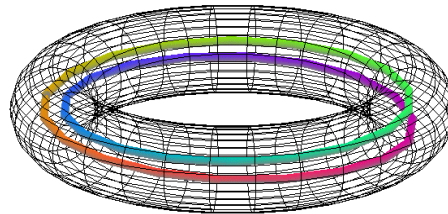


UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS
FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES
CARRERA DE MATEMÁTICAS



EL ATRACTOR CAÓTICO SOLENOIDE



TESIS PROFESIONAL PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

Olga Ache Tito

DIRECTOR DE TESIS: Dr. MARIO ERROL CHAVEZ GORDILLO PhD

PONENTE DE TEMA: Dr. EFRAIN CRUZ MULLISACA PhD

La Paz - Bolivia

2012

A la memoria de mi madre
Ricarda Tito Herrera (1938-2012)

“Quizás la mejor forma que tengo para describir mi experiencia al hacer matemáticas es como un viaje a través de una oscura y desconocida mansión . Entrás en la primera habitación y está completamente a oscuras. Tropezas con el mobiliario que te hace caer, pero con el tiempo acabas sabiendo donde están los muebles. Finalmente luego de unos seis meses encuentras el interruptor de la luz, lo enciendes y todo se ilumina. Entonces descubres donde estabas exactamente. Luego te trasladas a la siguiente estancia y te pasas otros seis meses en la oscuridad. De manera que todos estos momentos de iluminación, algunos muy rápidos, otros de un día otros o dos, son la culminación de los muchos meses de tropiezos y caídas en la oscuridad que los precedieron, y sin los cuales no podían existir”. Andrew Wiles

*En mi caso yo añadiría la mágica presencia de **Dios** que iluminó mi camino.*

Dedico el presente trabajo con todo cariño a:

- Mi hija *Carlita* por mostrarme lo que realmente es la vida y ceder tanto de su tiempo de dedicación y juegos conmigo para poder materializar este trabajo.
- Mi *mamá* (†), por haber hecho posible que llegara el fin de este presente.
- Mi *papá* por mostrarme el camino para lograr este trabajo y mi *esposo* por todo su apoyo y tiempo cedido para realizar la presente.
- Mis *hermanos* por el apoyo y la confianza que me han brindado
- Toda mi *familia* y *amigos* por mostrarme el camino para lograr este trabajo.
- Quienes piensan que las matemáticas son algo difícil y por ello es mejor no tocarlas.

Agradecimiento

Primeramente le doy las gracias a Dios por haber permitido culminar satisfactoriamente mi estudio.

Quiero agradecer a todas las personas que hicieron posible que este trabajo llegará a su fin:

Las personas a quienes debo mi formación son muchas. Tal vez incontable. Los nombres de todos ellos no cabrían aquí. Sin embargo, voy a extraer la subsucesión que me es más importante.

Mi papá y mi mamá(†) han sido los pilares básicos. Les agradezco infinitamente su apoyo incondicional, mis dos hermanos y mi esposo, ellos también fueron mis segundos pilares. Les agradezco su bondad y su cariño de mis hermanas les debo los bueno ratos y los malos también. Porsupuesto no me olvido de la cortesía y nobleza cada una de ellos.

El presente trabajo no hubiese podido ser escrita sin la ayuda, directa o indirecta, de profesores. A ellas dedico estas líneas de agradecimiento.

En primer lugar, quisiera dar las gracias, de manera muy especial, al Dr. Mario Errols. Chavez Gordillo, director de esta Tesis, por su apoyo y paciencia me guío en la realización de este trabajo, así como por la cantidad de tiempo y esfuerzo para que este trabajo vea la luz. También quisiera recordarme de todos los profesores quienes colaboraron, al Dr. Efraín Cruz Mullisaca ponente del tema y a todo los profesores del seminario de Teoría de Control. En especial agradezco su interés en este trabajo al Lic. Charlie Anibal Lozano Correa. que siempre me mostró la mejor de sus disposiciones cuando necesité de su asesoramiento.

Por último, aunque no el menos importante, quisiera nuevamente agradecer a mi familia y amigos, Carmen Blanco, Raul A. Nina, por su puesto de Mery, Ana; el soporte moral que me han brindado en todo momento y sin el me hubiese sido imposible reunir los ánimos suficientes para terminar este trabajo.

Introducción

El presente trabajo tiene como objetivo entender la construcción y la dinámica del Solenoide, la motivación para desarrollar este trabajo se debe a los seminarios de Teoría de Control realizados por el Dr. Efraín Cruz Mullisaca en el área de Sistemas Dinámicos.

En este trabajo desarrollaremos conceptos básicos y fundamentales de los sistemas dinámicos, a través del Atractor Caótico Solenoide.

El estudio de los Sistemas Dinámicos Discretos ha tenido gran atención durante los últimos 30 años. De hecho, el número de libros y artículos dedicados a este tema ha crecido impresionantemente. Lo anterior se debe a que se les encuentra en muchas ramas de la ciencia, tales como Química, Física, Biología, Medicina, Ingeniería, etc. Un sistema dinámico consiste de un conjunto de estados, junto con la “regla” o función que determina el estado presente en términos de los estados pasados. Cuando la regla es la misma en cada tiempo, la evolución del sistema esta dada por las iteraciones de la función f . Es decir, $f, f^2 = f \circ f, f^3 = f \circ f \circ f, \dots$. En este caso, el objetivo es estudiar el comportamiento asintótico del proceso iterativo $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots\}$, cuando x esta en el conjunto de estados del sistema.

Un concepto asociado a los sistemas dinámicos es el de atractor. Un atractor es el conjunto al que el sistema evoluciona después de un tiempo suficientemente largo. Para que el conjunto sea un atractor, las trayectorias que le sean suficientemente próximas han de permanecer próximas incluso si son ligeramente perturbadas. Los sistemas dinámicos caóticos son aquellos que tiene atractores donde el proceso iterativo, presenta un comportamiento “irregular”, esto presenta las siguientes características:

1. Puntos periódicos densos: Sabemos que los sistemas dinámicos pueden ser clasificados de acuerdo al comportamiento de sus órbitas. Además, las órbitas que entran en un atractor no escapan sino que permanecen dentro de él. Ahora bien, la característica de puntos periódicos densos indica que existen infinitos puntos, y a su vez soluciones periódicas inestables asociadas a un atractor extraño. Es decir, las órbitas que se encuentran dentro del atractor se aproximan a los límites de estos puntos (soluciones) inestables y permanecen en sus límites hasta que la naturaleza de estas soluciones (inestabilidad) haga que dicha órbita escape a los límites de otra solución inestable hasta que finalmente encuentre un equilibrio estable caótico.

La manera en que se agrupan los equilibrios periódicos inestables y el equilibrio estable caótico desencadena que el atractor extraño sea denso en puntos (soluciones) periódicos.

2. Transitividad: Esta característica implica que un sistema dinámico no podrá descomponerse en dos subsistemas independientes entre si. A pesar que la característica de sensibilidad a las condiciones iniciales indican que las órbitas que se encuentran infinitamente próximas se alejen en el tiempo, dichas órbitas a largo plazo, pasarán por todas las regiones que componen el atractor extraño formando un solo sistema dinámico.
3. Sensibilidad a las condiciones iniciales: Un sistema con comportamiento caótico tendrá sensibilidad a las condiciones iniciales si el conjunto de partida no se contrae en todas direcciones sino que en algunas de ellas se expande, no obstante el conjunto sigue siendo limitado y por lo tanto sigue manteniendo un atractor.

El Solenoide de Smale es un fenómeno característico de un atractor extraño. A pesar de que el conjunto se expande es cada vez mas pequeño.

Si el sistema en algún momento se expande las diferencias iniciales no tienden a desaparecer y por lo tanto pueden llegar a ser importantes.

La forma gráfica del atractor de Lorenz llevó a que la sensibilidad a las condiciones iniciales de los sistemas caóticos se denominara “efecto mariposa”.

En resumen, esta característica no nos dice cual va a ser el estado final o futuro del conjunto, sin embargo, podríamos inferir cual es su comportamiento a muy corto plazo.

El Solenoide de Smale es un sistema dinámico con comportamiento caótico. El objetivo de este trabajo es presentar la definiciones de caos según Devaney y el Teorema de Simplificación que con mayor frecuencia se encuentran en la literatura de esta área. Ahora bien, para alcanzar nuestro objetivo desarrollaremos los siguientes capítulos:

Capítulo 1. Estudiamos algunos conceptos básicos que se requieren para estudiar los Sistemas Dinámicos Discretos. Además se ven ejemplos que serán de gran utilidad para comprender con mayor facilidad dichos conceptos. Finalmente se presentan resultados para estudiar la estabilidad de los puntos periódicos.

Capítulo 2. Empezaremos el capítulo con la función logística, la idea de este capítulo es entender la dinámica de esta función como ejemplo en este capítulo. Se introducirá la definición de Caos dada por Devaney, se desarrollarán algunos ejemplos de funciones caóticas de acuerdo a la definición de Devaney. En este mismo capítulo se introduce el concepto de Conjugado Topológico y su aplicación.

Capítulo 3. Definiremos el espacio Simbólico, estudiaremos la dinámica de la función Shift y probaremos que esta función es caótica. Finalmente, como ejemplo la función logística para el caso $r > 2 + \sqrt{5}$ utilizando el concepto de conjugación topológica, ya que para algunos ejemplos es fácil verificar si el sistema dinámico muestra un comportamiento caótico, pero para otros no es tan fácil mostrar este tipo de comportamiento, por esa razón se introducirá el concepto de conjugado topológico.

Capítulo 4. Desarrollaremos el tema central de la tesis, definiremos el Solenoide, probaremos que el Solenoide es un atractor caótico de acuerdo a la definición de Devaney. Es decir, en 1992 Banks, Brooks, Cairns, probaron que la hipótesis de dependencia sensitiva a las condiciones iniciales, no es realmente necesaria ya que esta se deduce de las otras dos condiciones, es decir, basta con que la función sea topológicamente transitiva y sus puntos periódicos sean densos, para asegurar que la función sea caótica. Ahora, es natural entonces aplicar esta teoría al Solenoide ya que concluiremos bajo las condiciones de que el Solenoide es topológicamente transitiva y sus puntos periódicos son densos y que la función Solenoide restringida al Solenoide es Caótica.

Los solenoides han sido objeto de interés en varias áreas de la matemática, desde los sistemas dinámicos y otros como ser en la geometría algebraica hasta la topología. En particular en este trabajo presentaremos el solenoide y la dinámica de este mismo, el Solenoide o (Smale-Williams attractor) este objeto es un ejemplo del sistema dinámico que fue introducido por Smale en el año 1967.

Sin embargo, podemos mencionar sobre este objeto un poco sobre su historia, este solenoide fue el primero en ser descubierto, y fue el austriaco Leopold Vietoris el primer matemático que lo estudió.

A partir de entonces varios autores han estudiado a los solenoides; uno de los más conocidos es el matemático holandés David van Dantzig quien, en 1930, dio una conocida construcción geométrica de los solenoides como intersección anidada de toros sólidos Pos-

teriormente, desde un punto de vista completamente distinto H. Freudenthal estudió a los solenoides, esta vez como límites inversos de circunferencias Independientemente, A. van Heemert y A.D. Wallace estudiaron a los solenoides como grupos topológicos .

El estudio de los solenoides ha cobrado gran importancia en las últimas décadas por su aparición en diversas ramas de la matemática; por ejemplo, en la teoría de sistemas dinámicos se estudian los atractores como en nuestro caso, También se tiene que en el estudio de la topología algebraica los solenoides son de gran importancia para la teoría de espacios foliados.

Índice general

1. PRELIMINARES	1
1.1. Conceptos Básicos y Notaciones	1
1.2. Análisis Gráfico	7
1.3. Condiciones de Continuidad y Diferenciabilidad	8
2. FUNCIÓN LOGÍSTICA Y CONJUGACIÓN TOPOLÓGICA	15
2.1. La función logística	15
2.1.1. Dinámica de la función logística	16
2.1.2. La función logística cuando $r > 4$	21
2.1.3. Conjunto de Cantor	26
2.2. Caos en Espacios Métricos	28
2.2.1. Ejemplo de Función Caótica	34
2.3. Conjugación Topológica	35
2.3.1. Ejemplos de Conjugado Topológico	40
3. DINÁMICA SIMBÓLICA	43
3.1. Espacio Simbólico	43
3.2. La Dinámica de la función Shift	46
3.2.1. La función Logística es Caótico	50
4. EL ATRACTOR CAÓTICO SOLENOIDE	55
4.1. Introducción	55
4.2. El Solenoide	56
4.3. El Solenoide es un Atractor Caótico	79

A. Conjunto hiperbolico	85
B. Variedades diferenciales	89

Capítulo 1

PRELIMINARES

El objetivo de este capítulo es estudiar algunos conceptos y resultados básicos, que se utilizarán en los capítulos siguientes. Para esto, se trabajará con funciones definidas en un espacio métrico. Se pide que el rango de la función sea un subconjunto de su dominio; esto con el fin de definir la composición de la función consigo misma.

1.1. Conceptos Básicos y Notaciones

Sea una función $f : X \rightarrow X$, donde X es un espacio métrico. Las iteraciones de $x \in X$ bajo la función f son:

$$f^0(x) = x$$

$$f^1(x) = f(x)$$

$$f^2(x) = (f \circ f)(x)$$

·

·

·

$$f^n(x) = \underbrace{(f \circ \dots \circ f)}_{n\text{-veces}}(x)$$

$f^n(x)$ denota la n -ésima iteración de x bajo la función f , y la sucesión $\{x, f(x), f^n(x), \dots\}$, describe la evolución del estado x en el tiempo, al conjunto X suele denominarse espacio

de estados y a sus elementos estados del sistema dinámico. A la pareja (X, f) se le llama un *sistema dinámico discreto*.

Definición 1. Un conjunto $C \subset X$ se dice invariante si $f(C) \subset C$

Observación 1. Si C es invariante, entonces $f^m(C) \subset C$ para todo $m \in \mathbb{Z}$

Definición 2. Sea X un espacio métrico y $f : X \rightarrow X$. Se le llama la órbita de $x_0 \in X$ bajo la función f a la sucesión $\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots\} = \{f^n(x_0) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, misma que se denota por $\mathcal{O}_f(x_0)$.

$\mathcal{O}_f(x_0)$ describe las distintas posiciones que visita el punto x_0 con el paso del tiempo, es decir se inicia en el punto x_0 y se tendrá la posición $f^n(x_0)$ después de transcurrir n unidades de tiempo.

Existen ocasiones en las que para algún $n \in \mathbb{N}$, $f^n(x_0) = x_0$. Es decir, luego de $n - 1$ unidades de tiempo x_0 regresa a su posición inicial. Si esto sucede, el movimiento descrito en la órbita $\mathcal{O}_f(x_0)$ comienza a repetirse, a ser periódico. Las nociones de puntos periódicos y puntos fijos son muy importantes en el estudio de los sistemas dinámicos. Su importancia radica en el hecho de que muchos fenómenos físicos presentan ciertos patrones que se repiten, produciendo así los ciclos.

Definición 3. Sea X un espacio métrico y $f : X \rightarrow X$. Se dice que $x_0 \in X$:

a) Es un punto periódico de f de primer periodo k , si

$$\begin{aligned} f^k(x_0) &= x_0 \\ f^n(x_0) &\neq x_0 \text{ para } n = 1, 2, \dots, k - 1. \end{aligned}$$

b) Es un punto fijo de f si $f(x_0) = x_0$.

c) Es un punto eventualmente fijo de f , si existe N tal que

$$f^{n+1}(x_0) = f^n(x_0) \quad \text{si } n > N.$$

d) Es un punto eventualmente periódico de f con primer periodo k , si existe N tal que

$$f^{n+k}(x_0) = f^n(x_0) \quad \text{si } n > N.$$

Si $x \in X$, es un punto periódico de f , se dice que la órbita de x , $\mathcal{O}_f(x)$ es periódica. Notemos los puntos fijos de f son puntos periódicos de primer periodo 1, y los puntos periódicos de f con primer período n , son puntos fijos para la función f^n .

Definición 4. Sea X un espacio métrico y $f : X \rightarrow X$. Se dice que $x \in X$ es un punto asintóticamente fijo si existe un punto fijo $x_0 \in X$, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0.$$

Es un punto asintóticamente periódico, si existe un punto periódico p de primer período k , tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{nk}(x) = p$$

La definición anterior asegura que x es un punto asintóticamente fijo si la órbita de x converge a un punto fijo. Por otra parte, si x es un punto asintóticamente periódico con primer período k , su órbita tiene k subsucesiones convergentes.

Definición 5. Sea X un espacio métrico y $f : X \rightarrow X$. Se define el conjunto estable de un punto periódico $p \in X$ de primer período k como

$$W^s(p) = \{x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} f^{nk}(x) = p\}.$$

Observación 2. En el caso particular de $X = \mathbb{R}$, y si, $|x|, |f(x)|, |f^2(x)|, \dots$ crece sin cota entonces se dice que x converge asintóticamente a ∞ . En este caso, se define al conjunto estable del infinito por:

$$W^s(\infty) = \{x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \infty\}$$

Proposición 1. Sea un espacio métrico (X, d) y $f : X \rightarrow X$. Sean $p, q \in X$ puntos periódicos, con $p \neq q$. Entonces $W^s(p) \cap W^s(q) = \emptyset$.

Prueba. Supongamos que $W^s(p) \cap W^s(q) \neq \emptyset$. Se demostrará que $p = q$.

Sea $x \in W^s(p) \cap W^s(q)$, entonces existen constantes N_1 y N_2 tales que

$$\begin{aligned} d(f^{nk_p}(x), p) &< \frac{\epsilon}{2} \quad \text{si } n > N_1 \quad \text{y} \\ d(f^{nk_q}(x), q) &< \frac{\epsilon}{2} \quad \text{si } n > N_2. \end{aligned}$$

Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$ si $n > N$, entonces por la desigualdad triangular se tiene

$$\begin{aligned} d(p, q) &\leq d(p, f^{nk_q k_p}(x)) + d(q, f^{nk_q k_p}(x)) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \frac{2\epsilon}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Así $0 < d(p, q) < \epsilon$, por tanto $p = q$. □

Ejemplo 1. Consideremos $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^3$.

Veremos cuales son los puntos fijos y puntos periódicos de esta función, ver figura.

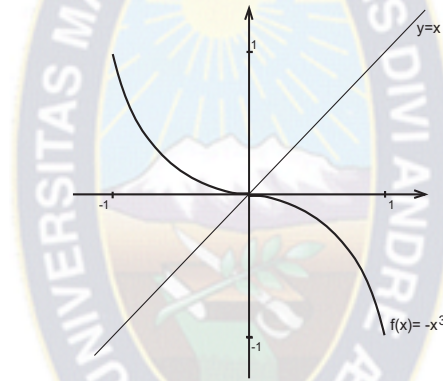


Figura 1. $f(x) = -x^3$

Iterando la función se obtiene

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^3 \\ f^2(x) &= x^9 \\ f^3(x) &= -x^{27} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ f^n(x) &= (-1)^n x^{3^n}. \end{aligned}$$

Consideremos las órbitas

$$\mathcal{O}_f(0) = \{0, 0, 0, \dots\}, \quad \mathcal{O}_f(1) = \{1, -1, 1, -1, \dots\}, \quad \mathcal{O}_f(-1) = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}.$$

De aquí observamos que 0 es un punto fijo, puesto que $f(0) = 0$, por otro lado si $f(x) = -x^3 = x$, entonces $x + x^3 = 0$ de aquí $x = 0$ o $x^2 + 1 = 0$ entonces 0 es el único punto fijo de f y que los punto 1 y -1 son puntos periódicos de primer período 2.

Además, de acuerdo a como están dadas las iteraciones, si $|x_0| < 1$ entonces $|f^n(x_0)| \rightarrow 0$, es decir, los puntos entre -1 y 1 son asintóticamente fijos. Pero si $|x_0| > 1$, entonces $|f^n(x_0)| \rightarrow \infty$. Esto se puede ver en la siguiente figura.

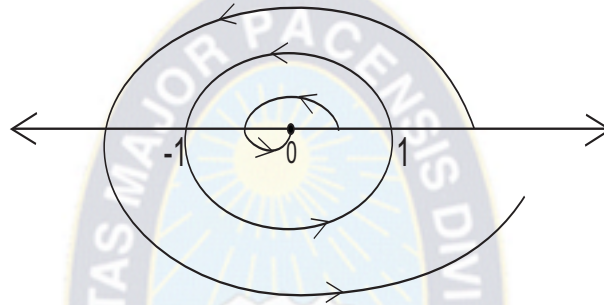


Figura 2. Si $|x_0| > 1$, entonces $|f^n(x_0)| \rightarrow \infty$

Ejemplo 2. Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función dada por $g(x) = |x - 1|$.

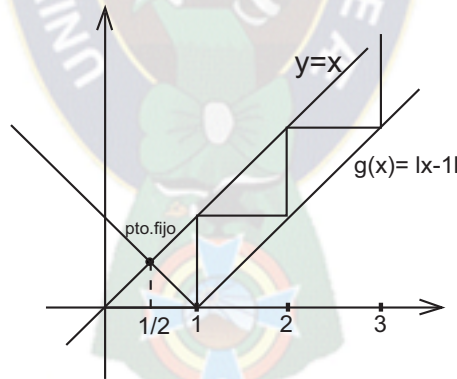


Figura 3. $g(x) = |x - 1|$

Observemos que el único punto fijo es $\frac{1}{2}$, y

$$\mathcal{O}_g(0) = \{0, 1\}$$

$$\mathcal{O}_g(1) = \{1, 0\}$$

así que 0, 1 son puntos periódicos de período 2.

Si tomamos $x = 2$, obtenemos que $\mathcal{O}_g(2) = \{2, 1, 0, 1, 0, 1, \dots\}$, es decir $g^{n+2}(2) = g^n(2)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por tanto 2 es un punto eventualmente periódico.

Si se toma $x = 4$, obtenemos que $\mathcal{O}_g(4) = \{4, 3, 2, 1, 0, 1, 0, 1, \dots\}$, es decir $g^{n+2}(4) = g^n(4)$ para $n > 3$, por lo que 4 es un punto eventualmente periódico.

Siguiendo este mismo proceso se llega a que todos los números enteros son eventualmente periódicos, ya que después de cierto número de iteraciones, caen dentro de la órbita $\{0, 1\}$. Por otra parte, si se toma la subsucesión $\{x, g^2(x), g^4(x), g^6(x), \dots\}$, para los números enteros pares, esta subsucesión converge al punto periódico $x = 0$ y para los números enteros impares converge al punto periódico $x = 1$. Por ejemplo, si $x = 6$ entonces $\mathcal{O}_{g^2}(6) = \{6, 4, 2, 0, 0, 0, \dots\} \rightarrow 0$ y si $x = 9$ entonces $\mathcal{O}_{g^2}(9) = \{9, 7, 5, 3, 1, 1, 1, \dots\} \rightarrow 1$.

Esto significa que:

$$W^s(0) = \{\text{los números enteros pares}\}$$

$$W^s(1) = \{\text{los números enteros impares}\}$$

Ahora, los puntos de la forma $x, 1 - x$ para $0 < x < 1$, también son puntos periódicos de período 2, por ejemplo, si $x = 0.8$, entonces $\mathcal{O}_g(0.8) = \{0.8, 0.2, 0.8, 0.2, \dots\}$. Si se toma $x = 4.8$, se tiene $\mathcal{O}_g(4.8) = \{4.8, 3.8, 2.8, 1.8, 0.8, 0.2, 0.8, 0.2, \dots\}$. Siguiendo este mismo procedimiento, se llega a que los números que no son enteros también son eventualmente periódicos, pero estos caen dentro de la órbita $\{x, 1 - x\}$ para $0 < x < 1$.

Ejemplo 3. Sea $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ el círculo unitario con $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$. Como es costumbre, se identificara al ángulo t , con el ángulo $t + 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$.

Notemos que \mathbb{S}^1 es un espacio métrico ya que $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ y $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ entonces \mathbb{S}^1 es un espacio métrico con la métrica inducida de \mathbb{R}^2 puesto que \mathbb{R}^2 es un espacio métrico.

Sea $p : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, definida como $p(e^{it}) = e^{2it}$, llamada la *función cuadrática*.

Veamos cómo son los puntos periódicos de p .

Un punto e^{it} en \mathbb{S}^1 , es un punto periódico con período n , si y solo si $p^n(e^{it}) = e^{it}$ es decir $e^{i2^n t} = e^{it}$, esto es verdad si y solo si $2^n t = t + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Despejando t se tiene $t = \frac{2\pi k}{2^n - 1}$.

Por lo tanto un punto e^{it} es periódico con período n si y sólo si $t = \frac{2\pi k}{2^n - 1}$ para $k = 0, 1, \dots, 2^n - 2$.

1.2. Análisis Gráfico

En el caso particular de que f sea una función real de variable real, el análisis gráfico es una técnica que utiliza la gráfica de la función en cuestión para analizar su dinámica. Para realizar el análisis gráfico de una función f , se grafica la función f y la recta $y = x$ sobre el mismo plano cartesiano. Ahora, se toma un punto a en la recta $y = x$ y se traza una línea vertical hasta cortar la gráfica de f , desde ese punto se traza una línea horizontal hasta tocar a la recta $y = x$. Ese punto es $f(a)$, repitiendo este mismo proceso se encuentra $f^2(a)$, y así sucesivamente. Esto se ilustra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4. Sea $I = (-1, 1)$, nuestro análisis con la dinámica de la función $f(x) = x^3$, graficando f y la línea $y = x$, en el mismo sistema de coordenadas.

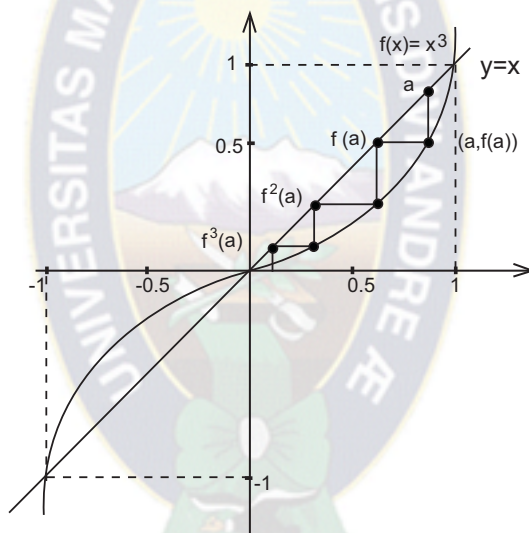


Figura 4. $f(x) = x^3$

Empezamos del punto $a \in I$. Trazamos verticalmente hasta tocar la gráfica de f y obtenemos un punto $f(a)$ (o bien $(a, f(a))$), ahora trazamos una línea horizontal hasta tocar la diagonal (es decir $y=x$) y tenemos el punto $f(a)$, repetimos el proceso trazando verticalmente hasta tocar a la función f y tenemos el punto $f^2(a)$. Así vemos que $f^n(a)$ se acerca a cero cuando n tiende a infinito. Por tanto podemos concluir que $f(x) = x^3$ se acerca a cero bajo iteración de la función. Luego esto nos induce a que el conjunto estable de cero es $(-1, 1)$ y $W^s(\infty) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Los puntos -1 , 0 y 1 son puntos fijos de f .

Ejemplo 5. Ahora consideremos la función $f(x) = -x^{1/3}$, la gráfica de f y la línea $y = x$ como se muestra en la figura .

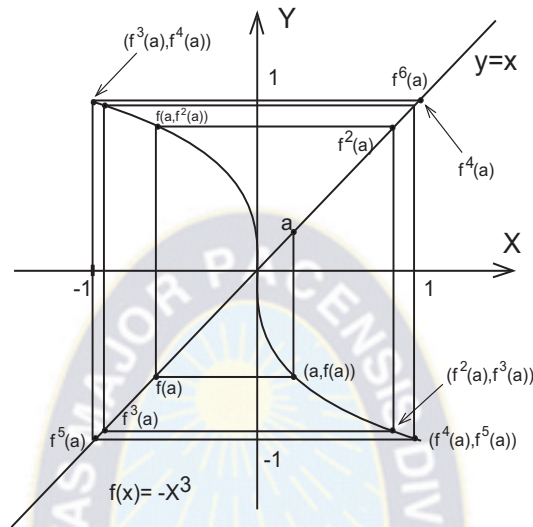


Figura 5. $f(x) = -x^{1/3}$

Empezamos con un punto que está cercano a 0 en el intervalo $(0, 1)$. Cuando n crece, el valor de $f^n(a)$ se acerca a 1 en valor absoluto y oscila de un lado de 0 al otro. Además notemos que -1 y 1 forma un ciclo periódico de periodo 2. Además, $f^n(a)$ siempre es positivo. Así podemos concluir que a está en el conjunto estable de 1 es decir $W^s(1)$. Así el análisis sugiere que. $W^s(1) = (0, \infty)$, $W^s(-1) = (-\infty, 0)$, 0 es punto fijo y $W^s(\infty) = \emptyset$.

1.3. Condiciones de Continuidad y Diferenciabilidad

En muchos casos las funciones a considerar son continuas y diferenciables. Esto nos permite obtener resultados importantes en el estudio de los sistemas dinámicos.

Una de las condiciones para determinar la existencia de puntos fijos es dado por el teorema siguiente.

Teorema 1. Sea $I = [a, b]$ un intervalo cerrado en \mathbb{R} y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si $[a, b] \subset f([a, b])$ entonces f tiene un punto fijo en I .

Prueba. Como motivación observemos la siguiente figura 6.

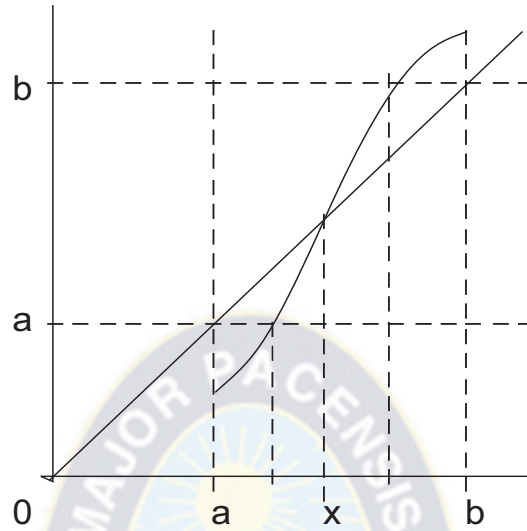


Figura 6. x es punto fijo de f

Como $[a, b] \subset f([a, b])$ entonces existen $c, d \in [a, b]$ con $c < d$ tales que $f(c) = a$ y $f(d) = b$ como se ve en la figura.

Si $f(b) = b$ ó $f(a) = a$ entonces a y b son puntos fijos lo cual muestra el resultado.

Ahora supongamos que $f(b) \neq b$ y $f(a) \neq a$, entonces podemos definir una nueva función $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - x$, es claro que g es continua pues la diferencia de funciones continuas es continua. Como $f(a) \neq a$ y $f(a) \in I = [a, b]$, se concluye que $f(a) < a$, análogamente para $f(b) > b$.

Por tanto $g(c) = f(c) - c < 0$ ya que $f(c) = a$ y $a < c$ y $g(d) = f(d) - d > 0$ ya que $f(d) = b$ y $d < b$.

Ahora, $g(c) < 0$ y $g(d) > 0$ g es continua por el Teorema de Valor Intermedio existe

$x \in [c, d] \subset [a, b]$ tal que $g(x) = 0$, es decir $f(x) = x$. Así x es un punto fijo de f

□

Consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 - x^2$, como f es continua en $[0, 1]$, entonces por el teorema f tiene un punto fijo. Por otro lado, para encontrar el punto fijo resolvemos la ecuación $1 - x^2 = x$. Obtenemos $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$, $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ y notemos que $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ está en $[0, 1]$. Este hecho lo ilustramos en la figura siguiente:

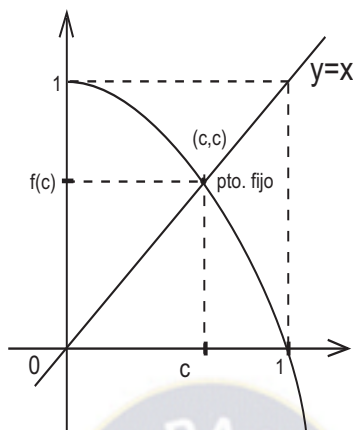


Figura 7. $f(x) = 1 - x^2$ con $x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ punto fijo en $[0, 1]$

Observación 3. Si en el Teorema 1, la condición $[a, b] \subset f([a, b])$ se cambia por la condición $f([a, b]) \subset [a, b]$, la conclusión sigue siendo válida. (Ver Figura 8).

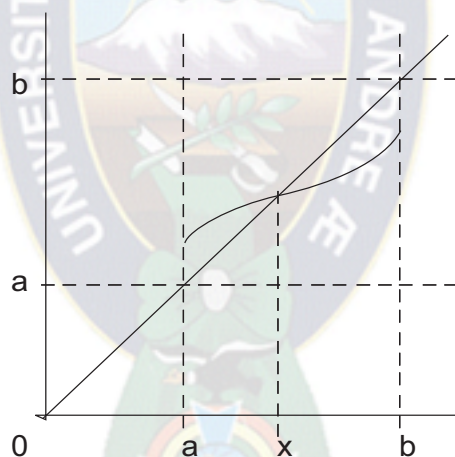


Figura 8. ilustrando la observación 3.

Ahora, un importante propiedad de las funciones diferenciables es que cumplen con el Teorema del Valor Medio, el cual recordaremos a continuación.

Teorema 2. (Teorema del Valor Medio). *Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en (a, b) . Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Se sabe por el Teorema 1 que si f es continua en $[a, b]$ y si $[a, b] \subset f([a, b])$. entonces, f tiene por lo menos un punto fijo. Pero, si además es diferenciable, la siguiente Proposición asegura que f tiene un único punto fijo en $[a, b]$.

Proposición 2. *Sea $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ una función diferenciable. Si $|f'(x)| < 1$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces existe un único punto fijo en $[a, b]$. Además para todo $x, y \in [a, b]$, $x \neq y$ se cumple:*

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|.$$

Prueba. Empezaremos probando la segunda parte de la Proposición. Sea $x, y \in [a, b]$ con $x \neq y$, por el Teorema del Valor Medio, existe $c \in [x, y]$ tal que

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c)||y - x|$$

pero por hipótesis $|f'(c)| < 1$, entonces

$$|f(y) - f(x)| < |y - x|.$$

Ahora, probaremos que f tiene un único punto fijo en $[a, b]$. Como es f diferenciable entonces f es continua, por tanto f tiene por lo menos un punto fijo en $[a, b]$.

Sea $x \in [a, b]$ y p un punto fijo de f en $[a, b]$, con $x \neq p$, entonces

$$|p - f(x)| = |f(p) - f(x)| < |p - x|.$$

Notemos que si $f(x) = x$, entonces se tendría $|p - x| < |p - x|$ lo cual es una contradicción, por tanto $f(x) \neq x$ por lo que x no es un punto fijo de f . Luego p es el único punto fijo de f en $[a, b]$. \square

Denotaremos por C^1 al conjunto de las funciones cuya derivada existe y es continua. El siguiente resultado nos da un criterio para estudiar la estabilidad de los puntos fijos.

Proposición 3. *Sean $X \subseteq \mathbb{R}$ abierto y $f : X \rightarrow X$, con $f \in C^1$. Sea $p \in X$ un punto fijo de f .*

- a) *Si $|f'(p)| < 1$, entonces existe un intervalo abierto que contiene a p contenido en $W^s(p)$.*
- b) *Si $|f'(p)| > 1$, entonces existe un intervalo abierto U que contiene a p tal que, si $x \in U$ con $x \neq p$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \notin U$.*

Prueba. **a)** Sea $\epsilon = \frac{1}{2}(1 - |f'(p)|) > 0$. Como f' es continua en p , existe $\delta > 0$ tal que:

$$|f'(p) - f'(x)| < \epsilon \quad \text{si } x \in (p - \delta, p + \epsilon).$$

Así que,

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= |f(x) + f'(p) - f'(p)| \\ &\leq |f(x) - f'(p)| + |f'(p)| \\ &< \epsilon + |f'(p)| \\ &= \frac{1}{2}(1 - |f'(p)|) + |f'(p)| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|f'(p)| \\ &= \left[1 - \left(\frac{1}{2} (1 - |f'(p)|) \right) \right] = 1 - \epsilon \end{aligned}$$

Es decir,

$$|f(x)| < 1 - \epsilon \quad \text{si } x \in (p - \delta, p + \delta) \quad (1.1)$$

Ahora, se toma $x \in (p - \delta, p + \delta)$ con $x \neq p$, aplicando el Teorema del Valor Medio, existe c_1 entre x y p tal que;

$$|f(x) - f(p)| = |f(x) - p| = |f'(c_1)||x - p| \quad (1.2)$$

entonces, de (1.1) y (1.2) se tiene que,

$$|f(x) - f(p)| = |f'(c_1)||x - p| < 1 - \epsilon |x - p|$$

Luego, por el Teorema del Valor Medio, existe c_2 entre $f(x)$ y $f(p)$ tal que

$$\begin{aligned} |f^2(x) - f^2(p)| &= |f(f(x)) - f(f(p))| = |f'(c_2)||f(x) - f(p)| \\ &< |f'(c_2)|(1 - \epsilon)|x - p|, \quad \text{entonces} \\ |f^2(x) - f^2(p)| &< (1 - \epsilon)^2|x - p| \end{aligned}$$

Y por inducción se cumple

$$|f^n(x) - f^n(p)| < (1 - \epsilon)^n|x - p|.$$

Ya que $(1 - \epsilon) < 1$, entonces $f^n(x) \rightarrow p$, es decir $x \in W^s(p)$ para todo $x \in (p - \delta, p + \delta)$, por tanto $(p - \delta, p + \delta) \subset W^s(p)$.

b) Sea M tal que $|f'(p)| > M > 1$. Como f' es continua, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in (p - \delta, p + \delta)$, se tiene $|f'(x)| > M$. Sea $x \in (p - \delta, p + \delta)$, con $x \neq p$. Por el Teorema del Valor Medio existe c tal que

$$|f(x) - f(p)| = |f'(c)||x - p| \quad \text{con } c \in (p - \delta, p + \delta).$$

Como $c \in (p - \delta, p + \delta)$, se tiene que $|f'(c)| > M$, por lo tanto $|f(x) - p| > M|x - p|$. Si $f(x) \in (p - \delta, p + \delta)$, entonces

$$|f(f(x)) - p| > M|f(x) - p| > M^2|x - p|$$

y así sucesivamente, mientras $f^n(x)$ se mantenga en el intervalo $(p - \delta, p + \delta)$ entonces

$$|f^n(x) - p| > M^n|x - p|.$$

es decir para $f(x) \in (p - \delta, p + \delta)$, existe $U = (p - \delta, p + \delta)$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \notin U$

Ahora, supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $f^n(x) \in U$.

Como $M > 1$, esto implica la existencia de $n \in \mathbb{N}$ tal que $|f^n(x) - p| > \delta$, por lo tanto el punto $f^n(x)$ ya no pertenece al intervalo $(p - \delta, p + \delta)$. □

Una observación útil, es que si los errores $e_n = f^n(x) - p$, son no nulos, entonces:

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{f^{n+1}(x) - p}{f^n(x) - p} = \frac{f(f^n(x)) - f(p)}{f^n(x) - p} \longrightarrow f'(p),$$

por tanto, la magnitud de la derivada de la función en el punto fijo, es un indicador de la rapidez de la convergencia de la iteración al punto fijo. De acuerdo a la Proposición 3, se clasifican los puntos fijos y periódicos de la siguiente manera.

Definición 6. Sean $X \subseteq \mathbb{R}$ abierto y $f : X \rightarrow X$ una función diferenciable. Sea p un punto periódico con primer período n . Si $|(f^n(p))'| \neq 1$, se dice que p es hiperbólico. De otra manera, se dice que es no hiperbólico.

Definición 7. Sean $X \subseteq \mathbb{R}$ abierto y $f : X \rightarrow X$ una función diferenciable. Sea p un punto hiperbólico periódico con primer período n .

a) Si $|(f^n(p))'| < 1$, se dice que p es un punto periódico atractor.

b) Si $|(f^n(p))'| > 1$, se dice que p es un punto periódico repulsor.

Cuando $n = 1$, en la Definición 7 en los casos a) y b), al punto p se le dice punto fijo atractor y punto fijo repulsor respectivamente. La siguiente Proposición nos da un criterio práctico para estudiar la estabilidad de los puntos periódicos, basado en la Proposición 3.

Proposición 4. *Sea f una función de clase C^1 y p un punto periódico de f con primer período k .*

- a) *Si $|f'(p)f'(f(p))\dots f'(f^{k-1}(p))| < 1$, entonces existe un intervalo abierto que contiene a p , tal que esta contenido en $W^s(p)$.*
- b) *Si $|f'(p)f'(f(p))\dots f'(f^{k-1}(p))| > 1$, entonces existe un intervalo abierto I que contiene a p , tal que todos los puntos del intervalo (excepto p), dejan el intervalo I bajo iteraciones de f^k .*

Prueba. Por la regla de la cadena se cumple,

$$(f^k(p))' = f'(p)f'(f(p))\dots f'(f^{k-1}(p)).$$

Entonces las conclusiones de la Proposición son inmediatas, aplicando la Proposición 3 a la función f^k . □

Notemos que si p es un punto periódico de f , con primer período k y la derivada de f^k en p es menor que 1 en valor absoluto, entonces puntos cercanos a p son atraídos a p bajo iteraciones de f^k .

En el Ejemplo 1, se observó que los puntos fijos de la función $f(x) = -x^3$ son 0, 1 y -1 .

Para ver si estos son atractores o repulsores primeramente se deriva la función y se obtiene $f'(x) = -3x^2$. Después se evalúa en cada punto fijo. Así se tiene que 0 es un punto hiperbólico atractor ya que

$$|f'(0)| < 1$$

Ahora, los puntos 1 y -1 son hiperbólicos repulsores ya que

$$|f'(1)| > 1 \quad \text{y} \quad |f'(-1)| > 1.$$

Esto quiere decir que los puntos que se encuentran entre $(-1, 1)$ bajo iteraciones de la función se acercan a cero y los puntos que están en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ bajo la iteración de la función se alejan.

Capítulo 2

FUNCIÓN LOGÍSTICA Y CONJUGACIÓN TOPOLÓGICA

Primero vamos a considerar uno de los ejemplos importantes, ya que presenta distintos comportamientos; éste es llamado la familia de funciones logísticas. Aunque aquí se verán algunas de sus características, se dedicará en el Capítulo 3 para observar detalladamente la dinámica del sistema. Además definiremos Caos en espacios métricos y finalmente, Conjugado Topológico y ejemplos.

2.1. La función logística

En esta sección describiremos la dinámica de la función logística, la cual está dada por la función $h_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h_r(x) = rx(1 - x)$, donde $r > 0$ que es llamado función logística.

Notemos que h_r es un polinomio, en particular h_r es continuamente diferenciable, puesto que

$$h'_r(x) = r - 2rx. \quad (2.1)$$

Los puntos críticos de h_r satisfacen la ecuación (2.1) es decir

$$h'_r(x) = 0 \iff r - 2rx = 0 \iff x = \frac{1}{2}, \quad (2.2)$$

por lo tanto el único punto crítico es $x = \frac{1}{2}$ como se ve en la figura 9. La derivada segunda es $h''(x) = -2r \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, luego que $x = \frac{1}{2}$ es un punto máximo y

$$h_r\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{r}{4}. \quad (2.3)$$

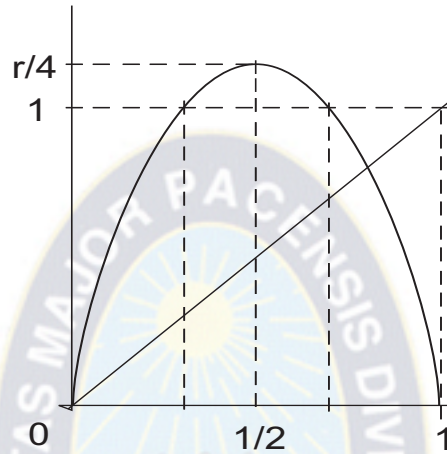


Figura 9. Punto máximo de la función logística.

h_r está entre el intervalo $[0, 1]$ en si mismo para $0 < r \leq 4$.

2.1.1. Dinámica de la función logística

Estudiemos la dinámica de la función logística para algunos rangos del parámetro r . Empezamos con puntos fijos.

a) Para encontrar los puntos fijos de la función h_r basta con resolver la ecuación (2.4)

$$rx(1-x) = x, \quad (2.4)$$

por lo tanto, los puntos fijos de h_r son el 0 y $p_r = \frac{r-1}{r}$, también existen dos puntos eventualmente fijos, 1 y $\frac{1}{r}$ ya que $h_r(1) = 0$ y $h_1\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{r-1}{r} = p_r$.

- b) Si $r = 1$, entonces $h_1(x) = x(1-x)$ y 0 es el único punto fijo pero no es hiperbólico, ya que $h'(x) = -2x + 1$ por lo que $|h'(0)| = 1$.
- c) Si $0 < r < 1$, entonces p_r es un punto fijo repulsor y 0 es un punto fijo atractor.

d) Si $1 < r < 3$, entonces 0 es un punto fijo repulsor y p_r es un punto fijo atractor.

Ahora, si restringimos h_r a $(0, 1)$ se tiene que p_r es un atractor global, es decir, si $0 < x_0 < 1$ se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_r^n(x_0) = p_r$$

En efecto, consideremos dos casos:

Caso I) Si $1 < r < 2$ entonces $0 < p_r < \frac{1}{2}$.

Además, como $h_r'(x) = r - 2rx$; se tienen:

a) Si $0 < x_0 < \frac{1}{2}$ entonces $h_r'(x_0) > 0$.

La función $h_r(x)$ tiene un máximo global en $\frac{1}{2}$ y $h_r(\frac{1}{2}) = \frac{r}{4} \leq \frac{1}{2}$. Además, la función h_r es creciente en $(0, p_r)$, como podemos ver en la figura 10.

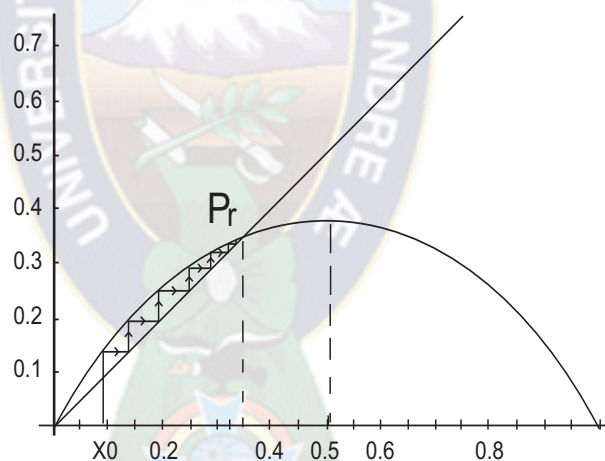


Figura 10. las iteradas de h_r en $x_0 \in (0, p_r)$.

Así, para $x_0 \in (0, p_r)$ tenemos que $x_0 < h_r(x_0)$, por consiguiente,

$$x_0 < h_r(x_0) < h_r^2(x_0) < \dots$$

Ésta es una sucesión creciente y acotada por 1, por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} h_r^n(x_0) = p_r$.

b) Si $x_0 \in (p_r, \frac{1}{2})$ la función h_r es creciente y $x_0 > h_r(x_0)$.

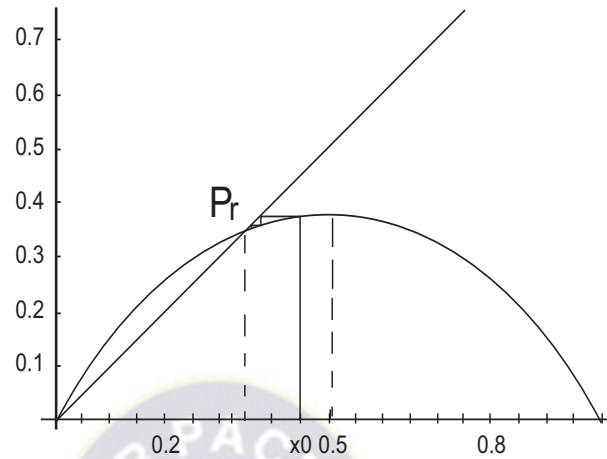


Figura 11. Las iteradas de h_r en $x_0 \in (p_r, 1/2)$

Entonces la sucesión $h_r^n(x_0)$ es decreciente y acotada por cero. Por lo tanto $h_r^n(x_0) = p_r$ como podemos ver en la ver figura 11.

c) Si $\frac{1}{2} < x_0 < 1$ entonces $h_r'(x_0) < 0$.

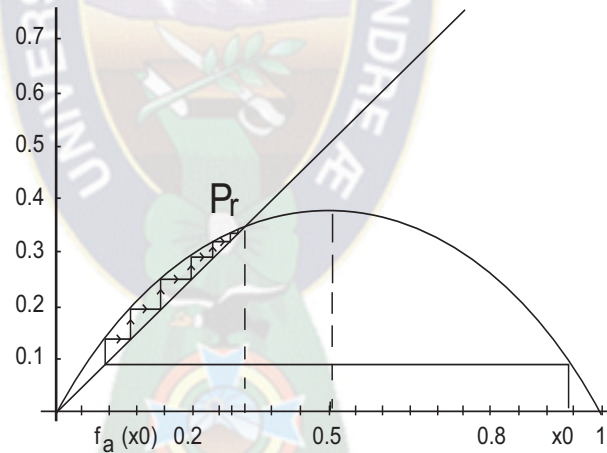


Figura 12. Las iteradas de h_r en $x_0 \in (1/2, 1)$

Además, $x_1 = rx_0(1 - x_0) < 2\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, entonces a partir de la primera iteración entramos en el intervalo $(0, \frac{1}{2})$, es decir $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$ entonces $h_r(x_0) \in (0, \frac{1}{2})$ como podemos observar en la figura 12 y en consecuencia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_r^n(x_0) = p_r.$$

Observemos: Si $r = 2$ entonces $p_r = \frac{1}{2}$, es decir, es el máximo de $h_2(x)$. Notemos que el comportamiento, en este caso particular, es análogo al caso a).

Caso II) Si $2 < r < 3$, entonces $\frac{1}{2} < p_r < \frac{2}{3}$.

La función $h_r(x_0) > x_0$ para toda $x_0 \in (0, \frac{1}{2})$ como se ve en la figura 13.

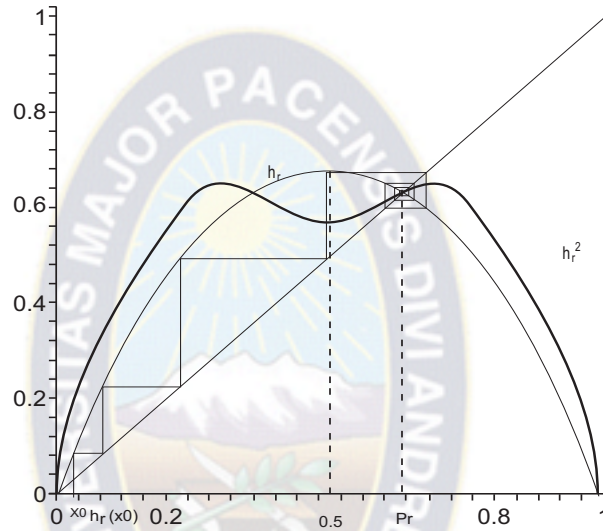


Figura 13. h_r y h_r^2 y las iteradas en $x_0 \in (0, 1/2)$, para $\frac{1}{2} < p_r < \frac{2}{3}$

En este caso la prueba la dividiremos en cuatro incisos:

(i) Consideremos el intervalo $[\frac{1}{2}, p_r]$ y mostremos que es invariante por h_r^2 . Para encontrar la imagen del intervalo es suficiente determinar las iteradas en los puntos extremos:

En efecto

$$h_r^2\left(\left[\frac{1}{2}, p_r\right]\right) = h_r\left(\left[\frac{r}{4}, p_r\right]\right) = \left[\left(\frac{r^2}{4}\right)\left(\frac{4-r}{4}\right), p_r\right]. \quad (2.5)$$

Como queremos probar la inclusión siguiente

$$h_r^2\left(\left[\frac{1}{2}, p_r\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2}, p_r\right], \quad (2.6)$$

para esto es suficiente probar (2.7)

$$\left(\frac{r^2}{4}\right) \left(\frac{4-r}{4}\right) > \frac{1}{2} \quad (2.7)$$

el cual es equivalente a $r^3 - 4r^2 + 8 < 0$ de donde $(r-2)(r^2 - 2r - 4) < 0$

Como las raíces de $r^2 - 2r - 4$ son $1 \pm \sqrt{5}$, el segundo factor es negativo para $r < 3$ y el factor $(r-2)$ es positivo (porque $r > 2$), así el producto es negativo. Por lo tanto,

$$h_r^2\left(\frac{1}{2}\right) = r \left(\frac{r}{4}\right) \left(1 - \frac{r}{4}\right) > \frac{1}{2} \quad (2.8)$$

y

$$h_r^2\left(\left[\frac{1}{2}, p_r\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2}, p_r\right]. \quad (2.9)$$

Como $h_r^2\left(\frac{1}{2}\right)$ está por encima de la diagonal, se sigue que $h_r^2(x_0)$ está por encima de la diagonal y $x_0 < h_r^2(x_0) < p_r$ para $\frac{1}{2} < x_0 < p_r$. Esto genera una sucesión creciente y por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_r^n(x_0) = p_r \quad \text{para toda } x_0 \in \left[\frac{1}{2}, p_r\right]. \quad (2.10)$$

(ii) Si $\widehat{p}_r = \frac{1}{r} < \frac{1}{2}$ entonces $h_r(\widehat{p}_r) = p_r$,

$$h_r\left(\left[\widehat{p}_r, \frac{1}{2}\right]\right) = h_r\left(\left[\frac{1}{2}, p_r\right]\right),$$

y

$$h_r^2\left(\left[\widehat{p}_r, \frac{1}{2}\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2}, p_r\right].$$

Así, todos los puntos en $[\widehat{p}_r, \frac{1}{2}]$ convergen a p_r .

(iii) Ahora si, $x_0 < \widehat{p}_r$. La función $h_r(x_0) > x_0$ es creciente en este intervalo, entonces existe $k > 0$ tal que $h_r^k(x_0) \in [\widehat{p}_r, p_r]$. Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_r^{k+n}(x_0) = p_r. \quad (2.11)$$

(iv) Finalmente si, $p_r < x_0 < 1$ entonces $0 < h_r(x_0) < h_r(p_r) = p_r$. Por tanto $h_r(x_0) \in (0, p_r)$ y por (i), (ii) y (iii), las iteradas de $h_r(x_0)$ convergen a p_r .

2.1.2. La función logística cuando $r > 4$

Ahora, supongamos que $r > 4$ y denotemos $h_r = h$ definida por $h(x) = rx(1-x)$. Entonces $h(\frac{1}{2}) > 1$ y $\frac{1}{2}$ tiende asintóticamente a infinito, además $h(1) = 0$ y $h(0) = 0$ por el Teorema de Valor Intermedio, implica que existen $x_0 \in [0, \frac{1}{2}]$ y $x_1 \in [\frac{1}{2}, 1]$ tal que $h(x_0) = 1$ y $h(x_1) = 1$. Consecuentemente $h^2(x_0) = 0$, $h^2(x_1) = 0$, así x_0, x_1 son eventualmente fijos en 0 por h .

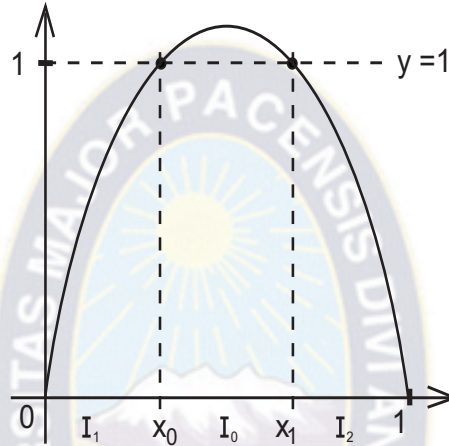


Figura 14. Existen $x_0 \in [0, \frac{1}{2}]$ y $x_1 \in [\frac{1}{2}, 1]$

Para cada número natural definimos

$$\Lambda_n = \{x : h^n(x) \text{ esta en } [0, 1]\}$$

Nuestro objetivo es construir el conjunto

$$\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n.$$

como podemos ver en la figura 14.

$$\Lambda_0 = [0, 1], I_0 = [0, x_0], I_1 = [x_1, 1],$$

$$\Lambda_1 = h^{-1}(\Lambda_0) = \{x : h(x) \in [0, 1]\} = [0, x_0] \cup [x_1, 1].$$

Notemos que h aplica a I_0 y I_1 sobre Λ_0 , de forma monótona en ambos casos.

Análogamente se define el conjunto

$$\Lambda_2 = h^{-1}(\Lambda_1) = h^{-1}(h^{-1}(\Lambda_0)) = h^{-2}(\Lambda_0).$$

Además, de acuerdo a la Figura 15, Λ_2 es la union de los cuatro intervalos cerrados:

$$\begin{aligned}
I_{20} &= \{x : x \in I_0 \text{ y } h(x) \in I_0\} \\
I_{21} &= \{x : x \in I_0 \text{ y } h(x) \in I_1\} \\
I_{22} &= \{x : x \in I_1 \text{ y } h(x) \in I_1\} \\
I_{23} &= \{x : x \in I_1 \text{ y } h(x) \in I_0\}
\end{aligned}$$

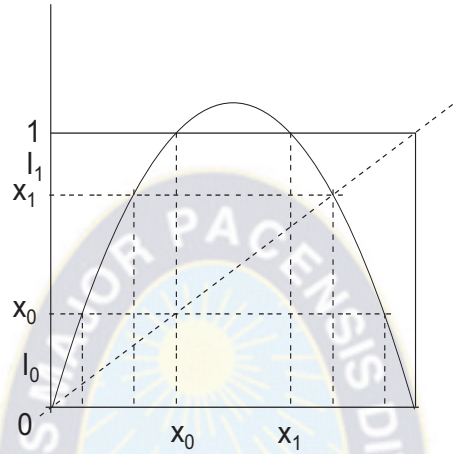


Figura 15. la union de los cuatro intervalos cerrado

En general, se definen los conjuntos

$$\Lambda_n = h^{-1}(\Lambda_{n-1}) = h^{-n}(\Lambda_0) = \{x : h^n(x) \text{ esta en } [0, 1]\}.$$

Notemos que en Λ_n están puntos de $[0, 1]$, que se quedan en $[0, 1]$ bajo las primeras n iteraciones de h , además $\Lambda_n \subset \Lambda_{n-1}$.

Sea el conjunto

$$\Lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Lambda_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Lambda_n h^{-n}([0, 1]) \quad (2.12)$$

Λ tiene los puntos de $[0, 1]$, que nunca escapan del intervalo $[0, 1]$ bajo iteraciones de h , así hemos construido el conjunto $\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$.

Proposición 5. Si $h(x) = rx(1-x)$ y $r > 4$ entonces se tiene las siguientes afirmaciones.

- a) El conjunto de puntos x en $[0, 1]$ satisface la condición de que $h(x)$ no está en $[0, 1]$, pero si está el intervalo

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r} \right)$$

Además,

$$\Lambda_1 = \left[0, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}\right] \cup \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}, 1\right]$$

b) El conjunto Λ_n consiste de 2^n intervalos disjuntos cerrados para todo natural n .

c) Si I es uno de los 2^n intervalos cerrados en Λ_n , entonces $h^n : I \rightarrow [0, 1]$ es uno a uno y sobre.

Prueba. Antes de empezar la prueba observemos lo siguiente, si $h(x)$ esta en $[0, 1]$, entonces x esta en $[0, 1]$. Por tanto, Λ_n esta contenido en $[0, 1]$ para todo n natural.

Ahora, probaremos la parte a). Sea x un punto cualquiera en $[0, 1]$, entonces $h(x)$ no siempre esta en $[0, 1]$ pero si contiene los puntos extremos de I_0 y cualquier punto dentro de I_0 es $h(x) > 1$. Pero los puntos que satisfacen la ecuación $h(x) = 1$, son.

$$x_0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r} \quad \text{y} \quad x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}$$

ya que esto se obtiene usando la fórmula cuadrática. Así podemos decir que está el intervalo (x_0, x_1) en $[0, 1]$. Además

$$\Lambda_1 = I_0 \cup I_1$$

donde $I_0 = [0, x_0]$ y $I_1 = [x_1, 1]$, además $\Lambda_0 = [0, 1]$.

Probaremos las parte b) y c) por inducción. Si $n = 1$ entonces por a) Λ_1 consiste de 2^1 intervalos disjuntos cerrados. Además, tenemos

$$h(0) = h(1) = 0 \quad \text{y} \quad h\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}\right) = 1.$$

Como h es continua, aplicando el Teorema de Valor Intermedio tiene que h toma todo los valores entre 0 y 1. Esto es $h : I \rightarrow [0, 1]$ es sobre (donde $I = [0, x_0]$ o $I = [x_1, 1]$).

Ahora, notemos que $h'(x) = r - 2rx$, entonces $h'(x) = r(1 - 2x) > 0$ si $x < \frac{1}{2}$ y $h'(x) = r(1 - 2x) < 0$ si $x > \frac{1}{2}$. Por tanto $h'(x) > 0$ si $x \in I = [0, x_0]$, de aquí obtenemos que h es estrictamente creciente, entonces es uno a uno.

De manera similar, $h'(x) < 0$ si $x \in I = [x_1, 1]$, por tanto h es estrictamente decreciente entonces es uno a uno.

Supongamos que $n = k$, es decir Λ_k es la unión de 2^k intervalos cerrados disjuntos, además si I es uno de los intervalos de Λ_k , entonces $h^k : I \rightarrow [0, 1]$ es sobre y $(h^k)'(x) < 0$ o $(h^k)'(x) > 0$ para todo $x \in I$.

Vamos a probar que se cumple para $n = k + 1$.

Se tiene que $\Lambda_{k+1} \subset \Lambda_k$ ya que si tomamos $x \in \Lambda_{k+1}$, entonces $h^{k+1}(x) \in [0, 1]$ es decir $h(h^k(x)) \in [0, 1]$ de aquí se tiene que $h^k(x) \in [0, 1]$, entonces $x \in \Lambda_k$.

Supongamos que $I = [a, b]$ es uno de los intervalos de Λ_k y además $(h^k)'(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$. también h^k es continua y $h^k([a, b]) = [0, 1]$ es uno a uno y sobre.

Entonces por el Teorema de Valor Intermedio, existen x_1, x_2 tales que

- 1) $a < x_2 < x_3 < b$
- 2) $h^k([a, x_2]) = \left[0, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}\right]$
- 3) $h^k((x_2, x_3)) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}\right)$
- 4) $h^k([x_3, b]) = \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}, 1\right]$

Entonces existen x_2, x_3 entre a y b tales que son las preimágenes de $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}$. Es decir, satisface

$$h^k(x_2) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}, \quad h^k(x_3) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}$$

De la condición (1) implica que $[a, x_2]$ y $[x_3, b]$ son disjuntos, además aplicando h a la condición (2) se tiene

$$\begin{aligned} h(h^k([a, x_2])) &= h([0, x_0]) \\ h^{k+1}([a, x_2]) &= [0, 1] \end{aligned}$$

de igual modo de la condición (3) aplicando h obtenemos

$$h^{k+1}(x) = h(h^k(x)) > 1 \quad \text{para todo } x \in (x_2, x_3)$$

y finalmente de (4) aplicando h tenemos

$$\begin{aligned} h(h^k([x_3, b])) &= h([x_1, 1]) \\ h^{k+1}([x_3, b]) &= [0, 1] \end{aligned}$$

Así de (2) y (4) tenemos la sobreyectividad. Entonces el conjunto de puntos de $[a, b]$ que estan en Λ_{k+1} esta formado por los intervalos cerrados $[a, x_2] \cup [x_2, b]$.

Si $x \in [a, x_2]$, entonces $h^k(x) \in [0, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}]$, además $h'(h^k(x)) > 0$ (ya que $h'(x) > 0$ si $x < \frac{1}{2}$), tambien se tiene, por hipótesis, que $(h^k)'(x) > 0$ para todo $x \in [a, x_2]$, y aplicado la regla de la cadena se obtiene

$$(h^{k+1})'(x) = h'(h^k(x))(h^k)'(x) > 0 \quad \text{para todo } x \in [a, x_2]$$

Entonces $(h^{k+1})'(x)$ es estrictamente creciente en $[a, x_2]$, por tanto es uno a uno.

De manera similar se tiene que $h^{k+1}(x)$ es estrictamente decreciente en $[x_3, b]$, por lo que es uno a uno.

$$h^{k+1} : [a, x_2] \longrightarrow [0, 1] \quad \text{y} \quad h^{k+1} : [x_3, b] \longrightarrow [0, 1].$$

Esto se puede hacer con cada uno de los intervalos cerrados I de Λ_k . Entonces por cada intervalo I de Λ_k se tienen dos intervalos cerrados y disjuntos que están en Λ_{k+1} , por lo tanto, Λ_{k+1} esta formado por $2(2^k) = 2^{k+1}$ intervalos cerrados disjuntos, y en cada intervalo I cerrado de Λ_{k+1} , se cumple que $h^{k+1} : I \longrightarrow [0, 1]$ es uno a uno y sobre

□

Se denotará a la j -ésima componente de Λ_n por $I_{n,j}$. La longitud de cada $I_{n,j}$ sera denotada por $|I_{n,j}|$.

Ejemplo 7. Si $r > 2 + \sqrt{5}$, la función h_r es caótica en Λ : La solución de este ejemplo no es un trabajo fácil de realizar, para llegar a este resultado se necesitan seguir los siguientes pasos:

1. Demostrar que Λ es conjunto de Cantor para $r > 2 + \sqrt{5}$.
2. Construir un conjugado topológico entre la función shift^1 y h_r .

Para este fin definimos un conjunto de Cantor, ya que si $r > 2 + \sqrt{5}$, entonces $\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$ es un conjunto cantor.

¹la función shift definiremos en el capítulo 3

2.1.3. Conjunto de Cantor

Definición 8. Sea un conjunto no vacío $\Gamma \subset \mathbb{R}$ se dice un conjunto de Cantor si.

- a) Γ es compacto (cerrado y acotado)
- b) Γ no contiene intervalos (totalmente desconexos)
- c) Γ es perfecto (cada punto de Γ es un punto de acumulación de Γ .)

Ejemplo 8. Construcción del Conjunto de Cantor Ternario

El conjunto de cantor ternario usualmente está construido como el proceso de iteraciones. Para construir el conjunto de cantor Ternario, empezamos con el intervalo cerrado $[0, 1]$ y eliminamos el intervalo $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$, y obtenemos dos intervalos cerrados $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3}, 1]$. En el segundo paso eliminamos la tercera parte del medio de cada intervalo cerrado, es decir quitamos dos intervalos abiertos $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ y $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ y obtenemos cuatro intervalos cerrados.

En el siguiente paso el proceso es similar, quitamos los intervalos abiertos del centro de cada intervalo cerrado.

Por decir,

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &= [0, 1] \\ \Gamma_1 &= [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1] \\ \Gamma_2 &= [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1],\end{aligned}$$

etcétera.

Así el proceso continua inductivamente eliminando la tercera parte de cada intervalo cerrado. El conjunto de puntos que permanece es llamado el *conjunto de cantor Ternario*. Como podemos ver en la figura.

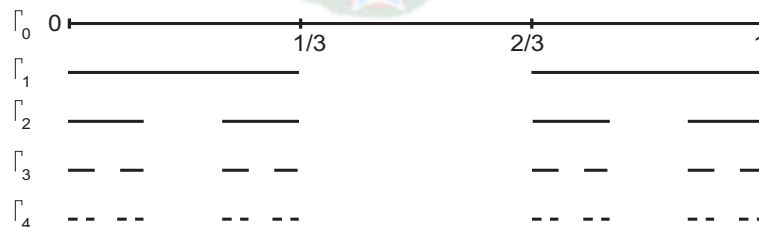


Figura 16. La construcción de los cinco primeros del cantor Ternario.

En el siguiente teorema vamos a probar que el conjunto de puntos que permanece en $[0, 1]$ bajo la iteración de h es un conjunto de Cantor si $r > 2 + \sqrt{5}$. Recordemos que anteriormente habíamos denotado por Λ_n al conjunto de puntos que permanece en $[0, 1]$ bajo la iteración de h . Y el conjunto de puntos que nunca deja $[0, 1]$ es denotado por Λ , esto es $\Lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Lambda_n$.

Ahora, probaremos Λ , es un conjunto de Cantor si $r > 2 + \sqrt{5}$.

Teorema 3. Si $r > 2 + \sqrt{5}$, entonces $\Lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Lambda_n$ es un conjunto cantor.

Prueba. Como 0 es un punto fijo de h es claro que 0 está en Λ . Por tanto Λ es no vacío.

Ahora, para probar que Λ es un conjunto de Cantor, debemos probar lo siguiente.

a) Λ es compacto

En efecto

Ya que $\Lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Lambda_n$ y por la Proposición 5 cada Λ_n es compacto por tanto Λ es compacto.

b) Λ no contiene ningún intervalo.

En efecto

Supongamos que Λ contiene un intervalo, sea $[a, b] \subset \Lambda$. Para cualquier $n \geq 1$, el Teorema del Valor Medio aplicado a h^n en el intervalo $[a, b]$, asegura que existe un punto $c_n \in (a, b)$ tal que

$$h^n(b) - h^n(a) = (h^n)'(c_n)(b - a)$$

Sea $\lambda = h'(x_0)$, además $|h'(x)| \geq \lambda$ para todo $x \in \Lambda_1$. Notemos que,

$$|h'(x_0)| = \sqrt{r^2 - 4r} > 1 \quad \text{para } r > 2 + \sqrt{5}$$

Por lo tanto $\lambda > 1$.

Ya que $c_n \in [a, b] \subset \Lambda$, se tiene,

$$h^i(c_n) \in \Lambda \subset \Lambda_1, \quad \text{para todo } 0 \leq i \leq n - 1.$$

Además $|(h^n)'(c_n)| \geq \lambda^n$, por la regla de la cadena, luego

$$|h^n(b) - h^n(a)| = |(h^n)'(c_n)||b - a| \geq \lambda^n|b - a|.$$

Ya que $\lambda > 1$, esto implica que $|h^n(b) - h^n(a)| > 1$ para toda n suficientemente grande. Pero Λ es invariante, entonces

$$\{h^n(b) - h^n(a)\} \subset \Lambda \subset [0, 1] \quad \text{para toda } n,$$

luego $|h^n(b) - h^n(a)| < 1$, así se tiene una contradicción, entonces Λ no contiene intervalos.

c) Λ es perfecto (cada punto en Λ es un punto de acumulación de Λ)

En efecto primero notemos que para cada n , todo extremo de los intervalos de Λ_n están contenidos en Λ .

Sea $x \in \Lambda$, y para cada n , sea I_{n,j_x} la componente Λ_n que contiene a x .

Si $|I_{n,j_x}| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces los extremos de I_{n,j_x} , están arbitrariamente cercanos a x , así que x esta en la cerradura de $\Lambda - \{x\}$. Por otra parte, si $|I_{n,j_x}|$ no tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$, entonces $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{n,j_x}$ es un intervalo cerrado, y $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{n,j_x} \subset \Lambda$, así que otra vez x esta en la cerradura de $\Lambda - \{x\}$ Esto demuestra que Λ es perfecto.

□

2.2. Caos en Espacios Métricos

En esta sección se verá un ejemplo de funciones caóticas de acuerdo a la definición de Devaney. Para algunos ejemplos es fácil verificar si el sistema dinámico muestra un comportamiento caótico, pero para otros no es tan sencillo mostrar este tipo de comportamiento. Para esto se introducirá el concepto de conjugado topológico.

Una de las propiedades que tiene en común la definición de caos es que la función f sea topológicamente transitiva.

Definición 9. Sea (X, d) un espacio métrico y un sistema dinámico $f : X \rightarrow X$. Se dice que f es topológicamente transitiva si para todo U y V abiertos, existe $n \geq 0$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Intuitivamente, una función topologicamente transitiva tiene puntos que bajo iteraciones se mueven de una vecindad arbitrariamente pequeña a otra. Consecuentemente la dinámica del sistema no puede ser descompuesta en dos conjuntos abiertos disjuntos.

Observación 4. Si f es topológicamente transitiva entonces todo par de subconjuntos abiertos no vacíos de X , comparten una órbita, es decir, dados dos conjuntos abiertos no vacíos $U, V \subset X$ existen $x \in U$ y $n \in \mathbb{N}$ talque $f^n(x) \in V$.

Proposición 6. Sean (X, d) un espacio métrico y una función $f : X \rightarrow X$. Si existe un punto $x_0 \in X$ tal que $\mathcal{O}_f(x_0)$ es densa en X , entonces f es topológicamente transitiva.

Prueba. Sean $U, V \subset X$ abiertos no vacíos. Como $\mathcal{O}_f(x_0)$ es densa en X , existen $r, s \in \mathbb{N}$ tales que $f^r(x_0) \in U$ y $f^s(x_0) \in V$. Sea $b = f^r(x_0)$ y $c = f^s(x_0)$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $k = s - r > 0$. Entonces

$$f^k(b) = f^{s-r}(f^r(x_0)) = f^s(x_0) = c$$

Por tanto, $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. □

Otra de las propiedades que caracteriza a los sistemas dinámicos caóticos, es la dependencia sensible a las condiciones iniciales. Algunos autores consideran que su presencia es lo que define una dinámica realmente complicada o caótica.

Definamos la dependencia sensitiva, la condición de sensibilidad captura la idea que en sistemas caóticos errores pequeños en un experimento pueden llevar a divergencia en gran escala.

Definición 10. Sean (X, d) un espacio métrico y un sistema dinámico $f : X \rightarrow X$. Se dice que f tiene dependencia sensitiva a las condiciones iniciales si existe $\delta > 0$ tal que, para cualquier $x \in X$ y cualquier $\epsilon > 0$, existe $y \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, tal que $d(x, y) \leq \epsilon$ y $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$.

No importa que tan cerca empieza de x en algún momento comienza a alejarse.

Intuitivamente, una función tiene dependencia sensitiva a las condiciones iniciales si existen puntos arbitrariamente cercanos a x los cuales bajo iteraciones de f son separados de x por una distancia mayor a δ (Ver Figura 17). Se debe tener en cuenta que no todos los puntos cercanos a x necesariamente son separados de x bajo iteraciones, pero debe existir al menos un punto en cualquier vecindad de x .

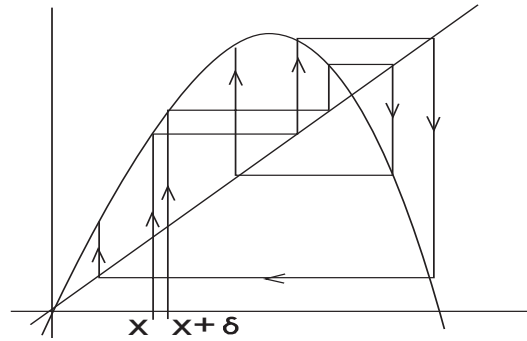


Figura 17.

Además, si una función tiene dependencia sensitiva a las condiciones iniciales, entonces la dinámica de la función no puede estudiarse en base a cálculos numéricos, ya que pequeños errores de cálculo (por ejemplo, los que se cometen por redondeo), pueden ser aumentados bajo iteraciones. Los resultados de los cálculos numéricos de una órbita, no importa que tan precisos sean pueden que no se parezcan a la órbita real.

Ahora introducimos la definición de caos.

Definición 11. (Devaney^a) Sea un espacio métrico (X, d) y $f : X \rightarrow X$ una función continua. Se dice que f es caótica en X si:

- 1) Los puntos periódicos de f son densos en X
- 2) f es topológicamente transitiva y
- 3) f tiene dependencia sensitiva a las condiciones iniciales en X .

^aEsta definición es introducido por R. Devaney

En 1992 Banks, Brooks, Cairns, probaron que la hipótesis de dependencia sensitiva a las condiciones iniciales, no es realmente necesaria ya que esta se deduce de las otras dos condiciones, es decir, basta con que f sea topológicamente transitiva y sus puntos periódicos sean densos en X , para asegurar que f sea caótica en X .

Antes de dar el siguiente teorema 4, denotemos lo siguiente:

Si (X, d) es un espacio métrico y $f : X \rightarrow X$. Una vecindad abierta de un punto $x \in X$ se denota por

$$N_\epsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon, \quad \text{con } \epsilon > 0\}. \quad (2.13)$$

La imagen inversa de un conjunto $C \subset X$ es denotada por

$$f^{-1}(C) = \{x \in X : f(x) \in C\}.$$

De donde

$$f^{-k}(C) = \{x \in X : f^k(x) \in C, k \in \mathbb{N}\}. \quad (2.14)$$

Teorema 4. Teorema de Simplificación. Sean (X, d) un espacio métrico y $f : X \rightarrow X$ una función continua, topológicamente transitiva con puntos periódicos densos en X . Si X contiene un número infinito de elementos, entonces f tiene dependencia sensitiva a las condiciones iniciales en X .

Prueba. Supongamos que f es topológicamente transitiva y sus puntos periódicos son densos en X .

Primero probaremos que existe δ_0 tal que, para todo $x \in X$ existe un punto periódico q , tal que $d(x, f^n(q)) \geq \delta_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sean p, q puntos periódicos con diferentes órbitas. Definimos

$$\delta_0 = \frac{1}{2} \min\{d(f^n(p), f^m(q)) : n, m \in \mathbb{N}\} > 0.$$

Luego,

$$2\delta_0 = \min\{d(f^n(p), f^m(q)) : n, m \in \mathbb{N}\} \leq d(f^n(p), f^m(q)) \quad \text{para todo } n, m \in \mathbb{N}.$$

Por la desigualdad triangular

$$2\delta_0 \leq d(f^n(p), f^m(q)) \leq d(f^n(p), x) + d(x, f^m(q)) \quad \text{para todo } m, n \in \mathbb{N}$$

Entonces, si para algún n ,

$$d(f^n(p), x) < \delta_0 \quad \text{se tiene que } d(x, f^m(q)) > \delta_0 \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}, \quad (2.15)$$

o recíprocamente, si para algún m ,

$$d(x, f^m(q)) < \delta_0 \quad \text{se tiene que } d(f^n(p), x) > \delta_0 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (2.16)$$

Por tanto, cualquier $x \in X$ está al menos a una distancia δ_0 de cualquier punto de la órbita q , o de la órbita de p .

Ahora, probaremos que para todo $x \in X$ y para todo $\epsilon > 0$ existe y tal que

$$d(x, y) < \epsilon \quad \text{y} \quad d(f^n(x), f^n(y)) > \delta \quad \text{para algún } n \in \mathbb{N}. \quad (2.17)$$

Sea $\delta = \frac{1}{4}\delta_0$. Sea $x \in X$ y $0 < \epsilon < \delta$. Como los puntos periódicos de f son densos en X , existe un punto periódico p con primer periodo k , tal que $d(x, p) < \epsilon$. Además, como se vio en (2.15) existe δ_0 y un punto periódico q tal que,

$$\text{para todo } x \in X, \quad d(x, f^m(q)) > \delta_0 \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}. \quad (2.18)$$

Definimos y por (2.14) y (2.13)

$$\begin{aligned} V &= \bigcap_{i=0}^k f^{-i}(N_\delta(f^i(q))) = \bigcap_{i=0}^k \{x : f^i(x) \in N_\delta(f^i(q))\} \\ &= \bigcap_{i=0}^k \{x : d(f^i(x), f^i(q)) < \delta\} \\ &= \{x : d(f^i(x), f^i(q)) < \delta \quad \text{para todo } 0 \leq i \leq k\} \end{aligned}$$

Claramente $q \in V$, por definición de V . Además V es abierto, ya que $f^{-i}(N_\delta(f^i(q)))$ es abierto porque f es continua y $N_\delta(f^i(q))$ es abierto.

Entonces, se tiene que V y $N_\epsilon(x)$ son abiertos y como f es topológicamente transitiva, existe $y \in N_\epsilon(x)$ y $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(y) \in V$.

Sea j el entero que satisface

$$\frac{m}{k} < j \leq \frac{m}{k} + 1, \quad \text{es decir } 0 < kj - m \leq k. \quad (2.19)$$

Hasta el momento se tiene que: $x \in X$, $0 < \epsilon < \delta$, además $x, y, p \in N_\epsilon(x)$, también existe un conjunto V tal que

- $q \in V$.
- Si $z \in V$, y $i \leq k$ entonces $d(f^i(z), f^i(q)) < \delta$.
- $f^m(y) \in V$

Por ultimo, probaremos que

$$d(f^{kj}(p), f^{kj}(x)) > \delta \quad \text{o} \quad d(f^{kj}(x), f^{kj}(y)) > \delta. \quad (2.20)$$

Recordemos que $d(x, y) < \epsilon$ y $d(x, p) < \epsilon$.

Notemos que $f^{kj}(y) = f^{kj-m}(f^m(y))$. Además como $f^m(y) \in V$ y $kj|m \leq k$ entonces

$$d(f^{kj}(y), f^{kj-m}(q)) < \delta$$

Por la desigualdad del triangular se tiene

$$d(x, f^{kj-m}(q)) \leq d(x, p) + d(p, f^{kj}(y)) + d(f^{kj}(y), f^{kj-m}(q)).$$

Como $d(x, p) < \epsilon < \delta$ y $d(f^{kj}(y), f^{kj-m}(q)) < \delta$, entonces

$$d(x, f^{kj-m}(q)) < d(p, f^{kj}(y)) + 2\delta.$$

Además, por (2.18) se tiene que $d(x, f^{kj-m}(q)) > \delta_0 = 4\delta$. Entonces

$$4\delta < d(p, f^{kj}(y)) + 2\delta,$$

luego,

$$2\delta < d(p, f^{kj}(y)).$$

Además, como p es periódico de periodo k , $f^{kj}(p) = p$. Entonces $2\delta < d(f^{kj}(p), f^{kj}(y))$.

Por la desigualdad del triangular

$$2\delta < d(f^{kj}(p), f^{kj}(y)) \leq d(f^{kj}(p), f^{kj}(x)) + d(f^{kj}(x), f^{kj}(y)).$$

Por lo tanto

$$d(f^{kj}(x), f^{kj}(x)) > \delta \quad \text{o} \quad d(f^{kj}(x), f^{kj}(y)) > \delta.$$

Así, se tiene que f tiene dependencia sensitiva a las condiciones iniciales. \square

Dependencia sensitiva a las condiciones iniciales desde un punto de vista experimental, es el elemento central del caos. El teorema anterior asegura que dependencia sensitiva a las condiciones iniciales es un elemento redundante en la Definición 11 ya que éste se

sigue de la transitividad topológica y de la condición de puntos periódicos densos. De acuerdo a como se enumeraron las condiciones en la Definición 11, esto se puede expresar como (1) y (2) implica (3).

2.2.1. Ejemplo de Función Caótica

En esta subsección se verá un ejemplo de función caótica de acuerdo a la definición de Devaney. Para algunos ejemplos es fácil verificar si el sistema dinámico muestra un comportamiento caótico, pero para otros no es tan fácil probar este tipo de comportamiento. Para esto vamos a introducir en la siguiente sección, el concepto de conjugado topológico.

Ejemplo 9. Sea la función cuadrática del ejemplo 3 del capítulo 1, es decir $p : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ definida como $p(e^{it}) = e^{2it}$. Probaremos que es caótica en \mathbb{S}^1 .

1) Primero probaremos que el conjunto de puntos periódicos de p es denso en \mathbb{S}^1 .

Notemos que un punto e^{it} en \mathbb{S}^1 es un punto periódico con período n , si y sólo si,

$p^n(e^{it}) = e^{it}$ o bien $e^{2^n it} = e^{it}$. Esto es verdad si y sólo si $2^n t = t + 2\pi k$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

Despejando t se tiene $t = \frac{2\pi k}{2^n - 1}$.

Por lo tanto un punto e^{it} es periódico de período n si y sólo si $t = \frac{2\pi k}{2^n - 1}$ para $k = 0, 1, \dots, 2^n - 2$. Entonces existen $2^n - 1$ puntos periódicos con período n , mismos que pueden ser escritos como

$$x(k) = e^{i \frac{2\pi k}{2^n - 1}}, \quad 0 \leq k \leq 2^n - 1 \quad (2.21)$$

Notemos que los puntos $x(k)$ son las raíces de la ecuación $z^{2^n - 1} = 1$, en el dominio complejo.

Sea U un arco abierto en \mathbb{S}^1 definida como $U = \{e^{it} : t_1 < t < t_2\}$, como se ve en la Figura 18. Sea $d = \frac{t_1 - t_2}{2}$.

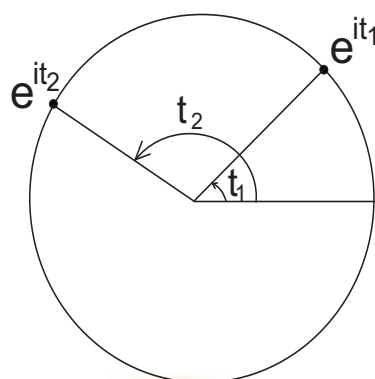


Figura 18. Ángulos consecutivos.

Si $t(k) = e^{i\frac{2\pi k}{2^n-1}}$ y $t(k+1) = e^{i\frac{2\pi(k+1)}{2^n-1}}$ son dos ángulos consecutivos en (2.21), entonces $t(k+1) - t(k) = \frac{2\pi}{2^n-1}$. Escogemos $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\frac{2\pi}{2^n-1} < d$. Entonces existen $k, n \in \mathbb{N}$ tal que $e^{t(k)} = e^{i\frac{2\pi k}{2^n-1}} \in U$. Así, se tiene que los puntos periódicos de p son densos en \mathbb{S}^1 .

2) Ahora, probaremos que p es topológicamente transitiva en \mathbb{S}^1 .

En efecto

Sean U, V dos arcos abiertos en \mathbb{S}^1 , y sea δ la longitud de U . Entonces $p(U)$ tiene longitud 2δ , $p^2(U)$ tiene longitud $2^2\delta$ y así sucesivamente. Entonces $p^k(U) = \mathbb{S}^1$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Por tanto $p^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

Por el **Teorema de Simplificación** se concluye que p tiene dependencia sensitiva a las condiciones iniciales, así que p es caótica en \mathbb{S}^1 .

2.3. Conjugación Topológica

El conjugado topológico es una herramienta que se utiliza para probar de forma indirecta, cuando una función presenta un comportamiento caótico. En esta sección aparte de introducir el concepto de conjugado topológico, se probará que cuando se tienen dos funciones, donde una de ellas es caótica y existe un conjugado topológico entre las dos, se concluye que la otra función también es caótica.

Ahora, empezamos a definir,

$$m_2 : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \quad \text{dada por} \quad m_2(t \bmod 1) = 2t \bmod 1 \quad (2.22)$$

esto es llamado la función *ángulo doble* véase la página 41.

El objetivo de esta sección es relacionar la función cuadrática y el ángulo doble, sabemos que la función cuadrática es caótica entonces por conjugación topológica vamos a concluir que m_2 caótica en \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Para ello empezamos introduciendo el concepto de conjugado topológico.

Definición 12. Sean X, Y espacios métricos, se dice que $\varphi : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo, si es continua, uno a uno, sobre y tiene inversa continua.

Si $\varphi : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo, entonces se dice que X y Y son homeomorfos.

Definición 13. Sean X, Y espacios métricos y sea $f : X \rightarrow X$ y $g : Y \rightarrow Y$. Si existe un homeomorfismo $\tau : X \rightarrow Y$ tal que

$$\tau \circ f = g \circ \tau.$$

Se dice que τ es una conjugación topológica (o conjugado topológico) entre f y g .

Esta relación podemos representar por el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \tau \downarrow & & \downarrow \tau \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Cuando dos funciones de X a Y son topológicamente conjugado, entonces la existencia del homeomorfismo de X en Y , garantiza que la topología de los dos espacios son idénticos. La condición $\tau \circ f = g \circ \tau$ garantiza que las dinámicas de f y g son las mismas.

Observación 5. También se puede decir que τ es un conjugado topológico entre g y f , esto se verá en el siguiente Teorema 5 al demostrar que τ^{-1} es un conjugado topológico.

En lo que sigue se verán algunas propiedades del conjugado topológico.

Teorema 5. Sean $(X, d_1), (Y, d_2)$ espacios métricos, $f : X \rightarrow X, g : Y \rightarrow Y$ y $\tau : X \rightarrow Y$ una conjugación topológica entre f y g , entonces

a) $\tau^{-1} : Y \rightarrow X$ es una conjugación topológica entre g y f .

b) $\tau \circ f^n = g^n \circ \tau$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

c) p es un punto periódico de f si y sólo si $\tau(p)$ es un punto periódico de g . (Además, el primer periodo de p y $\tau(p)$ son iguales.)

- d) Los puntos periódicos de f son densos en X si y sólo si los puntos periódicos de g son densos en Y .
- e) f es topológicamente transitiva en X si y sólo si g es topológicamente transitiva en Y .
- f) f y g son funciones continuas, entonces f es caótica en X si y sólo si g es caótica en Y .

Prueba. a) Se debe ver que $\tau^{-1} \circ g = f \circ \tau^{-1}$. Se sabe que $\tau \circ f(x) = g \circ \tau(x)$ entonces $g(x) = \tau(f(\tau^{-1}(x)))$, luego $\tau^{-1}(g(x)) = f(\tau^{-1}(x))$ por tanto $\tau^{-1} \circ g = f \circ \tau^{-1}$.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & X \\
 \tau \downarrow & & \downarrow \tau \\
 Y & \xrightarrow{g} & Y
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{g} & Y \\
 \tau^{-1} \downarrow & & \downarrow \tau^{-1} \\
 X & \xrightarrow{f} & X
 \end{array}$$

b) La prueba se realizará por inducción.

Para $n = 1$, se cumple que $\tau \circ f = g \circ \tau$.

Supongamos que se cumple para $n = k$, $\tau \circ f^k = g^k \circ \tau$.

Debemos probar que se cumple para $n = k + 1$. Notemos que

$$\tau \circ f^{k+1} = (\tau \circ f^k) \circ f = (g^k \circ \tau) \circ f = g^k \circ (\tau \circ f) = g^k \circ (g \circ \tau) = g^{k+1} \circ \tau.$$

observemos el diagrama siguiente de n -cuadros, donde cada cuadro conmuta.

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & X & \xrightarrow{f} & X & \xrightarrow{f} & \dots & \xrightarrow{f} & X \\
 \tau \downarrow & & \tau \downarrow & & \tau \downarrow & & & & \tau \downarrow \\
 Y & \xrightarrow{g} & Y & \xrightarrow{g} & Y & \xrightarrow{g} & \dots & \xrightarrow{g} & Y
 \end{array}$$

c) Sea p un punto periódico de f con primer período k , es decir, $f^k(p) = p$ y $f^n(p) \neq p$ si $1 \leq n < k$, entonces el siguiente diagrama conmutativo dice que: $g(\tau(p)) = \tau(p)$, así que $\tau(p)$ es un punto periódico de período k de la función g .

$$\begin{array}{ccc}
 p & \xrightarrow{f^k} & p \\
 \tau \downarrow & & \downarrow \tau \\
 \tau(p) & \xrightarrow{g^k} & \tau(p)
 \end{array}$$

Si $1 \leq n < k$, se tiene $g^n(\tau(p)) = \tau(p)$, además como $g^n(\tau(p)) = \tau(f^n(p)) = \tau(p)$, entonces por ser τ inyectiva se cumple $f^n(p) = p$, pero esto no es posible ya que el primer período de p es igual a $k > n$.

Recíprocamente, sea $\tau(p)$ un punto periódico de g con período k , es decir, $g^k(\tau(p)) = \tau(p)$ y $g^n(\tau(p)) \neq \tau(p)$ para $1 \leq n < k$. Entonces, por el siguiente diagrama se tiene que $f^k(p) = p$.

$$\begin{array}{ccc}
 \tau(p) & \xrightarrow{g^k} & \tau(p) \\
 \tau^{-1} \downarrow & & \downarrow \tau^{-1} \\
 p & \xrightarrow{f^k} & f^k(p) = p
 \end{array}$$

Por tanto, p es punto periódico de período k de la función f .

d) Sea P el conjunto de puntos periódicos de g , se demostrará que P es denso en Y . Sea U cualquier subconjunto abierto de Y , entonces $\tau^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto de X el cual debe contener un punto periódico de período k , $x \in \tau^{-1}(U)$. Ya que $x = f^k(x)$ se sigue que

$$\tau(x) = \tau(f^k(x)) = g^k(\tau(x)) \quad \text{por el inciso (b)}$$

así que $\tau(x)$ es un punto periódico de período k de g , por lo tanto P es denso en Y .

Recíprocamente, sea $\tau^{-1}(P)$ el conjunto de puntos periódicos de f , probaremos que $\tau^{-1}(P)$ es denso en X . Sea $\tau^{-1}(U)$ un subconjunto abierto de X , entonces U es un subconjunto abierto de Y el cual debe contener un punto de período k , $x \in U$. Ya que $x = g^k(x)$ se tiene que

$$\tau^{-1}(x) = \tau^{-1}(g^k(x)) = f^k(\tau^{-1}(x)) \quad \text{por los incisos (a) y (b)}$$

así que $\tau^{-1}(x)$ es un punto periódico de período k de f , por tanto $\tau^{-1}(P)$ es denso en X .

e) Debemos probar que g es topológicamente transitiva en Y .

Sean $U, V \subset Y$ abiertos, entonces $\tau^{-1}(U), \tau^{-1}(V)$ son abiertos en X y como f es topológicamente transitiva, entonces existe $y \in \tau^{-1}(U)$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(y) \in \tau^{-1}(V)$.

Sea $x = \tau(y)$, entonces

$$g^n(x) = g^n(\tau(y)) = \tau(f^n(y)) \quad \text{por el inciso (b)}$$

pero $f^n(y) \in \tau^{-1}(V)$, así que $\tau(f^n(y)) \in V$ por tanto $g^n(x) \in V$, es decir, existe $x \in U$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^n(x) \in V$, entonces g es topológicamente transitiva en Y .

Recíprocamente, sean $\tau^{-1}(U), \tau^{-1}(V) \subset X$ abiertos, entonces U, V son abiertos en Y y como g es topológicamente transitiva, existe $y \in U$, $n \in \mathbb{N}$ tales que $g^n(y) \in V$.

Sea $x = \tau^{-1}(y)$, entonces

$$f^n(x) = f^n(\tau^{-1}(y)) = \tau^{-1}(g^n(y)),$$

pero $g^n(y) \in V$, así que $\tau^{-1}(g^n(y)) \in \tau^{-1}(V)$ por tanto $f^n(x) \in \tau^{-1}(V)$, es decir, existe $x \in \tau^{-1}(U)$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in \tau^{-1}(V)$, entonces f es topológicamente transitiva en X .

f) Como f es topológicamente transitiva en X , g es topológicamente transitiva en Y por e). Además los puntos periódicos de f son densos en X así que los puntos periódicos de g son densos en Y por d).

Luego, como g es continua se puede aplicar el **Teorema de simplificación** y se tiene que g tiene dependencia sensitiva a las condiciones iniciales en Y , por lo tanto g es caótica en Y .

Recíprocamente, ya que g es topológicamente transitiva en Y , se tiene que f es topológicamente transitiva en X . Como los puntos periódicos de g son densos en Y , los puntos periódicos de f son densos en X . Como f es continua nuevamente se puede aplicar el **Teorema de simplificación** y se llega a que f tiene dependencia sensitiva a las condiciones iniciales en X , por tanto f es caótica en X . \square

Observación 6. Notemos que para la demostración del Teorema 5 en la implicación directa de los incisos *d)* y *e)*, sólo fue necesario usar el hecho de que τ es sobre, continua y que $\tau(U)$ es abierto en Y para todo U abierto en X , también notemos que no se utilizó la condición de que τ es inyectiva. Esto lleva a introducir un nuevo concepto llamado semiconjugación topológica.

Definición 1. Sean X, Y espacios métricos y sean $f : X \rightarrow X, g : Y \rightarrow Y$. Si existe una función $\tau : X \rightarrow Y$ con $\tau \circ f = g \circ \tau$ tal que τ es sobre, continua y $\tau(U)$ es abierto en Y para todo U abierto en X . Se dice que τ es un semiconjugado topológico entre f y g .

En este caso, ya no se cumple que τ sea un conjugado topológico entre g y f , esto es porque no existe τ^{-1} , ya que τ no es inyectiva.

Corolario 1. Sean X, Y espacios métricos, $f : X \rightarrow X, g : Y \rightarrow Y$ y sea $\tau : X \rightarrow Y$ un semiconjugado topológico entre f y g . Si f es caótica en X , entonces g es caótica en Y .

El resultado es inmediato de la Observación 6.

2.3.1. Ejemplos de Conjugado Topológico

En esta subsección se probará que la familia de funciones logísticas $h_r(x) = rx(1-x)$ es caótica para $r \geq 4$. Primeramente se hará para el caso $r = 4$ usando el concepto de semiconjugado topológico que se definió en la sección anterior y posteriormente, la función cuadrática con ángulo doble y para el caso $r > 2 + \sqrt{5}$ (probaremos en Capítulo 3) utilizaremos para ambos el concepto de conjugado topológico.

Ejemplo 10. La función $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por $h(x) = 4x(1-x)$ es caótica en $[0, 1]$.

En efecto

Sea $\tau : \mathbb{S}^1 \rightarrow [0, 1]$ definida por $\tau(e^{it}) = \text{sen}^2(\frac{t}{2})$. Esta función es un semiconjugado topológico entre h y $p(e^{it}) = e^{2it}$. Para esto notemos que $\tau \circ p = h \circ \tau$,

$$\tau \circ p = \tau(e^{2it}) = \text{sen}^2(\frac{2t}{2}) = \text{sen}^2 t$$

$h \circ \tau = h(\text{sen}^2(\frac{t}{2})) = 4\text{sen}^2(\frac{t}{2})(1 - \text{sen}^2(\frac{t}{2})) = 4\text{sen}^2(\frac{t}{2})\text{cos}^2(\frac{t}{2}) = \text{sen}^2 t$. Denotemos $I = [0, 1]$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{p} & \mathbb{S}^1 \\
 \tau \downarrow & & \downarrow \tau \\
 I & \xrightarrow{h} & I
 \end{array}$$

Así por el Corolario 1 y el Ejemplo 9 se sigue que $h(x) = 4x(1-x)$ es caótica en $[0, 1]$.

Ejemplo 11. Sean las aplicación m_2 en \mathbb{R}/\mathbb{Z} y p en \mathbb{S}^1 son topológicamente conjugados si, existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{S}^1$ tal que $h \circ m_2 = p \circ h$.

En efecto

Antes, definimos una relación de equivalencia:

$$s, t \in \mathbb{R}, \quad s \sim t \text{ si y sólo si } t = s + m \quad (2.23)$$

donde $m \in \mathbb{Z}$, cuya clase de equivalencia es $[t] = \{s \in \mathbb{R} : s \equiv t \pmod{\mathbb{Z}}\}$. Denotamos por $t \pmod{1}$.

Sea $h : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{S}^1$ definida por

$$h(t \pmod{1}) = e^{2\pi i t} \quad (2.24)$$

Notamos que h esta bien definida. Para esto debemos verificar que si $[t] = [s]$ entonces sus imágenes deben ser iguales.

En efecto

$$\begin{aligned}
 \text{si } [t] = [s] &\implies h([t]) = h([s]) \\
 \text{de donde } h([t]) &= e^{2\pi i t} \text{ pero } [t] = [s] \text{ significa por (2.23) } t \sim s \implies t = s + m \\
 &= e^{2\pi i t(s+m)} \\
 &= e^{2\pi i s} e^{2\pi i m} \\
 &= e^{2\pi i s} 1 \\
 &= e^{2\pi i s} \\
 &= h([s])
 \end{aligned}$$

Por tanto h esta bien definida.

Ahora, veamos a continuación que, h es inyectiva.

$$\begin{aligned}
\text{si } h([t]) = h([s]) &\implies e^{2\pi it} = e^{2\pi is} \quad / \cdot e^{-2\pi is} \\
&\implies e^{2\pi it} e^{-2\pi is} = e^{2\pi is} e^{-2\pi is} \\
&\implies e^{2\pi i(t-s)} = e^{2\pi i0} \\
&\implies e^{2\pi i(t-s)} = e^{2\pi im} \\
&\implies 2\pi i(t-s) = 2\pi im \\
&\implies t-s = m \\
&\implies t \sim s \\
&\implies [t] = [s]
\end{aligned}$$

Por tanto h es inyectiva.

Observemos que h es sobreyectiva pues: si $z \in \mathbb{S}^1$, $z = e^{2\pi it}$ para algún $t \in \mathbb{R}$, entonces $h([t]) = e^{2\pi it}$, luego h es sobreyectiva.

La función h es continua pues, $h([t]) = e^{2\pi it} = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ es continua por coordenadas.

Ahora bien, $\pi([0, 1]) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es compacto, h es continua y biyectiva y \mathbb{S}^1 es de Hausdorff entonces h es un homeomorfismo.

El diagrama conmuta pues $h \circ m_2 = p \circ h$,

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}/\mathbb{Z} & \xrightarrow{m_2} & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\
\downarrow h & & \downarrow h \\
\mathbb{S}^1 & \xrightarrow{p} & \mathbb{S}^1
\end{array}$$

$$h(m_2(t \bmod 1)) = h(2t \bmod 1) = e^{2\pi i(2t)}$$

$$p(h(t \bmod 1)) = p(e^{2\pi i(t)}) = e^{2\pi i(2t)}$$

Por tanto h es una conjugación topológica entre p y m_2 , luego por el Teorema 5 parte f), y ejemplo 9 se sigue que m_2 es caótico en \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

Capítulo 3

DINÁMICA SIMBÓLICA

En este capítulo probaremos que la función shift es caótico en el espacio simbólico. Posteriormente, como ejemplo la función logística para el caso $r > 2 + \sqrt{5}$ utilizando el concepto de conjugación topológica, ya que para algunos ejemplos es fácil verificar si el sistema dinámico muestra un comportamiento caótico, pero para otros no es tan fácil probar este tipo de comportamiento, por esa razón se usará el concepto de conjugado topológico.

3.1. Espacio Simbólico

Definición 2. Sea el conjunto $\Sigma_2 = \{(s_0s_1s_2\dots) : s_i = 0 \text{ o } s_i = 1 \text{ para todo } i \geq 0\}$ de toda las sucesiones infinitas de ceros y unos llamado el *espacio simbólico* o el espacio de la sucesión de 0's y 1's

Ahora, dotaremos al espacio simbólico de una estructura métrica.

Definición 14. Sea $d : \Sigma_2 \times \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$, para $s = (s_0s_1s_2\dots)$ y $t = (t_0t_1t_2\dots)$ puntos en Σ_2 .

Como $|s_i - t_i|$, es 0 o 1, $d(s, t)$ está acotada por una serie geométrica,

$$0 \leq d(s, t) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$$

Por tanto $d(s, t)$ es un número que está entre 0 y 2. Ahora, probaremos que d es una métrica.

Proposición 7. d es una métrica en el espacio simbólico.

Prueba. Sean $s = (s_0s_1\dots)$, $t = (t_0t_2\dots)$ y $r = (r_0r_1\dots)$ elementos en Σ_2

(i) $d(s, t) \geq 0$

Sabemos que para todo i , $|s_i - t_i| \geq 0$ en \mathbb{R} , además 2^i es una función exponencial. Por tanto, para todo i $\frac{|s_i - t_i|}{2^i} \geq 0$; así la serie es positiva, luego $d(s, t) \geq 0$.

(ii) $d(s, t) = 0$ si y solo si $s = t$.

$d(s, t) = 0$, como $\frac{|s_i - t_i|}{2^i} \geq 0$ para todo i , entonces $|s_i - t_i| = 0$ para todo i , entonces $s = t$.

Recíprocamente, si $s = t$ entonces $d(s, t) = 0$

(iii) Simetría.

Como $|\cdot|$ es simétrico, $|s_i - t_i| = |t_i - s_i|$ para todo i natural, así se tiene que $d(s, t) = d(t, s)$.

(iv) Desigualdad triangular.

Como $|\cdot|$ es una métrica entonces, $|s_i - r_i| \leq |s_i - t_i| + |t_i - r_i|$ para todo i natural, entonces multiplicamos ambos lados por $\frac{1}{2^i}$ para todo $i \geq 0$ se tiene

$$\frac{|s_i - r_i|}{2^i} \leq \frac{|s_i - t_i|}{2^i} + \frac{|t_i - r_i|}{2^i},$$

entonces $d(s, r) \leq d(s, t) + d(t, r)$

□

Ejemplo 12. Tomemos $(00011010\dots)$ y $(1101001\dots)$ elementos de Σ_2 . Otro tipo de elementos que estan contenidos en Σ_2 , son los de la forma $(0100101010\dots)$ es decir, que sus últimos dígitos se repiten indefinidamente, y se denotarán por $(0100\overline{10}\dots)$

Por ejemplo, la distancia entre $s = (01\overline{1}\dots)$ y $t = (10\overline{1}\dots)$ es:

$$\begin{aligned}
 d(s, t) &= \frac{|s_0 - t_0|}{2^0} + \frac{|s_1 - t_1|}{2^1} + \frac{|s_2 - t_2|}{2^2} + \frac{|s_3 - t_3|}{2^3} + \dots \\
 &= \frac{|0 - 1|}{1} + \frac{|1 - 0|}{2} + \frac{|1 - 1|}{2^2} + \frac{|1 - 1|}{2^3} + \dots \\
 &= 1 + \frac{1}{2} + 0 + 0 + \dots \\
 &= \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

Otro ejemplo, la distancia entre $s = (00000\dots)$ y $t = (11111\dots)$ es:

$$\begin{aligned}
 d(s, t) &= \frac{|s_0 - t_0|}{2^0} + \frac{|s_1 - t_1|}{2^1} + \frac{|s_2 - t_2|}{2^2} + \frac{|s_3 - t_3|}{2^3} + \dots \\
 &= \frac{|0 - 1|}{1} + \frac{|0 - 1|}{2} + \frac{|0 - 1|}{2^2} + \frac{|0 - 1|}{2^3} + \dots \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|0_i - 1_i|}{2^i} \\
 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

Consideremos el siguiente resultado:

Lema 1. Sea s y t elementos en Σ_2 .

a) Si los primeros $n + 1$ dígitos de s y t son iguales, entonces $d(s, t) \leq \frac{1}{2^n}$.

b) Si $d(s, t) \leq \frac{1}{2^n}$, entonces los primeros n dígitos de s y t son iguales para todo $i \leq n$.

Prueba. a). Sean, $s = s_0s_1s_2\dots$ y $t = t_0t_1t_2\dots$ elementos en Σ_2 tales que $s_i = t_i$ para

$i = 0, 1, 2, \dots, n$. Entonces

$$\begin{aligned}
 d(s, t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \\
 &= \sum_{n=0}^n \frac{0}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \\
 &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_{i+n+1} - t_{i+n+1}|}{2^i} \\
 &\leq \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \\
 &= \frac{2}{2^{n+1}} \\
 &= \frac{1}{2^n},
 \end{aligned}$$

así que $d(s, t) \leq \frac{1}{2^n}$.

b) Esta prueba se hará por contradicción.

Supongamos que no se cumple que los primeros n dígitos son iguales; es decir, $s_j \neq t_j$, para algún $j = 0, 1, 2, \dots, n - 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
 d(s, t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \\
 &= \frac{|s_0 - t_0|}{2^0} + \frac{|s_1 - t_1|}{2^1} + \frac{|s_2 - t_2|}{2^2} + \dots + \frac{|s_{j-1} - t_{j-1}|}{2^{j-1}} + \frac{1}{2^j} + \dots \\
 &\geq \frac{1}{2^j} \\
 &> \frac{1}{2^n}, \quad \text{si } n > j.
 \end{aligned}$$

Por tanto $d(s, t) > \frac{1}{2^n}$, lo cual es una contradicción. □

3.2. La Dinámica de la función Shift

En esta sección, vamos a definir la función shift y probaremos la continuidad de este mismo, posteriormente estudiaremos la dinámica de la función shift y concluiremos que este mismo es caótica en el espacio simbólico.

Definición 15. Sea la función $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ definida por $\sigma(s_0s_1s_2\dots) = (s_1s_2\dots)$ esto es llamado la función shift o función desplazamiento.

En otros términos la función shift es como olvidarse del primer dígito de la sucesión, por ejemplo.

$$\sigma(01110101\dots) = (1110101\dots)$$

Proposición 8. La función shift es continua en Σ_2 .

Prueba. Probaremos que existe $\delta > 0$, tal que $d(\sigma(s), \sigma(t)) < \epsilon$, si $d(s, t) < \delta$.

Sea $s \in \Sigma_2$, $\epsilon > 0$, y $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$ y tomemos $\delta = \frac{1}{2^{n+2}}$. Entonces si $d(s, t) < \delta$, los primeros $n + 2$ dígitos de s y t son iguales, por el Lema 1 parte b). Entonces $\sigma(s)$, $\sigma(t)$ tienen los primeros $n + 1$ dígitos iguales. Por tanto $d(\sigma(s), \sigma(t)) \leq \frac{1}{2^n} < \epsilon$. Por tanto σ es continua. \square

Ahora bien, consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 13. Sea, $(0110100\dots)$ es un elemento de Σ_2 , y $\sigma(0110100\dots) = (110100\dots)$. Probaremos cómo son los puntos fijos y puntos periódicos de la función σ .

En efecto

1. Existen dos puntos fijos de σ : las sucesiones constantes $s = (0\bar{0}\dots)$ y $t = (1\bar{1}\dots)$.

Sea $s = (s_0s_1s_2s_3s_4\dots)$ y $\sigma(s) = (s_1s_2s_3s_4\dots)$, si $\sigma(s) = (s)$ entonces

$s_0 = s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = \dots$. Así, se tiene que $s = (s_0s_0s_0s_0\dots)$ de donde s_0 es 0 o 1. Luego, si $s_0 = 0$ entonces $s = (0000\dots)$ y si $s_0 = 1$ entonces $t = (11111\dots)$, también se dice que la función σ es periódico de periodo uno.

2. Puntos periódicos de periodo 2

En efecto

Los puntos periódicos de periodo dos son de la forma:

$$s = (01010101\dots) \text{ o bien}$$

$$t = (10101010\dots)$$

Sea $s = (s_0s_1s_2s_3\dots)$ un punto periódico de periodo dos de σ .

$$\sigma(s) = (s_1s_2s_2s_3\dots)$$

$$\sigma^2(s) = (s_2s_3s_4s_5\dots).$$

Entonces $\sigma^2(s) = s$

$$s_0 = s_2 = s_4 = s_6 = \dots$$

$$s_1 = s_3 = s_5 = s_7 = \dots$$

Así, obtenemos $s = (s_0s_1s_0s_1s_0s_1\dots)$ de donde s_0 es 0 o 1 de manera similar s_1 es 0 o 1, es decir

$$s = (01010101\dots) \quad \text{o}$$

$$t = (10101010\dots).$$

3. Puntos periódicos de periodo k .

Supongamos, que $s = (s_0s_1s_2\dots)$ es un punto periódico de σ de período k . Así, $\sigma^k(s) = s$, entonces $\sigma^n(\sigma^k(s)) = \sigma^n(s)$. Además, $\sigma^{n+k}(s) = (s_{n+k}s_{n+k+1}\dots)$ y $\sigma^n(s) = (s_ns_{n+1}\dots)$, entonces $s_{n+k} = s_n$ para todo $n \geq 1$. De aquí se tiene que, s es un punto periódico de primer período k , si y sólo si s es la sucesión formada repitiendo los primeros k dígitos $(s_0s_1s_2\dots s_{k-1})$. Por lo tanto, los puntos periódicos de período k son de la forma $(\overline{s_0s_1s_2\dots s_{k-1}}\dots)$.

Los puntos eventualmente fijos son de la forma $(s_0s_1s_2\dots s_n\bar{0}\dots)$ y $(s_0s_1s_2\dots s_n\bar{1}\dots)$ para todo $n > 0$.

También existen puntos eventualmente periódicos de período k , los cuales son de la forma $(s_0s_1s_2\dots \overline{s_ns_{n+1}s_{n+2}\dots s_{n+k-1}}\dots)$.

Proposición 9. *La función shift tiene las siguientes propiedades:*

- El conjunto de puntos periódicos de la función shift es denso en Σ_2 .*
- La función shift tiene 2^n puntos periódicos de periodo n .*
- El conjunto de puntos eventualmente periódicos de la función shift es denso en Σ_2 .*

d) Existe un elemento en Σ_2 cuya órbita es densa en Σ_2 es decir, el conjunto $\{s^*, \sigma(s^*), \sigma^2(s^*), \sigma^3(s^*), \dots\}$ es denso en Σ_2 .

Prueba. a) Sea $t \in \Sigma_2$, $t = (t_0 t_1 t_2 \dots t_n \dots)$. Para todo $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$. Tomemos una vecindad de t con radio ϵ , $N_\epsilon(t)$.

Sea $s = (t_0 t_1 t_2 \dots t_n s_{n+1} s_{n+2} \dots)$. Como los primeros $n + 1$ dígitos de s y t son iguales, por el Lema 1 parte (a) se tiene que, $d(s, t) \leq \frac{1}{2^n} < \epsilon$. Esto implica que $s \in N_\epsilon(t)$ y además, por construcción, s es periódico. Por tanto, los puntos periódicos de σ es denso en Σ_2 .

b) Si $s \in \{\text{el conjunto de puntos periódicos de período } n\}$ entonces,

$$s = (\overline{s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1}}),$$

donde, cada s_k con $k = 0, 1, \dots, n - 1$, puede ser 0 o 1. Por tanto, Σ_2 tiene 2^n puntos periódicos de período n .

c) Si $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ es eventualmente periódico de período k , entonces existe N tal que $\sigma^{k+n}(s) = \sigma^k(s)$ para todo $n > N$, es decir, $s = (s_0 s_1 s_2 \dots s_{N-1} s_N s_{N+1} \dots s_{N+k} s_N \dots)$.

Sea $t \in \Sigma_2$, $t = (t_0 t_1 t_2 \dots t_n t_{n+1} \dots t_{n+k} t_{n+1} \dots t_{n+k} t_n \dots)$. Para todo $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$.

Sea $s = (t_0 t_1 t_2 \dots t_n t_{n+1} \dots t_{n+k} t_{n+1} \dots)$, entonces como los primeros $n + 1$ dígitos de s y t son iguales, $d(s, t) < \frac{1}{2^n} < \epsilon$, por tanto, $s \in N_\epsilon(t)$ además s es eventualmente periódico.

d) Consideremos una sucesión s^* que comience con 01, 00, 10, 11, luego se incluyen todos los posibles bloques de 0 y 1 con tres dígitos, luego todos los posibles bloques de 0 y 1 con cuatro dígitos, y así sucesivamente es decir

$$s^* = (01 \ 00 \ 10 \ 11 \ 000 \ 001 \ 010 \ 100 \ 011 \ 101 \ 110 \ 111 \dots).$$

Sea $t \in \Sigma_2$, $t = (t_0 t_1 t_2 \dots)$. Para todo $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, $\frac{1}{2^n} < \epsilon$. Ahora, se construye s de tal forma que los primeros $n + 1$ dígitos sean iguales a los primeros $n + 1$ dígitos de t , después se busca este block de $n + 1$ dígitos en s^* ya que en s^* están todas las posibles combinaciones de 0's y 1's, luego a s se le agregan los dígitos de s^* que siguen después del block, es decir

$$s = (t_0 t_1 t_2 \dots t_n s_i^* s_{i+1}^* \dots). \quad \text{para algún } i \in \mathbb{N}.$$

Entonces $d(s, t) < \frac{1}{c}$. Además existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma^m(s^*) = s$. \square

Ahora bien, podemos probar que la función $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ es caótica en Σ_2 .

Corolario 2. *La función shift σ es caótica en Σ_2 .*

Prueba. Por el inciso d) de la Proposición anterior y por la Proposición 6, σ es topológicamente transitiva. Además, los puntos periódicos de σ son densos en Σ_2 por la Proposición anterior inciso a), por tanto si se aplica el **Teorema de simplificación** se tiene que σ es caótica en Σ_2 . \square

3.2.1. La función Logística es Caótico

El objetivo principal de esta subsección es probar que la función logística es caótica, para esto vamos a usar el concepto de conjugado topológico, como habíamos mencionado al principio del capítulo.

Ahora bien, se construirá un conjugado topológico ψ entre $h_r : \Lambda \rightarrow \Lambda$ con $r > 2 + \sqrt{5}$ y $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$.

Recordemos que

$$I_0 = \left[0, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r} \right], \quad I_1 = \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}, 1 \right],$$

y $\Lambda_1 = I_0 \cup I_1$.

Ya que $\Lambda \subset \Lambda_1$, Λ también está en $I_0 \cup I_1$.

Definición 16. *Sea $\psi : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$, tal que para cada $x \in \Lambda_n$, $\psi(x) = (s_0 s_1 s_2 \dots)$, donde*

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{si } h_r^n(x) \in I_0 \\ 1 & \text{si } h_r^n(x) \in I_1. \end{cases}$$

Entonces $\psi(x) = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ si y solo si $h_r^n(x) \in I_{s_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por ejemplo, si $r = 5$ entonces $h_r^0\left(\frac{\sqrt{5-1}}{2\sqrt{5}}\right) = \frac{\sqrt{5-1}}{2\sqrt{5}}$ que está en I_0 , $h_r^1\left(\frac{\sqrt{5-1}}{2\sqrt{5}}\right) = 1$ está en I_0 para todo $k \geq 2$. Así $\psi(x) = 010000\dots$

Proposición 10. Sea $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma_2$, entonces el conjunto

$$I_{s_0 s_1 s_2 \dots} = \{x : h_r^k(x) \in I_{s_k}, \quad k \leq n\},$$

es uno de los intervalos de Λ_{n+1} , donde $\Lambda_{n+1} = \{x : h_r^{n+1}(x) \in [0, 1]\}$.

Prueba. La prueba se hará por inducción.

Sea $n = 0$,

$$I_0 = \{x : h_r^0(x) \in I_{s_0}\} = \begin{cases} I_0 & \text{si } s_0 = 0 \\ I_1 & \text{si } s_0 = 1 \end{cases}$$

Entonces I_{s_0} es uno de los intervalos de $\Lambda_1 = I_0 \cup I_1$. Supongamos que $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1}}$ es uno de los intervalos de Λ_n .

Se quiere probar que $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$ es uno de los intervalos de Λ_{n+1} .

Notemos que $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} \subset I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1}}$, ya que

$$I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} = \{x : h_r^0(x) \in I_{s_0}\} \cap \{x : h_r^1(x) \in I_{s_1}\} \cap \{x : h_r^2(x) \in I_{s_2}\} \cap \dots \cap \{x : h_r^n(x) \in I_{s_n}\},$$

$$I_{s_0 s_1 \dots s_{n-1}} = \{x : h_r^0(x) \in I_{s_0}\} \cap \{x : h_r^1(x) \in I_{s_1}\} \cap \{x : h_r^2(x) \in I_{s_2}\} \cap \dots \cap \{x : h_r^{n-1}(x) \in I_{s_{n-1}}\}$$

Sea $I_{s_0 s_1 \dots s_{n-1}} = [a, b]$. Entonces, $h_r^n([a, b]) = [0, 1]$, además h_r^n es monótona en $[a, b]$.

Supongamos que h es creciente en $[a, b]$. Luego, aplicando el Teorema del Valor Intermedio, existen c_1, c_2 con $a < c_1 < c_2 < b$, tales que

$$h_r^n(c_1) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r} = x_0, \quad h_r^n(c_2) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r} = x_1$$

Por lo tanto,

$$h_r^n[a, c_1] = \left[0, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}\right] = I_0$$

$$h_r^n[c_2, b] = \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}, 1\right] = I_1 \quad \text{y}$$

$$h_r^n(c_1, c_2) = (x_0, x_1)$$

Por lo tanto, si $s_n = 0$, entonces $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} = [a, c_1]$. Si $s_n = 1$, entonces $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} = [c_2, b]$. Así que $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$ es uno de los intervalos de Λ_{n+1} . \square

Proposición 11. *La función $\psi : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$ dada en la definición 16, es un conjugado topológico. Es decir,*

- a) ψ es inyectiva y sobreyectiva
- b) ψ es continua
- c) ψ^{-1} es continua
- d) $\psi \circ h_r = \sigma \circ \psi$

Prueba. a) Sea $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma_2$, probaremos que $\psi^{-1}(s)$ tiene un solo elemento.

Sea $x \in \psi^{-1}(s)$, entonces $\psi(x) = s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$, por lo tanto $h_r^k(x) \in I_{s_k}$ para $k = 0, 1, 2, \dots$

De aquí se sigue que $x \in I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$ para toda $n = 0, 1, 2, \dots$, entonces $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} = \psi^{-1}(s)$.

Ahora bien, tenemos por demostrar que $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$ contiene un solo elemento.

Supongamos que $x, y \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$ entonces $x, y \in I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$, para toda $n = 0, 1, 2, \dots$

Sea $[a_n, b_n] = I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$, recordemos que $[a_n, b_n]$ es un intervalo del conjunto Λ_{n+1} entonces $x, y \in [a_n, b_n]$ para $n = 0, 1, 2, \dots$ y por la Proposición 14 (dada en Apéndice).

$$0 < |x - y| < (b_n - a_n) < \frac{1}{c\lambda^n} \rightarrow 0, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty,$$

entonces $|x - y| = 0$ por tanto $x = y$.

Ahora, probaremos que $\psi^{-1}(s) = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} \neq \emptyset$, $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} = [a_n, b_n]$ y las sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ satisfacen lo siguiente:

$$a_n \leq a_m \leq b_m, \quad m \geq n,$$

$$a_n \leq b_n \leq b_m, \quad m \leq n.$$

Entonces $a_n \leq b_m$ para todo $n \geq m$.

Sea $a = \sup(a_1 a_2 \dots a_n \dots) \leq b$, entonces $a \leq b_m$, para todo $m \geq 1$ y $a_n \leq a$ para todo $n \geq 1$, por tanto

$$a_n \leq a \leq b_n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

De aquí se tiene que $a \in [a_n, b_n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $a \in \bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n] = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$, por lo tanto

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} = \psi^{-1}(s) \neq \emptyset.$$

b) Sean $x \in \Lambda$, $\epsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$.

Ahora, sean $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_{2n+1}, b_{2n+1}]$ los intervalos de Λ_{n+1} .

Sea $\delta = \frac{1}{2} \min\{|a_i - b_i|\}$ con $i = 1, 2, \dots, 2^{n+1}$ (Notemos que $\delta > 0$ ya que $a_i < b_{i-1}$ para todo i). Luego si $y \in \Lambda$, tal que $|x - y| < \delta$, entonces x, y están en el mismo intervalo de Λ_{n+1} (si no cumple esto, se tiene que $|x - y| > \delta$). Entonces $x, y \in I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$ así, $\psi(x), \psi(y)$ tienen los primeros $n + 1$ dígitos iguales, entonces por el Lema 1 parte a) se tiene que

$$d(\psi(x), \psi(y)) < \frac{1}{2^n} < \epsilon$$

por tanto ψ es continua.

c) Sean $\epsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $\epsilon > \frac{1}{c\lambda^n}$. Sean $x \in \Sigma_2$ y $\delta = \frac{1}{2^n}$, tomemos $y \in \Sigma_2$ tal que $d(x, y) < \delta = \frac{1}{2^n}$. Entonces, por el Lema 1 parte b) se tiene que los primeros n dígitos de x y y son iguales. Así que $\psi^{-1}(x)$ y $\psi^{-1}(y)$ están en el mismo intervalo de Λ_n , aplicando la Proposición 14 (dada en Apéndice) se tiene que

$$d(\psi^{-1}(x), \psi^{-1}(y)) < \frac{1}{c\lambda^n} = \epsilon,$$

por tanto ψ^{-1} es continua.

Ahora, por último veamos si el diagrama conmuta.

d) Debemos verificar que $\psi \circ h_r = \sigma \circ \psi$. Sea $x \in \Lambda$, y $\psi(x) = s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$. Notemos que $\sigma(\psi(x)) = (s_1 s_2 s_3 \dots)$.

Por otra parte x es el único elemento tal que $x = \psi^{-1}(s) = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$. Además,

$$I_{s_0 s_1 s_2 \dots} = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \{x : h_r^k(x) \in I_{s_k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n\}.$$

Sea $y = h_r(x)$. Entonces, notemos que:

$$x \longrightarrow \begin{cases} x & \in I_{s_0} \\ h_r(x) & \in I_{s_1} \\ h_r^2(x) & \in I_{s_2} \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ h_r^n(x) & \in I_{s_n} \end{cases} \quad y = h_r(x) \longrightarrow \begin{cases} y = h_r(x) & \in I_{s_1} \\ h_r(y) = h_r^2(x) & \in I_{s_2} \\ h_r^2(y) = h_r^3(x) & \in I_{s_3} \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ h_r^{n-1}(y) = h_r^n(x) & \in I_{s_n} \\ h_r^n(y) & \in I_{s_{n+1}} \end{cases}$$

por lo tanto $y = h_r(x) = \psi^{-1}(s_1 s_2 s_3 \dots s_n \dots)$, $\psi(h_r(x)) = (s_1 s_2 s_3 \dots s_n)$. \square

Ahora bien, podemos concluir que h_r es caótica en el conjunto de Cantor Λ , puesto que existe una conjugación topológica entre h_r y σ .

Corolario 3. *La función h_r , es caótica en el conjunto de Cantor Λ .*

Prueba. Como se vio en la Proposición 11 anterior, ψ es un conjugado topológico entre h_r y σ , así, por el Teorema 5 inciso *f*), ya que σ es caótica en Σ_2 se tiene que h_r , es caótica en el conjunto de Cantor Λ , para $r > 2 + \sqrt{5}$. \square

Capítulo 4

EL ATRACTOR CAÓTICO SOLENOIDE

Los Solenoides han sido objeto de interés en varias áreas de la matemática, desde los sistemas dinámicos y la geometría algebraica hasta la topología. En este capítulo presentamos una dinámica interesante y complejo de estudiar, puesto que el Solenoide muestra un comportamiento caótico.

4.1. Introducción

En este capítulo estudiaremos un ejemplo de un atractor, llamado el **Solenoide**. Este objeto ya era conocido por topólogos hacia los principios de la década de los 60, pero fue introducido por Smale en el año 1967 como ejemplo de sistemas dinámicos. Más tarde utilizando este objeto como modelo R . Williams desarrolló la teoría de atractores unidimensionales. Entenderemos la construcción del Solenoide, como la intersección infinita de la n ésima iterada del toro, es decir cuando realizamos la iteración infinita de la función (del toro sólido en el toro sólido).

El objetivo principal de este trabajo es dar resultados sobre el estudio de la dinámica caótica, para este desarrollo se procura entender como ejemplos las dinámicas de las funciones cuadrática y ángulo doble puesto que existe un conjugado topológico entre ellos, por tanto ambos son caóticos. Definimos el problema, damos una definición precisa para garantizar la dinámica caótica de la función solenoide en el Solenoide.

4.2. El Solenoide

El objetivo de esta sección es construir el Solenoide, probar sus propiedades topológicas, en particular probaremos que cada disco intersectada con el Solenoide es un conjunto de Cantor.

Denotemos por \mathbb{C} el conjunto de los números complejos y consideremos $D = \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq c\}$ el disco de radio c y $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ el círculo unitario. Luego, el toro sólido es definido como el siguiente producto cartesiano

$$T_c = \mathbb{S}^1 \times D. \quad (4.1)$$

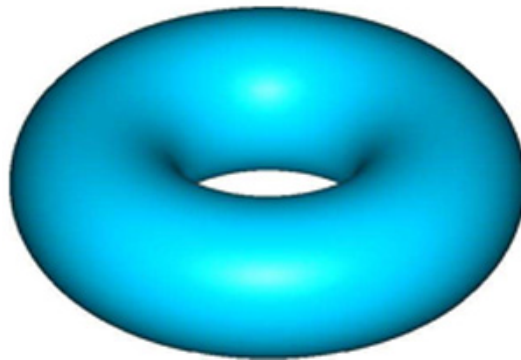


Figura 19. El toro sólido, $T_c = \mathbb{S}^1 \times D$.

Consideremos la subvariedad incrustada $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}$ de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ y definamos la función Solenoide $F : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}$ por

$$F(z, w) = (z^2, z + \lambda w) \quad (4.2)$$

donde λ es una constante compleja con $0 < |\lambda| < 1$.

Es claro que el toro sólido T_c está contenido en $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}$, el siguiente Lema da las condiciones sobre c para que el toro sólido T_c sea invariante bajo la función F , es decir $F(T_c) \subset T_c$, como se muestra en las siguientes figuras.

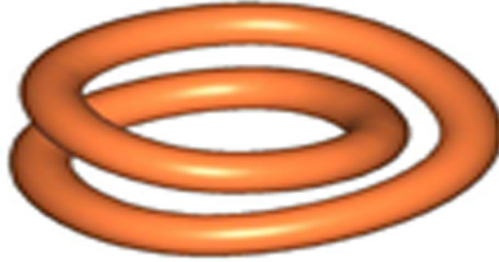


Figura 20. $F(T_c)$, la imagen de T_c

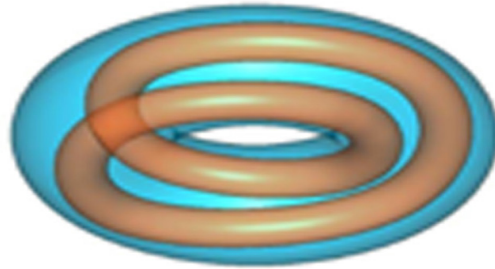


Figura 21. $F(T_c) \subset T_c$.

Lema 2. Sean $c \in \mathbb{R}$, $0 < |\lambda| < 1$ tal que $1 + c|\lambda| < c$ entonces la órbita de cada punto en $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}$ bajo la función Solenoide F eventualmente entra en el toro sólido T_c y además la imagen $F(T_c)$ está contenida estrictamente en el interior de T_c .

Prueba. Empecemos probando que la imagen $F(T_c)$ está contenida estrictamente en el interior de T_c , cuando $1 + c|\lambda| < c$.

En efecto, tomemos $(z, w) \in T_c$, por demostrar que $F(z, w) = (z^2, z + \lambda w) \in \text{Int}(T_c)$. Como $z \in \mathbb{S}^1$, se tiene que $z^2 \in \mathbb{S}^1$, ahora veamos que la segunda coordenada $z + \lambda w$ pertenece al disco D , para esto es suficiente observar que

$$\begin{aligned} |z + \lambda w| &\leq |z| + |\lambda||w| \\ &\leq 1 + |\lambda|c \\ &< c \end{aligned}$$

Por tanto, $F(z, w) \in \text{Int}(T_c)$. De aquí se sigue que, $F(T_c) \subset T_c$ lo cual implica que $F^2(T_c) \subset F(T_c) \subset T_c$, de donde inductivamente se tiene

$$F^n(T_c) \subset F^{n-1}(T_c) \subset \dots \subset F^2(T_c) \subset F(T_c) \subset T_c$$

Por tanto, hemos probado que el toro sólido T_c es invariante bajo F .

A continuación tomemos $(z, w) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C} - T_c$ por demostrar que $F^n(z, w) \in T_c$ para algún $n > 0$.

Sí $(z, w) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C} - T_c$, se sigue que $|w| > c$. Ahora bien, iterando la función F se tiene:

$$\begin{aligned} F(z, w) &= (z^2, z + \lambda w) \\ F^2(z, w) &= F(z^2, z + \lambda w) = (z^{2^2}, \lambda^2 w + \lambda^0 z^2 + \lambda z^1) \\ F^3(z, w) &= F(z^{2^2}, \lambda^2 w + \lambda^0 z^2 + \lambda z^1) = (z^{2^3}, \lambda^3 w + \sum_{k=1}^3 \lambda^{k-1} z^{2^{3-k}}) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ F^n(z, w) &= (z^{2^n}, z^{2^{n-1}} + \lambda z^{2^{n-2}} + \dots + \lambda^{n-1} z + \lambda^n w) \end{aligned}$$

Es decir

$$F^n(z, w) = \left(z^{2^n}, \lambda^n w + \sum_{k=1}^n \lambda^{k-1} z^{2^{n-k}} \right).$$

Observemos que la primera coordenada z^{2^n} está en \mathbb{S}^1 , ahora debemos verificar que para n suficientemente grande la segunda coordenada está en el disco D , esto es consecuencia de los siguientes hechos

$$\begin{aligned}
|\lambda^n w + \sum_{k=1}^n \lambda^{k-1} z^{2^{n-k}}| &\leq |\lambda|^n |w| + \sum_{k=1}^n |\lambda|^{k-1} |z|^{2^{n-k}} \\
&\leq |\lambda|^n c + \sum_{k=1}^n |\lambda|^{k-1} = |\lambda|^n c + \frac{|\lambda|^n - 1}{|\lambda| - 1} \\
&= \frac{|\lambda|^n |\lambda| c - |\lambda|^n c + |\lambda|^n - 1}{|\lambda| - 1} \\
&= |\lambda|^n \left[\frac{|\lambda| c - c + 1}{|\lambda| - 1} \right] + \frac{1}{1 - |\lambda|} \\
&= |\lambda|^n \left[\frac{c(|\lambda| - 1)}{|\lambda| - 1} + \frac{1}{|\lambda| - 1} \right] + \frac{1}{1 - |\lambda|} \\
&= |\lambda|^n \left[c + \frac{1}{|\lambda| - 1} \right] + \frac{1}{1 - |\lambda|}
\end{aligned}$$

Debido a la hipótesis sobre c se tiene, $c + \frac{1}{|\lambda| - 1} > 0$ lo cual implica $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda|^{-n} (c + \frac{1}{|\lambda| - 1}) = \infty$, de aquí se deduce que existe $N > 0$ tales que $c + \frac{1}{|\lambda| - 1} < |\lambda|^{-N} \left[c + \frac{1}{|\lambda| - 1} \right]$, entonces $|\lambda|^N \left[c + \frac{1}{|\lambda| - 1} \right] + \frac{1}{1 - |\lambda|} < c$. De donde se sigue lo afirmado, esto es $F^N(z, w) \in \text{Int}(T_c)$. \square

El segundo iterado del toro sólido $F^2(T_c)$ se muestra en la figura 22. Como puede observarse este está contenido en $F(T_c)$, ver figura 23.

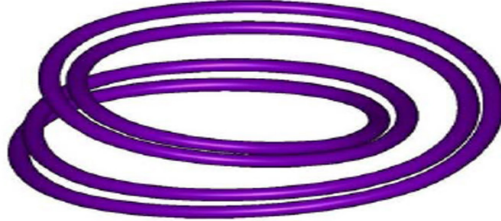


Figura 22. $F^2(T_c)$ la imagen de $F(T_c)$.



Figura 23. $F^2(T_c) \subset F(T_c)$,

Finalmente se tiene que $F^2(T_c) \subset F(T_c) \subset T_c$ como podemos observar en la figura 24,

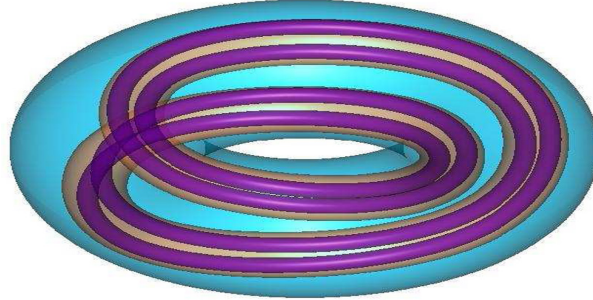


Figura 24. $F^2(T_c) \subset F(T_c) \subset T_c$.

Podemos repetir esta construcción de manera indefinida, es decir, si tenemos construido el n -ésimo iterado del toro sólido $F^n(T_c)$, podemos construir el $n+1$ -ésimo iterado del toro sólido $F^{n+1}(T_c)$, que está contenido en $F^n(T_c)$, y que da dos vueltas dentro de $F^n(T_c)$, obteniendo así una sucesión decreciente de conjuntos compactos; es decir,

$$\dots \subset F^{n+1}(T_c) \subset F^n(T_c) \subset \dots \subset F^4(T_c) \subset F^3(T_c) \subset F^2(T_c) \subset F(T_c) \subset T_c.$$

Consideremos ahora la frontera del toro sólido $\partial T_2 = \mathbb{S}^1 \times \{w : |w| = 2\}$. Este conjunto es una subvariedad de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}$, en efecto, es suficiente observar que \mathbb{S}^1 y $\{w : |w| = 2\}$ son variedades de dimensión 1. Por tanto el producto de dos variedades es una variedad de dimensión 2.

A partir de aquí tomamos $c = 2$ en el Lema 2, y tomamos λ tales que

$$|\lambda| < \frac{1}{2} \tag{4.3}$$

El siguiente resultado muestra la función Solenoide F restringida a la frontera del toro sólido $\partial T_2 = \mathbb{S}^1 \times \{w : |w| = 2\}$ es un difeomorfismo sobre su imagen, la cual es una variedad diferenciable incrustada en el interior del toro sólido T_c .

Teorema 6. Sea $F : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}$ la función solenoide dada por $F(z, w) = (z^2, z + \lambda w)$. Si $|\lambda| < \frac{1}{2}$ entonces

- i) $F(\partial T_2)$ es una subvariedad de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}$ y
- ii) La restricta a la frontera del toro sólido $F^* = F|_{\partial T_2} : \partial T_2 \rightarrow F(\partial T_2)$ es un difeomorfismo.

Prueba. El inciso i) se deduce del hecho de que $F^* = F|_{\partial T_2} : \partial T_2 \longrightarrow F(\partial T_2)$ es una inmersión inyectiva. Para probar esto ultimo consideremos la derivada de F^* ,

$$dF_{(z,w)}^* : T_{(z,w)}\partial T_2 \longrightarrow T_{F(z,w)}Int(T_2)$$

que es dada por

$$dF_{(z,w)}^*(a, b) := \frac{\partial(F_1^*, F_2^*)}{\partial(z, w)} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1^*}{\partial z} & \frac{\partial F_1^*}{\partial w} \\ \frac{\partial F_2^*}{\partial z} & \frac{\partial F_2^*}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

donde $|\lambda| \neq 0$.

Recordemos que una aplicación es una inmersión cuando su derivada es inyectiva. Para probar la inyectividad de la derivada es suficiente resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$dF_{(z,w)}^*(a, b) = \begin{pmatrix} 2z & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

equivalentemente

$$2za + 0b = 0$$

$$a + \lambda b = 0$$

cuya solución es dada por $a = 0$ y $b = 0$. Así el espacio nulo de $dF_{(z,w)}^*$ es el trivial, entonces $dF_{(z,w)}^*$ es inyectiva para todo $(z, w) \in \partial T_2$. Por tanto F^* es una inmersión.

Para verificar la inyectividad de F^* , supongamos que $F^*(z, w) = F^*(z', w')$, para cualesquiera $(z, w), (z', w') \in \partial T_2$, es decir $|z| = |z'| = 1$ y $|w| = |w'| = 2$. De la igualdad $(z^2, z + \lambda w) = (z'^2, z' + \lambda w')$ se deduce que $z^2 = z'^2$ y $z + \lambda w = z' + \lambda w'$. La igualdad $z^2 = z'^2$ implica que $z = z'$ o $z = -z'$.

Afirmamos que $z \neq -z'$, caso contrario $z + \lambda w = -z + \lambda w'$ o $2z = \lambda(w' - w)$. Luego, $|2z| = |\lambda||w' - w| < \frac{1}{2}|w' - w| \leq \frac{1}{2}(4) = 2$, así $|z| < 1$ lo cual es una contradicción.

Ahora bien, sí $z = z'$, entonces $(z, w) = (z', w')$. Por tanto F^* es inyectiva. Luego $F(\partial T_2)$ es una subvariedad inmersa en el interior del toro solido $Int(T_2)$.

Ahora probemos *ii*). Del hecho de que F^* biyectiva, continua, ∂T_2 es compacto de Hausdorff, $F(\partial T_2) \subset Int(T_2)$ es de Hausdorff con la topología inducida de $Int(T_2)$ se sigue que la función $F^* : \partial T_2 \longrightarrow F(\partial T_2) \subset Int(T_2)$ es un homeomorfismo.

Usando las propiedades anteriormente mencionadas de $F^* : \partial T_2 \longrightarrow Int(T_2)$ se concluye que es una incrustación, es decir $F^*(\partial T_2)$ es una subvariedad incrustada en $Int(T_2)$. \square

Ahora, consideremos el disco de radio 2 dado por

$$D = \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq 2\} \quad (4.4)$$

y por simplificación escribamos

$$T = T_2 = \mathbb{S}^1 \times D, \quad (4.5)$$

por el Lema 2 se tiene una sucesión decreciente de compactos,

$$\dots \subset F^n(T) \subset \dots \subset F(T) \subset T.$$

La intersección de toda esta sucesión decreciente de compactos, se define como el Solenoide:

Definición 17. *El conjunto $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} F^n(T)$, recibe el nombre de Solenoide.*

Recordemos las aplicaciones cuadrática y ángulo doble definidas como:

$$p : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1 \quad \text{dada por} \quad p(z) = z^2$$

y

$$m_2 : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \quad \text{definida por} \quad m_2(t \bmod 1) = 2t \bmod 1$$

estas aplicaciones son conjugadas. Por tanto debido a esta conjugación el toro solido T en (4.5) puede escribirse como

$$T = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times D, \quad (4.6)$$

y la función Solenoide

$$F : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C} \quad \text{definida por} \quad F(z, w) = (z^2, z + \lambda w)$$

se puede escribir como, $F : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ definida para cada $(t \bmod 1, w)$ en $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ por

$$F(t \bmod 1, w) = (2t \bmod 1, e^{2\pi it} + \lambda w) \quad (4.7)$$

Ahora bien, consideremos un corte transversal, como vemos en las figura 25 y 26

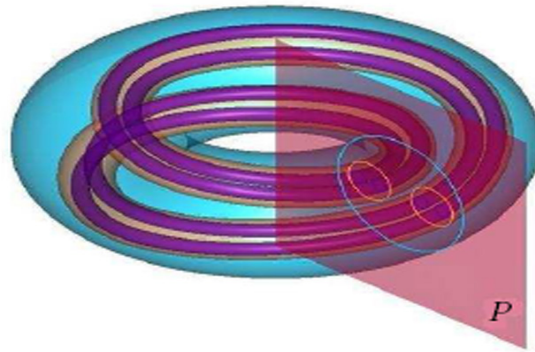


Figura 25. corte transversal P .

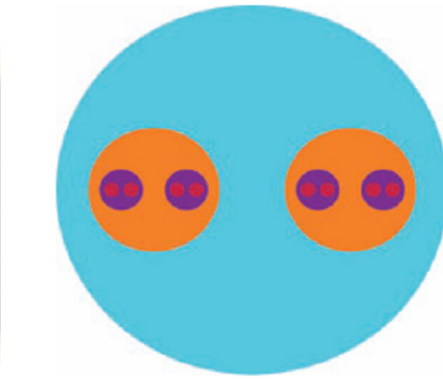


Figura 26. vista en el plano

Definamos el *disco* o una sección del toro T con ángulo fijo t como el siguiente conjunto

$$D(t) = \{t \bmod 1\} \times D \quad (4.8)$$

La función F , es una contracción por un factor de $|\lambda|$ sobre cada disco; y la imagen del disco $D(t)$ esta contenido en el disco $D(2t)$, en efecto:

Lema 3. *La imagen del disco con ángulo fijo t esta contenida en el disco de ángulo $2t$*

Prueba. Debemos probar que, $F(D(t)) \subset D(2t)$. Sea $(t \bmod 1, w)$ un elemento en $F(D(t))$ significa que $(t' \bmod 1, w') \in D(t)$ tales que de la igualdad $F(t' \bmod 1, w') = (t \bmod 1, w)$ se deduce $2t' \bmod 1 = t \bmod 1$ y $e^{2\pi i t'} + \lambda w' = w$, lo que es equivalente $2t' \cong t \bmod 1$ o $t \cong 2t' \bmod 1$.

Aplicamos $|\cdot|$ a la segunda igualdad obtenemos,

$$|e^{2\pi it'} + \lambda w'| \leq |e^{2\pi it'}| + |\lambda||w'| \leq 1 + |\lambda|2 \leq 2$$

Por tanto $|w| \leq 2$. Luego la imagen del disco $D(t)$ esta contenido en el disco $D(2t)$. \square

Veremos a continuación que, la aplicación Solenoide F es contractiva respecto a la segunda coordenada.

Teorema 7. *La función F es una contracción sobre cada disco por un factor de $|\lambda|$, donde F es definida de la forma*

$$F(t \bmod 1, w) = (2t \bmod 1, e^{2\pi it} + \lambda w)$$

Prueba. Debemos verificar lo siguiente,

$$|F(t \bmod 1, w) - F(t \bmod 1, w')| \leq |\lambda||w - w'|$$

para todo $t \bmod 1 \in \{t \bmod 1\}$ y $w, w' \in D$.

En efecto

$$\begin{aligned} F(t, w) - F(t, w') &= [(2t \bmod 1, e^{2\pi it} + \lambda w) - (2t \bmod 1, e^{2\pi it} + \lambda w')] \\ &= [(2t \bmod 1 - 2t \bmod 1), ((e^{2\pi it} + \lambda w) - (e^{2\pi it} + \lambda w'))] \\ &= [0, (e^{2\pi it} - e^{2\pi it} + \lambda w - \lambda w')] \\ &= [0, \lambda(w - w')] \end{aligned}$$

Aplicando $|\cdot|$ tenemos

$$\begin{aligned} |F(t, w) - F(t, w')| &= |0, \lambda(w - w')| \\ &\leq |\lambda||w - w'| \end{aligned}$$

\square

Ahora, definamos la unión de discos como el siguiente conjunto:

$$D([t_1, t_2]) = \bigcup \{D(t) : t \in [t_1, t_2]\} = \bigcup_{t \in [t_1, t_2]} D(t) \quad (4.9)$$

El siguiente Lema 4 nos dice de que los conjuntos

$$F\left(D\left(\frac{t_0}{2} + \frac{0}{2}\right)\right) \quad \text{y} \quad F\left(D\left(\frac{t_0}{2} + \frac{1}{2}\right)\right)$$

son discos disjuntos y ambos contenidos en el disco $D(t_0)$.

Lema 4. Para todo $t \bmod 1 \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ los conjuntos $F\left(D\left(\frac{t_0}{2} + \frac{0}{2}\right)\right)$ y $F\left(D\left(\frac{t_0}{2} + \frac{1}{2}\right)\right)$ son discos disjuntos ambos de radio $2|\lambda|$ y contenidos en $D(t_0)$.

Prueba. Empezamos verificando la siguiente igualdad

$$T \cap F^{-1}(D(t_0)) = D\left(\frac{t_0}{2} + \frac{0}{2}\right) \cup D\left(\frac{t_0}{2} + \frac{1}{2}\right) \quad (4.10)$$

En efecto:

Sea $(t, w) \in (T \cap F^{-1}(D(t_0)))$ entonces $(t, w) \in T$ y $F(t, w) \in D(t_0)$ lo cual implica que $(2t \bmod 1, e^{2\pi it} + \lambda w) \in D(t_0)$, lo que es equivalente $2t \bmod 1 = t_0 \bmod 1$ y $|e^{2\pi it} + \lambda w| \leq 2$, luego $(2t - t_0) \equiv 0 \bmod 1$, de donde $2t - t_0 = m \in \mathbb{Z}$, entonces $t = \frac{t_0}{2} + \frac{m}{2}$.

Así, se tiene $t = \frac{t_0}{2} + \frac{0}{2}$, o bien $t = \frac{t_0}{2} + \frac{1}{2}$, de otro modo $t \bmod 1 = \frac{t_0}{2} \bmod 1$ o $t \bmod 1 = \left(\frac{t_0}{2} + \frac{1}{2}\right) \bmod 1$ y $|w| \leq 2$.

Por tanto, se tiene que $(t, w) \in D\left(\frac{t_0}{2} + \frac{0}{2}\right)$ o $(t, w) \in D\left(\frac{t_0}{2} + \frac{1}{2}\right)$.

Así, tenemos los conjuntos

$$D\left(\frac{t_0}{2} + \frac{0}{2}\right) = \left\{ \left(\frac{t_0}{2} + \frac{0}{2}\right) \bmod 1 \right\} \times D \quad \text{y} \quad D\left(\frac{t_0}{2} + \frac{1}{2}\right) = \left\{ \left(\frac{t_0}{2} + \frac{1}{2}\right) \bmod 1 \right\} \times D.$$

Ahora bien, verifiquemos que la imagen de ambos conjuntos son disjuntos ver figura 27.

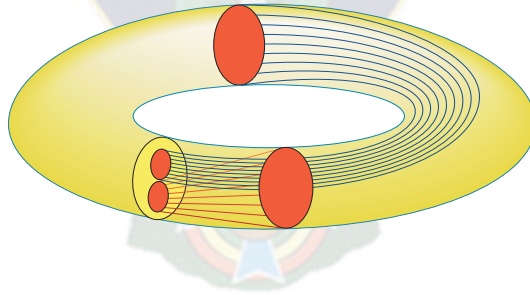


Figura 27. $F\left(D\left(\frac{t_0}{2} + \frac{0}{2}\right)\right) \subset D(t_0)$ y $F\left(D\left(\frac{t_0}{2} + \frac{1}{2}\right)\right) \subset D(t_0)$

En efecto

$$\begin{aligned} F\left(D\left(\frac{t_0}{2} + \frac{0}{2}\right)\right) &= \left\{ \left(2\left(\frac{t_0}{2} + \frac{0}{2}\right) \bmod 1, e^{2\pi i\left(\frac{t_0}{2} + \frac{0}{2}\right)} + \lambda w\right) : |w| \leq 2 \right\} \\ &= \{(t_0 \bmod 1, e^{\pi i t_0} + \lambda w) : |w| \leq 2\} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
F\left(D\left(\frac{t_0}{2} + \frac{1}{2}\right)\right) &= \left\{ \left(2\left(\frac{t_0}{2} + \frac{1}{2}\right) \bmod 1, e^{2\pi i\left(\frac{t_0}{2} + \frac{1}{2}\right)} + \lambda w\right) : |w| \leq 2 \right\} \\
&= \left\{ (t_0 + 1) \bmod 1, e^{\pi i(t_0+1)} + \lambda w : |w| \leq 2 \right\} \\
&= \left\{ t_0 \bmod 1, e^{\pi i t_0} e^{\pi i} + \lambda w : |w| \leq 2 \right\} \\
&= \left\{ t_0 \bmod 1, -e^{\pi i t_0} + \lambda w : |w| \leq 2 \right\}
\end{aligned}$$

Por tanto tenemos $F\left(D\left(\frac{t_0}{2} + \frac{0}{2}\right)\right)$ el disco de centro $e^{\pi i t_0}$ y radio $2|\lambda|$ y $F\left(D\left(\frac{t_0}{2} + \frac{1}{2}\right)\right)$ el disco de centro $-e^{\pi i t_0}$ y radio $2|\lambda|$, sin dificultad podemos determinar el radio de ambos discos.

Calculemos el radio de cada disco. Consideramos una distancia, la imagen del disco inicial y menos el centro de este mismo disco, es decir

$$|e^{\pi i t_0} + \lambda w - e^{\pi i t_0}| = |\lambda w| \leq |\lambda|2$$

y de manera análoga se tiene

$$|-e^{\pi i t_0} + \lambda w + e^{\pi i t_0}| = |\lambda w| \leq |\lambda|2$$

Por tanto el radio de ambos discos son $2|\lambda|$, es más ambos $2|\lambda| < 1$ ya que $|\lambda| < \frac{1}{2}$. Así, son discos disjuntos, pues si determinamos la distancia tomando los centros de cada disco obtenemos una distancia igual a 2 es decir,

$$|e^{\pi i t_0} - (-e^{\pi i t_0})| = |e^{\pi i t_0} + e^{\pi i t_0}| = 2$$

Así, podemos concluir que $2 > 2|\lambda|$ por tanto los discos no pueden intersectarse. \square

Ahora, sea

$$T_k = \bigcap_{j=0}^k F^j(T) = F^k(T) \quad (4.11)$$

Lema 5. *Para todo $t \bmod 1 \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ el conjunto $T_k \cap D(t)$ es la unión de 2^k discos disjuntos de radio $2|\lambda|^k$. En particular*

$$T_k \cap D(t) = F\left(T_{k-1} \cap D\left(\frac{t}{2}\right)\right) \cup F\left(T_{k-1} \cap D\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right)\right)$$

Prueba. Probaremos por inducción matemática.

Para $k = 1$ por (4.10) sabemos que

$$T \cap F^{-1}(D(t)) = D\left(\frac{t}{2}\right) \cup D\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

como F es inyectiva y la unión es disjunta se tiene que

$$F(T \cap F^{-1}(D(t))) = F\left(D\left(\frac{t}{2}\right) \cup D\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right)\right)$$

y por la definición de T_k se tiene

$$T_1 \cap D(t) = F\left(D\left(\frac{t}{2}\right)\right) \cup F\left(D\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right)\right)$$

Por tanto $T_1 \cap D(t)$ es la unión de 2 discos disjuntos de radio $2|\lambda|$.

Ahora, supongamos válido para k y probaremos para $k + 1$, es claro que

$$T_k \cap D(t) = F\left(T_{k-1} \cap D\left(\frac{t}{2}\right)\right) \cup F\left(T_{k-1} \cap D\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right)\right)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} T_{k+1} \cap D(t) &= T_k \cap F^{k+1}(T) \cap D(t) \\ &= T_k \cap D(t) \cap F(F^k(T)) \\ &= \left[F\left(T_{k-1} \cap D\left(\frac{t}{2}\right)\right) \cap F(F^k(T)) \right] \cup \left[F\left(T_{k-1} \cap D\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right)\right) \cap F(F^k(T)) \right] \\ &= F\left(T_{k-1} \cap F^k(T) \cap D\left(\frac{t}{2}\right)\right) \cup F\left(T_{k-1} \cap F^k(T) \cap D\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right)\right) \\ &= F\left(T_k \cap D\left(\frac{t}{2}\right)\right) \cup F\left(T_k \cap D\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

Por tanto, $T_k \cap D\left(\frac{t}{2}\right)$ y $T_k \cap D\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right)$ son cada uno la unión de 2^k discos disjuntos de radio $2|\lambda|^k$. Como F es una contracción sobre cada disco por un factor de $|\lambda|$; se tiene que $F\left(T_k \cap D\left(\frac{t}{2}\right)\right)$ y $F\left(T_k \cap D\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right)\right)$ son cada uno la unión de $2(2^k) = 2^{k+1}$ discos disjuntos de radio $2|\lambda|^{k+1}$, es decir hay $2(2^k) = 2^{k+1}$ en la unión de $T_{k+1} \cap D(t)$ \square

Corolario 4. Para $0 < t_1 < t_2 < 1$ y k entero positivo, $D[t_1, t_2] \cap T_k$ es la unión de 2^k tubos disjuntos dos a dos. En particular

$$T_k \cap D([t_1, t_2]) = F\left(T_{k-1} \cap D\left(\left[\frac{t_1}{2}, \frac{t_2}{2}\right]\right)\right) \cup F\left(T_{k-1} \cap D\left(\left[\frac{t_1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{t_2}{2} + \frac{1}{2}\right]\right)\right)$$

Prueba. La prueba es análogo al Lema 5, sin embargo podemos escribir la prueba del Corolario 4.

Probaremos por inducción matemática.

Para $k = 1$ por (4.10) sabemos que

$$T \cap F^{-1}(D([t_1, t_2])) = D\left(\left[\frac{t_1}{2}, \frac{t_2}{2}\right]\right) \cup D\left(\left[\frac{t_1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{t_2}{2} + \frac{1}{2}\right]\right)$$

como F es inyectiva y la unión es disjunta se tiene que

$$F(T \cap F^{-1}(D([t_1, t_2]))) = F\left(D\left(\left[\frac{t_1}{2}, \frac{t_2}{2}\right]\right) \cup D\left(\left[\frac{t_1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{t_2}{2} + \frac{1}{2}\right]\right)\right)$$

y por la definición de T_k se tiene

$$T_1 \cap D([t_1, t_2]) = F\left(D\left(\left[\frac{t_1}{2}, \frac{t_2}{2}\right]\right)\right) \cup F\left(D\left(\left[\frac{t_1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{t_2}{2} + \frac{1}{2}\right]\right)\right)$$

Por tanto $T_1 \cap D([t_1, t_2])$ es la unión de 2 tubos disjuntos.

Ahora, supongamos válido para k y probaremos para $k + 1$, es claro que

$$T_k \cap D([t_1, t_2]) = F\left(T_{k-1} \cap D\left(\left[\frac{t_1}{2}, \frac{t_2}{2}\right]\right)\right) \cup F\left(T_{k-1} \cap D\left(\left[\frac{t_1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{t_2}{2} + \frac{1}{2}\right]\right)\right)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} T_{k+1} \cap D([t_1, t_2]) &= T_k \cap F^{k+1}(T) \cap D([t_1, t_2]) \\ &= T_k \cap D([t_1, t_2]) \cap F(F^k(T)) \\ &= \left[F\left(T_{k-1} \cap D\left(\left[\frac{t_1}{2}, \frac{t_2}{2}\right]\right)\right) \cap F(F^k(T)) \right] \\ &\cup \left[F\left(T_{k-1} \cap D\left(\left[\frac{t_1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{t_2}{2} + \frac{1}{2}\right]\right)\right) \cap F(F^k(T)) \right] \\ &= F\left(T_{k-1} \cap F^k(T) \cap D\left(\left[\frac{t_1}{2}, \frac{t_2}{2}\right]\right)\right) \\ &\cup F\left(T_{k-1} \cap F^k(T) \cap D\left(\left[\frac{t_1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{t_2}{2} + \frac{1}{2}\right]\right)\right) \\ &= F\left(T_k \cap D\left(\left[\frac{t_1}{2}, \frac{t_2}{2}\right]\right)\right) \cup F\left(T_k \cap D\left(\left[\frac{t_1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{t_2}{2} + \frac{1}{2}\right]\right)\right) \end{aligned}$$

Por tanto, $T_k \cap D\left(\left[\frac{t_1}{2}, \frac{t_2}{2}\right]\right)$ y $T_k \cap D\left(\left[\frac{t_1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{t_2}{2} + \frac{1}{2}\right]\right)$ son cada uno la unión de 2^k tubos disjuntos. Como F es una contracción sobre cada tubo por un factor de $|\lambda|$; se tiene que $F\left(T_k \cap D\left(\left[\frac{t_1}{2}, \frac{t_2}{2}\right]\right)\right)$ y $F\left(T_k \cap D\left(\left[\frac{t_1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{t_2}{2} + \frac{1}{2}\right]\right)\right)$ son cada uno la unión de $2(2^k) = 2^{k+1}$ tubos disjuntos, es decir hay $2(2^k) = 2^{k+1}$ en la union de $T_{k+1} \cap D([t_1, t_2])$ \square

En el siguiente resultado probaremos algunas propiedades topológicas del Solenoide.

Teorema 8. *El Solenoide A tiene las siguientes propiedades topológicas:*

- (a) A es compacto
- (b) A es conexo
- (c) A no es localmente conexo
- (d) A no es conexo por caminos

Prueba. (a) Debemos verificar que A es compacto: Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un cubrimiento abierto de A , esto es $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$. Puesto que $F^n(T)$ es un conjunto compacto para cada n , se sigue que el solenoide A es la intersección de una familia de conjuntos compactos contenida en el abierto $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, esto implica que existe una subfamilia finita $\{F^n(T)\}_{n=1}^k$ tal que

$$A \subset \bigcap_{n=0}^k F^n(T) \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha.$$

Por ser $\bigcap_{n=0}^k F^n(T)$ una intersección finita de compactos es compacto, luego existe una familia finita de abiertos $\{U_\alpha\}_{\alpha=1}^p$ tal que

$$A \subset \bigcap_{n=0}^k F^n(T) \subset \bigcup_{n=1}^p U_{\alpha_n} \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha.$$

(b) Ahora probaremos que A es conexo: Supongamos que no lo fuese es decir $A = U \cup V$ donde U y V son abiertos no vacíos tales que

$$\bar{U} \cap V = \emptyset \quad \text{y} \quad U \cap \bar{V} = \emptyset$$

Sean \tilde{U}, \tilde{V} subconjuntos abiertos tales que

$$U \subset \tilde{U}, \quad V \subset \tilde{V} \quad \text{y} \quad \tilde{U} \cap \tilde{V} = \emptyset.$$

Por tanto $A \subset \tilde{U} \cup \tilde{V}$, luego existe una subfamilia finita $\{F^n(T)\}_{n=1}^m$ tal que

$$A \subset \bigcap_{n=0}^m F^n(T) \subset \tilde{U} \cup \tilde{V}.$$

Ahora bien, la intersección finita de conjuntos conexos es conexa, así $\bigcap_{n=0}^m F^n(T)$ es conexo. Esto no es posible ya que \tilde{U} y \tilde{V} son abiertos tales que $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \emptyset$

c) Dotemos a A de la topología inducida de la de $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$. Tomemos $p \in A$, y U_p una vecindad de p , luego existe un abierto B de $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ tal que $U_p = A \cap B$. Existen $0 < t_1 < t_2 < 1$ y k suficientemente grande tal que

$$D[t_1, t_2] \cap T_k \subset B$$

Por otro lado, del Corolario 4 se sigue que $D[t_1, t_2] \cap T_k$ es la unión de 2^k tubos cerrados disjuntos dos a dos. Ahora bien, cada tubo contiene al menos un abierto de A . Fijemos un tubo de los 2^k tubos y denotemos por V la union de todos los abiertos de A contenidas en este tubo, además sea W la union de todos los abiertos de A contenidas en los 2^{k-1} tubos restantes. Es claro que $U_p = V \cup W$, y como los tubos son disjuntos dos a dos se tiene que $V \cap W = \emptyset$ por tanto U_p es union de dos abiertos disjuntos en A , esto es U_p es desconexo. Lo que muestra que A no es localmente conexo.

d) Ahora probaremos que A no es conexo por caminos. Para esto fijamos

$p = (t_0, z_0) \in A$. Por inducción, para $k \geq 1$ existe un punto $q_k \in A \cap D(t_0)$ tal que

- i) Cualquier camino de p hasta q_k en $T_k = F^k(T)$ debe de rodear \mathbb{S}^1 al menos 2^{k-1} veces. (Esto especifica la componente conexa de $T_k \cap D(t_0)$ en el cual pertenece q_k) y.
- ii) Para $k \geq 2$, q_k y q_{k-1} están en la misma componente conexa de $T_{k-1} \cap D(t_0)$.

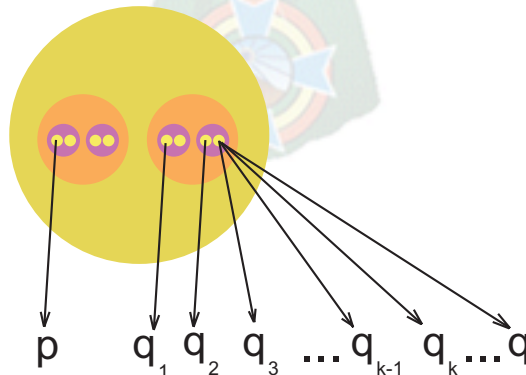


Figura 28.

Por construcción la sucesión $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ es de Cauchy. En efecto del Lema 5 se sigue que

$$|q_k - q_{k-1}| \leq \text{diam}(T_{k-1} \cap D(t_0)) \leq 4|\lambda|^{k-1}$$

Sea q el punto límite de q_k que es un punto de A puesto que A es cerrado. Afirmamos que no existen caminos continuos en A desde p hasta q .

Supongamos que existe un camino continuo $\alpha : [0, 1] \rightarrow A$ tales que $\alpha(0) = p$ hasta $\alpha(1) = q$. Sea $k \geq 1$, existe un punto $q_k \in A \cap D(t_0)$ tal que verifica las propiedades i) y ii) anteriores.

A partir del camino α construimos un camino $\beta : [0, \delta_k] \rightarrow A$ tales que $\beta(t) = \alpha(t)$ cada $t \in (0, \delta_k)$ para algún $\delta_k > 0$ y además $\beta(\delta_k) = q_k$. Luego β es un camino de p hasta q_k en $T_k = F^k(T)$. Aplicando ii) β debe de rodear \mathbb{S}^1 al menos 2^{k-1} veces. Debido a que δ se puede escoger suficientemente pequeño el camino α debe de rodear \mathbb{S}^1 al menos 2^{k-1} veces. Puesto que k es arbitrario se sigue que el camino α debe intersectar $D(t_0)$ infinitas veces, lo cual es una contradicción. En efecto, se sabe la imagen continua de un compacto es compacta, así $\alpha([0, 1])$ es un compacto contenido en A , luego $\alpha([0, 1])$ intersecta a $D(t_0)$ una cantidad finita de veces. Esto prueba que A no es conexo por caminos. \square

Recordemos que A denota el Solenoide, esto es $A = \bigcap_{j=0}^{\infty} F^j(T) = \bigcap_{j=0}^{\infty} T_j$ y Σ_2 denota el espacio simbólico o el espacio de todas las sucesiones infinitas de ceros y unos, esto es

$$\Sigma_2 = \{(s_0 s_1 s_2 s_3 \dots) : s_i = 0 \text{ o } s_i = 1 \text{ para todo } i \geq 0\}$$

De aquí en adelante nuestra meta es probar que $A \cap D(t)$ es un conjunto de Cantor. Para demostrar esto notamos que $A \cap D(t)$ es homeomorfo a Σ_2 como mostraremos a continuación. Empecemos probando el siguiente resultado.

Lema 6. *Para cada $i = 1, 2, 3, \dots$*

$$F^{i+1} \left(D \left(\frac{t}{2^{i+1}} + \frac{a_0}{2^{i+1}} + \frac{a_1}{2^i} + \dots + \frac{a_i}{2} \right) \right) \subset F^i \left(D \left(\frac{t}{2^i} + \frac{a_0}{2^i} + \frac{a_1}{2^{i-1}} + \dots + \frac{a_{i-1}}{2} \right) \right)$$

Prueba. En efecto, probemos que ambas propiedades valen para el caso $i = 1$. Es decir, debemos probar la siguiente inclusion

$$F^2 \left(D \left(\frac{t}{2^2} + \frac{a_0}{2^2} + \frac{a_1}{2} \right) \right) \subset F \left(D \left(\frac{t}{2} + \frac{a_0}{2} \right) \right) \quad (4.12)$$

Tomemos $(t \bmod 1, w) \in F^2 \left(D \left(\frac{t}{2^2} + \frac{a_0}{2^2} + \frac{a_1}{2} \right) \right)$, existe

$$\left(\left(\frac{t}{2^2} + \frac{a_0}{2^2} + \frac{a_1}{2} \right) \bmod 1, w' \right) \in D \left(\frac{t}{2^2} + \frac{a_0}{2^2} + \frac{a_1}{2} \right) \quad (4.13)$$

tales que

$$F^2 \left(\left(\frac{t}{2^2} + \frac{a_0}{2^2} + \frac{a_1}{2} \right) \bmod 1, w' \right) = (t \bmod 1, w).$$

Usando la regla de asignación de la función Solenoide (4.7) a partir de la anterior igualdad obtenemos

$$\begin{aligned} (t \bmod 1, w) &= F \left(F \left(\left(\frac{t}{2^2} + \frac{a_0}{2^2} + \frac{a_1}{2} \right) \bmod 1, w' \right) \right) \\ (t \bmod 1, w) &= F \left(2 \left(\frac{t}{2^2} + \frac{a_0}{2^2} + \frac{a_1}{2} \right) \bmod 1, e^{2\pi i \left(\frac{t}{2^2} + \frac{a_0}{2^2} + \frac{a_1}{2} \right)} + \lambda w' \right) \end{aligned}$$

de aquí

$$F \left(\left(\frac{t}{2} + \frac{a_0}{2} + a_1 \right) \bmod 1, e^{\pi i \left(\frac{t}{2} + \frac{a_0}{2} + a_1 \right)} + \lambda w' \right) = (t \bmod 1, w) \quad (4.14)$$

Observemos que $\left(\frac{t}{2} + \frac{a_0}{2} + a_1 \right) \bmod 1 = \left(\frac{t}{2} + \frac{a_0}{2} \right) \bmod 1$. Por otro lado, puesto que λ verifica (4.3), se tiene que $1 + |\lambda|2 < 2$, luego aplicando módulo a $e^{\pi i \left(\frac{t}{2} + \frac{a_0}{2} + a_1 \right)} + \lambda w'$ obtenemos

$$|e^{\pi i \left(\frac{t}{2} + \frac{a_0}{2} + a_1 \right)} + \lambda w'| \leq 1 + |\lambda|2 < 2$$

Luego (4.4) y (4.8) implican que

$$\left(\left(\frac{t}{2} + \frac{a_0}{2} + a_1 \right) \bmod 1, e^{\pi i \left(\frac{t}{2} + \frac{a_0}{2} + a_1 \right)} + \lambda w' \right) \in D \left(\frac{t}{2} + \frac{a_0}{2} \right)$$

Por tanto lo anterior y (4.14) implican (4.12).

Ahora tomemos $i \geq 2$ y sea $(t \bmod 1, w) \in F^{i+1} \left(D \left(\frac{t}{2^{i+1}} + \frac{a_0}{2^{i+1}} + \frac{a_1}{2^i} + \dots + \frac{a_i}{2} \right) \right)$ entonces existe

$$\left(\left(\frac{t}{2^{i+1}} + \frac{a_0}{2^{i+1}} + \frac{a_1}{2^i} + \dots + \frac{a_i}{2} \right) \bmod 1, w' \right) \in D \left(\frac{t}{2^{i+1}} + \frac{a_0}{2^{i+1}} + \frac{a_1}{2^i} + \dots + \frac{a_i}{2} \right)$$

tales que

$$F^{i+1} \left(\left(\frac{t}{2^{i+1}} + \frac{a_0}{2^{i+1}} + \frac{a_1}{2^i} + \dots + \frac{a_i}{2} \right) \bmod 1, w' \right) = (t \bmod 1, w)$$

de donde

$$F^i \left(F \left(\left(\frac{t}{2^{i+1}} + \frac{a_0}{2^{i+1}} + \frac{a_1}{2^i} + \dots + \frac{a_i}{2} \right) \bmod 1, w' \right) \right) = (t \bmod 1, w) \quad (4.15)$$

Aplicando la regla de asignación de la función Solenoide (4.7) se tiene lo siguiente

$$F^i \left(2 \left(\frac{t}{2^{i+1}} + \frac{a_0}{2^{i+1}} + \frac{a_1}{2^i} + \dots + \frac{a_i}{2} \right) \bmod 1, e^{2\pi i \left(\frac{t}{2^{i+1}} + \frac{a_0}{2^{i+1}} + \frac{a_1}{2^i} + \dots + \frac{a_i}{2} \right)} + \lambda w' \right) = (t \bmod 1, w)$$

es decir

$$F^i \left(\left(\frac{t}{2^i} + \frac{a_0}{2^i} + \frac{a_1}{2^{i-1}} + \dots + \frac{a_{i-1}}{2} + a_i \right) \bmod 1, e^{\pi i \left(\frac{t}{2^i} + \frac{a_0}{2^i} + \frac{a_1}{2^{i-1}} + \dots + a_i \right)} + \lambda w' \right) = (t \bmod 1, w)$$

Notemos que

$$\left(\frac{t}{2^i} + \frac{a_0}{2^i} + \frac{a_1}{2^{i-1}} + \dots + \frac{a_{i-1}}{2} + a_i \right) \bmod 1 = \left(\frac{t}{2^i} + \frac{a_0}{2^i} + \frac{a_1}{2^{i-1}} + \dots + \frac{a_{i-1}}{2} \right) \bmod 1$$

además

$$|e^{\pi i \left(\frac{t}{2^i} + \frac{a_0}{2^i} + \frac{a_1}{2^{i-1}} + \dots + a_i \right)} + \lambda w'| \leq 1 + |\lambda|2 < 2$$

Por tanto

$$\left(\left(\frac{t}{2^i} + \frac{a_0}{2^i} + \frac{a_1}{2^{i-1}} + \dots + a_i \right) \bmod 1, e^{\pi i \left(\frac{t}{2^i} + \frac{a_0}{2^i} + \frac{a_1}{2^{i-1}} + \dots + a_i \right)} + \lambda w' \right) \in D \left(\frac{t}{2^i} + \frac{a_0}{2^i} + \dots + \frac{a_{i-1}}{2} \right)$$

esto y (4.15) prueban la propiedad 1 es decir el Lema 6. □

Lema 7. Para cada $i = 1, 2, 3, \dots$

$$\text{diam} F^{i+1} \left(D \left(\frac{t}{2^{i+1}} + \frac{a_0}{2^{i+1}} + \frac{a_1}{2^i} + \frac{a_2}{2^{i-1}} + \dots + \frac{a_{i-1}}{2^2} + \frac{a_i}{2} \right) \right) \leq 2^2 |\lambda|^{i+1}$$

Prueba. Ahora probaremos la propiedad 2. Esto es, debemos demostrar

$$\text{diam}F^{i+1} \left(D \left(\frac{t}{2^{i+1}} + \frac{a_0}{2^{i+1}} + \frac{a_1}{2^i} + \frac{a_2}{2^{i-1}} + \dots + \frac{a_{i-1}}{2^2} + \frac{a_i}{2} \right) \right) \leq 2^2|\lambda|^{i+1}$$

Empecemos demostrando el caso $i = 1$, es decir

$$\text{diam}F^2 \left(D \left(\frac{t}{2^2} + \frac{a_0}{2^2} + \frac{a_1}{2} \right) \right) \leq 2^2|\lambda|^2$$

para esto es suficiente demostrar la siguiente desigualdad

$$|F^2\left(\left(\frac{t}{2^2} + \frac{a_0}{2^2} + \frac{a_1}{2}\right), w\right) - F^2\left(\left(\frac{t}{2^2} + \frac{a_0}{2^2} + \frac{a_1}{2}\right), w'\right)| \leq 2^2|\lambda|^2$$

$$\begin{aligned} F^2\left(\left(\frac{t}{2^2} + \frac{a_0}{2^2} + \frac{a_1}{2}\right) \bmod 1, w\right) &= F\left(2\left(\frac{t}{2^2} + \frac{a_0}{2^2} + \frac{a_1}{2}\right) \bmod 1, e^{2\pi i\left(\frac{t}{2^2} + \frac{a_0}{2^2} + \frac{a_1}{2}\right)} + \lambda w\right) \\ &= \left(2\left(\frac{t}{2} + \frac{a_0}{2} + a_1\right) \bmod 1, e^{2\pi i\left(\frac{t}{2} + \frac{a_0}{2} + a_1\right)} + \lambda e^{\pi i\left(\frac{t}{2} + \frac{a_0}{2} + a_1\right)} + \lambda^2 w\right) \\ &= \left(\left(t + a_0 + 2a_1\right) \bmod 1, e^{\pi i\left(t + a_0 + 2a_1\right)} + \lambda e^{\pi i\left(\frac{t}{2} + \frac{a_0}{2} + a_1\right)} + \lambda^2 w\right) \\ &= \left(t \bmod 1, e^{\pi i\left(t + a_0 + 2a_1\right)} + \lambda e^{\pi i\left(\frac{t}{2} + \frac{a_0}{2} + a_1\right)} + \lambda^2 w\right) \end{aligned}$$

haciendo operaciones tenemos.

$$F^2\left(\left(\frac{t}{2^2} + \frac{a_0}{2^2} + \frac{a_1}{2}\right), w\right) - F^2\left(\left(\frac{t}{2^2} + \frac{a_0}{2^2} + \frac{a_1}{2}\right), w'\right) = (0, \lambda^2(w - w'))$$

Aplicando $|\cdot|$ se tiene

$$\begin{aligned} |F^2\left(\left(\frac{t}{2^2} + \frac{a_0}{2^2} + \frac{a_1}{2}\right), w\right) - F^2\left(\left(\frac{t}{2^2} + \frac{a_0}{2^2} + \frac{a_1}{2}\right), w'\right)| &= |(0, \lambda^2(w - w'))| \\ &\leq |\lambda|^2|w - w'| \\ &\leq 2^2|\lambda|^2 \end{aligned}$$

Por tanto, $\text{diam}F^2 \left(D \left(\frac{t}{2^2} + \frac{a_0}{2^2} + \frac{a_1}{2} \right) \right) \leq 2^2|\lambda|^2$

Así, de manera similar en general obtenemos:

$$\text{diam}F^{i+1} \left(D \left(\frac{t}{2^{i+1}} + \frac{a_0}{2^{i+1}} + \frac{a_1}{2^i} + \frac{a_2}{2^{i-1}} + \dots + \frac{a_{i-1}}{2^2} + \frac{a_i}{2} \right) \right) \leq 2^2|\lambda|^{i+1} \quad \square$$

Lema 8. Para todo $(a_0 a_2 a_3 a_4 \dots)$ en Σ_2 , el conjunto

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} F^{i+1} \left(D \left(\frac{t}{2^{i+1}} + \frac{a_0}{2^{i+1}} + \frac{a_1}{2^i} + \frac{a_2}{2^{i-1}} + \dots + \frac{a_{i-1}}{2^2} + \frac{a_i}{2} \right) \right)$$

es unitario.

Prueba. Consecuencia inmediata de los lemas (6) y (7)

□

Asociemos ahora a cada elemento $(t \bmod 1, w)$ de $A \cap D(t)$ la siguiente sucesión de ceros y unos $(a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 \dots)$ dado por

$$a_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } F^{-1}(t, w) \in D\left(\frac{t}{2} + \frac{0}{2}\right) \\ 1 & \text{si } F^{-1}(t, w) \in D\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

y para cada $i = 1, 2, 3, 4, \dots$

$$a_i = \begin{cases} 0 & \text{si } F^{-(i+1)}(t, w) \in D\left(\frac{t}{2^{i+1}} + \frac{a_0}{2^{i+1}} + \frac{a_1}{2^i} + \frac{a_2}{2^{i-1}} + \dots + \frac{a_{i-1}}{2^2} + \frac{0}{2}\right) \\ 1 & \text{si } F^{-(i+1)}(t, w) \in D\left(\frac{t}{2^{i+1}} + \frac{a_0}{2^{i+1}} + \frac{a_1}{2^i} + \frac{a_2}{2^{i-1}} + \dots + \frac{a_{i-1}}{2^2} + \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

Observemos las siguientes figuras:

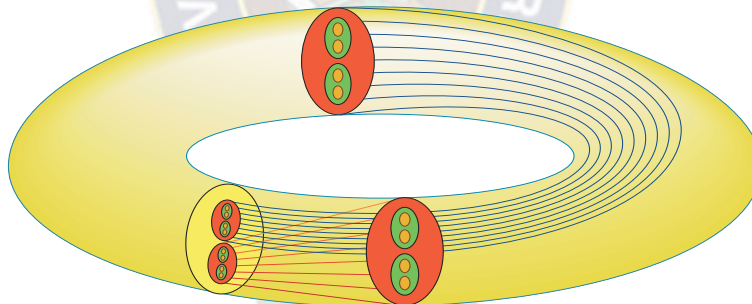


Figura 29. $F(D(\frac{t}{2} + \frac{0}{2})) \subset D(t)$ y $F(D(\frac{t}{2} + \frac{1}{2})) \subset D(t)$

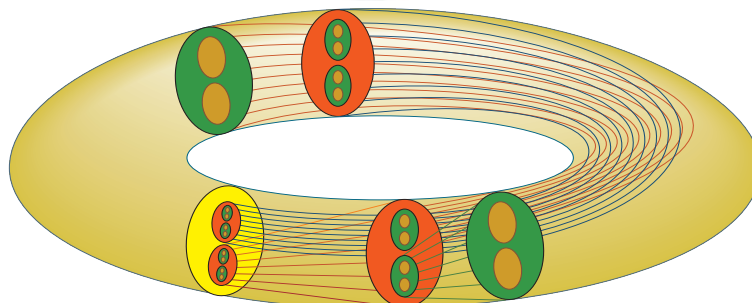


Figura 30. $F\left(D\left(\frac{t}{2^2} + \frac{0}{2^2} + \frac{0}{2}\right)\right) \subset D\left(\frac{t}{2} + \frac{0}{2}\right)$ y $F\left(D\left(\frac{t}{2^2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2}\right)\right) \subset D\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right)$

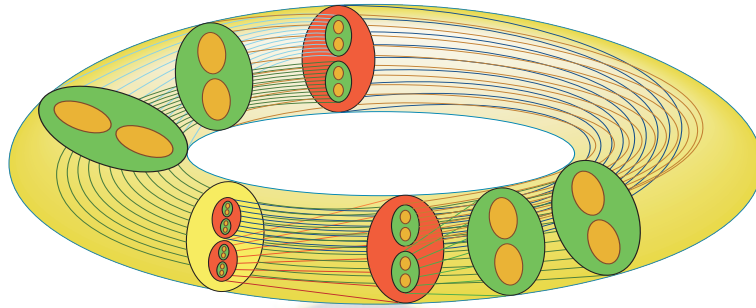


Figura 31. $F\left(D\left(\frac{t}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}\right)\right) \subset D\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right)$ y $F\left(D\left(\frac{t}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2}\right)\right) \subset D\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right)$

Así, podemos seguir dibujando pero esto es un poco complicado seguir. Más bien, consideremos un ejemplo particular.

Ejemplo 14. Tomemos la función definida de la forma $\phi(t, w) = 0100\dots$

Veamos la figura 32:

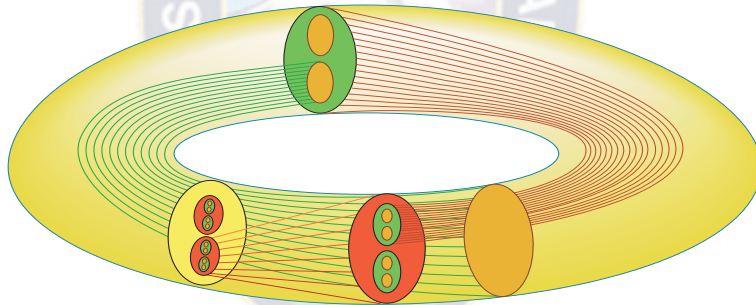


Figura 32. $F^3\left(D\left(\frac{t}{2^3} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2}\right)\right) \subset F^2\left(D\left(\frac{t}{2^2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2}\right)\right) \subset F\left(D\left(\frac{t}{2} + \frac{0}{2}\right)\right) \subset D(t)$.

Teorema 9. La correspondencia $\phi : A \cap D(t) \rightarrow \Sigma_2$ dada por $\phi(t, w) = (a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 \dots)$ está bien definida y es un homeomorfismo de espacios topológicos.

Prueba. La definición de ϕ no es contradictoria resulta inmediatamente del hecho de que F es biyectiva.

El Lema 8 nos permite definir la función $\psi : \Sigma_2 \rightarrow A \cap D(t)$ dada por $\psi(a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 \dots) = (t, w)$ donde (t, w) es el único elemento de la intersección

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} F^{i+1} \left(D \left(\frac{t}{2^{i+1}} + \frac{a_0}{2^{i+1}} + \frac{a_1}{2^i} + \frac{a_2}{2^{i-1}} + \dots + \frac{a_{i-1}}{2^2} + \frac{a_i}{2} \right) \right)$$

Probaremos que ψ es un homeomorfismo cuya inversa es ϕ . Como ψ es una aplicación de un espacio compacto a un espacio Hausdorff, bastará probar que ψ es continua y biyectiva, ya que la continuidad de la inversa se sigue del hecho que las aplicaciones continuas biyectivas de un espacio compacto a un espacio Hausdorff es un homeomorfismo.

Empecemos probando que ψ es biyectiva, para esto probaremos que la función ϕ es su inversa, en efecto, puesto que

$$\begin{aligned}\psi(\phi(t, w)) &= \psi(a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 \dots) = (t, w) = I_{A \cap D(t)} \\ \phi(\psi(a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 \dots)) &= \phi(t, w) = (a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 \dots) = I_{\Sigma_2}\end{aligned}$$

se sigue $\psi \circ \phi = I_{A \cap D(t)}$ y $\phi \circ \psi = I_{\Sigma_2}$. Mostrando así que ψ es inversible por tanto ψ es biyectiva.

Ahora bien, probaremos que ψ es continua. Tomemos $\epsilon > 0$, mostraremos que existe un $\delta > 0$ tales que, si $d(a, b) < \delta$ entonces $|\psi(a) - \psi(b)| < \epsilon$.

Para $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tales que $4|\lambda|^{N+1} < \epsilon$. Definamos

$$\delta = \frac{1}{2^N}. \quad (4.16)$$

Consideremos $a = (a_0 a_1 a_2 \dots)$ y $b = (b_0 b_1 b_2 \dots)$ en Σ_2 de modo que $d(a, b) < \delta$, de la definición 14 se sigue

$$\frac{|a_0 - b_0|}{2^0} + \frac{|a_1 - b_1|}{2} + \frac{|a_2 - b_2|}{2^2} + \dots + \frac{|a_N - b_N|}{2^N} + \dots < \frac{1}{2^N}$$

ahora, el Lema 1 implica

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_N = b_N \quad (4.17)$$

Tomemos (t, w) tales que $\phi(t, w) = (a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 \dots)$, es decir

$$F^{-(i+1)}(t, w) \in D \left(\frac{t}{2^{i+1}} + \frac{a_0}{2^{i+1}} + \frac{a_1}{2^i} + \frac{a_2}{2^{i-1}} + \dots + \frac{a_{i-1}}{2^2} + \frac{a_i}{2} \right) \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots$$

o equivalentemente

$$(t, w) \in \bigcap_{i=0}^{\infty} F^{i+1} \left(D \left(\frac{t}{2^{i+1}} + \frac{a_0}{2^{i+1}} + \frac{a_1}{2^i} + \frac{a_2}{2^{i-1}} + \dots + \frac{a_{i-1}}{2^2} + \frac{a_i}{2} \right) \right)$$

el Lema 8 implica que

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} F^{n+1} \left(D \left(\frac{t}{2^{n+1}} + \frac{a_0}{2^{n+1}} + \dots + \frac{a_n}{2} \right) \right) = \{\psi(a)\}$$

del mismo modo

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} F^{n+1} \left(D \left(\frac{t}{2^{n+1}} + \frac{b_0}{2^{n+1}} + \dots + \frac{b_n}{2} \right) \right) = \{\psi(b)\}$$

Por tanto de la igualdad (4.17) se deduce que

$$\psi(a), \psi(b) \in F^{N+1} \left(D \left(\frac{t}{2^{N+1}} + \frac{b_0}{2^{N+1}} + \dots + \frac{b_N}{2} \right) \right)$$

de donde

$$|\psi(a) - \psi(b)| < \text{diam} F^{N+1} \left(D \left(\frac{t}{2^{N+1}} + \frac{b_0}{2^{N+1}} + \dots + \frac{b_N}{2} \right) \right) = 2^2 |\lambda|^{N+1} < \epsilon$$

□

Como consecuencia del Teorema 9 podemos concluir el siguiente resultado.

Corolario 5. *Para cada punto fijo t , $A \cap D(t)$ es un conjunto de Cantor.*

Prueba. Como ϕ es un homeomorfismo esto por el Teorema 9 anterior, se tiene que $A \cap D(t)$ es un conjunto de Cantor.

□

En la siguiente sección probamos que la dinámica de la aplicación Solenoide restringida al Solenoide es un atractor caótico. Recordemos la definición de un sistema caótico consiste de tres condiciones: Puntos periódicos densos, Transitividad y Sensibilidad a las condiciones iniciales.

Vamos a empezar probando que el Solenoide es un conjunto atractor. Finalmente la función Solenoide restringida al Solenoide A es caótico, para esto es suficiente probar las dos primeras condiciones ya que estas dos implican la tercera condición (esto denominado el Teorema de Simplificación). Los puntos periódicos de la función Solenoide son densos en el atractor y además es topológicamente transitiva. Luego, aplicando el Teorema de Simplificación se tiene que; la función Solenoide es caótica.

4.3. El Solenoide es un Atractor Caótico

En esta sección probaremos que la dinámica de la función Solenoide F restringida al Solenoide es un atractor caótico. La definición de conjunto caótico fue dada en el Capítulo 2. Ahora definamos cuando un conjunto es un atractor.

Definición 18. Sea $f : X \rightarrow X$ un sistema dinámico, $C \subset X$ se dice atractor de f si f deja invariante a C (es decir $f(C) \subset C$) y existe una vecindad abierta V de C tal que $f^n(V) \subset V$ para todo $n > 0$ y

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(V)$$

Ahora bien, probemos que el conjunto Solenoide es invariante bajo F .

Proposición 12. Si A es el Solenoide y $F|_A$ es la restricción de la aplicación Solenoide en A entonces $F(A) = A$

Prueba. Recordemos que $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} F^n(T)$, además F es inyectiva, esto implica

$$\begin{aligned} F(A) &= F\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} F^n(T)\right) \\ &= \bigcap_{n=0}^{\infty} F(F^n(T)) \\ &= \bigcap_{n=0}^{\infty} F^{n+1}(T) \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} F^n(T) \\ &= A \end{aligned}$$

Puesto que la sucesión $\{F^n(T)\}$ es una sucesión de conjuntos encajados se sigue que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F^n(T) = \bigcap_{n=0}^{\infty} F^n(T)$$

Por tanto $F(A) = A$, luego el Solenoide es un conjunto invariante. \square

Ahora, probaremos que el Solenoide es un atractor de F , para este fin afirmamos el Teorema siguiente.

Teorema 10. *El Solenoide es un conjunto atractor de F .*

Prueba. Denotemos por $Int(T)$ el interior del toro solido T . Sea $V = Int(T)$, entonces aplicando F a $V \subset T$ se tiene $F(V) \subset F(T)$ pero $F(T) \subset Int(T)$, entonces $F(V) \subset Int(T)$, pero el interior de T es V . Por tanto $F(V) \subset V$. Así inductivamente se tiene que $F^n(V) \subset V$.

Además, debemos verificar sí $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} F^n(V)$

$$\begin{aligned} \bigcap_{n=1}^{\infty} F^n(V) &\subset \bigcap_{n=1}^{\infty} F^n(Int(T)) \\ &\subset \bigcap_{n=1}^{\infty} F^n(T) \\ &= A \end{aligned}$$

Por tanto $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} F^n(V)$. Luego A es un conjunto atractor de F . □

Nos falta probar que el Solenoide A es caótico según Devaney, para esto debemos verificar que los puntos periódicos de F son densos en A , F restringida a A es topológicamente transitiva y además tiene dependencia sensitiva a las condiciones iniciales. Sin embargo, como fue mostrado en el Teorema 4 del Capítulo 2 es suficiente probar las dos primeras condiciones. Empezamos con el siguiente Lema.

Lema 9. *Consideremos la función ángulo doble $m_2 : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ definida en (2.22). Si t_0 un punto periódico de m_2 de periodo k , entonces*

- (i) $F^k(D(t_0)) \subset D(t_0)$
- (ii) F^k tiene un punto fijo en $D(t_0)$

Prueba. La parte i) es inmediato, pues como $m_2^k(t_0) = t_0$, entonces $F^k(D(t_0)) \subset D(t_0)$

ii) Por el inciso i) el k -ésimo iterado F^k lleva $D(t_0)$ sobre si mismo con un factor de contracción $|\lambda|^k$, como lo mostramos a continuación

$$\begin{aligned} F^k(t_0, w) - F^k(t_0, w') &= (2^k t_0 \text{ mod } 1, e^{2\pi i(2^{k-1} t_0)} + \dots + \lambda^{k-1} e^{2\pi i t_0} + \lambda^k w) \\ &\quad - (2^k t_0 \text{ mod } 1, e^{2\pi i(2^{k-1} t_0)} + \dots + \lambda^{k-1} e^{2\pi i t_0} + \lambda^k w') \\ &= (0, \lambda^k (w - w')) \end{aligned}$$

aplicando $|\cdot|$ se tiene $|F^k(t_0, w) - F^k(t_0, w')| = |(0, \lambda^k(w - w'))| \leq |\lambda|^k |w - w'|$, por tanto

$$|F^k(t_0, w) - F^k(t_0, w')| \leq |\lambda|^k |w - w'|$$

Luego por el teorema del punto fijo de Banach, F^k tiene un único punto fijo en $D(t_0)$. \square

Lema 10. *Sea U abierto no vacío en $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times D$, entonces existen, $k > 0$ y $0 < t_1 < t_2 < 1$ tales que*

$$F^k(D[t_1, t_2]) \subset U.$$

Prueba. Como U es no vacío, existe t_0 número real de modo que

$$U \cap D(t_0) \neq \emptyset, \quad (4.18)$$

luego existe

$$(t_0, z_0) \in U \cap D(t_0) \quad (4.19)$$

Puesto que U es abierto, entonces existe $\epsilon > 0$ tales que

$$B((t_0, z_0), \epsilon) = \{(t, w) : d((t, w), (t_0, z_0)) < \epsilon\} \subset U.$$

Recordemos que $0 < |\lambda| < 1$, luego para $\epsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tales que $2^2 |\lambda|^k < \epsilon$. Del Lema 6 se deduce que

$$F^k \left(D \left(\frac{t_0}{2^k} \right) \right) \subset D(t_0).$$

Además, el Lema 7 implica

$$\text{Diam} \left(F^k \left(D \left(\frac{t_0}{2^k} \right) \right) \right) \leq 2^2 |\lambda|^k.$$

Por tanto, debido a (4.19)

$$F^k \left(D \left(\frac{t_0}{2^k} \right) \right) \subset B((t_0, z_0), \epsilon) \cap D(t_0) \subset U \cap D(t_0) \subset U.$$

Puesto que U es abierto, existe $\delta > 0$, tales que para todo $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ de modo que $U \cap D(t) \neq \emptyset$, procediendo como antes

$$F^k \left(D \left(\frac{t}{2^k} \right) \right) \subset U.$$

así existen $0 < t_0 - \delta < \hat{t}_1 < t_0 < \hat{t}_2 < t_0 + \delta < 1$ tales que

$$F^k \left(D \left(\frac{\hat{t}_1}{2^k}, \frac{\hat{t}_2}{2^k} \right) \right) \subset U.$$

Coloquemos $t_1 = \frac{\hat{t}_1}{2^{k+1}}$, $t_2 = \frac{\hat{t}_2}{2^{k+1}}$, por tanto $F^k(D[t_1, t_2]) \subset U$.

□

Teorema 11. *Sea $F : A \rightarrow A$ la Aplicación Solenoide entonces, los puntos periódicos de F son densos en A .*

Prueba. Simbólicamente debemos probar que

$$\overline{Per(F)} = A$$

de hecho $\overline{Per(F)} \subset A$, falta demostrar $A \subset \overline{Per(F)}$. Para esto tomemos $(t, w) \in A$ y demostremos que $(t, w) \in \overline{Per(F)}$, esto debemos probar que para todo abierto U de (t, w) se tiene que $U \cap Per(F) \neq \emptyset$.

Consideremos U una vecindad de (t, w) en $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times D$, entonces por el Lema 10 existen $n > 0$, y $0 < t_1 < t_2 < 1$ tales que

$$(t, w) \in F^n(D[t_1, t_2]) \subset U.$$

Como los puntos periódicos de m_2 son densos en \mathbb{R}/\mathbb{Z} , existe un punto periódico t_0 de m_2 de periodo k de modo que $0 < t_1 < t_0 < t_2 < 1$. De la parte *ii*) de Lema 9, existe $z \in D$ de modo que (t_0, z) es un punto fijo para el k -ésimo iterado de la aplicación Solenoide F^k , observe que $(t_0, z) \in D(t_0) \subset D([t_1, t_2])$. Por tanto, $F^k(t_0, z) = (t_0, z)$. Sea ahora $p = F^n(t_0, z)$, entonces $p \in U$, pues $p \in F^n(D(t_0))$ y $F^n(D[t_1, t_2]) \subset U$.

Afirmamos que p es un punto periódico de F de periodo k . En efecto

$$F^k(p) = F^k(F^n(t_0, z)) = F^{k+n}(t_0, z) = F^n(F^k(t_0, z)) = F^n(t_0, z) = p$$

Así, $p \in Per(F) \cap U$, luego $Per(F) \cap U \neq \emptyset$ de donde se prueba $(t, w) \in \overline{Per(F)}$.

□

Lema 11. *Sea $m > 0$ y $0 < s_1 < s_2 < 1$. Para todo $n > m$ existen*

$$0 < s_1 < t_1 < t_2 < s_2 < 1$$

tales que

$$F^n(D([t_1, t_2])) \subset F^m(D([s_1, s_2]))$$

Prueba. Sin pérdida de generalidad asumamos que $n > m$, y definamos

$$t_1 = \frac{s_1}{2^{n-m}}, \quad t_2 = \frac{s_2}{2^{n-m}}$$

Entonces

$$\begin{aligned} F^n(D([t_1, t_2])) &= F^n\left(D\left[\frac{s_1}{2^{n-m}}, \frac{s_2}{2^{n-m}}\right]\right) \\ &= F^{m+(n-m)}\left(D\left[\frac{s_1}{2^{n-m}}, \frac{s_2}{2^{n-m}}\right]\right) \\ &= F^m\left(F^{n-m}\left(D\left[\frac{s_1}{2^{n-m}}, \frac{s_2}{2^{n-m}}\right]\right)\right) \\ &\subset F^m(D[s_1, s_2]). \end{aligned}$$

□

Teorema 12. *La Aplicación Solenoide $F : A \rightarrow A$ es topológicamente transitiva en A .*

Prueba. Sean U y V dos subconjuntos abiertos de A , debemos demostrar que existe

$$j \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad F^j(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Como U y V con subconjuntos abiertos de A entonces, existen U' y V' abiertos en $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times D$ tales que $U = U' \cap A$ y $V = V' \cap A$. Por el Lema 10 existen enteros $n, m > 0$ y numeros reales

$$0 < \tilde{t}_1 < \tilde{t}_2 < 1 \quad \text{y} \quad 0 < \tilde{s}_1 < \tilde{s}_2 < 1$$

tales que

$$F^n(D([\tilde{t}_1, \tilde{t}_2])) \subset U' \quad \text{y} \quad F^m(D([\tilde{s}_1, \tilde{s}_2])) \subset V'$$

Ahora tomemos $k > \max\{n, m\}$. Por el Lema 11 existen

$$0 < \tilde{t}_1 < t_1 < t_2 < \tilde{t}_2 < 1 \quad \text{y} \quad 0 < \tilde{s}_1 < s_1 < s_2 < \tilde{s}_2 < 1$$

tales que

$$F^k(D[t_1, t_2]) \subset F^n(D([\tilde{t}_1, \tilde{t}_2])) \subset U' \quad \text{y} \quad F^k(D[s_1, s_2]) \subset F^m(D([\tilde{s}_1, \tilde{s}_2])) \subset V'$$

de donde

$$F^k(D[t_1, t_2]) \cap A \subset U' \cap A \quad \text{y} \quad F^k(D[s_1, s_2]) \cap A \subset V' \cap A$$

luego por la Proposición 12 implica que

$$F^k(D[t_1, t_2] \cap A) \subset U, \quad \text{y} \quad F^k(D[s_1, s_2] \cap A) \subset V \quad (4.20)$$

Por otro lado, puesto que la aplicación ángulo doble m_2 es topológicamente transitiva, existe $j > 0$ tales que

$$m_2^j([t_1, t_2]) \cap [s_1, s_2] \neq \emptyset$$

Por consiguiente

$$F^j(D[t_1, t_2]) \cap D[s_1, s_2] \neq \emptyset$$

entonces

$$F^j(D[t_1, t_2]) \cap D[s_1, s_2] \cap A \neq \emptyset$$

por la invarianza de A (Proposición 12) tenemos

$$F^j(D[t_1, t_2] \cap A) \cap \{D[s_1, s_2] \cap A\} \neq \emptyset$$

aplicando F^k obtenemos

$$F^k(F^j(D[t_1, t_2] \cap A) \cap \{D[s_1, s_2] \cap A\}) \neq \emptyset$$

de donde se sigue que

$$F^j(F^k(D[t_1, t_2] \cap A)) \cap \{F^k(D[s_1, s_2] \cap A)\} \neq \emptyset$$

este hecho mas las inclusiones en (4.20) nos permiten concluir finalmente que

$$F^j(U) \cap V \neq \emptyset$$

Por tanto F en A es topológicamente transitiva en A .

□

Teorema 13. *La aplicación Solenoide $F : A \rightarrow A$ es caótico en A .*

Prueba. Por el teorema 11, 12 y Teorema 4 ya visto en el Capítulo 2, se tiene que F es caótico. □

Apéndice A

Conjunto hiperbolico

Es importante definir un conjunto hiperbólico ya que utilizaremos en la Proposición 11 este resultado.

Definición 19. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 y Ω es un conjunto compacto invariante para f , (es decir $f(\Omega) \subset \Omega$), se dice Ω es un conjunto hiperbólico para f si existen constantes $c > 0$ y $\lambda > 1$ tales que

$$|(f^n)'(x)| \geq c\lambda^n \quad \text{para todo } x \in \Omega \quad \text{y } n \geq 1.$$

Proposición 13. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de C^1 y Ω es un conjunto compacto invariante para f . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Existen constantes $c > 0$ y $\lambda > 1$ tales que $|(f^n)'(x)| \geq c\lambda^n$ para todo $x \in \Omega$ y $n \geq 1$.
2. Existe un entero $N \geq 1$ tal que $|(f^n)'(x)| > 1$ para todo $x \in \Omega$ y $n \geq N$.
3. Existe un entero $n_0 \geq 1$ tal que $|(f^{n_0})'(x)| > 1$ para todo $x \in \Omega$.
4. Para cada $x \in \Omega$ existen enteros $n_x \geq 1$ que dependen de x tales que $|(f^{n_x})'(x)| > 1$.

Observación 7. Si $|f'(x)| > 1$ para toda $x \in \Omega$, entonces las cuatro condiciones de la Proposición son verdaderas.

Prueba. (4) \implies (3) Ya que f esta de C^1 , $(f^n)'$ es continua para cada n . Para cada $x \in \Omega$, $|(f^{n_x})'(x)| > 1$ y $(f^{n_x})'$ es continua, por lo tanto existe una vecindad $N(x)$ y un $\lambda_x > 1$, tal que $|(f^{n_x})'(y)| > \lambda_x$. para toda $y \in N(x)$.

Los conjuntos abiertos $\{x : x \in \Omega\}$ es una cubierta del conjunto compacto Ω , por lo tanto existe una subcubierta finita $\{U_i\}_{i=1}^k$, números $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ todos estrictamente mayores que 1, y enteros $\{n_i\}_{i=1}^k$ tal que $|(f^{n_i})'(y)| > \lambda_i$ para todo $y \in U_i$.

Sean $\nu = \max\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$, $\lambda_0 = \min\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ y $m = \min\{|f'(x)|\}$, entonces $m > 0$ ya que

$$|(f^{n_x})'(x)| = |f'(x)||f'(f(x))|\dots|f'(f^{n-1}(x))|$$

Elegimos un entero k tal que, $\lambda_0 m^\nu > 1$ y sea $n_0 = k\nu + \nu$. Ahora se ha definido la elección de n_0 , se necesita ver que $|(f^{n_0})'(x)| > 1$ para todo $x \in \Omega$.

Escojamos $x \in \Omega$ y se realiza el siguiente proceso de elección que depende de x , para terminar después de un número finito de pasos.

Elegimos ν_1 tal que $x \in U_{\nu_1}$.

Sea la colección $\{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_j\}$.

Sea $\eta = \sum_{i=1}^j \eta_{\nu_i}$.

Tomemos ν_{j+1} tal que $f^\eta(x) \in U_{\nu_{j+1}}$.

Si $\eta + \nu_{j+1} > k\nu$, entonces se detiene el proceso, de otra forma, se sigue eligiendo ν_{j+2} .

Si el proceso de selección se detiene después de j pasos, entonces $k\nu < \sum_{i=1}^j \eta_{\nu_i} \leq k\nu + \nu$.

Escribimos $n_0 = n_{\nu_1} + n_{\nu_2} + \dots + n_{\nu_j} + i_x$, donde $0 \leq i_x \leq \nu$.

Ya que cada $n_{\nu_i} \leq \nu_i$, se sabe que $j \geq k$.

Usando la regla de la cadena, se puede estimar

$$\begin{aligned} |(f^{n_0})'(x)| &= |(f^{i_x}(f^{n_{\nu_j}}(f^{n_{\nu_{j-1}}}\dots f^{n_{\nu_1}})))'(x)| \\ &\geq m^{i_x} \lambda_{\nu_j} \lambda_{\nu_{j-1}} \dots \lambda_{\nu_1} && \text{por las propiedades de la subcubierta } \{U_{i_1}^k\} \\ &\geq m^\nu \lambda_{\nu_j} \lambda_{\nu_{j-1}} \dots \lambda_{\nu_1} && m \leq 1 \text{ y } i_x \leq \nu \\ &\geq m^\nu \lambda_0^j && \text{por la elección de } \lambda_0 \\ &\geq m^\nu \lambda_0^k && m \leq 1 \text{ y } i_x \leq \nu \\ &> 1 && \text{por la elección de } k \end{aligned}$$

Entonces, $|(f^{n_0})'(x)| > 1$ para todo $x \in \Omega$.

(3) \implies (2) Si $n_0 = 1$ en (3), no hay nada que probar, así que, supongamos que $n_0 > 1$.

Sea

$$\lambda = \min_{x \in \Omega} \{|(f^{n_0})'(x)|\} \quad \text{y} \quad m = \min_{x \in \Omega} \{|f'(x)|\}$$

entonces, $\lambda > 1$ y $m > 0$. Ya que se está suponiendo que $n_0 > 1$, se tiene que $m \leq 1$.

Se elige k tal que $m^{n_0-1}\lambda^k > 1$. Sea $N = n_0k + (n_0|1)$. Si $n > N$, se escribe $n = n_0(k + \nu) + i$, donde $\nu > 0$ y $0 < i < n_0|1$. Entonces, para algún $x \in \Omega$ se tiene

$$\begin{aligned} |(f^n)'(x)| &= |(f^{n_0(k+\nu)})'(f^i(x))|(f^i)'(x)| \\ &\geq \lambda^{k+\nu} m^i \\ &\geq \lambda^\nu \lambda^k m^{n_0-1} \quad \text{ya que } m \leq 1 \quad \text{y} \quad i \leq n_0 - 1 \\ &\geq \lambda^\nu \quad \text{por la elección de } k \\ &> 1 \quad \text{ya que } \lambda > 1 \end{aligned}$$

(2) \implies (1) Si $N = 1$ en (2), no hay nada que probar.

Supongamos que $N > 1$. Sea

$$m_1 = \min_{x \in \Omega} \{|(f^N)'(x)|\} \quad \text{y} \quad m = \min_{x \in \Omega} \{|f'(x)|\}$$

de aquí que $m_1 > 1$. Ya que se está suponiendo que $N > 1$, se tiene $m \leq 1$.

Sea

$$\lambda = m_1^{\frac{1}{N}} \quad \text{y} \quad c = \left(\frac{m}{\lambda}\right)^{N-1},$$

así que $\lambda > 1$ y $c > 0$. Para cualquier $n > 0$ se escribe $n = kN + i$, donde $k \geq 0$ y $0 \leq i \leq N - 1$.

Entonces para cualquier $x \in \Omega$ se tiene

$$\begin{aligned}
|(f^n)'(x)| &= |(f^{kN})'(f^i(x))|(f^i)'(x)| \\
&\geq m_1^k m^i \\
&\geq \lambda^{kN} m^i \quad \text{por la elección de } \lambda \\
&\geq \lambda^{kN} \lambda^i \left(\frac{m}{\lambda}\right)^i \\
&> \lambda^{kN+i} \left(\frac{m}{\lambda}\right)^{N-1} \quad \text{ya que } \frac{m}{\lambda} < 1 \quad \text{y } i \leq N-1. \\
&= c\lambda^n \quad \text{por la elección de } c.
\end{aligned}$$

(1) \implies (4) Se elige n suficientemente grande tal que $c\lambda^n > 1$. Entonces se tiene $|(f^n)'(x)| \geq c\lambda^n > 1$. Ahora, sea $n_x = n$ para todo $x \in \Omega$. \square

Proposición 14. Sea $h_r : \Lambda \longrightarrow \Lambda$ si $r > 4$, entonces la longitud de cada intervalo $I_{n,j}$ es menor que $\frac{1}{c\lambda^n}$.

Prueba. Sea $x \in \Lambda_n \subset \Lambda$, ya que Λ es un conjunto hiperbólico, por la Proposición 13 existen $c > 0$ y $\lambda > 1$ tales que

$$|(h_r^n)'(x)| \geq c\lambda^n \quad \text{para toda } n \geq 1.$$

Luego, si $x \in \Lambda_n$, entonces $(h_r^k)'(x) \geq c\lambda^n$. Ahora, sean a, b los extremos de un intervalo de Λ_n es decir $I_{n,j} = [a, b] \subset \Lambda_n$, aplicando el Teorema del Valor Medio a h_r^n en $[a, b]$, se tiene que existe p tal que

$$h_r^n(a) - h_r^n(b) = (h_r^n)'(p)(b - a) \quad \text{con } p \in [a, b] \subset \Lambda_n.$$

así

$$|h_r^n(a) - h_r^n(b)| = |(h_r^n)'(p)|(b - a) \geq c\lambda^n |b - a|$$

además se sabe que $|h_r^n(a) - h_r^n(b)| \leq 1$, por tanto

$$c\lambda^n |b - a| \leq 1$$

así que $|b - a| \leq \frac{1}{c\lambda^n}$ \square

Apéndice B

Variedades diferenciales

Existen diversas formas de introducir la noción de variedad diferenciable, muchas de las cuales parten de la idea de espacio topológico o variedad topológica. Nosotros preferimos introducir las estructuras diferenciables sobre un conjunto sin ninguna otra estructura adicional, tal y como se hace en los textos de Do Carmo y otros.

Definición 20. *Una variedad topológica n -dimensional M es un espacio topológico Hausdorff, (Si cualquier par de puntos distintos admiten entornos disjuntos), segundo contable (con una base numerable de abiertos), localmente euclidiano (para todo $p \in M$ existe un U abierto de p en M y $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ es un homeomorfismo).*

Definición 21. *Una carta o un sistema de coordenadas n -dimensional M es una par (U, φ) donde $U \subset M$ es un conjunto abierto y $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un homeomorfismo de U sobre el subconjunto abierto $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$.*

Ejemplo 15. 1. $M = \mathbb{R}^m$ y $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por $\varphi = Id$, es claro que (\mathbb{R}^m, φ) es una carta m -dimensional en \mathbb{R}^m . En este caso, las coordenadas son las usuales de \mathbb{R}^m .

2. Sea \mathbb{C} el cuerpo de los números complejos, $z = x + iy$, donde $x, y \in \mathbb{R}$. Podemos identificar \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 , mediante la biyección $z = x + iy \longleftrightarrow (x, y)$. Sea $\mathbb{C}^n = \mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C}$, el producto cartesiano de n copias de \mathbb{C} . Sea $\varphi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ dada por $\varphi(x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n) = (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$, entonces (\mathbb{C}^n, φ) es una carta $2n$ -dimensional en \mathbb{C}^n .

3. Sea $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ el círculo unitario.

Consideremos los siguientes subconjuntos de \mathbb{S}^1 :

$$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : -1 < x < 1, y > 0\}$$

$$U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : -1 < x < 1, y < 0\}$$

$$U_3 = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : -1 < y < 1, x > 0\}$$

$$U_4 = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : -1 < y < 1, x < 0\}$$

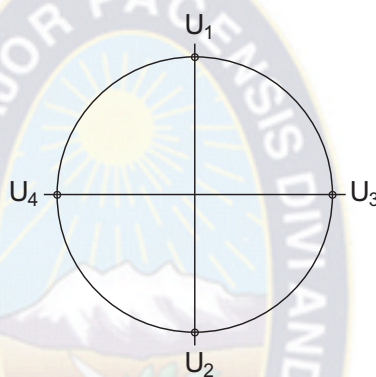


Figura 33.

y definamos las siguientes funciones:

$$\varphi_1 : U_1 \longrightarrow (-1, 1) \subset \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x, y) = x$$

$$\varphi_3 : U_3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_3(x, y) = y$$

$$\varphi_2 : U_2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_2(x, y) = x$$

$$\varphi_4 : U_4 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_4(x, y) = y$$

Es decir la cartas son; (φ_1, U_1) , (φ_3, U_3) , (φ_2, U_2) y (φ_4, U_4) .

Definición 22. Un conjunto de cartas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in I\}$ se denomina un atlas tales que si

$$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$$

Ejemplo 16. 1. $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^m, Id)\}$ es un atlas m -dimensional de clase C^∞ en \mathbb{R}^m .

2. $\mathcal{A} = \{(\mathbb{C}^n, \varphi)\}$ es un atlas $2n$ -dimensional de clase C^∞ en \mathbb{C}^n .

3. En el círculo unitario \mathbb{S}^1 ; $\mathcal{A} = \{(\varphi_1, U_1), (\varphi_3, U_3), (\varphi_2, U_2), (\varphi_4, U_4)\}$ es un atlas 1-dimensional de clase C^∞ en \mathbb{R} tales que

$$U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4 = \mathbb{S}^1$$

Definición 23. Una estructura diferenciable de C^k ($1 \leq k \leq \infty$) sobre una variedad topológica M de dimensión n es una colección

$$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in I\}$$

de sistema de coordenadas verificando las tres condiciones siguientes:

1. $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$ (\mathcal{A} es un atlas de M)
2. Para todo $\alpha, \beta \in I$, SI $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, la aplicación $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ es diferenciable de C^k (\mathcal{A} atlas diferenciable)
3. La colección \mathcal{A} es maximal con respecto a la condición 2 es decir si (U, φ) es un sistema de coordenadas tal que $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$, $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ son de clase C^k para todo $\alpha \in I$, entonces $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$.

Ejemplo 17. \mathbb{S}^1 tiene estructura diferenciable de C^∞ de dimensión 1 es una colección $\mathcal{A} = \{(\varphi_1, U_1), (\varphi_3, U_3), (\varphi_2, U_2), (\varphi_4, U_4)\}$ de cartas que verifica las tres condiciones.

1. $U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4 = \mathbb{S}^1$
2. $U_1 \cap U_3 = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : 0 \leq x \leq 1, y > 0\} \neq \emptyset$ la aplicación $\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_3) \rightarrow \varphi_3(U_1 \cap U_3)$ dada por $\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2}$ es diferenciable.
 $U_2 \cap U_3 = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : 0 \leq x \leq 1, y < 0\} \neq \emptyset$ la aplicación $\varphi_3 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(U_2 \cap U_3) \rightarrow \varphi_3(U_2 \cap U_3)$ dada por $\varphi_3 \circ \varphi_2^{-1}(x) = -\sqrt{1-x^2}$ es diferenciable.
 Análogamente para $\varphi_4 \circ \varphi_1^{-1}$ y $\varphi_4 \circ \varphi_2^{-1}$ son diferenciables .

Ejemplo 18. Si (M, \mathcal{A}) es variedad diferenciable de dimensión n , todo abierto $U \subset M$ es de nuevo una variedad diferenciable de dimensión n (Variedad Inducida) cuyo atlas viene dada por

$$\mathcal{A}_U = \{(U_\alpha \cap U, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap U}) : \text{para todo } (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}\}$$

Ejemplo 19. $T_c = \mathbb{S}^1 \times D$ es una variedad diferenciable de dimensión 3. En efecto \mathbb{S}^1 es una variedad de dimensión 1.

D es una variedad, pues el interior del disco es una variedad de dimensión 1 (ya que todo abierto es de nuevo una variedad), y su frontera del disco es una variedad de dimensión 1. Por tanto el disco es una variedad de dimensión 2. Así el producto cartesiano de \mathbb{S}^1 y D es una variedad de dimensión tres. Por tanto el toro sólido es una variedad de dimensión tres.

Aplicaciones Diferenciables

Definición 24. Sean M y N variedades diferenciables de C^∞ , se dice que una aplicación $f : M_1 \rightarrow M_2$ se dice que es diferenciable de C^∞ si para todo $x \in M_1$ existe una carta (U_1, φ_1) al rededor de x y una carta (U_2, φ_2) al rededor de $f(x)$ con $f(U_1) \subset U_2$ y tal que

$$\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : \varphi(U_1) \subset \mathbb{R}_1^m \rightarrow \mathbb{R}_2^m$$

es diferenciable

Definición 25. Dos variedades diferenciables M_1 y M_2 se dice que son difeomorfas si existe una aplicación diferenciable $f : M_1 \rightarrow M_2$ que admite inversa $f^{-1} : M_2 \rightarrow M_1$ diferenciable. A una tal f se le denomina difeomorfismo.

Subvariedades

Definición 26. El conjunto de todo los vectores tangentes en $p \in M$ lo denotaremos por $T_p M$ es decir $T_p M = \{v : C^\infty(M, p) \rightarrow \mathbb{R}\}$

Definición 27. A la aplicación lineal $f_* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ inducida por la aplicación diferenciable $f : M \rightarrow N$ entre los espacios tangentes en puntos correspondientes, le llamaremos aplicación diferenciable de f o aplicación inducida por f .

Definición 28. Se dice que una aplicación diferenciable $f : M \rightarrow N$ es una inmersión de M en N si el rangof $= \dim M$ en todo punto es decir si

$$f_* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N \text{ es inyectiva para todo } p \in M$$

Definición 29. el par (M, f) o $f(M)$ es llamado subvariedad inmersa de N si $f : M \rightarrow N$ es inyectiva inmersión.

Definición 30. $M \subset N$ es subvariedad inmersa (subvariedad) si la inclusión $j : M \rightarrow N$ es una inmersión inyectiva.

Definición 31. $f : M \rightarrow N$ es una incrustación si

- $f : M \rightarrow N$ es inmersión inyectiva
- $f : M \rightarrow f(M) \subset N$ es un homeomorfismo $f(M)$ con la topología inducida de N .

Ejemplo 20. $F^* = F|_{\partial T_2} : \partial T_2 \rightarrow F(\partial T_2)$ es una incrustación, pues

- $F^* = F|_{\partial T_2} : \partial T_2 \rightarrow F(\partial T_2)$ es inmersión inyectiva
- $F^* = F|_{\partial T_2} : \partial T_2 \rightarrow \text{Int}(T_2) \subset F(\partial T_2)$ es un homeomorfismo con la topología inducida de $\text{Int}(T_2)$. Véase los detalles de esto en el Teorema 6 del Capítulo 4.





Conclusiones y Recomendaciones

De los resultados obtenidos a través de la teoría de sistemas dinámicos discretos, una de las conclusiones principales es el hecho de que el Solenoide de Smale tiene un comportamiento dinámico complejo, tanto así que presenta un atractor extraño. La característica principal de un sistema complejo o caótico como el del Solenoide es que no podemos predecir su comportamiento a largo plazo, esto debido a que el atractor solenoide tiene puntos periódicos densos, es transitiva y tiene dependencia sensitiva a las condiciones iniciales.

En esta tesis se probó que el atractor Solenoide tiene puntos periódicos densos y es transitiva, el hecho de que tiene dependencia sensitiva a las condiciones iniciales es consecuencia de las dos primeras propiedades. En efecto, en 1992 Banks, Brooks, Cairns, probaron que la hipótesis de dependencia sensitiva a las condiciones iniciales, no es realmente necesaria para un comportamiento caótico ya que esta es consecuencia de las otras dos condiciones, es decir, basta con que la función sea topológicamente transitiva y sus puntos periódicos sean densos, para asegurar que la función sea caótica.

Uno de los resultados que ha sido estudiado con detalle son las propiedades topológicas del Solenoide, en particular se hace un corte al Solenoide con un plano transversal, la intersección de éste con el plano determina un conjunto de Cantor; para lograr este resultado hemos construido un homeomorfismo con el espacio simbólico o también llamado el espacio de sucesiones de ceros y unos.

Para las contribuciones a trabajos a futuros, aprovechando los desarrollado en esta tesis es estudiar las propiedades métricas del solenoide, como por ejemplo probar que el Solenoide admite una medida Sinai-Ruelle-Bowen, cuya basia sea el mismo atractor.

También es interesante la pregunta. El solenoide no puede ser la imagen continua de ningún subcontinuo del plano?. Como consecuencia de este resultado, se tiene que ningún solenoide se puede encajar en el plano.

Agradecemos al árbitro la cuidadosa revisión que hizo de este trabajo, así como sus valiosas sugerencias, que sin duda mejoraron el resultado del mismo.



Bibliografía

- 1 Robert Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* . Second Edition.
- 2 Clark Robinson. *Dynamical Systems Stability Symbolic Dynamics, y Chaos*.
- 3 Richard A. Holgrem *A First Course in Discrete Dynamical System*. Second Edition.
- 4 Heinz-Otto Harmut Jurgens Deitmar Saupe. *Chaos and Fractals*.
- 5 John Milnor. *Introductory Dynamics Lectures, octubre 2001*
- 6 Anatole Katok Boris Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems* Volumen 54
- 7 Petr Kůrka. Cours Spécialisés. *Topological and Symbolic Dynamics* Societé Mathématique de France 2003
- 8 Munkres *Topología*. Segunda Edición.
- 9 Robert Franzosa *Introduction to Topology* Pure and appied

