación diferencial autónoma, dada en el Ejemplo 1.6:

$$\dot{x} = x(x-1)(x-2)^2(x-3) \text{ en el intervalo } X = [0, 3]$$

este sistema tiene, a parte de los triviales el \emptyset y el espacio entero $[0, 3]$; y el gráfico dada en el Ejemplo 1.6 nos ayuda a ver los siguientes atractores

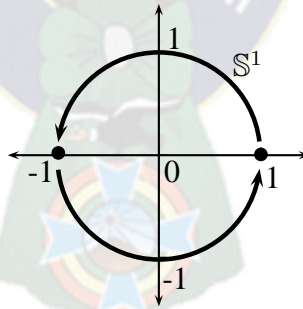
$$\{1\}, [1, 2], [0, 1], [0, 2] \text{ y } [1, 3].$$

Ejemplo 2.2. Consideremos el espacio métrico \mathbb{S}^1 , la esfera unitaria. En \mathbb{S}^1 la ecuación diferencial, respecto al ángulo x (radio constante):

$$\dot{x} = \sin^2 x$$

define un sistema dinámico:

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$$



Para este sistema los únicos atractores son

$$\emptyset \text{ y } \mathbb{S}^1$$

pues, sea $A \subset \mathbb{S}^1$ un atractor, es decir, existe un entorno N con $\omega(N) = A$. Para cada punto $x \in \mathbb{S}^1$ el conjunto $\omega(x)$ contiene a uno de los dos puntos fijos 0 o π , lo que implica que cada atractor contiene a uno de los puntos fijos. Consideremos el punto π y sea $N(\pi)$ algún entorno. Nosotros tenemos $[0, \pi] \subset \omega(N) \subset A$. Repitiendo este argumento para el punto fijo 0 , vemos que $[0, \pi] \subset A$ y tenemos $A = \mathbb{S}^1$.

Una de las ventajas de considerar las vecindades atractoras es que podemos asegurar que esta a partir de un tiempo determinado este permanezca dentro de la vecindad atractor.

Proposición 2.1. *Para cada vecindad atractora N de un atractor A existe un tiempo $t^* > 0$ con $\overline{N \cdot [t^*, \infty)} \subset \text{int}(N)$*

Prueba.- Podemos asumir que N es cerrado. Supongamos que existen $t_n \rightarrow \infty$ y $x_n \in N$ con $x_n \cdot t_n \notin \text{int}(N)$. Por tanto podemos asumir que $x_n \cdot t_n$ converge algún elemento $x \notin \text{int}(N)$. Esto contradice a la suposición $\omega(N) = A$.

□

Trayectorias comenzando en una vecindad de un atractor dejan la vecindad en tiempo inverso.

Lema 2.2. *Para un flujo en un espacio métrico compacto X un conjunto invariante compacto A es atractor si y sólo si existe una vecindad compacta N de A tal que $x \cdot (-\infty, 0]$ no esta contenido en N para todo $x \in N \setminus A$.*

Prueba.- La condición necesaria es claro porque $x \cdot (-\infty, 0] \subset N$ implica $x \in \omega(N)$.

Recíprocamente, sea N una vecindad compacta de A tal que $x \cdot (-\infty, 0]$ no esta incluida para todo $x \in N \setminus A$. Luego existe un $t^* > 0$ tal que $x \cdot [-t^*, 0]$ no este incluido en N para todo $x \in N \cap \overline{(X \setminus N)}$. Ahora escogemos una vecindad V de A tal que $V \cdot [0, t^*] \subset N$. Entonces $V \cdot [0, \infty) \subset N$ y por tanto $\omega(V) = A$ y A es un atractor.

□

2.2. Repulsores

A los repulsores se los puede considerar como atractores a tiempo inverso, es decir que se comportan como un atractor pero esta vez a tiempo negativo, pues recordemos que un atractor esta definido a tiempo positivo.

Definición 2.2. *Para un flujo en un espacio métrico compacto X un repulsor es un conjunto R compacto invariante que tiene una vecindad M con $\alpha(M) = R$.*

Al igual que en atractores, a M denominaremos vecindad repulsora de R . También al igual que los conjuntos atractores los conjuntos repulsores son invariantes aislados, cuya demostración es análoga al Lema 2.1.

Lema 2.3. *El conjunto Repulsor es invariante aislado.*

Veamos algunos ejemplos para ilustrar estos conceptos.

Ejemplo 2.3. *Consideremos la ecuación diferencial autónoma:*

$$\dot{x} = x(x-1)(x-2)^2(x-3) \text{ en el intervalo } X = [0, 3]$$

Sea $\varphi(t, x)$ la solución de esta ecuación con $\varphi(0, x) = x$, son únicas y existe para todo $t \in \mathbb{R}$.

De aquí definimos un sistema dinámico continuo:

$$\Phi : \mathbb{R} \times [0, 3] \rightarrow [0, 3]$$

$$(t, x) \mapsto \Phi(t, x) = \varphi(t, x)$$

este sistema tiene repulsores no triviales que son:

$$\{0\}, [2, 3], \{3\}, \{0\} \cup [2, 3], \text{ y } \{0\} \cup \{3\}$$

A partir de un atractor podemos construir un conjunto repulsor el cual tiene propiedades muy importantes como ser el particionar al espacio de estados.

2.2.1. Par Atractor-Repulsor y Descomposición del Espacio de fases

Veamos la construcción a través del siguiente teorema.

Teorema 2.1. *Para un atractor A , el conjunto $A^* = \{x \in X, \omega(x) \cap A = \emptyset\}$ es un repulsor, llamado el complementario repulsor. Entonces (A, A^*) es llamado un par atractor-repulsor.*

Demostración.- Sea N una vecindad atractor compacto de A . Escojamos $t^* > 0$ tal que $\overline{(N \cdot [t^*, \infty))} \subset \text{int}(N) \subset N$ y definimos un conjunto abierto V por

$$V = X \setminus \overline{(N \cdot [t^*, \infty))}.$$

Entonces $X = N \cup V$, porque $X = \overline{(N \cdot [t^*, \infty))} \cup V \subset N \cup V \subset X$.

■ **Afirmación 1.**

$$\boxed{V \cdot (-\infty, -t^*] \subset X \setminus N}$$

Por contradicción. Supongamos que existe un elemento $x \in V \cdot (-\infty, -t^*]$ y que $x \in N$, entonces existe $y \in V$ y $t \geq t^*$ tal que $\Phi(-t, y) = x$ de donde $\Phi(t, x) = y \in V$, (1)

por otra parte tenemos $y = \Phi(t, x) \in N \cdot [t^*, \infty) \subset \overline{N \cdot [t^*, \infty)}$ (2)

lo cual es una contradicción entre (1) y (2).

■ **Afirmación 2.**

$$\boxed{\alpha(V) \subset X \setminus N}$$

Por contradicción. Supongamos que existe un elemento $x \in \alpha(V)$ y $x \in N$, entonces existe $t_k \rightarrow \infty$ y $x_k \in V$ tal que $\Phi(-t_k, x_k) \rightarrow x$, por otro lado tenemos que $\Phi(t^*, x) \in \text{int}(N)$ de la cual podemos garantizar la existencia de $\Phi(-t_{k_i} + t^*, x_{k_i}) \in N$, pero por otro lado también tenemos $\Phi(-t_{k_i} + t^*, x_{k_i}) \in V \cdot (-\infty, -t^*]$ (Contradicción).

De donde se cumple $\alpha(V) \subset X \setminus N \subset V$, por tanto V es una vecindad de $\alpha(V)$. Por tanto $\alpha(V)$ es un repulsor.

Ahora veremos que

$$\boxed{\alpha(V) = A^*}$$

$\alpha(V) \subset A^*$. Por contradicción.

Supongamos que existe un elemento $x \in \alpha(V)$ y $x \notin A^*$, entonces existe $t_n \rightarrow \infty$ e $y_n \in Y$ tal que $\Phi(-t_n, y_n) \rightarrow x$ y $\omega(x) \cap A \neq \emptyset$, de la cual existe $t' > 0$ tal que $\Phi(t', x) \in N$ pero $\Phi(t', x) \in \alpha(V) \subset X \setminus N$. (Contradicción).

$A^* \subset \alpha(V)$. Sea $x \in A^*$, entonces $\omega(x) \cap A = \emptyset$.

■ **Afirmación 3**

$$\mathcal{O}(x) \cap N = \emptyset$$

Supongamos que la intersección es no vacía, por tanto existe $t \in \mathbb{R}$ tal que se cumple $\Phi(t, x) \in N$, entonces $\omega(\Phi(t, x)) \subset \omega(N) = A$, de donde existe $t_k \rightarrow \infty$ tal que $\Phi(t_k, \Phi(t, x)) \rightarrow y \in A$. Luego $\Phi(t_k, x) \rightarrow \Phi(-t, y) \in A$. (Contradicción).

Entonces $\mathcal{O}(x) \subset X \setminus N \subset V$ de donde escojamos una sucesión de tiempos crecientes $t_k \rightarrow \infty$ tal que $\Phi(t_k, x) = y_k \in V$ donde $\Phi(-t_k, y_k) \rightarrow x$.

Así,

$$x \in \alpha(V).$$

□

Notemos que A y A^* son disjuntos. Existe siempre el par atractor-repulsor $A = X$, $A^* = \emptyset$. Una consecuencia de la proposición es, en particular que en el tiempo inverso del sistema el complementario repulsor de A^* es A .

Además de forma análoga a partir de un conjunto Repulsor puede construirse su complemento conjunto Atractor de la siguiente manera.

Proposición 2.2. *Para un conjunto repulsor R , el conjunto*

$$R^* = \{x \in X, \alpha(x) \cap R = \emptyset\}$$

es un conjunto Atractor, llamado el complementario atractor. Entonces (A, A^) es llamado un par Repulsor-atractor.*

La demostración es de tratamiento análogo al Teorema 2.1.

Además de que un par atractor-repulsor son disjuntos entre si, ocurre lo mismo con sus correspondientes vecindad atractor y vecindad repulsor, como lo reflejamos con el siguiente Lema.

Lema 2.4. *Dado un atractor A y su vecindad atractora N , se cumple que $\overline{N} \cap A^* = \emptyset$. Análogamente: Si R es un repulsor y M su vecindad repulsor, se cumple que $\overline{M} \cap A = \emptyset$.*

Prueba.- Procedamos por contradicción.

Supongamos que $\overline{N} \cap A^* \neq \emptyset$, entonces existe $y \in \overline{N}$ y $y \in A^*$:

por tanto $y_i \rightarrow y$ (1)

donde $y_i \in N$ y $\omega(y) \cap A = \emptyset$.

Sea $z \in \omega(y)$, entonces existe $t_k \rightarrow \infty$ tal que $\Phi(t_k, y) \rightarrow z$ (2)

de la cual obtenemos una convergencia $\Phi(t_k, y_k) \rightarrow z$, por tanto $\omega(y) \subset A$, lo cual contradice (1).

□

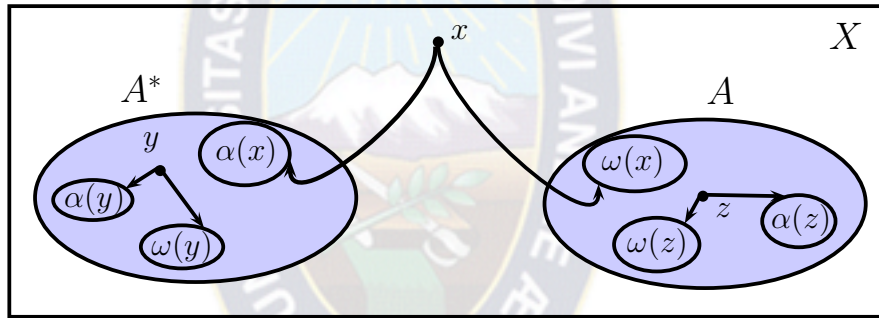
Ejemplo 2.4. Consideremos la ecuación diferencial autónoma:

$$\dot{x} = x(x - 1)(x - 2)^2(x - 3) \text{ en el intervalo } X = [0, 3].$$

Los pares atractor-repulsor no triviales son:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1\} \text{ con } A_1^* = \{0\} \cup [2, 3] \\ A_2 &= [1, 2] \text{ con } A_2^* = \{0\} \cup \{3\} \\ A_3 &= [1, 3] \text{ con } A_3^* = \{0\} \\ A_4 &= [0, 1] \text{ con } A_4^* = [2, 3] \\ A_5 &= [0, 2] \text{ con } A_5^* = \{3\} \end{aligned}$$

Con la siguiente proposición podemos particionar al espacio de estados de la siguiente manera $X = A \cup A^* \cup (X - A \cup A^*)$.



Proposición 2.3. Si (A, A^*) es un par atractor-repulsor y $x \notin A \cup A^*$, entonces $\alpha(x) \subset A^*$ y $\omega(x) \subset A$.

Demostración.- Por definición de A^* se sigue que $\omega(x) \cap A \neq \emptyset$. Luego existe $t_0 > 0$ con $x \cdot t_0 \in N$, donde N es una vecindad del atractor A con $\omega(N) = A$.

Si $x \notin A^*$, entonces $\omega(x) \cap A \neq \emptyset$.

i) $\boxed{\omega(x) \subset A}$ Sea $y \in \omega(x)$, entonces existe $t_k \rightarrow \infty$ tal que $\Phi(t_k, x) \rightarrow y$ (1)

Por otra parte por si N es una vecindad atractor de A , entonces existe $t_0 > 0$ tal que $\Phi(t_0, x) \in N$ y por la continuidad de Φ_{t_0} tenemos que

$\Phi(t_n, \Phi(t_0, x)) \rightarrow \Phi(t_0, y)$, entonces $\Phi(t_0, y) \in \omega(N) = A$ y por la invariancia de A tenemos

$$y \in A.$$

ii) $\boxed{\alpha(x) \subset A^*}$ Por contradicción. Ahora supongamos que existe un $y \in \alpha(x) \setminus A^*$. Luego por definición de A^* se tiene $\omega(y) \cap A \neq \emptyset$, entonces existe $t' > 0$ tal que $\Phi(t', y) \in \text{int}(N)$. Como $y \in \alpha(x)$, entonces existe $t_k \rightarrow \infty$ tal que $\Phi(-t_k, x) \rightarrow y$ de donde obtenemos $\Phi(-t_k, \Phi(t', x)) \rightarrow \Phi(t', y) \in \text{int}(N)$, usando la dependencia continua en los valores iniciales se puede hallar que existen $t_n \rightarrow \infty$ con $x \cdot (-t_n) \rightarrow A$, y luego para n suficientemente grande, $x \cdot (-t_n) \in N$. Claramente $x \cdot (-t_n) \cdot t_n \rightarrow x$ y por tanto $\omega(N) = A$ implica que $x \in A$, contradiciendo a la elección de x . Luego

$$\alpha(x) \subset A^*.$$

□

Del Lema 2.2 de la sección anterior se obtiene la siguiente caracterización de pares atractor-repulsor.

Lema 2.5. *Sea $(x, t) \rightarrow x \cdot t$ un flujo en un espacio métrico compacto X . Entonces un par A, A^* de conjuntos compactos invariantes disjuntos es un par atractor-repulsor si y sólo si*

1. $x \in X \setminus A^*$ implica $x \cdot [0, \infty) \cap N \neq \emptyset$ para cada vecindad N de A y
2. $x \in X \setminus A$ implica $x \cdot (-\infty, 0] \cap N^* \neq \emptyset$ para cada vecindad N^* de A^* .

Prueba.- Ciertamente, esas condiciones son necesarias, por la Proposición 2.3. Recíprocamente, suponga que 1) es válida y sea W una vecindad compacta de A con $W \cap A^* = \emptyset$. Entonces 2) implica que $x \cdot (-\infty, 0]$ no está incluido en W para todo $x \in W \setminus A$. Por el Lema 2.2, esto implica que A es un atractor. Por otra parte, se sigue de 1) que $\omega(x) \cap A \neq \emptyset$ para todo $x \in X \setminus A^*$. Por tanto $A^* = \{x \in X, \omega(x) \cap A = \emptyset\}$ es el complementario del atractor A .

□

Un hecho interesante, es que podemos garantizar cuando un elemento pertenece a un atractor o su complemento repulsor bajo ciertas condiciones adicionales.

Lema 2.6. *Dado un par (A, A^*) atractor-repulsor se tiene que:*

1. Si $\omega(x) \subset A^*$, entonces $x \in A^*$.
2. Si $\alpha(x) \subset A$, entonces $x \in A$.

Prueba. Veamos antes una afirmación.

$A \cap A^* = \emptyset$ Supongamos que $A \cap A^* \neq \emptyset$, entonces existe $x \in A \cap A^*$, como A es invariante y cerrado tenemos que $\omega(x) \subset A$; por otro lado por la definición de A^* tenemos $\omega(x) \cap A = \emptyset$, lo cual es una contradicción.

Ahora veamos si $\omega(x) \subset A^*$, por lo anterior afirmamos que $\omega(x) \cap A = \emptyset$, que coincide con la definición de A^* , por tanto $x \in A^*$.

De forma análoga el otro hecho. □

Ahora veamos que si ordenamos los conjunto atractores de forma creciente, sus complementos repulsivos mantienen el mismo orden de forma decreciente, y el lema que sigue nos ayudara en demostración que realizaremos posteriormente.

Lema 2.7. *Dado una secuencia creciente de atractores*

$$A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_n,$$

entonces sus correspondientes complementos repulsivos son una secuencia decreciente

$$A_0^* \supset A_1^* \supset \dots \supset A_n^*.$$

Prueba. Debemos mostrar que $A_{k+1}^* \subset A_k^*$ para todo $k = 0, 1, \dots, n-1$. Si $A_{k+1}^* = \emptyset$, se sigue el resultado. Consideremos $A_{k+1}^* \neq \emptyset$, para cualquier $y \in A_{k+1}^*$ tenemos por el Teorema 2.1 que $\omega(y) \cap A_{k+1} = \emptyset$ y como $A_k \subset A_{k+1}$ obtenemos $\omega(y) \cap A_k = \emptyset$; por tanto $y \in A_k^*$. □

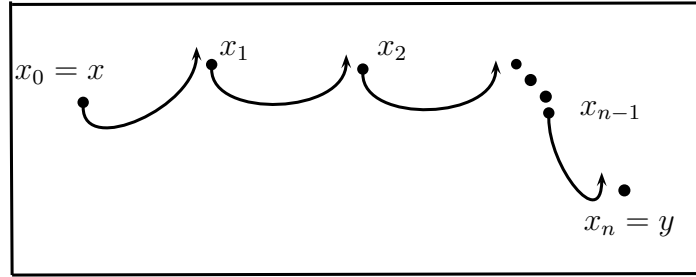
2.3. Cadenas

Ahora se introducirá el concepto de cadena recurrente y desarrollaremos su estrecha relación a la descomposición de Morse.

Definición 2.3. *Para $x, y \in X$ y $\epsilon, T > 0$, una (ϵ, T) -cadena desde x a y es dado por un número natural $n \in \mathbb{N}$, junto con los puntos*

$$x_0 = x, x_1, \dots, x_n = y \in X \quad \text{y tiempos} \quad T_0, \dots, T_{n-1} \geq T,$$

tales que $d(x_i \cdot T_i, x_{i+1}) < \epsilon$ para $i = 0, 1, \dots, n-1$.



Usualmente usaremos la notación $(x_0 = x, x_1, \dots, x_n = y; t_0, t_1, \dots, t_{n-1})$, para denotar una (ϵ, T) -cadena de x a y y que usualmente denominaremos puntos de transición. Notemos que el número n de saltos (e.i. los puntos de transición) no es acotado. Por tanto uno puede introducir saltos triviales. Además, como la notación sugiere, solo pequeños valores de $\epsilon > 0$ son interesantes.

2.3.1. Cadena Transitiva

Lo que nos interesa de esta sección, son la colección máxima de puntos que se pueden conectar a través de órbitas salvo un margen de error (ϵ) .

Definición 2.4. Un subconjunto $Y \subset X$ es cadena transitiva si para todo $x, y \in Y$ y todo $\epsilon, T > 0$ existe una (ϵ, T) -cadena desde x hasta y .

Observemos que la (ϵ, T) -cadena esta en X , no necesariamente esta contenido en Y , por lo tanto dado una cadena transitiva Y , cualquier subconjunto en Y sigue siendo cadena transitiva.

Ahora veamos una forma de clasificar las cadenas transitivas.

Definición 2.5. Un subconjunto distinto de vacío $Y \subset X$ es Cadena Transitiva Maximal si

- 1) Y es cadena transitiva.
- 2) $Y \subset H$; donde H es cadena transitiva, entonces $H = Y$.

Esta propiedad es cumplida por los conjuntos ω -límite desde el punto de vista puntual, como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 2.4. Sea $\Phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ un sistema dinámico continuo en X espacio métrico compacto, entonces el omega límite de cada punto es enteramente cadena transitiva.

Prueba.- Sea $x \in X$, tenemos que $\omega(x) \neq \emptyset$, compacto invariante. Dados ϵ, T entonces Φ es uniformemente continua en el compacto $[T, 2T] \times X$, tomemos $u, v \in U$ donde U es un δ -abierto de $\omega(x)$ es decir: $U = \{z \in X/d(z, \omega(x)) < \delta\}$, existe $\delta(\epsilon, T) \in (0, \frac{\epsilon}{3})$ tal que para cada $t \in [T, 2T]$

$$d(u, v) < \delta, \text{ implica } d(\Phi(t, u), \Phi(t, v)) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Entonces tomando un número suficientemente grande $T_0 = T_0(\delta) > 0$ tal que $\Phi(t, x) \in U, t \geq T_0$.

Para cada $a, b \in \omega(x)$ existe $T_1 > T_0$ y $T_2 > T_0$ con $T_2 > T_1 + T$ tal que

$$d(\Phi(T_1, x), \Phi(T, a)) < \frac{\epsilon}{3} \text{ y } d(\Phi(T_2, x), b) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Sea m el entero mayor tal que $m \leq \frac{T_2 - T_1}{T}$, donde se observa que $m \geq 1$ y

$$(y_1 = a, y_i = \Phi(T_1 + (i - 2)T), x : i = 2, \dots, m + 1), y_{m+2} = b)$$

y $t_i = T$ para $i = 1, \dots, m$; $t_{m+1} = T_2 - T_1 - (m - 1)T$.

Entonces $t_{m+1} \in [T, 2T]$. Donde

$$d(\Phi(t_i, y_i), y_{i+1}) < \frac{\epsilon}{3}; \quad i = 1, \dots, m + 1.$$

Así, la secuencia

$$\{y_1 = a, y_2, \dots, y_{m+1}, y_{m+2} = b; t_1, \dots, t_{m+1}\}$$

es una $(\frac{\epsilon}{3}, T)$ -cadena de a a b en X .

Además $y_i \in U$ para $i = 2, \dots, m + 1$ podemos escoger $z_i \in \omega(x)$ tal que $d(z_i, y_i) < \delta$.

Sea $z_1 = a$ y $z_{m+2} = b$, entonces se sigue que

$$\begin{aligned} d(\Phi(t_i, z_i), z_{i+1}) &\leq d(\Phi(t_i, z_i), \Phi(t_i, y_i)) + d(\Phi(t_i, y_i), y_{i+1}) + d(y_{i+1}, z_{i+1}) \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, m + 1$. Por tanto la secuencia:

$$(z_1 = a, z_2, \dots, z_{m+2} = b; t_1, \dots, t_{m+1})$$

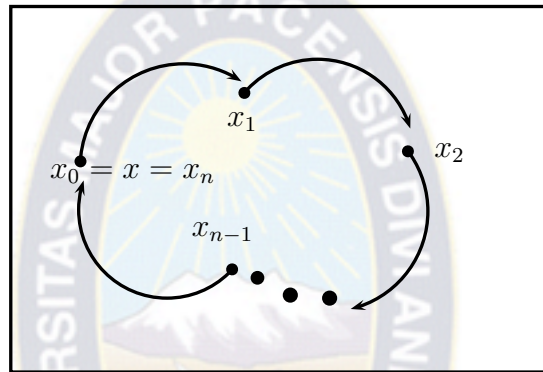
es una (ϵ, T) -cadena de a a b en $\omega(x)$.

□

2.3.2. Cadena Recurrente

Lo que definimos anteriormente, cadena transitiva, esta contenido en un conjunto mayor que es conjunto cadena recurrente.

Definición 2.6. Dado un flujo $\Phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$, en un espacio métrico compacto X . Un punto $x \in X$ es cadena recurrente para todo $\epsilon, T > 0$ existe una (ϵ, T) -cadena desde x a x . El conjunto cadena recurrente $\mathcal{R}(\Phi)$ es el conjunto de todas los puntos que son cadenas recurrentes y si el Sistema Dinámico es conocido denotaremos simplemente por \mathcal{R} .



Dadas las definiciones anteriores, podemos observar que los conjuntos cadenas transitivas están contenidas en el conjunto cadena recurrente \mathcal{R} . Veamos la relación con puntos recurrentes y si el sistema es topológicamente transitivo.

Corolario 2.1. Las siguientes afirmaciones son validas:

- Si x es un punto recurrente, entonces x es cadena recurrente.
- Si el sistema es topológicamente transitivo, entonces el espacio de estados es cadena transitiva maximal.

La demostración es inmediata aplicando solamente las definiciones. Veamos ahora que \mathcal{R} es cerrado e invariante.

Teorema 2.2. El conjunto cadena recurrente \mathcal{R} es cerrado e invariante.

Prueba.- Veamos las dos afirmaciones:

CERRADO. Sea y un punto límite de \mathcal{R} . Sea $\epsilon, T > 0$, por continuidad de Φ_T , existe $\delta > 0$ tal que si

$$d(x, y) < \delta, \text{ entonces } d(\Phi_T(x), \Phi_T(y)) < \frac{\epsilon}{2};$$

como y es un punto límite de \mathcal{R} existe un punto cadena recurrente x tal que:

$$d(x, y) < \text{mín}\{\delta, \epsilon/2\},$$

podemos ver que $(y, \Phi_T(x); T)$ es una (ϵ, T) – cadena de y a $\Phi(T, x)$.

Como x es cadena recurrente, existe una $(\epsilon/2, 2T)$ -cadena con

$$(x = x_0, \dots, x_n = x; t_0, \dots, t_{n-1})$$

de x a x . Entonces

$$(\Phi(T, x), x_1, \dots, x_{n-1}; t_0 - T, t_1, \dots, t_{n-2})$$

es una (ϵ, T) -cadena de $\Phi(T, x)$ a x_{n-1} . Por otra parte utilizando la desigualdad triangular

$$d(\Phi(t_{n-1}, x_{n-1}), y) < d(\Phi(t_{n-1}, x_{n-1}), x) + d(x, y) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Consecuentemente $(x_{n-1}, y; t_{n-1})$ es una (ϵ, T) -cadena de x_{n-1} a y .

Por concatenación tenemos (ϵ, T) -cadena

$$(y, \Phi(T, x), x_1, \dots, x_{n-1}, y; T, t_0 - T, t_1, \dots, t_{n-1})$$

es una (ϵ, T) -cadena de y a y .

Así \mathcal{R} es cerrado.

INVARIANTE. Sea $x \in \mathcal{R}$ y $t \in \mathbb{R}$. Dado $\epsilon, T > 0$ cualesquiera.

Como $\Phi_t : X \rightarrow X$ es continua en x .

Para $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, z) < \delta, \text{ implica } d(\Phi(t, x), \Phi(t, z)) < \epsilon$$

tomemos $\epsilon' = \text{mín}\{\delta, \epsilon\}$ y $T' > |t|$ (en el caso que $T > |t|$ tomaremos $T' = T$), entonces existe una $(\epsilon', 3T' - t)$ – cadena de x a x dado por:

$$x_0 = x, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = x; t_0, \dots, t_{n-1} \geq 3T' - t \geq T$$

tal que

$$d(\Phi(t_i, x_i), x_{i+1}) \quad i = 0, \dots, n-1,$$

de donde obtenemos

$$\Phi(t, x), x_1, \dots, x_{n-1}; t_0 - t, t_1, \dots, t_{n-2} \geq T$$

una (ϵ, T) -cadena de $\Phi(t, x)$ a x_{n-1} . (1)

Por otro lado como $d(t_{n-1}, x_{n-1}, x) < \epsilon' \leq \delta$ entonces $d(\Phi(t+t_{n-1}, x_{n-1}), \Phi(t, x))$

observemos que $t + t_{n-1} \geq 3T' \geq T$

así,

$$x_{n-1}, \Phi(t, x); t + t_{n-1} \geq T$$

es una (ϵ, T) -cadena de x_{n-1} a $\Phi(t, x)$. (2)

Concatenando las cadenas (1) y (2) obtenemos una (ϵ, T) -cadena de $\Phi(t, x)$ a $\Phi(t, x)$.

Así \mathcal{R} es invariante.

□

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 2.5. *Cada punto periódico es un punto cadena recurrente. Sea x un punto periódico con período S . Sea $\epsilon > 0$ y $T > 0$. Si $S > 0$, entonces existe un entero n tal que $nS > T$. Además $(x, x; T)$ es una (ϵ, T) -cadena de x en si mismo. Si $S = 0$, entonces x es un punto fijo, y $(x, x; T)$ es una (ϵ, T) -cadena de x en si mismo.*

Ejemplo 2.6. *Consideremos la ecuación diferencial autónoma:*

$$\dot{x} = x(x-1)(x-2)^2(x-3) \text{ en el intervalo } X = [0, 3].$$

Podemos observar que los puntos fijos 0, 1, 2, 3 son puntos cadenas recurrentes: pues, sea $x \in [0, 3]$ que no es un punto fijo. Sea $\delta = \min d(x, x^)$, donde x^* es un punto fijo. Sea $\epsilon = \frac{1}{3}\delta$ y $a = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, x)$. Sea $T = \min\{t > 0 : d(\Phi(t, x), a) = \epsilon\}$.*

Fijamos ϵ, T y construimos la (ϵ, T) -cadena en x :

$x_0 = x, y_1 = \Phi(t, x)$ para algún $t \geq T$ entonces $d(y_1, a) \leq \epsilon$, la convergencia de $\Phi(t, x)$ hacía a es monótona.

Escojamos $x_1 \in U(y_1, \epsilon)$ la ϵ -vecindad de y_1 . Entonces $d(x, x_1) > \epsilon$ entonces sucede dos posibilidades:

1. $x_1 \notin \{\Phi(t, x); t \geq 0\}$ entonces $d(\{\Phi(t, x_1) : t \geq 0\}, x) \geq 3\epsilon$.
2. $x_1 \in \{\Phi(t, x); t \geq 0\}$ entonces $d(\Phi(t, x_1), a) \leq \epsilon$, para todo $t \geq T$.

Repetiendo la construcción para $y_2 = \Phi(t, x)$ para algún $t \geq T$ y $x_2 \in U(y_2, \epsilon)$, vemos que para todo $n \in \mathbb{N}$; $d(x_n, x) > \epsilon$ y esto no es una (ϵ, T) -cadena de x a x .

Esto sucede porque las trayectorias que pasan por x no retornan.

Ejemplo 2.7. Consideremos el espacio métrico \mathbb{S}^1 , la esfera unitaria, como nos muestra el gráfico del Ejemplo 2.2.

En \mathbb{S}^1 la ecuación diferencial:

$$\dot{x} = \sin^2 x$$

define un sistema dinámico:

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$$

se muestra que $\mathcal{R} = \mathbb{S}^1$: pues, sea $x \in \mathbb{S}^1$ y $\epsilon, T > 0$ dados, asumimos sin pérdida de generalidad que $x \in (0, \pi)$. Vemos que $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, x) = \pi$ entonces existe $t_1 > T$ con $d(\Phi(t_1, x), \pi) < \frac{\epsilon}{2}$. Escogiendo $x_1 \in U(\pi, \frac{\epsilon}{2}) \cap (\pi, 0)$. Además, $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, x_1) = 0$, existe $t_2 > T$ con

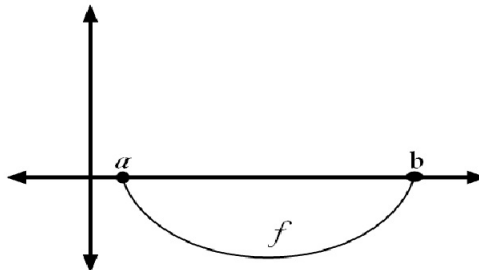
$$d(\Phi(t_2, x), 0) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Además $\lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi(t, x) = 0$ y existe $t_3 > T$ con $x_2 = \Phi(-t_3, x) \in U(0, \frac{\epsilon}{2})$.

Ahora $x = x_0, x_1, x_2, x_3 = x$ es una (ϵ, T) -cadena de x a x .

Además cualquier $Y \subset \mathbb{S}^1$ es cadena transitiva; y la única cadena transitiva maximal es \mathbb{S}^1 .

Ejemplo 2.8. Sea a y b números reales con $a < b$. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ alguna función tal que $f(a) = f(b) = 0$ y $f(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$. En forma general consideremos $f(x) = (x - a)(x - b)$.



Consideremos el flujo Φ asociado a la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(x)$$

en $[a, b]$. Los puntos fijos de Φ son los ceros de f .

Luego

$$\{a, b\} \subset \mathcal{R}.$$

Mostremos que $\mathcal{R} = \{a, b\}$. Note que $\Phi(t, x)$ es una función estrictamente decreciente de t para todo $x \in (a, b)$ porque $f(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$.

Sea $x \in (a, b)$ tal que no es un punto fijo. Sea $T > 0$ y $\epsilon > 0$, veremos que no existe una (ϵ, T) -cadena de x en si mismo.

Primero, vemos que existe $\delta > 0$ tal que si $y < \Phi(T, x) + \delta$ entonces

$$\Phi(t, y) < \Phi(T, x);$$

para todo $t \geq T$. Sea $\delta = x - \Phi(T, x)$. Como $\Phi(t, \cdot)$ es una función estrictamente decreciente de t y $T > 0$, tenemos $\delta > 0$. Si $y < \Phi(T, x) + \delta = x$, entonces

$$\Phi(t, y) \leq \Phi(T, y) < \Phi(T, x)$$

para todo $t \geq T$.

Supongamos que dado $\epsilon > 0$ existe una (ϵ, T) -cadena de x a x .

Sea $\epsilon = \min\{\delta, x - \Phi(x, T)\}$. Asumamos que existe (ϵ, T) -cadena

$$(x = x_0, x_1, \dots, x_n = x; t_0, t_1, \dots, t_{n-1})$$

de x en si mismo. Si d denota la métrica inducida en $[a, b]$, entonces

$$|\Phi(x_0, t_0) - x_1| = d(\Phi(x_0, t_0), x_1) < \epsilon \leq \delta.$$

Si $t_0 \geq T$ y $\Phi(t, x_0)$ es una función decreciente de t ,

$$x_1 < \Phi(t_0, x_0) + \delta \leq \Phi(T, x_0) + \delta.$$

Si $t_1 \geq T$,

$$\Phi(t_1, x_1) < \Phi(T, x_0).$$

Ahora, $|\Phi(t_1, x_1) - x_2| = d(\Phi(t_1, x_1), x_2) < \epsilon \leq \delta$, tal que

$$x_2 < \Phi(t_1, x_1) + \delta < \Phi(T, x_0) + \delta.$$

Así,

$$\Phi(t_2, x_2) < \Phi(T, x).$$

Continuando de esta manera obtenemos

$$\Phi(t_{n-1}, x_{n-1}) < \Phi(T, x_0) < x_0.$$

Si $x_n = x$ y $t_{n-1} \geq T$,

$$|\Phi(t_{n-1}, x_{n-1}) - x_n| = |\Phi(t_{n-1}, x_{n-1}) - x| > x - \Phi(T, x).$$

En el orden dado, por definición de ϵ ,

$$|\Phi(t_{n-1}, x_{n-1}) - x_n| < \epsilon \leq x - \Phi(T, x). \quad (\text{Contradicción})$$

Así $x \notin \mathcal{R}$, por tanto

$$\mathcal{R} = \{a, b\}$$

y los únicos conjuntos cadenas transitivas maximales son: $\{a\}$, $\{b\}$.

Ejemplo 2.9. Sea $C \subset [0, 1]$ el conjunto ternario Cantor. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in C$ y $f(x) < 0$ para todo $x \in [0, 1] \setminus C$.

Sea ϕ el flujo asociado a la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(x)$$

en $[0, 1]$. Los puntos fijos de ϕ son los ceros de f que son los elementos de C . Como los puntos fijos son cadenas recurrentes tenemos que $C \subset \mathcal{R}$. Mostraremos que $C = \mathcal{R}$.

Sea $x \in [0, 1] \setminus C$. Por propiedades del conjunto ternario Cantor, existe elementos $a, b \in C$ tal que $x \in [a, b]$ y $(a, b) \cap C = \emptyset$. El flujo $\phi|_{[a, b]}$ es exactamente un flujo del tipo estudiado en el Ejemplo 2.8. Tal ejemplo muestra que $x \notin \mathcal{R}$. Así concluimos que

$$C = \mathcal{R}.$$

Ejemplo 2.10. Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(1-r)(\sin^2 \theta + 1 - r^2), \\ \dot{\theta} &= \sin^2 \theta + 1 - r^2 \end{aligned}$$

en coordenadas polares en el disco unitario cerrado \mathbb{D} en el plano complejo. El flujo ψ correspondiente a este sistema. El flujo ψ tiene tres puntos fijos: $-1, 0, 1$. Mostraremos

que $\mathcal{R} = \partial\mathbb{D} \cup \{0\}$. Si $r = 1$ en el borde de \mathbb{D} , el flujo restringido al borde es el flujo del Ejemplo 2.7 donde cada punto es cadena recurrente. Recordemos que 0 es cadena recurrente. Mostraremos que el 0 es el único cadena recurrente en el interior de \mathbb{D} . Sea $z \in \text{int}(\mathbb{D} \setminus \{0\})$. Para cada $T > 0$ vemos un $\epsilon > 0$ tal que no existe (ϵ, T) -cadena de z en si mismo. Definimos $L : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$L(w) = 1 - |w|.$$

Vemos que, $L(w)$ es la distancia de w al borde de \mathbb{D} . Si $0 < r < 1$ en el $\text{int}(\mathbb{D}) \setminus \{0\}$

$$r(1-r)(\sin^2 \theta + 1 - r^2) > 0.$$

Consecuentemente, $L(\psi(t, w))$ es una función estrictamente decreciente de t para cada $w \in \text{int}(\mathbb{D}) \setminus \{0\}$.

Sea $a = L(\psi(T, z))$ y $b = L(z)$. Entonces $0 < a < b < 1$. Existe un $\delta > 0$ tal que si $L(w) < a + \delta$, entonces

$$L(\psi(t, w)) < a$$

para todo $t \geq T$. Sea $\delta = 1 - a - |z|$. Si $L(w) < a + \delta$, entonces $1 - |w| < 1 - |z|$, tal que $|w| > |z|$. Porque \dot{r} es positivo independiente de θ , tenemos $L(\psi(T, w)) < L(\psi(T, z))$. Además L es decreciente de la órbita de w obtenemos

$$L(\psi(t, w)) \leq L(\psi(T, w)) < L(\psi(T, z)) = a$$

para todo $t \geq T$.

Sea $\eta = \min\{\delta, b - a\}$. Además \mathbb{D} es compacto y L es continua, L es uniformemente continua. Así, existe $\epsilon > 0$ tal que si $w_1, w_2 \in \mathbb{D}$ y $|w_1 - w_2| < \epsilon$, entonces

$$|L(w_1) - L(w_2)| < \eta.$$

Por medio de contradicción, asumimos que existe una (ϵ, T) -cadena

$$(z = z_0, z_1, \dots, z_n = z; t_0, \dots, t_{n-1})$$

de z en si mismo. Además

$$|\psi(t_0, z_0) - z_1| < \epsilon,$$

la continuidad uniforme de L garantiza que

$$|L(\psi(t_0, z_0)) - L(z_1)| < \eta \leq \delta.$$

Por que $t_0 \geq T$,

$$L(z_1) < L(\psi(t_0, z_0)) + \delta \leq L(\psi(T, z_0)) + \delta = a + \delta.$$

Así,

$$L(\psi(t_1, z_1)) < a.$$

Además

$$|\psi(t_1, z_1) - z_2| < \epsilon,$$

la continuidad uniforme de L garantiza que

$$|L(\psi(t_1, z_1)) - L(z_2)| < \eta \leq \delta.$$

Porque $t_1 \geq T$,

$$L(z_2) < L(\psi(t_1, z_1)) + \delta < a + \delta.$$

Así,

$$L(\psi(t_2, z_2)) < a.$$

Continuando de esta manera obtenemos

$$L(\psi(t_{n-1}, z_{n-1})) < a.$$

Si $L(z_n) = L(z) = b$,

$$|L(\psi(t_{n-1}, z_{n-1})) - L(z_n)| = L(z) - L(\psi(t_{n-1}, z_{n-1})) > b - a.$$

En este orden tenemos, si $|\psi(t_{n-1}, z_{n-1}) - z_n| < \epsilon$, la continuidad uniforme de L implica que

$$|L(\psi(t_{n-1}, z_{n-1})) - L(z_n)| < \eta \leq b - a. \quad (\text{Contradicción})$$

Consecuentemente no existe una (ϵ, T) -cadena de z en si mismo.

Por tanto

$$\mathcal{R} = \mathcal{D} \cup \{0\}.$$

El siguiente resultado mostrará que en \mathcal{R} sólo la existencia del límite inferior para tiempos positivos en las (ϵ, T) -cadenas es importante.

Proposición 2.5. *Considere $y \in \mathcal{R}$ y $x \in X$ y sea $\tau > 0$. Si para cada $\epsilon > 0$ existe una (ϵ, τ) -cadena desde x hasta y , entonces para cada $\epsilon, T > 0$ existe una (ϵ, T) -cadena desde x hasta y .*

Prueba.- Es suficiente mostrar que para cada $\epsilon > 0$ existe una $(\epsilon, 2\tau)$ -cadena desde x hasta y . Por la compacidad de X la función Φ es uniformemente continua en $X \times [0, 3\tau]$.

Por tanto, existe $\delta \in (0, \frac{\epsilon}{2})$ tal que para todo $a, b \in X$ y $t \in [0, 3\tau]$:

$$d(a, b) < \delta \quad \text{implica} \quad d(a \cdot t, b \cdot t) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Ahora dejamos una (ϵ, τ) -cadena $x_0 = x, x_1, \dots, x_m = y$ con $\tau_0, \dots, \tau_{m-1} \geq \tau$ son dados.

Podemos asumir que $\tau_i \in [\tau, 2\tau]$. Asumimos también que $m \geq 2$, como nosotros podemos concatenar esta cadena con una cadena desde x hasta y . Luego existen $q \in \{0, 1, \dots\}$ y $r \in \{2, 3\}$ con $m = 2q + r$. Obtenemos una $(\epsilon, 2\tau)$ -cadena desde x hasta y dado por los puntos

$$y_0 = x, y_1 = x_2, y_2 = x_4, \dots, y_q = x_{2q}, y_{q+1} = x_m = y$$

con tiempos

$$T_0 = \sum i = 0^1 \tau_i, T_1 = \sum i = 0^3 \tau_i, \dots, T_q = \sum i = 0^m \tau_i.$$

Esto se sigue por la desigualdad triangular y la elección de δ .

□

Tengamos en cuenta lo siguiente:

Nota 2. Denominaremos al sistema dinámico restringido a un subconjunto $Y: \Phi|_Y$ cadena transitiva, cuando Y es cadena transitiva respecto de $\Phi|_Y$.

Teorema 2.3. El flujo restringido a un subconjunto cadena transitiva maximal del conjunto \mathcal{R} cadena recurrente es cadena transitiva. En particular, el flujo restringido a \mathcal{R} es cadena recurrente.

Prueba.- Sea $y, y' \in Y \subset \mathcal{R}$, donde Y es un conjunto cadena transitiva maximal en \mathcal{R} . Para cada $p \in \mathbb{N}$ existe una $(1/p, 1)$ -cadena en X de y a y' , dado con $x_0 = y, x_1, \dots, x_{nv} = y' \in X$ y tiempos $T_0^p, \dots, T_{nv-1}^p \in [1, 2]$. Definir $k_p = \cup_{i=0}^{nv} \{x_i \cdot [0, T_i^p]\}$. Por el Teorema Blaschke's 1.5, existe una sub-secuencia de k_p convergiendo en la métrica de Hausdorff d_H a algún subconjunto compacto no vacío $K \subset X$ con $y, y' \in K$. Nosotros exigimos que para todo $x, z \in K$ y todo $q \in \mathbb{N}$ hay una $(1/q, 1)$ -cadena

en K con tiempos $T_0^q, \dots, T_{nq-1}^q \in [1, 2]$ de x a z . En particular, esto implica $K \subset Y$ y de este hecho sigue

$$d(a, b) < \delta \text{ implica } d(a \cdot t, b \cdot t) < \frac{1}{3q} \text{ para todo } t \in [0, 3].$$

Escogiendo $p \in \mathbb{N}$ con $p > \max\{3q, \delta^{-1}\}$ y $d_H(k_p, k) < \delta$ uno puede construir una $(\frac{1}{q}, 1)$ – cadena de x a z en K como requirió.

□

Dado el conjunto \mathcal{R} , no cualquier subconjunto de \mathcal{R} es necesariamente cadena transitiva, pero esto es cierto si le añadimos algunas condiciones, como nos muestra la siguiente proposición.

Proposición 2.6. *Un subconjunto cerrado Y de un espacio métrico compacto X es cadena transitiva si este es cadena recurrente y conexo. Recíprocamente, si el flujo en X es cadena transitiva, entonces X es conexo.*

Prueba.- Supongamos primero que Y es un subconjunto cadena recurrente y conexo. Sea $x, y \in Y$ y cualesquier $\varepsilon, T > 0$. Cubrimos Y por bolas de radio $\varepsilon/3$. Por la conexidad existen finitos puntos, de tal forma que $y_1, \dots, y_{n-1} \in Y$ tal que para todo $z \in Y$, existe y_i con $d(z, y_i) < \varepsilon/3$ y $B(y_i, \varepsilon/3) \cap B(y_{i+1}, \varepsilon/3) \neq \emptyset$. Definimos $y_0 = x$ y $y_n = y$. Ahora asumamos que por cadena recurrente del flujo hay $(\varepsilon/3, T)$ – cadena de y_i a y_i para $i = 0, 1, \dots, n - 1$. Encadenamiento de esta cadenas (ε, T) – cadena de x a y . Recíprocamente, sea el flujo en X cadena transitiva. Si X no es conexa, puede escribirse como la unión de conjuntos abiertos no vacíos de V y W . Entonces estos conjuntos son cerrados, compactos y

$$\varepsilon_0 := \inf\{d(v, w), v \in V, w \in W\} > 0$$

Para $\varepsilon < \varepsilon_0/2$ no puede existir (ε, Y) – cadenas de un elemento de V a un elemento de W , contradiciendo el hecho de cadena transitiva.

□

Obtenemos la siguiente caracterización topológica de las componentes conexas de \mathcal{R} .

Teorema 2.4. *Las componentes conexas del conjunto cadena recurrente \mathcal{R} coincide con los subconjuntos cadena transitivas maximal de \mathcal{R} . Además, el flujo restringido a una componente conexa de \mathcal{R} es una cadena transitiva.*

Prueba.- Por el Teorema 2.3 sabemos que el flujo restringido a una cadena transitiva maximal subconjunto \mathcal{R}_0 de \mathcal{R} es cadena transitiva. De la segunda parte de la Proposición 2.6: \mathcal{R}_0 es conexo y así contenida en una componente conexa de \mathcal{R} . Recíprocamente, la primera parte de la Proposición 2.6 implica que cada componente conexa de \mathcal{R} es cadena transitiva, porque esta es cerrado, cadena recurrente y conexo.

□

Nota 3. Las componentes conexas de \mathcal{R} son también denominadas las componentes cadena recurrente.

Veamos algunos ejemplos para ilustrar estos conceptos.

Ejemplo 2.11. Consideremos la ecuación diferencial autónoma:

$$\dot{x} = x(x-1)(x-2)^2(x-3) \text{ en el intervalo } X = [0, 3].$$

Para este ejemplo, las componentes del conjunto cadena recurrente, es decir las componentes cadena recurrentes son:

$$\{0\}, \{1\}, \{2\}, \text{ y } \{3\}$$

Nosotros también notamos el siguiente lema simple, que indican un límite superior uniforme durante el tiempo total necesitan conectar cualquier dos puntos en una cadena componente recurrente. Se necesita para el análisis del Espectro Morse.

Lema 2.8. Sea \mathcal{R}_0 una componente cadena recurrente y fijos $\varepsilon, T > 0$. Entonces existe $\bar{T}(\varepsilon, T) > 0$ tal que para todo $x, y \in \mathcal{R}$ tiene una (ε, T) – cadena de x a y con longitud total menor igual $\bar{T}(\varepsilon, T)$.

Prueba.- Uno encuentra para todo $x, y \in \mathcal{R}$ una $(\varepsilon/2, T)$ – cadena de x a y . Usando dependencia continua en valores iniciales y residuos, uno encuentra finitamente muchos (módulo puntos finales) (ε, T) – cadenas; z conectado con elementos cualesquier $y \in \mathcal{R}_0$. Así, uno termina con muchos finitos (ε, T) – cadenas conectando todos los puntos en \mathcal{R}_0 . El máximo de sus longitudes totales es el deseado límite superior $\bar{T}(\varepsilon, T)$.

□

2.4. Conjunto Cadena Límite y Atractores

Nosotros procedemos a analizar la relación entre cadena recurrente y atractores.

Definición 2.7. Para un subconjunto no vacío $Y \subset X$ definimos el conjunto cadena límite

$$\Omega(Y) = \{z \in X, \exists y \in Y, \text{ tal que } \forall \varepsilon, T > 0 \text{ existe una } (\varepsilon, T) - \text{cadena de } y \text{ a } z\}.$$

Además, para $\varepsilon, T > 0$ definimos

$$\Omega(Y, \varepsilon, T) = \{z \in X, \exists y \in Y, \text{ y existe } (\varepsilon, T) - \text{cadena de } y \text{ a } z\}.$$

Veamos algunos resultados inmediatos:

Nota 4. Los siguientes resultados son inmediatos:

- a) Si Y es cadena transitiva maximal, entonces $Y \subset \Omega(x)$ para todo $x \in Y$.
- b) x es un punto cadena recurrente si y sólo si, $x \in \Omega(x)$.

Observemos las propiedades que cumplen los conjuntos cadena límites, un interesante hecho visto en un curso regular de análisis es que la intersección arbitraria de conjuntos abiertos no necesariamente es abierto.

Corolario 2.2. Para un subconjunto $Y \subset X$ no vacío obtenemos:

- 1) $\omega(Y) \subset \Omega(Y)$ y por tanto $\Omega(Y) \neq \emptyset$.
- 2) Dado $\varepsilon, T > 0$, el conjunto $\Omega(Y, \varepsilon, T)$ es abierto.
- 3) $\Omega(Y)$ es compacto.
- 4) $\Omega(Y)$ es invariante.
- 5) Si $\Omega(x) = Y$ para todo $x \in Y$, entonces Y es cadena transitiva maximal.

Prueba.- Veamos:

- 1) Sea $\epsilon, T > 0$ cualesquiera, y $z \in \omega(Y)$; entonces existe una sucesión creciente de $t_k \rightarrow \infty$ y $x_k \in Y$ tal que $\Phi(t_k, x_k) \rightarrow z$, por tanto para $\epsilon > 0$ existe subíndice k' tal que $t_{k'} > T$ y $d(\Phi(t_{k'}, x_{k'}), z) < \epsilon$ donde $x_{k'} \in Y$, así

$$(x_{k'} = x_0, x_1 = z; t_{k'})$$

es una (ϵ, T) -cadena de $x_{k'} \in Y$ a $z \in \omega(Y)$.

- 2) Fijamos $\epsilon, T > 0$, supongamos que $\Omega(Y, \epsilon, T)$ es no abierto; por tanto existe $x \in \Omega(Y, \epsilon, T)$ tal que para todo $r > 0$, existe $z \notin \Omega(Y, \epsilon, T)$ y $d(x, z) < r$. (1)
Como $x \in \Omega(y, \epsilon, T)$ existe una (ϵ, T) -cadena de algún elemento $y \in Y$ a x , dado por

$$(x_0 = y, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = x; t_0, \dots, t_{n-1}, t_n \geq T)$$

tal que $d(\Phi(t_i, x_i), x_{i+1}) < \epsilon$ de donde obtenemos $d(\Phi(t_{n-1}, x_{n-1}), x) < \epsilon$, entonces se cumple que $0 < \epsilon - d(\Phi(t_{n-1}, x_{n-1}), x)$.

En (1) considerando $r = \epsilon - d(\Phi(t_{n-1}, x_{n-1}), x)$.

Por tanto existe una (ϵ, T) -cadena de $y \in Y$ a $z \notin \Omega(Y, \epsilon, T)$ dado por

$$(x_0 = y, x_1, \dots, x_{n-1}, x; t_0, \dots, t_{n-1} \geq T)$$

lo cual es una contradicción, por tanto

$\Omega(Y, \epsilon, T)$ es abierto.

- 3) Sea $x_i \rightarrow x$ donde $x_i \in \Omega(Y)$ y $\epsilon, T > 0$ cualesquiera. Para $\frac{\epsilon}{2}$ existe $x_i \in \Omega(Y)$ tal que $d(x_i, x) < \frac{\epsilon}{2}$. Para $\frac{\epsilon}{2}, T$ existe $y \in Y$ y una $(\frac{\epsilon}{2}, T)$ -cadena de y a x_i dado por

$$(x_0 = y, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = x_i; t_0, \dots, t_{n-1} \geq T)$$

Y así construimos una (ϵ, T) -cadena de y a x , dado por

$$(y = x_0, \dots, x_{n-1}, x; t_0, \dots, t_{n-1} \geq T)$$

donde

$$\begin{aligned} d(\Phi(t_{n-1}, x_{n-1}), x) &\leq d(\Phi(t_{n-1}, x_{n-1}), x_i) + d(x_i, x) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

4) Sea $x \in \Omega(Y)$, $\epsilon, T > 0$ y $t \in \mathbb{R}$.

Como $\Phi_t : X \rightarrow X$ es continua en x .

Para $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, z) < \delta, \text{ implica } d(\Phi(t, x)\Phi(t, z)) < \epsilon$$

tomemos $\epsilon' = \min\{\delta, \epsilon\}$, $T' > |t|$ y $T' \geq T$.

Existe una $(\epsilon', 2T' - t)$ -cadena de algún elemento $y \in Y$ a x , dado por

$$x_0 = y, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = x; t_0, t_1, \dots, t_{n-1} \geq 2T' - t \geq T$$

donde

$$d(\Phi(t_i, x_i).x_{i+1}) < \epsilon' \leq \epsilon$$

de donde sólo consideramos

$$x_0 = y, x_1, \dots, x_{n-1}; t_0, t_1, \dots, t_{n-1} \geq T$$

es una (ϵ, T) -cadena de y a x_{n-1} . (1)

Por otro lado $d(\Phi(t_{n-1}, x_{n-1}), x) < \epsilon' \leq \delta$, entonces $d(\Phi(t + t_{n-1}, x_{n-1}), \Phi(t, x))$; donde observamos que $t_{n-1} + t \geq 2T' \geq T$.

Así,

$$x_{n-1}, \Phi(t, x); t_{n-1} + t \geq T$$

es una (ϵ, T) -cadena de x_{n-1} a $\Phi(t, x)$. (2)

Concatenando (1) y (2) obtenemos una (ϵ, T) -cadena de $y \in Y$ a $\Phi(t, x)$, por tanto $\Phi(t, x) \in \Omega(Y)$.

5) Sean $x, y \in Y$, entonces por hipótesis $y \in \Omega(x)$ por tanto para todo $\epsilon, T > 0$ existe una (ϵ, T) -cadena de x a y ; por tanto Y es cadena transitiva.

Sea H una cadena transitiva tal que $Y \subset H$, tomemos $z \in H$ además como $x \in Y \subset H$, como H es cadena transitiva, entonces para todo $\epsilon, T > 0$ existe una (ϵ, T) -cadena de x a y , por tanto $y \in \Omega(x)$, por tanto

$$Y \subset H \subset \Omega(x) \subset Y \rightarrow Y = H$$

Por tanto Y es cadena transitiva maximal. □

Ahora veamos una estrecha relación con los conjuntos atractores y repulsores.

Proposición 2.7. Para $Y \subset X$ el conjunto $\Omega(Y)$ es la intersección de todos los atractores conteniendo $\omega(Y)$.

Prueba.- Note que $\Omega(Y) = \bigcap_{\varepsilon, T > 0} \Omega(Y, \varepsilon, T)$, y para $\varepsilon, T > 0$ definimos

$N := \overline{\Omega(Y, \varepsilon, T)}$. Entonces $\omega(N) \subset \Omega(Y, \varepsilon, T) \subset \text{int } N$, donde la segunda inclusión sigue porque $\Omega(Y, \varepsilon, T)$ es abierto y contenido en N . Ahora sea $z \in \omega(N)$. Entonces existe $t_n \rightarrow \infty$ y $x_n \in N$ con $x_n \cdot t_n \rightarrow z$. Escojamos $n_0 \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ y $p \in \Omega(Y, \varepsilon, T)$ con $d(p, x_{n_0}) < \delta$, $t_{n_0} > T$, y $d(x_{n_0} \cdot t_{n_0}, z) < \frac{\varepsilon}{2}$ $d(z_{n_0} \cdot t_{n_0}, x_{n_0} \cdot t_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo z con $d(z, x_{n_0}) < \delta$. Por definición de p existe una (ε, T) -cadena de algún $y \in Y$ a p y optamos por

$$d(p \cdot t_{n_0}, z) \leq d(p \cdot t_{n_0}, x_{n_0} \cdot t_{n_0}) + d(x_{n_0} \cdot t_{n_0}, z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Así la concatenación produce una (ε, T) -cadena desde y a z .

Tenemos que mostrar que $A := \omega(N)$ es un conjunto cerrado invariante con vecindad N , por tanto un atractor. Por la invarianza de $\Omega(Y)$ tenemos

$$A = \omega(\overline{(\Omega(Y, \varepsilon, T))}) \supset \Omega(Y) \supset \omega(Y).$$

Por la invarianza y cerradura de $\Omega(Y)$ se muestra que $\Omega(Y) = \omega(\Omega(Y))$ de hecho esta contenido en la intersección de esos atractores conteniendo $\omega(Y)$.

Ahora supongamos que A es cualquier atractor conteniendo $\omega(Y)$. Sea V una vecindad abierta de A disjunta de A^* y sea $t > 0$ tal que $clV \cdot t \subset V$.

Sea

$$0 < \epsilon < \inf\{d(y, z), y \in V \text{ y } z \notin \overline{V} \cdot t\}.$$

Elegimos $T > t$ tal que $Y \cdot T \subset \overline{V} \cdot t$. Entonces todo (ϵ, T) -cadena desde Y debe terminar en V . Por lo tanto, si $\omega(x) \subset A$, entonces también $\Omega(x) \subset A$ y por tanto $\Omega(Y)$ es la intersección de todos los atractores conteniendo $\omega(Y)$.

□

Esta proposición implica, en particular, que una cadena del flujo transitivo tiene solo el atractor trivial $A = X$, porque para cada $Y \subset X$ uno tiene que $\Omega(Y) = X$.

Ejemplo 2.12. Consideremos la ecuación diferencial autónoma:

$$\dot{x} = x(x-1)(x-2)^2(x-3) \text{ en el intervalo } X = [0, 3].$$

Para este sistema dinámico, nosotros tenemos para cada subconjunto $Y \subset [0, 3]$ que $\omega(Y) = \Omega(Y)$.

DESCOMPOSICIÓN DE MORSE

El comportamiento de flujos en espacios métricos compactos pueden ser descritos vía la descomposición de Morse, los cuales son colecciones especiales de subconjuntos no vacíos y compactos invariantes aislados, que cumplen ciertas condiciones adicionales.

3.1. Descomposición de Morse

Definición 3.1. Una descomposición de Morse de un flujo en un espacio métrico compacto es una colección finita de subconjuntos $\{\mathcal{M}_i, i = 1, \dots, n\}$ no vacíos, disjuntos a pares, compactos e invariantes aislados tal que:

i) Para todo $x \in X$ uno tiene $\omega(x), \alpha(x) \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{M}_i$.

ii) Suponga que existen $\mathcal{M}_{j_0}, \mathcal{M}_{j_1}, \dots, \mathcal{M}_{j_l}$ y $x_1, \dots, x_l \in X \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathcal{M}_i$ con $\alpha(x_i) \subset \mathcal{M}_{j_{i-1}}$ y $\omega(x_i) \subset \mathcal{M}_{j_i}$ para $i = 1, \dots, l$; entonces $\mathcal{M}_{j_0} \neq \mathcal{M}_{j_l}$.

Nota 5. Consideremos las siguientes denominaciones:

1. Los elementos de una Descomposición de Morse son llamados conjuntos de Morse.
2. Los conjuntos de Morse contienen todos los conjuntos límites.
3. La condición ii) de la definición de la Descomposición de Morse usualmente se denomina la condición no ciclo.

4. La Descomposición de Morse de un sistema dinámico continuo en un espacio métrico compacto, no necesariamente es única, pueden haber varias.

Como mencionamos en un sistema dinámico pueden haber varias Descomposición de Morse, lo cual nos lleva a mostrar la siguiente propiedad.

Proposición 3.1. *La intersección de dos descomposiciones de Morse $\{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n\}$ y $\{\mathcal{M}'_1, \dots, \mathcal{M}'_{n'}\}$ define una descomposición de Morse*

$$\{\mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}'_j, i, j\},$$

donde sólo estos índices $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n'$ con $\mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}'_j \neq \emptyset$ son permitidos.

Prueba.- Es evidente ver que $\{\mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}'_j : i, j\}$ son no vacíos, disjuntos a pares, compactos e invariantes aislados, además:

i) Para todo $x \in X$ y $z \in \omega(x)$ existe i, j tal que $z \in \mathcal{M}_i$ y $z \in \mathcal{M}'_j$, por tanto

$$\omega(x) \subset \bigcup_{i,j} \mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}'_j$$

análogamente para $\alpha(x)$.

ii) Supongamos que existen

$$\mathcal{M}_{k_0} \cap \mathcal{M}'_{k_0}, \mathcal{M}_{k_1} \cap \mathcal{M}'_{k_1}, \dots, \mathcal{M}_{k_l} \cap \mathcal{M}'_{k_l} \text{ y } x_1, \dots, x_l \in X \setminus \bigcup_{i,j} \mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}'_j$$

con $\alpha(x_s) \subset \mathcal{M}_{k_{s-1}} \cap \mathcal{M}'_{k_{s-1}}$ y $\omega(x_s) \subset \mathcal{M}_{k_s} \cap \mathcal{M}'_{k_s}$ para $s = 1, \dots, l$;

Además: $\mathcal{M}_{k_s} \cap \mathcal{M}'_{k_s} \subset \mathcal{M}_{k_s}$: $s = 1, 2, \dots, l$;

tenemos $\mathcal{M}_{k_0} \neq \mathcal{M}_{k_l}$, así \mathcal{M}_{k_0} y \mathcal{M}_{k_l} son disjuntos, por tanto

$$\mathcal{M}_{k_0} \cap \mathcal{M}'_{k_0} \neq \mathcal{M}_{k_l} \cap \mathcal{M}'_{k_l}$$

□

La condición no-ciclo de la definición de Descomposición de Morse, induce una forma de ordenar los conjuntos de Morse, lo cual formalizamos mediante la siguiente proposición, la cual nos ayuda en la forma de enumerar los conjuntos de Morse.

Proposición 3.2. *La siguiente relación \preceq es una relación de orden (i.e. satisface reflexividad, transitividad y antisimetría):*

$$\mathcal{M}_i \preceq \mathcal{M}_k \text{ si y solo si, } \begin{array}{l} \text{Existen } \mathcal{M}_{j_0} = \mathcal{M}_i, \mathcal{M}_{j_1}, \dots, \mathcal{M}_{j_l} = \mathcal{M}_k \text{ y } x_1, \dots, x_l \in X \\ \text{con } \alpha(x_{j_k}) \subset \mathcal{M}_{j_{k-1}} \text{ y } \omega(x_{j_k}) \subset \mathcal{M}_{j_k} \text{ para } k = 1, \dots, l. \end{array}$$

Enumeramos los conjuntos de Morse de tal manera que $\mathcal{M}_i \preceq \mathcal{M}_j$ implica $i \leq j$.

Prueba.- Verifiquemos que cumple cada una de las condiciones:

❶ Reflexividad.

Sea \mathcal{M}_k un conjunto de Morse en una Descomposición de Morse $\{\mathcal{M}_i : i = 1, 2, \dots, n\}$. Como $\mathcal{M}_k \neq \emptyset$ tenemos que existe $x \in \mathcal{M}_k$; además \mathcal{M}_k es compacto invariante aislado llegamos a afirmar que $\omega(x), \alpha(x) \subset \mathcal{M}_k$. Fijando un natural $l > 0$ tal que $\mathcal{M}_k = \mathcal{M}_{j_0} = \mathcal{M}_{j_1} = \dots = \mathcal{M}_{j_l}$ y $x = x_1 = \dots = x_l \in X$ con

$$\alpha(x_i) \subset \mathcal{M}_{j_{i-1}}, \omega(x_i) \subset \mathcal{M}_{j_i}; \quad i = 1, \dots, l$$

entonces

$$\mathcal{M}_k \preceq \mathcal{M}_k$$

❷ Antisimetría ($\mathcal{M}_t \preceq \mathcal{M}_k \wedge \mathcal{M}_k \preceq \mathcal{M}_t$) implica $\mathcal{M}_t = \mathcal{M}_k$.

Por Contradiccion

Supongamos

i)

$$\begin{array}{l} \text{existen } \mathcal{M}_{j_0} = \mathcal{M}_t, \mathcal{M}_{j_1}, \dots, \mathcal{M}_{j_l} = \mathcal{M}_k \text{ y} \\ \mathcal{M}_t \preceq \mathcal{M}_k \text{ si y sólo si } x_1, \dots, x_l \in X \text{ tal que} \\ \alpha(x_{j_i}) \subset \mathcal{M}_{j_{i-1}} \text{ y } \omega(x_{j_i}) \subset \mathcal{M}_{j_i}; \quad i = 1, \dots, l. \end{array}$$

ii)

$$\begin{array}{l} \text{existen } \mathcal{M}_{j_l} = \mathcal{M}_k, \mathcal{M}_{j_{l+1}}, \dots, \mathcal{M}_{j_{l+r}} = \mathcal{M}_t \text{ y} \\ \mathcal{M}_k \preceq \mathcal{M}_t \text{ si y sólo si } x_{l+1}, \dots, x_{l+r} \in X \text{ tal que} \\ \alpha(x_{j_{l+i}}) \subset \mathcal{M}_{j_{l+i-1}} \text{ y } \omega(x_{j_{l+i}}) \subset \mathcal{M}_{j_{l+i}}; \quad i = 1, \dots, r. \end{array}$$

iii)

$$\mathcal{M}_t \neq \mathcal{M}_k$$

Observemos lo siguiente

$$(x_i \in \mathcal{M}_{j_i} \vee x_i \in \mathcal{M}_{j_{i-1}}) \text{ implica } \mathcal{M}_{j_i} = \mathcal{M}_{j_{i-1}}.$$

lo cual nos permite construir la siguiente Descomposición de Morse

$$\{\mathcal{M}_{t_0} = \mathcal{M}_i, \mathcal{M}_{t_1}, \dots, \mathcal{M}_{t_s} = \mathcal{M}_i\} \subset$$

$$\subset \{\mathcal{M}_{j_0} = \mathcal{M}_t, \mathcal{M}_{j_1}, \dots, \mathcal{M}_{j_l} = \mathcal{M}_k, \mathcal{M}_{j_{l+1}}, \dots, \mathcal{M}_{j_{l+r}} = \mathcal{M}_t\}$$

tal que sus correspondientes

$$x_{t_1}, \dots, x_{t_s} \in X \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathcal{M}_i / \alpha(x_{t_j}) \subset \mathcal{M}_{t_{j-1}} \text{ y } \omega(x_{t_j}) \subset \mathcal{M}_{t_j}; \quad j = 1, \dots, s.$$

entonces por la segunda condición de la definición de la Descomposición de Morse

tenemos

$$\mathcal{M}_i \neq \mathcal{M}_i \text{ (Contradicción)}$$

③ Transitividad. ($\mathcal{M}_s \preceq \mathcal{M}_t$ y $\mathcal{M}_t \preceq \mathcal{M}_k$, entonces $\mathcal{M}_s \preceq \mathcal{M}_k$)

i)

$$\begin{aligned} \text{existen } \mathcal{M}_{j_0} = \mathcal{M}_s, \mathcal{M}_{j_1}, \dots, \mathcal{M}_{j_l} = \mathcal{M}_t \text{ y} \\ \mathcal{M}_s \preceq \mathcal{M}_t \text{ si y sólo si } \quad x_1, \dots, x_l \in X \text{ tal que} \\ \alpha(x_{j_i}) \subset \mathcal{M}_{j_{i-1}} \text{ y } \omega(x_{j_i}) \subset \mathcal{M}_{j_i}; \quad i = 1, \dots, l. \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} \text{existen } \mathcal{M}_{j_l} = \mathcal{M}_t, \mathcal{M}_{j_{l+1}}, \dots, \mathcal{M}_{j_{l+r}} = \mathcal{M}_k \text{ y} \\ \mathcal{M}_t \preceq \mathcal{M}_k \text{ si y sólo si } \quad x_{l+1}, \dots, x_{l+r} \in X \text{ tal que} \\ \alpha(x_{j_{l+i}}) \subset \mathcal{M}_{j_{l+i-1}} \text{ y } \omega(x_{j_{l+i}}) \subset \mathcal{M}_{j_{l+i}}; \quad i = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

concatenando ambas sub-colecciones de conjuntos de Morse

$$\begin{aligned} \text{existen } \mathcal{M}_{j_0} = \mathcal{M}_s, \mathcal{M}_{j_1}, \dots, \mathcal{M}_{j_l} = \mathcal{M}_t, \mathcal{M}_{j_{l+1}}, \dots, \mathcal{M}_{j_{l+r}} = \mathcal{M}_k \\ \text{ y } x_1, \dots, x_l, x_{l+1}, \dots, x_{l+r} \in X \text{ tal que} \\ \alpha(x_{j_i}) \subset \mathcal{M}_{j_{i-1}} \text{ y } \omega(x_{j_i}) \subset \mathcal{M}_{j_i}; \quad i = 1, \dots, l. \\ \alpha(x_{j_{l+i}}) \subset \mathcal{M}_{j_{l+i-1}} \text{ y } \omega(x_{j_{l+i}}) \subset \mathcal{M}_{j_{l+i}}; \quad i = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

Con lo cual concluimos que

$$\mathcal{M}_s \preceq \mathcal{M}_k$$

□

Nota 6. Enumeramos los conjuntos de Morse de manera que se cumpla la siguiente implicación:

$$\boxed{\text{Si } \mathcal{M}_i \preceq \mathcal{M}_j, \text{ entonces } i \leq j.}$$

La condición no-ciclo de la Definición 3.1 de la Descomposición de Morse es muy trabajosa al momento de verificarla para varios conjuntos de Morse; y en ello nos facilitara un poco el siguiente resultado.

Proposición 3.3. Una colección finita $\{\mathcal{M}_i, i = 1, \dots, n\}$ de conjuntos no vacíos, disjuntos a pares y compactos invariantes aislados es una descomposición de Morse si y sólo si la condición 1) es válida, $\alpha(x) \cup \omega(x) \subset \mathcal{M}_i$ implica $x \in \mathcal{M}_i$.

Prueba.- Veamos en ambos sentidos.

\Rightarrow] Todo se resume a demostrar que si $\omega(x) \cup \alpha(x) \subset \mathcal{M}_i$, entonces $x \in \mathcal{M}_i$.

Supongamos $\omega(x) \cup \alpha(x) \subset \mathcal{M}_i \wedge x \notin \mathcal{M}_i$.

Afirmamos lo siguiente: $x \notin \bigcup_{j=1}^n \mathcal{M}_j$ pues de lo contrario existe $x \in \mathcal{M}_k \neq \mathcal{M}_i$ por compacidad e invariancia aislada de los conjuntos de Morse tenemos $\mathcal{M}_k \cap \mathcal{M}_i \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción con la condición disjunta a pares.

Así definimos $\mathcal{M}_{j_0} = \mathcal{M}_i$, $\mathcal{M}_{j_1} = \mathcal{M}_i$ y $x_1 = x \in X \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathcal{M}_i$ con $\alpha(x_1) \subset \mathcal{M}_{j_0}$

$\omega(x_1) \subset \mathcal{M}_{j_1}$, entonces tenemos $\mathcal{M}_i \neq \mathcal{M}_i$. (Contradicción)

\Leftarrow] Tenemos que demostrar la condición no-ciclo de la definición de Descomposición de Morse, lo haremos por contradicción.

Supongamos que tenemos $\mathcal{M}_{j_0}, \mathcal{M}_{j_1}, \dots, \mathcal{M}_{j_l}$ y $x_1, \dots, x_l \in X \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathcal{M}_i$ con $\alpha(x_i) \subset \mathcal{M}_{j_{i-1}}$ y $\omega(x_i) \subset \mathcal{M}_{j_i}$ para $i = 1, \dots, l$; y $\mathcal{M}_{j_0} = \mathcal{M}_{j_l}$.

Vemos que existe una relación de orden, tenemos:

$$\mathcal{M}_{j_{i-1}} \preceq \mathcal{M}_{j_i} \wedge \mathcal{M}_{j_i} \preceq \mathcal{M}_{j_{i-1}}; \quad i = 1, \dots, l$$

Por antisimetría tenemos $\mathcal{M}_{j_i} = \mathcal{M}_{j_{i-1}} = \mathcal{M}_t$; $i = 1, \dots, l$, así existe $x \in X \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathcal{M}_i$. Con $\alpha(x) \cup \omega(x) \subset \mathcal{M}_t$ por hipótesis $x \in \mathcal{M}_t$. (Contradicción)

□

Notemos que $i < j$ no implica $\mathcal{M}_i \preceq \mathcal{M}_j$ y que este no implica la existencia de $x \in X$ con $\omega^*(x) \subset \mathcal{M}_i$ y $\omega(x) \subset \mathcal{M}_j$. Las descomposiciones de Morse describen el flujo vía su movimiento de los conjuntos de Morse con índices más bajos hacia los índices más altos.

3.1.1. Descomposición Morse Fina

Como se ha mencionado anteriormente pueden existir varias Descomposiciones de Morse en sistema dado, la pregunta que nos hacemos es ver cual de estas es la más representativa (óptimo), por la cual introducimos una nueva categoría.

Definición 3.2. Una Descomposición de Morse $\{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n\}$ es llamado más fina que una descomposición de Morse $\{\mathcal{M}'_1, \dots, \mathcal{M}'_{n'}\}$, si para cada $j \in \{1, \dots, n'\}$ existe $i \in \{1, \dots, n\}$ con $\mathcal{M}_i \subset \mathcal{M}'_j$. Denominaremos a una descomposición $\{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n\}$ Descomposición de Morse Fina si esta es más fina que cualquier otra Descomposición de Morse.

Una propiedad interesante que cumple la Descomposición de Morse Fina es la siguiente.

Corolario 3.1. Si en un sistema dinámico continuo existe una Descomposición de Morse Fina, entonces esta es única.

La demostración se sigue de la Definición 3.2.

Nota 7. Veamos las siguientes observaciones que son relevantes:

- ✓ En un sistema dinámico no siempre consta de una Descomposición de Morse Fina.
- ✓ Note que, en general, intersecciones de cualesquier infinitas descomposiciones de Morse no define una descomposición de Morse. La intersección de todas las descomposiciones de Morse para un flujo no necesariamente es un conjunto contable. Puede formar un conjunto de Cantor.

Ejemplo 3.1. Comencemos con un ejemplo ya familiarizado:

$$\dot{x} = x(x-1)(x-2)^2(x-3) \text{ en el intervalo } X = [0, 3]$$

En este ejemplo tenemos las siguientes descomposiciones de Morse:

$$\begin{aligned}
 [1, 3] \succeq \{0\}, & \quad \mathcal{M} = \{M_1, M_2\} : (M_1 = \{0\}, M_2 = [1, 3]); \\
 \{0\} \preceq \{1\} \succeq [2, 3], & \quad \mathcal{M} = \{M_1, M_2, M_3\} : (M_1 = \{0\}, M_2 = [2, 3], M_3 = \{1\}) \\
 & \quad \text{ó } (M_1 = [2, 3], M_2 = \{0\}, M_3 = \{1\}); \\
 \{0\} \preceq [1, 2] \succeq \{3\}, & \quad \mathcal{M} = \{M_1, M_2, M_3\} : (M_1 = \{0\}, M_2 = \{3\}, M_3 = [1, 2]) \\
 & \quad \text{ó } (M_1 = \{3\}, M_2 = \{0\}, M_3 = [1, 2]); \\
 \{1\} \succeq \{0\} \cup [2, 3] & \quad \mathcal{M} = \{M_1, M_2\} : (M_1 = \{0\} \cup [2, 3], M_2 = \{1\})
 \end{aligned}$$

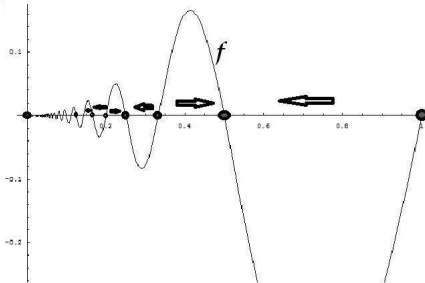
y sólo tiene una descomposición de Morse fina

$$\begin{aligned}
 \{0\} \preceq \{1\} \succeq \{2\} \succeq \{3\}, & \quad \mathcal{M} = \{M_1, M_2, M_3, M_4\} : \\
 (M_1 = \{3\}, M_2 = \{2\}, M_3 = \{0\}, M_4 = \{1\}) & \quad \text{ó} \\
 (M_1 = \{0\}, M_2 = \{3\}, M_3 = \{2\}, M_4 = \{1\})
 \end{aligned}$$

Ejemplo 3.2. Otro ejemplo es considerado en el intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{\pi}{x}) & \text{para } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{para } x = 0 \end{cases}$$

Y la gráfica de f es:



tiene las siguientes descomposiciones de Morse: los conjuntos

$$M^n := \left\{ \left\{ \frac{1}{n+1} \right\}, \left[0, \frac{1}{n+2} \right] \cup \left[\frac{1}{n}, 1 \right] \text{ para } n \in \mathbb{N} \right\}$$

Notemos que

$$\bigcap M^n = \left\{ \{0\}, \left\{ \frac{1}{n} \right\} \text{ para } n \in \mathbb{N} \right\}$$

no es una Descomposición de Morse, por dos razones inmediatas: No tiene elementos finitos; el conjunto $\{0\}$ es invariante pero aislado.

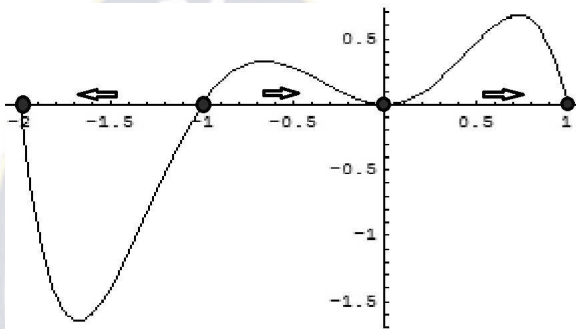
Además este sistema no tiene descomposición de Morse fina, pues siempre podemos encontrar una Descomposición de Morse mas fina que otra.

3.1.2. Sistemas Perturbados

Lo interesante de esta sección que sucede con los conjuntos de Morse si al sistema le afectamos con una pequeña perturbación.

Los resultados obtenidos pueden ser: que perdamos conjuntos de Morse, ganemos conjuntos de Morse, o que no suceda nada con los conjuntos de Morse salvo una pequeña traslación.

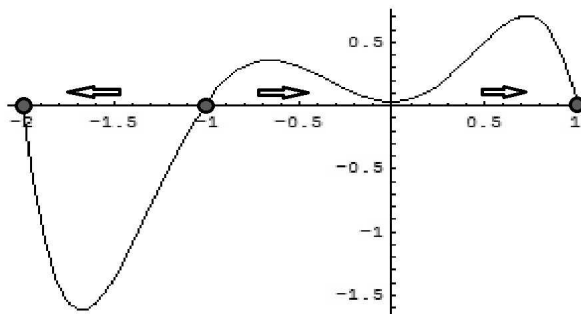
Ejemplo 3.3. De $\dot{x} = f(x) = -(x+2)(x^2-1)x^2$ Notemos que tiene un atractor global $A = [-2, 1]$ una descomposición de Morse de A es:



$$\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_k = E_k / k = 1, 2, 3, 4\}$$

Ahora sea $\dot{x} = f_\lambda(x) = -(x+2)(x^2-1)x^2 + \lambda$; $\lambda > 0$ y consideramos el sistema perturbado

$$\dot{x} = -(x+2)(x^2-1)x^2 + \lambda \quad (2)$$



donde λ es suficientemente pequeño, veamos algunos valores de λ :

i) Si $\lambda = 0,1$

$$x \rightarrow -1,9915, \quad x \rightarrow -1,04678, \quad x \rightarrow 1,01594$$

ii) Si $\lambda = 0,01$

$$x \rightarrow -1,99917, \quad x \rightarrow -1,00496, \quad x \rightarrow 1,00166,$$

(2) tiene tres puntos de equilibrio: $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda)$ y $E_4(\lambda)$ una descomposición de Morse:

$$\mathcal{N} = \{\mathcal{N}_k = E_k(\lambda) / k = 1, 2, 4\}.$$

Donde se ve que se pierde un conjunto de Morse.

3.2. Descomposición de Morse y Atractores

Las descomposiciones de Morse pueden ser construidos desde atractores y sus complementarios repulsores. A continuación una caracterización de la descomposición de Morse vía la sucesión atractor-repulsor.

Teorema 3.1. Para un flujo sobre un espacio métrico compacto X una colección finita de subconjuntos $\{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n\}$ define una descomposición de Morse si y sólo si existe una sucesión estrictamente creciente de atractores,

$$\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n = X,$$

tal que

$$\mathcal{M}_{n-i} = A_{i+1} \cap A_i^*, \quad \text{para } 0 \leq i \leq n-1.$$

Demostración.- Probemos ambas implicaciones:

\implies Supongamos que $\{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n\}$ es una descomposición de Morse. Define una sucesión estrictamente creciente de conjuntos invariantes por $A_0 = \emptyset$ y

$$A_k = \{x \in X : \alpha(x) \subset \mathcal{M}_n \cup \dots \cup \mathcal{M}_{n-k+1}\}, \quad \text{para } k = 1, \dots, n.$$

donde se cumple que

$$\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n = X,$$

A_k **invariante.** Recordemos que \emptyset es invariante. Sea $x \in A_k$, entonces por definición de A_k $\alpha(x) \subset \mathcal{M}_n \cup \dots \cup \mathcal{M}_{n-k+1}$, tomemos cualquier punto de la órbita de x , sea $t \in \mathbb{R}$, como estamos trabajando en un espacio métrico

compacto afirmamos que $\alpha(\Phi(t, x)) \neq \emptyset$.

$z \in \alpha(\Phi, x)$, entonces existe $t_k \rightarrow \infty$ tal que

$$\Phi(-t_k, (\Phi(t, x))) = \Phi(-t_k + t, x) \rightarrow z$$

de donde $z \in \alpha(x)$.

Así

$$\Phi(t, x) \in A_K.$$

A_k **cerrado.** Mostramos que los conjuntos A_k son cerrados. Claramente, el conjunto $A_n = X$ es cerrado.

Procediendo por inducción, asumimos que A_{k+1} es cerrado y consideremos $x_i \in A_k$ con $x_i \rightarrow x$. Tenemos que mostrar que $\alpha(x) \subset \mathcal{M}_n \cup \dots \cup \mathcal{M}_{n-k+1}$. La hipótesis de inducción implica que $x \in A_{k+1}$ y por tanto tenemos que $\alpha(x) \subset \mathcal{M}_n \cup \dots \cup \mathcal{M}_{n-k}$ union disjunta. Probemos que no puede ocurrir que $\alpha(x) \subset \mathcal{M}_{n-k}$.

Supongamos que $\alpha(x) \in \mathcal{M}_{n-k}$, sea V una vecindad abierta de \mathcal{M}_{n-k} tal que $\bar{V} \cap \mathcal{M}_j = \emptyset$ para $j \neq n-k$. Existen una sucesión $t_\nu \rightarrow \infty$ y $z \in \mathcal{M}_{n-k}$ tal que $x \cdot (-t_\nu) \in V$ y $x \cdot (-t_\nu) \rightarrow z$. Por tanto para cada ν existe un $m_\nu \geq \nu$ tal que $x_{m_\nu} \cdot (-t_\nu) \in V$ y $x_{m_\nu} \cdot (-t_\nu) \rightarrow z$.

Como $\omega(x_i) \cup \alpha(x_i) \subset \mathcal{M}_n \cup \dots \cup \mathcal{M}_{n-k+1}$ para todo i , existen $\tau_\nu < t_\nu < \sigma_\nu$ tal que $x_{m_\nu} \cdot (-\sigma_\nu)$ y $x_{m_\nu} \cdot (-\tau_\nu) \in \partial V$ y $x_{m_\nu} \cdot (-t) \in V$ para todo $t \in (\tau_\nu, \sigma_\nu)$. Como ∂V es cerrado en el espacio métrico compacto, este es compacto por tanto toda sucesión posee una sucesión convergente; podemos asumir que existe $y \in \partial V$ con $x_{m_\nu} \cdot (-\sigma_\nu) \rightarrow y$ para $\nu \rightarrow \infty$.

Afirmación.

$$y \cdot [0, \infty) \subset \bar{V}$$

Por contradicción. Supongamos que existe $t' > 0$ tal que $\Phi(t', y) \in X \setminus \bar{V}$ (abierto) de la convergencia

$$\Phi(-\sigma_\nu + t', x_{m_\nu}) \rightarrow \Phi(t', y)$$

para $X \setminus \bar{V}$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$v > N_1, \text{ implica } \Phi(-\sigma_\nu + t', x_{m_\nu}) \in X \setminus \bar{V}. \quad (1)$$

Por otro lado

$$\Phi(-t_\nu + t', x_{m_\nu}) \rightarrow \Phi(t', z) \in \mathcal{M}_{n-k} \subset V$$

para V existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$v > N_2, \text{ entonces } \Phi(-t_\nu + t', x_{m_\nu}) \in V. \quad (2)$$

Además recordemos que $\Phi : [0, t'] \times X \rightarrow X$ es uniformemente continua consideremos $0 < \epsilon = \inf\{d(u, v)/u \in \mathcal{M}_{n-k} \text{ y } v \in X \setminus \bar{V}\}$ existe $\delta > 0$ y $N_3 \in \mathbb{N}$ tal que $v > N_2$ y $d(\Phi(-t_\nu, x_{m_\nu}), z) < \delta$, entonces $\Phi(t, \Phi(-t_\nu, x_{m_\nu})) \in V$, para todo $t \in [0, t']$ (3)

Entonces existe $\nu > \max\{N_1, N_2, N_3\}$ tal que cumple

$$\begin{cases} \Phi(-\sigma_\nu + t', x_{m_\nu}) \in X \setminus \bar{V}. & (1) \\ \Phi(-t_\nu + t', x_{m_\nu}) \in V. & (2) \\ \Phi(t, \Phi(-t_\nu, x_{m_\nu})) \in V; \quad t \in [0, t']. & (3) \end{cases}$$

de (2) existe $\sigma'_\nu < t_\nu - t' < \tau_\nu$ con $\Phi(-\sigma'_\nu, x_{m_\nu}), \Phi(-\tau'_\nu, x_{m_\nu}) \in \partial V$ tal que para $t \in (\tau'_\nu, \sigma'_\nu)$ se tiene $\Phi(t, x_{m_\nu}) \in V$; los casos que se tienen son:

$$\text{i) } \tau'_\nu + t' < \tau_\nu < t_\nu < \sigma_\nu < \sigma'_\nu + t'.$$

$$\text{ii) } \tau_\nu < \tau'_\nu + t' < t_\nu < \sigma_\nu < \sigma'_\nu + t'.$$

De estos dos casos obtenemos $\Phi(-\sigma_\nu + t', x_{m_\nu}) \in V$ contradiciendo (1).

$$\text{iii) } \tau'_\nu + t' < \tau_\nu < t_\nu < \sigma'_\nu + t' < \sigma_\nu.$$

$$\text{iv) } \tau_\nu < \tau'_\nu + t' < t_\nu < \sigma'_\nu + t' < \sigma_\nu.$$

Considerando que $\sigma - t' < \sigma$, llegamos también a que

$\Phi(\Phi(-\sigma_\nu + t', x_{m_\nu})) \in V$ utilizando (1) y (2), contradiciendo (1).

Y en los casos que $\sigma_\nu = \sigma'_\nu + t'$ o $\tau_\nu = \tau'_\nu + t'$ la contradicción es inmediata.

Entonces se sigue que $y \cdot \mathbb{R} \subset \bar{V}$ y por tanto por la elección de V uno tiene $\omega(y) \subset \mathcal{M}_{n-k}$.

Dado que A_{k+1} es cerrado e invariante, tenemos que $y \in A_{k+1}$ y luego $\alpha(y) \subset \mathcal{M}_n \cup \cdot \cup \mathcal{M}_{n-k}$. El orden en los conjuntos de Morse implica que $y \in \mathcal{M}_{n-k}$, contradiciendo al hecho que $y \in \partial V$.

A_k **Atractor.** Si A_k no es un atractor, por el Lema 2.2 del capítulo anterior, se tiene que para cada vecindad N de A_k existe $x \in N \setminus A_k$ con $x \cdot (-\infty, 0] \subset N$. Entonces existe $j \geq n - k + 1$ con $\alpha(x) \subset \mathcal{M}_j$. Por otro lado $x \notin A_k$ implica

$\alpha(x)$ no esta incluido en la unión $\mathcal{M}_n \cup \dots \cup \mathcal{M}_{n-k+1}$, por tanto $\alpha(x) \in \mathcal{M}_i$ para algún $i < n - k + 1$. Esta contradicción implica que A_k es un atractor.

\Leftarrow Veamos que cumplan las condiciones:

- Dada la secuencia estricta de atractores afirmamos que $A_i^* \neq \emptyset$ y $A_{i+1} \neq \emptyset$ para cualquier $i = 0, \dots, n - 1$. Sea $z \in A_{i+1} \setminus A_i$, entonces tenemos por $x \notin A_i$ lo que implica que $\alpha(x) \subset A_i^*$; por otro lado como $x \in A_{i+1}$ (cerrado e invariante) tenemos $\alpha(z) \subset A_{i+1}$ y así

$$\emptyset \neq \alpha(z) \subset A_i^* \cap A_{i+1} = \mathcal{M}_{n-i}$$

- Como A_i^* y A_{i+1} son compactos e invariantes aislados, tenemos que

$$\mathcal{M}_{n-i} \text{ son compactos e invariantes aislados.}$$

- Probaremos que para $x \in X$, o bien $x \cdot \mathbb{R} \subset \mathcal{M}_j$ para algún j o bien existen índices $i < j$ tal que $\alpha(x) \subset \mathcal{M}_{n-j}$ y $\omega(x) \subset \mathcal{M}_{n-i}$. Existe un entero más pequeño i tal que $\omega(x) \subset A_i$, y existe un entero más grande j tal que $\alpha(x) \subset A_j^*$. Además se ve que $i > 0$ y $j < n$. Ahora $\omega(x)$ no esta contenido en A_{i-1} , i.e., $x \in A_{i-1}^*$. Luego por la invarianza $x \cdot \mathbb{R} \subset A_{i-1}^*$ y $\omega(x) \subset A_{i-1}^*$. Por otro lado, $\alpha(x)$ no esta contenido en A_{j+1}^* y pedimos que $x \cdot \mathbb{R} \subset A_{j+1}$. En efecto, si no $x \cdot t \notin A_{j+1}$ para algún $t \in \mathbb{R}$. Si ahora $x \cdot t \notin A_{j+1}^*$, entonces $\alpha(x) \subset A_{j+1}^*$, que es una contradicción, luego $x \cdot t \in A_{j+1}^*$ y luego $\omega(x) \subset A_{j+1}^*$, otra vez una contradicción. Por tanto, se tiene de hecho $x \cdot \mathbb{R} \subset A_{j+1}$.

Ahora $j \geq i - 1$, porque si no $j + 1 \leq i - 1$ y luego $A_{j+1} \subset A_{i-1}$, lo cual implica que $x \cdot \mathbb{R} \subset A_{i-1}^* \cap A_{i-1} = \emptyset$. Si $j = i - 1$, entonces

$$x \cdot \mathbb{R} \subset A_{i-1}^* \cap A_i = \mathcal{M}_{n-i-1}.$$

Si $j > i - 1$, entonces $\omega(x) \subset A_{i-1}^* \cap A_{j+1} \subset A_{i-1}^* \cap A_i = \mathcal{M}_{n-i-1}$ y

$$\alpha(x) \subset A_j^* \cap A_{j+1} = \mathcal{M}_{n-j}.$$

- Supongamos que $\omega(x), \alpha(x) \in \mathcal{M}_{n-i} = A_i^* \cap A_{i+1}$ con ello y del Lema 2.6:
 - a) $\omega(x) \subset A_i^*$, implica $x \in A_i^*$.
 - b) $\alpha(x) \subset A_{i+1}$, implica $x \in A_{i+1}$.

por lo tanto

$$x \in A_i^* \cap A_{i+1} = \mathcal{M}_{n-i}.$$

Lo que prueba lo requerido.

□

Veamos a través de ejemplos para reflejar esta construcción.

Ejemplo 3.4. *Comencemos con este ejemplo:*

$$\dot{x} = x(x-1)(x-2)^2(x-3) \text{ en el intervalo } X = [0, 3].$$

Para este sistema una secuencia creciente de atractores con sus correspondientes repulsores es:

$$A_0 = \emptyset \subset A_1 = \{1\} \subset A_2 = [1, 2] \subset A_3 = [1, 3] \subset A_4 = [0, 3]$$

y sus respectivos repulsores son:

$$A_0^* = [0, 3] \supset A_1^* = \{0\} \cup [2, 3] \supset A_2^* = \{0\} \cup \{3\} \supset A_3^* = \{0\} \supset A_4^* = \emptyset$$

La descomposición de Morse asociada es:

$$M_4 = A_1 \cap A_0^* = \{1\},$$

$$M_3 = A_2 \cap A_1^* = \{2\},$$

$$M_2 = A_3 \cap A_2^* = \{3\},$$

$$M_1 = A_4 \cap A_3^* = \{0\}.$$

Ejemplo 3.5. *Un sistema dinámico en el intervalo $X = [0, 2]$ con puntos de equilibrio $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ y $\alpha(x) = \{0\}$, $\omega(x) = \{1\}$ para $x \in (0, 1)$, $\alpha(x) = \{1\}$, $\omega(x) = \{2\}$ para $x \in (1, 2)$. Entonces una secuencia estrictamente creciente de atractores con sus correspondientes repulsores es*

$$A_0 = \emptyset \subset A_1 = \{2\} \subset A_2 = [1, 2] \subset A_3 = X = [0, 2],$$

$$A_0^* = X = [0, 2], A_1^* = [0, 1], A_2^* = \{0\}, A_3^* = \emptyset.$$

(las otras sucesiones son $\emptyset \subset \{2\} \subset X$ y $\emptyset \subset [1, 2] \subset X$). Entonces la descomposición de Morse asociado es

$$M_3 = A_1 \cap A_0^* = \{2\}, M_2 = A_2 \cap A_1^* = \{1\}, M_1 = A_3 \cap A_2^* = \{0\}.$$

3.3. Descomposición de Morse y Cadena Recurrente

Teorema 3.2. *El conjunto cadena recurrente \mathcal{R} satisface*

$$\mathcal{R} = \bigcap \{A \cup A^*; A \text{ es un atractor}\}$$

En particular, existe una descomposición de Morse más fina $\{M_1, \dots, M_n\}$ si y sólo si el conjunto cadena recurrente \mathcal{R} tiene solo finitas componentes conexas. En este caso, los conjuntos Morse coincide con las componentes cadenas recurrentes de \mathcal{R} y el flujo restringido a cada conjunto Morse es cadena transitiva y cadena recurrente.

Prueba.- *Si A es un atractor y $x \in X$, o $\omega(x) \subset A$ o $\omega(x) \subset A^*$. Si $x \in \mathcal{R}$, entonces por proposición, x esta contenido en cada atractor, que contiene $\omega(x)$. Ahora $x \in A \cup A^*$. Recíprocamente, si x esta en la intersección, entonces esta en cada atractor contenido $\omega(x)$. Aquí $x \in \Omega(x)$, por tanto $x \in \mathcal{R}$.*

Si existe una descomposición de Morse Fina, entonces el flujo restringido a los correspondientes conjuntos Morse debe ser cadena transitiva, los conjuntos Morse y componentes conexas de \mathcal{R} . Recíprocamente, las componentes conexas M_i de \mathcal{R} define una descomposición de Morse, porque ellos son conjuntos invariantes aislados. De hecho, esta es la más fina descomposición de Morse. Usando la caracterización de las descomposiciones de Morse vía secuencia estricta creciente de atractores, lo que afirma la existencia de una descomposición Morse más fina, implica la existencia de un atractor A tal que $A \cap M_i$ es un subconjunto apropiado de M_i para algún i , y de este es un atractor del flujo restringido a M_i . Esto contradice la transitividad de la cadena en M_i

□

Comentario. Hay a lo mucho contable atractores, finalmente, nosotros mostraremos que la cadena transitiva del flujo restringido a un conjunto límite.

Proposición 3.4. *Si el flujo es topológicamente transitivo, entonces este es una cadena transitiva. En otras palabras, un flujo restringido a un conjunto $\omega(x)$ ω -límite con $x \in X$ es una cadena transitiva.*

Prueba.- Porque conjuntos ω -límite son conexos, esto es suficiente por la Proposición 2.6 para mostrar que el flujo restringido a $\omega(x)$ es cadena recurrente. Definimos un flujo

$(y, t) \mapsto y \cdot t$ en $[-1, 1]$ por la ecuación $y' = 1 - y^2$. En $X \times [-1, 1]$ define un flujo por $(x, y) \mapsto (x \cdot t, y \cdot t)$. Entonces $z = \overline{((x, 0) \cdot \mathbb{R})}$ es un conjunto compacto invariante. Por el Teorema 3.2 el conjunto cadena recurrente contiene todos los conjuntos ω -límite, y ahora el conjunto cadena recurrente del flujo restringido a z es

$$\mathcal{R}(z) = \alpha(x) \times \{-1\} \cup \omega(x) \times \{1\}$$

Por Teorema 2.3 el flujo restringido a $\mathcal{R}(z)$ es cadena recurrente y las componentes conexas de $\mathcal{R}(z)$ son cadenas transitivas. Aquí el flujo restringido a $\omega(x) \times \{1\}$ y así el flujo restringido a $\alpha(x)$ son cadena recurrente.

□

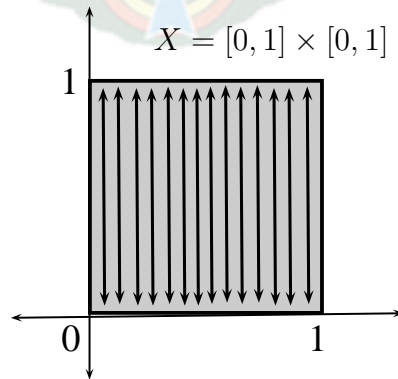
Ahora veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 3.6. La Dinámica en $Y \subset \mathbb{R}$ compacto. Las componentes cadenas recurrentes coinciden con los puntos fijos y si estos son finitos, entonces definen los conjuntos de Morse para una Descomposición de Morse Fina.

Ejemplo 3.7. Sea $X = [0, 1] \times [0, 1]$. Sea el flujo Φ en X definido tal que para todo punto en el borde son puntos fijos y las órbitas para puntos $(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)$ son dados:

$$\Phi(\cdot, (x, y)) = \{(z_1, z_2) \in X / z_1 = x, z_2 \in (0, 1)\}$$

$$\text{con } \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, (x, y)) = (x, 1) \text{ y } \lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi(t, (x, y)) = (x, 0)$$



todo punto en el borde es ω -límite y α -límite. Los conjuntos α -límite para $(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)$ son de la forma $\{(x, 0)\}$, y ω -límite de la forma $\{(x, 1)\}$. Existe una sola componente cadena recurrente para este sistema que es $X = [0, 1] \times [0, 1]$ por ende existe una Descomposición de Morse fina que coincide con la trivial.



CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Una de las características del trabajo es su transversalidad a varias ramas de la matemática, como ser la teoría de las Ecuaciones Diferenciales, Sistemas Dinámicos, Sistemas de Control. Este trabajo además de ser una incursión en una rama relativamente "joven de la matemática." en nuestro medio, como es la Teoría de los Sistemas Dinámicos, constituye un ejemplo de la interrelación de los elementos de la Matemática, un fenómeno muy propio de los últimos tiempos.

Ver el comportamiento de un sistema dinámico en un espacio métrico compacto a través de la Descomposición de Morse, además la Descomposición de Morse no necesariamente es única salvo la existencia de un Descomposición de Morse Fina.

Dada la definición de la Descomposición de Morse vemos la complejidad de construirlo pero una equivalencia nos facilita encontrar algunas descomposiciones de Morse que es a través de los conjuntos Atractores y sus conjuntos repulsores complementarios, cabe recalcar que podemos encontrar varias Descomposiciones de Morse, si en algún problema en particular encontramos una Descomposición de Morse Fina esta representa a todas las Descomposiciones de Morse existentes en ella y además es la más pequeña respecto a la inclusión. Recordemos que no siempre puede existir un Descomposición de Morse Fina esto se lo puede ver con un contraejemplo desarrollado en el trabajo. Un resultado importante de este trabajo es poder determinar si un sistema dinámico posee o no una Descomposición de Morse Fina ya que es a través del estudio de las componentes cadena recurrente, el resultado nos indica que si estas componentes cadena recurrentes son finitas entonces existe una Descomposición de Morse Fina cuyos conjuntos de Morse son exactamente las componentes cadena recurrente; más aún podemos saber lo que sucede dentro de los conjunto de Morse, en caso que no sea finita garantizaremos que existe una Descomposición de Morse Fina.

Estudiar el comportamiento del sistema dinámico a través de la Descomposición de Morse es de la siguiente manera:

- Si un elemento del espacio fase están en algún conjunto de Morse, podemos garantizar que su órbita permanecerá en tal conjunto de Morse, además los puntos alcanzados en tiempo infinito (es decir los conjuntos límites) respecto a la órbita pertenecen al mismo conjunto de Morse. (Si es Descomposición de Morse fina, todos los puntos se pueden conectar a través de orbitas salvo un pequeño margen de error).
- Si un elemento no pertenece a ningún conjunto de Morse, podemos garantizar que los punto alcanzados en el tiempo infinito a través de la órbita pertenecen a la frontera de algunos conjuntos de Morse.

El desarrollo de este tema permite incursionar en otras areas de la Matematica para aquella persona que desee seguir desarrollando este tema, como ser:

- *) El estudio de las cadenas transitivas permite construir medidas invariantes y con ello incursionar en la Teoría Ergódica.
- *) Dado un sistema lineal

$$\dot{x} = Ax ; \text{ donde } x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, A \in \mathbb{R}^{d \times d}.$$

La construcción de espacios de Lyapunov a partir de la parte real de los eigenvalores con sus correspondientes multiplicidades algebraicas, por Salgrade a través de su teorema indica que la proyección ($s = \frac{x}{\|x\|}$) de los espacios de Lyapunov en el espacio metrico compacto: esfera unitaria \mathbb{S}^{d-1} o el espacio proyectivo \mathbb{P}^{d-1} , se transforman en conjuntos de Morse contenidos en \mathbb{S}^{d-1} o \mathbb{P}^{d-1} , dando como resultado una Descomposición de Morse Fina correspondiente al nuevo sistema:

$$s(\dot{t}) = [A - s(t)^T A s(t) \cdot I]s(t),$$

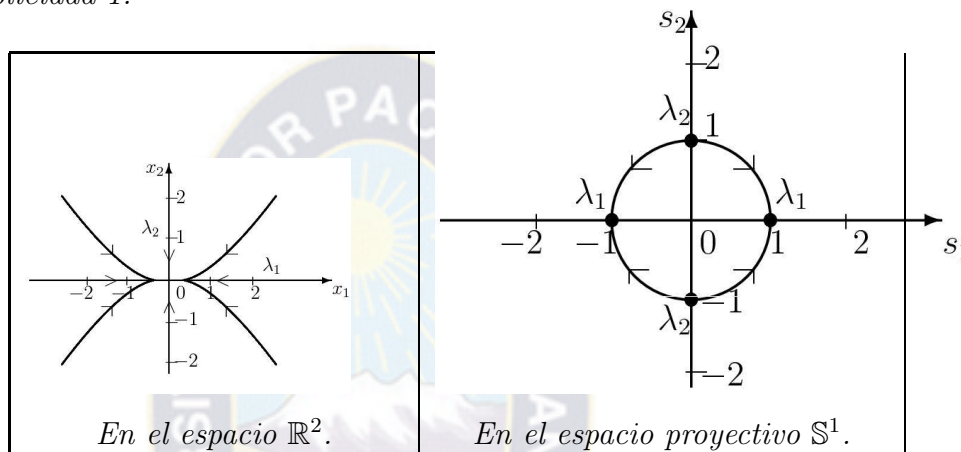
el orden de los valores de la parte real de los eigenvalores ordena en el mismo sentido sus correspondientes conjuntos de Morse.

Veamos un ejemplo particular en \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 4.1. Sea la ecuación diferencial lineal

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

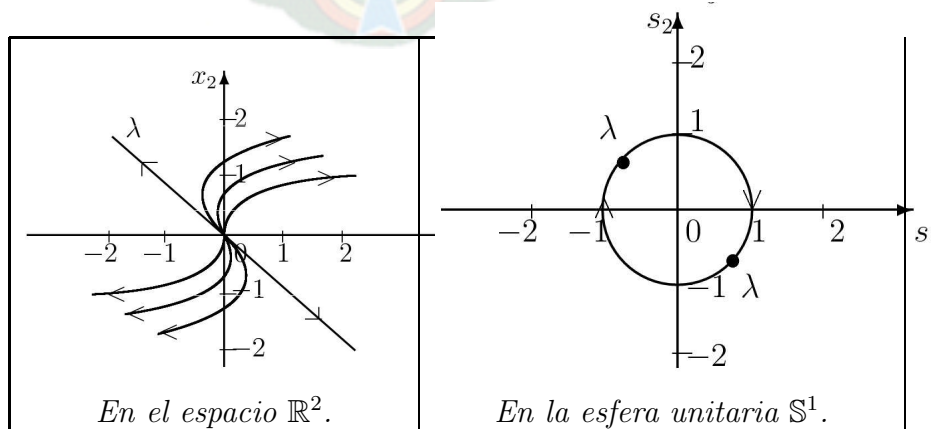
el cual tiene como eigenvalores $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -2$ y sus correspondientes eigenvectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, que generan los espacios de Lyapunov por tener multiplicidad 1.



Ejemplo 4.2. Sea la ecuación diferencial lineal

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

el cual tiene como eigenvalor $\lambda = 3$ eigenvectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, y el espacios de Lyapunov por tener multiplicidad 2, es generado por $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.



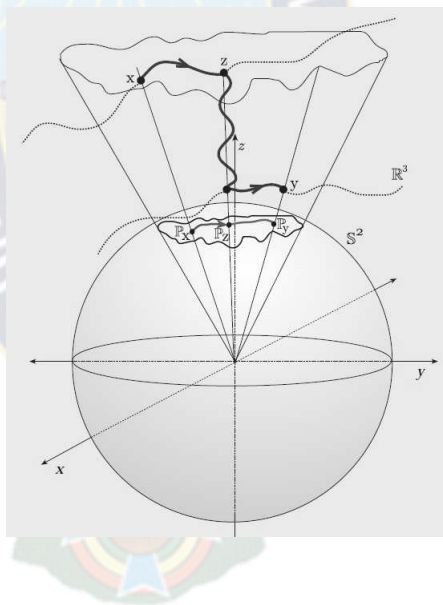
*) Dado un sistema de control bilineal

$$\dot{x} = \left(A + \sum_{i=1}^m u_i B_i \right) x; \quad \text{donde } x \in \mathbb{R}^d, \quad A, B_i \in \mathbb{R}^{d \times d}.$$

El problema de controlabilidad puede ser caracterizada por (Wolfgang Kliemann y Frintz Colonius) por la proyección sobre la esfera unitaria \mathbb{S}^{d-1} o el espacio proyectivo \mathbb{P}^{d-1} la cual genera un sistema dinámico no lineal

$$\dot{s} = h(A_0, s) + \sum_{i=1}^m u_i(t) h(B_i, s); \quad s \in \mathbb{P}^{d-1}$$

donde $h(A, s) = (A - s^T A s I) s$, en el espacio métrico compacto \mathbb{P}^{d-1} o \mathbb{S}^{d-1} , para un criterio de controlabilidad es necesario la Teoría de C. Conley (Descomposición de Morse). Kliemann-Colonius: en un conjunto de Morse existe al menos un conjunto de Control. Veamos una idea geométrica en \mathbb{R}^3 :

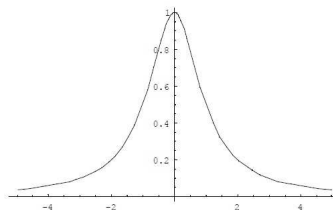


TEORÍA CUALITATIVA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Sumario. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales autónomos. Espacio de fases y órbitas. Teoría cualitativa para ecuaciones autónomas. Teoría cualitativa para sistemas planos: isoclinas e integrales primeras. Clasificación de los sistemas lineales con coeficientes constantes. Aplicaciones

Se pretende en estas parte hacer una recopilación de unos contenidos básicos sobre la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales. Aunque la palabra cualitativa pueda sonar extraña, en realidad, debemos tener en cuenta que de debemos conocer estudios cualitativos de funciones de variable real.

Pongamos un ejemplo y consideremos la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. A priori la expresión analítica de la función no nos dice mucho acerca de la misma, es decir, a partir de la expresión analítica de la función no obtenemos fácilmente información útil. Sin embargo a partir de esta expresión analítica podemos obtener su representación gráfica, que nos proporciona un análisis cualitativo de ésta. Así, estudiando límites, asíntotas, extremos relativos, etcétera podemos obtener una información mucho mas visual y manejable que la proporcionada por la expresión analítica de la función.



Como vemos, la gráfica nos muestra que la función es acotada, con un valor máximo de 1 en el punto 0. También y entre cosas, vemos como la función tiende a 0 en $\pm\infty$. En definitiva, la información visual aportada por la gráfica nos da mucha información sobre el comportamiento de la función en cuestión.

Así, está es la filosofía en la que se basa el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales: obtener representaciones gráficas de las soluciones de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales, o más precisamente de familias de soluciones, es decir, información gráfica sobre tipos de soluciones que se engloban en unos objetos llamados órbitas.

El por qué de este estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales es el siguiente. Ya a finales del siglo XIX los matemáticos perdieron toda esperanza de encontrar soluciones de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales. Se ponía fin por tanto al estudio cuantitativo de las ecuaciones diferenciales. Una vez que se renunció al análisis cuantitativo, se obtaron por dos vías complementarias que tratan de obtener información sobre las soluciones de ecuaciones diferenciales sin necesidad de resolver la ecuación. Una de estas vías es el estudio de los métodos numéricos para ecuaciones diferenciales. Sobre la segunda vía, el estudio de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales.

A.1. Ecuaciones y sistemas autónomos

Una ecuación diferencial autónoma es una expresión de la forma

$$y' = f(y)$$

donde f es una función real de variable real. Hay que enfatizar que en la ecuación no aparece la variable independiente de la cual depende y . Ejemplos de este tipo son:

$$\begin{aligned}y' &= y, \\y' &= y^2 \sin y, \\y' &= e^y y.\end{aligned}$$

donde $y = (y_1, \dots, y_n)$ y $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función con funciones coordenadas f_1, \dots, f_n . En general supondremos que la función f satisfaga las condiciones del teorema de existencia y unicidad de soluciones, por lo que el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} y' = f(y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

tendrá una única solución que denotaremos por $y(t, t_0, y_0)$. Supondremos además que esta solución está definida en el intervalo más grande posible (*solución maximal*), denotado por $(a(t_0, y_0), b(t_0, y_0))$, $a(t_0, y_0), b(t_0, y_0) \in \mathbb{R}$, y que normalmente será toda la recta real (es decir, en casi todos los ejemplos que estudiemos $a(t_0, y_0) = -\infty$ y $b(t_0, y_0) = +\infty$). El espacio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ en el cual están definidas las soluciones del sistema (1) es llamada espacio de fases. Se define la órbita del sistema asociada a la condición inicial (t_0, y_0) como la gráfica en \mathbb{R}^n de la solución maximal $y(t, t_0, y_0)$ asociadas a dichas condiciones iniciales. Puede haber soluciones distintas que den lugar a la misma órbita, por lo que las órbitas pueden ser miradas como "tipos de soluciones esencialmente iguales".

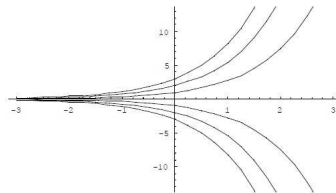
Ejemplo A.1. Consideremos la ecuación diferencial autónoma

$$y' = y.$$

Aquí, el espacio de fases es toda la recta real \mathbb{R} al estar la función $f(y) = y$ definida para todo número real. Dados $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$, sabemos que la solución maximal definida en toda la recta real del problema en condiciones iniciales

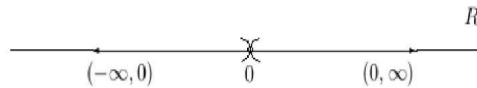
$$\begin{cases} y' = y, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

viene dado por $y(t, t_0, y_0) = y_0 e^{t-t_0}$. Si la representamos en el plano algunas soluciones para valores positivos, negativos y nulo de y_0 tenemos:



Como vemos, cuando $y_0 > 0$ las gráficas de las soluciones son siempre la semirrecta $(0, +\infty)$, cuando $y_0 < 0$ son $(-\infty, 0)$ y por último, el caso $y_0 = 0$ es degenerado

como solución constante y por tanto la gráfica sera un único punto $\{0\}$. Así en este sistema distinguimos tres tipos de orbitas según el signo de la condición inicial que consideremos. Además, todas las soluciones con $y_0 > 0$ son estrictamente crecientes, mientras que si $y_0 < 0$ las soluciones son estrictamente decrecientes. Todo esto podemos resumirlo de la siguiente forma



donde la orientación de las flechas marca el crecimiento o decrecimiento de las soluciones que generan cada órbita. Como puede apreciarse, el diagrama de fases contiene toda la información que conocemos sobre la representación gráfica de las soluciones.

Vamos a ver a continuación como obtener toda la información sobre diagramas de fases de sistemas autónomos sin necesidad de resolver la ecuación, Previamente necesitamos saber cómo son las diferentes órbitas que pueden presentarse en un sistema autónomo. Para ello es preciso introducir algunas definiciones. Diremos que $y_0 \in \mathbb{R}^n$ es un punto crítico de (1), ya que la función definida como $y(t, t_0, y_0) = y_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ es solución del problema en condiciones iniciales correspondiente. Una vez identificada un tipo de órbita, pasaremos a enunciar sin demostración el siguiente resultado, que describe toda la casuística que se puede presentar para órbitas en sistemas autónomos.

Teorema A.1. *Sea el sistema autónomo dado por (1). Entonces se verifican las siguientes afirmaciones:*

- (a) *Dados dos órbitas Γ_1 y Γ_2 son siempre disjuncto o iguales. Además, si son iguales existe un $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $y_1(t + t_0) = y_2(t)$, donde y_1 e y_2 son las soluciones asociadas a las órbitas Γ_1 y Γ_2 , respectivamente.*
- (b) *Si Γ es una órbita no degenerada del sistema, entonces es de alguno de los siguientes tipos:*
 - (b1) *Cualquier solución y asociada a Γ es inyectiva.*
 - (b2) *Cualquier solución y asociada a Γ es periódica de periodo $T > 0$, esto es, $y(t + T) = y(t)$ para todo t en su dominio de definición.*

Ahora el objetivo será estudiar las órbitas de un sistema autónomo dado intentando esbozar lo que se conoce como diagrama de fases del sistema. Empezaremos estudiando diagramas de fases definidos por una ecuación diferencial autónoma, como la estudiada en el primer ejemplo.

A.2. Teoría cualitativa ecuaciones autónomas

Volvamos al ejemplo

$$y' = y.$$

Vamos a ver cómo obtener el diagrama de fases de la ecuación sin necesidad de conocer las soluciones.

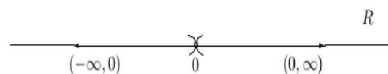
En primer lugar calculamos los puntos críticos del sistema, que en este ejemplo concreto se reducen al 0. Así, el conjunto $\{0\}$ constituye una órbita degenerada que da lugar a la solución constante $y(t) = 0$ como las órbitas son siempre disjuntas, el 0 divide la recta real en dos conjuntos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$ de manera que si una condición inicial de una solución está en por ejemplo en $(-\infty, 0)$, dicha solución nunca podrá pasar por $(0, +\infty)$ y al revés. Además, si $y(t)$ es una solución contenida en $(-\infty, 0)$, entonces es estrictamente decreciente ya que $y'(t) = y(t) < 0$. Igualmente vemos que si $y(t)$ está contenida en $(0, +\infty)$, entonces debe ser estrictamente creciente.

Para completar el estudio sólo debemos comprobar que $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$ son dos órbitas. Supongamos por ejemplo que $(a, b) \subseteq (-\infty, 0)$ es una órbita. Si $a < -\infty$, entonces tomamos el problema de condición inicial

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = a, \end{cases}$$

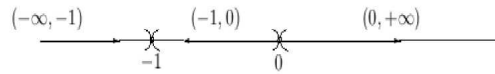
que proporciona una solución maximal $y(t, 0, a)$, que será decreciente. Por lo tanto existe $t_0 < 0$ tal que $y(t_0, 0, a) > a$ y por lo tanto, la órbita generada por $y(t, 0, a)$ tendrá intersección no vacía con (a, b) , por lo que en virtud del Teorema A.1 éstas deben ser iguales. Así podemos entender la órbita (a, b) más allá de a hasta $-\infty$. Por un razonamiento análogo podemos extenderla a partir de b hasta 0.

Así tenemos las tres órbitas del sistema que representamos como

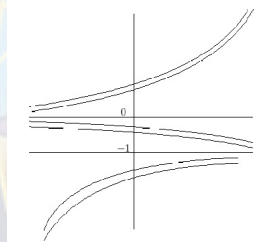


A partir de un diagrama de fases y siempre suponiendo que las soluciones maximales están definidas en toda la recta real, podemos esbozar la gráfica de las soluciones de una ecuación autónoma.

Por el siguiente ejemplo:



Entonces, suponiendo que toda la solución maximal está definida en todo \mathbb{R} , el diagrama anterior nos dice que toda solución contenida en $(-\infty, -1)$ es creciente, las contenidas en $(-1, 0)$ son decrecientes y las contenidas en $(0, +\infty)$ son crecientes, por lo que las soluciones tendrían el siguiente aspecto:



A.3. Teoría cualitativa de sistemas planos

Para obtener diagramas de fases de ecuaciones autónomas de orden uno, bastaba con conocer nociones sobre la derivada de una función. Al aumentar una dimension, el estudio para obtener diagramas de fases necesariamente se complica, aunque en algunos casos es posible. Hemos de decir que debemos de conformarnos con llegar a dimension 2, ya que para dimension mayor o igual que tres no se sabe en general como obtener dichos diagramas de fases. Vamos a ver que ideas necesitamos para esbozar dichos diagramas.

A.3.1. Cálculo de los puntos críticos

Consideremos el sistema autónomo dado por:

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y); \\ y' = f_2(x, y). \end{cases}$$

En este caso las órbitas son curvas planas que por el Teorema A.1 pueden ser de tres tipos:

- Degeneradas (correspondientes a los puntos críticos).
- Periódicas.
- No cerradas y sin autointersecciones (las llamadas órbitas regulares).

Ejemplo A.2. *Consider el sistema*

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = x - y, \end{cases}$$

de la cual obtenemos los puntos críticos resolviendo el sistema lineal

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ x - y = 0, \end{cases}$$

del que fácilmente obtenemos que su único punto crítico es el $(0, 0)$, que sera por tanto la única órbita no degenerada del sistema.

Ahora introducimos un lema que no tiene una relación directa con los sistemas autónomos, pero es necesario mencionarla, pues es utilizada en algunas demostraciones del desarrollo del trabajo.

Lema A.1 (Lema de Zorn). *Sea A un conjunto no vacío parcialmente ordenado tal que todo subconjunto totalmente ordenado tiene un elemento mayor en A . A contiene entonces un elemento maximal por lo menos.*

Bibliografía

- [1] MARTIN SAMBARINO, *Introduccion a los Sistemas Dinámicos*.
- [2] MICHAEL BRIN AND GARRETT STUCK, *Introduction Dynamical Systems* CAMBRIDGE 2002.
- [3] WOLFGANG KLIEMANN Y FRINTZ COLONIUS, *The Dynamics of Control*.
- [4] ROBERT L. DEVANEY, *An Introduction to Chaotic Dynamical System*.
- [5] M.W. HIRSCH, S. SMALE AND R.L. DEVANEY, *Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos*, Elsevier, 2004.
- [6] KYUNG BOK LEE AND JONG SUH PARK, *Chain Recurrence and Attractors in General Dynamical Systems*, Commun. Korean Math. Soc. 22 (2007).
- [7] FRITZ COLONIUS AND WOLFGANG KLIEMANN *Dynamical Systems and Linear Algebra*, January 10, 2006.
- [8] J. SELGRADE, *Isolated invariant sets for flows on vector bundles*, Trans. Amer. Math. Soc., 203(1975), 259-390.
- [9] C. C. CONLEY, *Isolated Invariant Sets and the Morse Index*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., Amer. Math. Soc., vol. 38, Providence, R.I, 1978.
- [10] N. AHOKI AND K. HIRAIDE, *Topological Theory of Dynamical Systems*, Elsevier Science B.V.Sara Burgerhartstraat 25 P.O. Box 211, 1000 AE Amsterdam, The Netherlands vol. 52, 1994.