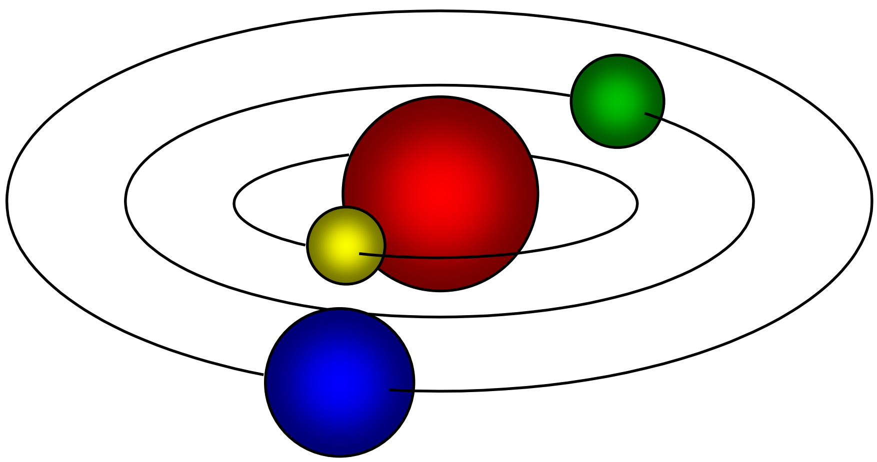
UNIVERSIDAD DIEGO PORTALES
Facultad de Ingeniería
Instituto de Ciencias Básicas

"ALGUNOS TÓPICOS Y APLICACIONES DE LA MECANICA RACIONAL"



(Incluye 150 problemas resueltos)

Julio Pozo Pérez

2005

A mi esposa e hijas, a la memoria de mis padres y hermanos. Y en forma especial para todos los estudiantes de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Diego Portales.

AGRADECIMIENTOS

A mi hija Carolina por haber editado la versión final de este libro, a mi esposa Rosa María por la revisión preliminar del presente trabajo y a Catherine LLewellyn, por su valiosa colaboración en la primera etapa de este manuscrito.

ÍNDICE

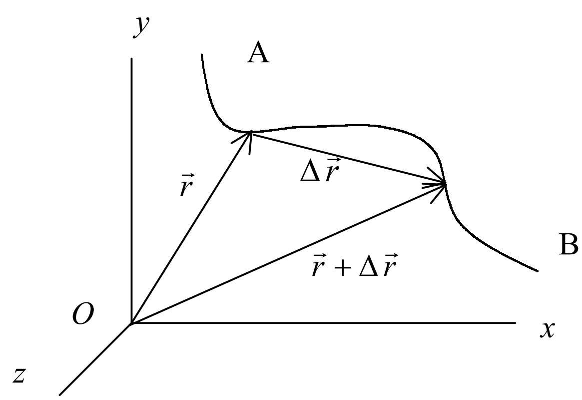
CAPÍTULO I

ALGUNOS TOPICOS DE CINEMATICA

1.1. Cinemática de una partícula (diversas coordenadas).

1.1.1. Movimiento de una partícula (vector posición, desplazamiento, velocidad y aceleración)

Consideremos una partícula moviéndose a lo largo de una trayectoria arbitraria en el espacio tridimensional, desde A hacia B, tal como se muestra en la figura.



Definamos

$\vec{r}$: Vector de posición en el tiempo t

$\vec{r}+\Delta\vec{r}$: Vector de posición en el tiempo $t+\Delta t$

$\Delta\vec{r}$: Desplazamiento en el tiempo Δt

$$\vec{\upsilon}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \text{ (Velocidad media)}$$

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \text{ (Velocidad instantánea)}$$

(1.1) $$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} \text{ (Aceleración media)}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{d\,t} \quad \text{(Aceleración instantánea)}$$

(1.2) $$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{d\,t} = \dot{\vec{\upsilon}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \equiv \ddot{\vec{r}}$$

1.1.2. Coordenadas cartesianas rectangulares

El vector posición, la velocidad y la aceleración de una partícula en el espacio (en coordenadas cartesianas rectangulares x, y, z) están dadas por

$$\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}$$

$$\vec{\upsilon} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\,\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j} + \dot{z}\,\hat{k} \qquad \text{donde} \quad \upsilon_x = \dot{x} \;\; ; \;\; \upsilon_y = \dot{y} \;\; ; \;\; \upsilon_z = \dot{z}$$

$$\vec{a} \equiv \dot{\vec{\upsilon}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\,\hat{i} + \ddot{y}\,\hat{j} + \ddot{z}\,\hat{k} \quad \text{donde} \quad a_x = \ddot{x} \;\; ; \;\; a_y = \ddot{y} \;\; ; \;\; a_z = \ddot{z}$$

Las magnitudes respectivas están dadas por

(1.3) $$\upsilon \equiv |\vec{\upsilon}| = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2} \qquad \text{y} \qquad a \equiv |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Estas ecuaciones son generales y se aplican para cualquier movimiento de una partícula en el espacio. Si se trata de un ***movimiento curvilíneo plano***, entonces éste se realiza en el plano xy, de modo que se tiene

$$\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j}$$

$$\vec{\upsilon} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\,\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\,\hat{i} + \ddot{y}\,\hat{j}$$

Las magnitudes respectivas son

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} \qquad \text{y} \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

El movimiento rectilíneo de una partícula, que tiene lugar a lo largo de una línea recta (eje x), está dado por

(1.4) $$\vec{r} = x\hat{i} \quad ; \quad \vec{\upsilon} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{i} \quad ; \quad \vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\hat{i}$$

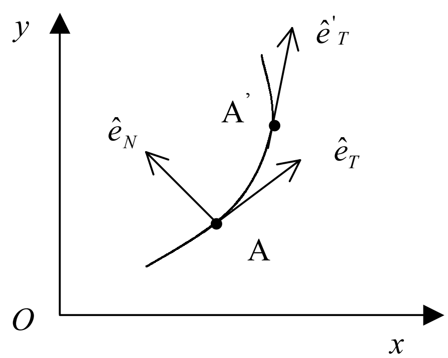
donde

$$r = x \quad ; \quad \upsilon = \dot{r} = \dot{x} \quad ; \quad a = \ddot{r} = \ddot{x}$$

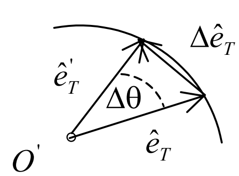
1.2. Movimiento curvilíneo

1.2.1. Coordenadas normal y tangencial.

Consideremos el caso de una partícula que se mueve a lo largo de una curva contenida en el plano tal como se muestra en la figura. Sea A la posición de la partícula en un instante dado, $\hat{e}_T$ el vector unitario tangente a la trayectoria en la dirección del movimiento de la partícula y $\hat{e}_T^{'}$ el vector unitario tangente asociado a la posición A' de la partícula en un instante de tiempo posterior.



Si se trazan ambos vectores $\hat{e}_T$ y $\hat{e}_T^{'}$ desde el mismo origen $O^{'}$, se puede definir el vector $\Delta\hat{e}_T$ como se muestra en la siguiente figura, dado que estos vectores son de longitud unitaria, sus extremos se encuentran sobre un círculo de radio unidad.



De la figura anterior se tiene que

$$\left|\Delta\hat{e}_T\right| = \Delta e_T = 2sen(\Delta\theta / 2)$$

Si se considera el vector $\Delta\hat{e}_T / \Delta\theta$ se observa que cuando $\Delta\theta \to 0$, este vector se vuelve tangente al círculo unitario de la figura anterior, por lo tanto se hace normal a $\hat{e}_T$ y su magnitud es igual a la unidad, esto es

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\left|\Delta\hat{e}_T\right|}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{2sen(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{sen(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2} = 1$$

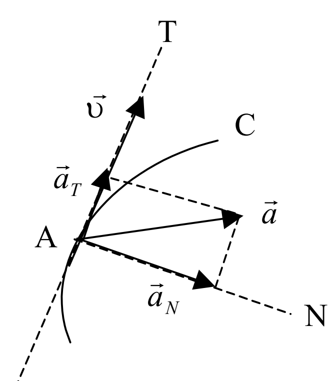
Luego, en este límite se obtiene un vector unitario a lo largo de la normal a la trayectoria de la partícula, en la dirección en la cual cambia $\hat{e}_T$. Entonces si representamos por $\hat{e}_N$ a este vector se puede escribir

(1.5) $$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta\hat{e}_T}{\Delta\theta} = \hat{e}_N \qquad \text{o} \qquad \hat{e}_N = \frac{d\hat{e}_T}{d\theta}$$

Por otro parte, dado que la velocidad $\vec{\upsilon}$ de la partícula es tangente a la trayectoria, se puede expresar en la forma $\vec{\upsilon} = \upsilon\,\hat{e}_T$ y la aceleración respectiva puede ser determinada a partir de $\vec{a} = d\vec{\upsilon}/dt$.

1.2.2. Componentes tangencial y normal para la aceleración

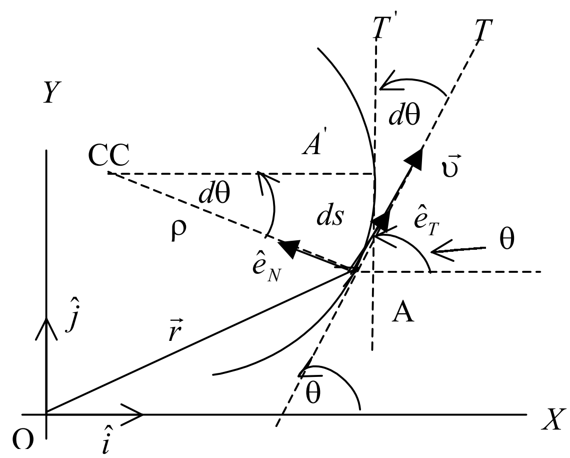
Consideremos el caso de una partícula que se mueve en una trayectoria representada por la curva C (por simplicidad plana) como se muestra en la figura.



En un tiempo t, la partícula se encuentra en el punto A con velocidad $\vec{\upsilon}$ y aceleración $\vec{a}$. Asumiendo que la aceleración $\vec{a}$ está dirigida según la figura anterior (hacia la parte cóncava de la trayectoria), entonces, ésta se puede descomponer en una componente tangencial $\vec{a}_T$ (paralela a la tangente AT) denominada *aceleración tangencial*, y una componente normal (paralela a la normal AN) llamada *aceleración normal*.

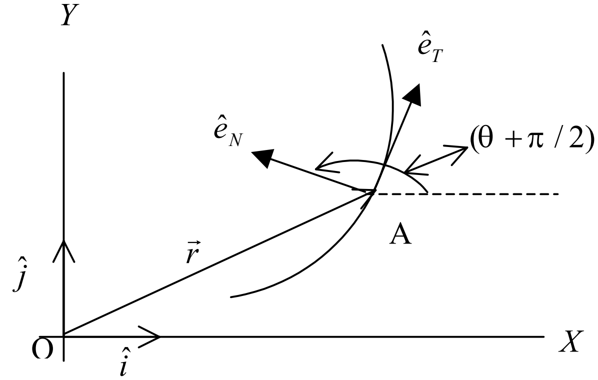
En la siguiente figura se ha trazado en el punto A, un vector unitario $\hat{e}_T$ tangente a la curva, lo que permite escribir $\vec{\upsilon} = \upsilon\,\hat{e}_T$ y la aceleración se expresa como

(1.6) $$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \equiv \frac{d}{dt}(\upsilon\,\hat{e}_T) = \frac{d\upsilon}{dt}\hat{e}_T + \upsilon\frac{d\hat{e}_T}{dt}$$



Determinemos con ayuda de la figura anterior el valor del término $\frac{d\hat{e}_T}{dt}$, para lograr lo planteado, consideremos también en el punto A un vector unitario $\hat{e}_N$, normal a la curva que apunta hacia el lado cóncavo, esto nos permite escribir

$$\hat{e}_T = \cos\theta\;\hat{i} + sen\theta\;\hat{j}$$
$$\hat{e}_N = \cos(\theta + \pi/2)\;\hat{i} + sen(\theta + \pi/2)\;\hat{j}$$
$$\hat{e}_N = -sen\theta\;\hat{i} + \cos\theta\;\hat{j}$$



de esta forma

$$\frac{d\hat{e}_T}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\cos\theta\ \hat{i} + sen\theta\ \hat{j}\right) = -\dot{\theta}\ sen\theta\ \hat{i} + \dot{\theta}\cos\theta\ \hat{j}$$

(1.7) $$\frac{d\hat{e}_T}{dt} = \dot{\theta}\,(-sen\theta\ \hat{i}_x + \cos\theta\ \hat{j}_y) = \dot{\theta}\ \hat{e}_N \equiv \frac{d\theta}{dt}\ \hat{e}_N$$

El resultado anterior nos muestra que $\frac{d\hat{e}_T}{dt}$ es un vector normal a la curva.

Teniendo presente el triángulo $AA^{'}CC$, se tiene

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt} = \upsilon\ \frac{d\theta}{ds}$$

con

(1.8) $$\upsilon = \frac{ds}{dt} \equiv \dot{s}$$

donde $ds = AA^{'}$ es el elemento de arco donde se mueve la partícula en el tiempo dt. Las normales a la curva en A y $A^{'}$ se intersectan en el punto CC que recibe el nombre de centro de curvatura.

Definamos $\rho = \overline{CCA}$ como el radio de curvatura, ahora como en un triángulo el arco es el producto del radio por el ángulo (en radianes) se tiene

$$ds = \rho\, d\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} \qquad \text{luego} \qquad \frac{d\theta}{dt} = \upsilon\ \frac{d\theta}{ds} = \frac{\upsilon}{\rho}$$

con lo cual

(1.9) $$\frac{d\hat{e}_T}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\ \hat{e}_N = \frac{\upsilon}{\rho}\ \hat{e}_N$$

Sustituyendo en la expresión para la aceleración se encuentra

(1.10) $$\vec{a} = \frac{d\upsilon}{dt}\hat{e}_T + \upsilon\frac{d\hat{e}_T}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt}\hat{e}_T + \frac{\upsilon^2}{\rho}\ \hat{e}_N$$

El primer término de la aceleración $\frac{d\upsilon}{dt}\hat{e}_T$ es un vector tangente a la curva que corresponde a la aceleración tangencial $\vec{a}_T$ y se debe al cambio en la magnitud de la velocidad en el tiempo. Con respecto al segundo término $\frac{\upsilon^2}{\rho}\,\hat{e}_N$ es un vector normal a la curva y está asociado con el cambio en la dirección de la velocidad (puesto que proviene de $\frac{d\hat{e}_T}{dt}$) y corresponde a la aceleración normal $\vec{a}_N$, esto permite escribir

$$\vec{a} = a_T \hat{e}_T + a_N\, \hat{e}_N$$

donde $\qquad a_T = \frac{d\upsilon}{dt} \qquad$ y $\qquad a_N = \frac{\upsilon^2}{\rho} \qquad$ con $\qquad \upsilon = \frac{ds}{dt} \equiv \dot{s}$

El módulo de la aceleración está dada por

(1.11)
$$|\vec{a}| \equiv a = \sqrt{\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\upsilon^2}{\rho}\right)^2}$$

o

$$a = \sqrt{\ddot{s}^2 + (\dot{s}^2/\rho)^2}$$

Determinación del radio de Curvatura ρ

Dado que también se puede escribir

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\hat{e}_T$$

y

$$\vec{a} = \ddot{s}\,\hat{e}_T + (\dot{s}^2/\rho)\,\hat{e}_N\,.$$

De la expresión de la velocidad, se tiene que

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \hat{e}_T$$

derivando con respecto a s

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d\hat{e}_T}{ds}$$

como $\frac{d\hat{e}_T}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{ds}{dt}\hat{e}_N$ se tiene que

$$\frac{d\hat{e}_T}{ds} = \frac{1}{\rho}\hat{e}_N$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{1}{\rho}\hat{e}_N$$

de donde se encuentra

(1.12) $$\frac{1}{\rho} = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|$$

Analicemos algunos casos de interés:

Movimiento curvilíneo uniforme: En este caso el modulo de la velocidad es constante ($\upsilon = Cte$) y como consecuencia de esto $a_T = 0$.

Movimiento rectilíneo: Tipo de movimiento en el cual la dirección de la velocidad no cambia. En este caso se tiene que $\rho \to \infty$ y $a_N = 0$.

1.2.3. Movimiento circular

La aceleración angular de una partícula está definida por

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

como $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ entonces $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

Separando variables en la ecuación anterior y considerando que el movimiento es con aceleración angular constante, se tiene que

(1.13) $$\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$$

También como $d\theta = \omega\, dt$, sustituyendo ω por el valor anterior e integrando se encuentra

(1.14) $$\theta = \theta_0 + \omega_0 (t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha (t - t_0)^2$$

Esta última ecuación da cuenta de la posición angular para cualquier tiempo.

Para el caso particular de un movimiento uniformemente acelerado ($\alpha = Cte$) y $\upsilon = R\omega$ con $R = \rho = Cte$, las ecuaciones $a_T = \frac{d\upsilon}{dt}$ y $a_N = \frac{\upsilon^2}{\rho}$ se tranforman en

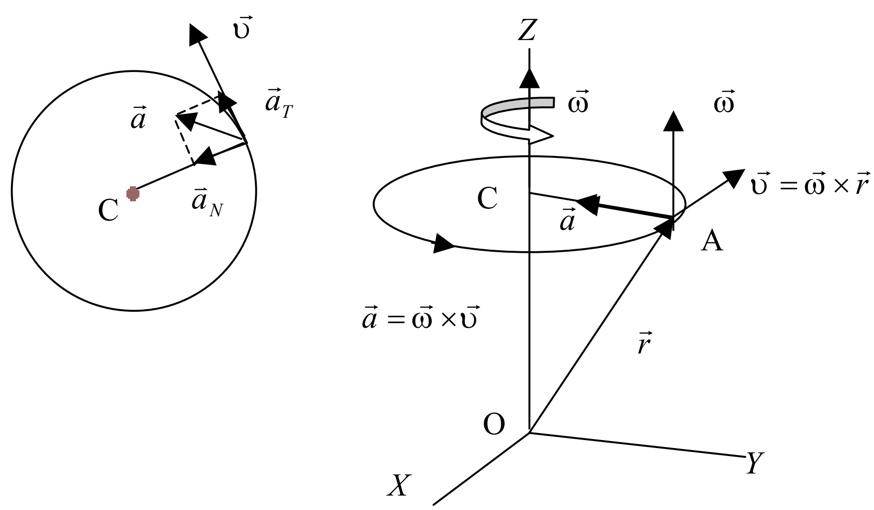
$$a_T = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}(R\omega) = R\frac{d\omega}{dt}$$

(1.15) $$a_T = R\alpha$$

Para la aceleración normal (centrípeta en esta caso) se tiene

(1.16) $$a_N = \frac{\upsilon^2}{\rho} = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R$$

Las siguientes figuras muestran las componentes tangencial y normal de la aceleración para el movimiento circular



Si consideramos el caso del ***movimiento circular uniforme*** ($\alpha = 0$), la aceleración tangencial es nula. La aceleración se puede determinar directamente a partir de

(1.17) $$\vec{\upsilon} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r})$$

(1.18) $$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{\upsilon} \qquad \text{(puesto que } \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\alpha} = 0\text{)}$$

Reemplazando $\vec{\upsilon} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ se encuentra

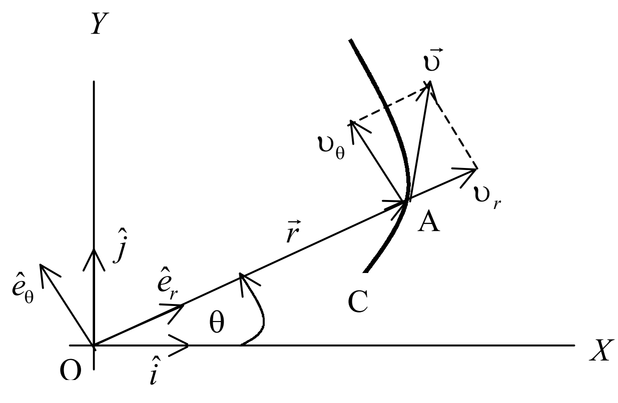
(1.19) $$\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \qquad \textit{(Movimiento circular uniforme)}$$

Como $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\alpha} = 0$, entonces esta aceleración debe corresponder a la aceleración centrípeta (o normal).Trabajando con el módulo de la aceleración se puede verificar rápidamente lo anterior

$$a = \left|\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\right| = \omega\left|(\vec{\omega} \times \vec{r})\right| = \omega\,\upsilon = \omega^2 R \equiv a_N$$

1.3. Componentes (escalares): radial y transversal para la velocidad

Consideremos el caso de una partícula que describe una trayectoria curvilínea en el plano de la figura.



Cuando la partícula se encuentra en la posición A, la velocidad está dada por $\vec{\upsilon} = d\vec{r}/dt$. Utilizando los vectores unitarios $\hat{e}_r$ que es paralelo a $\vec{r}$ y $\hat{e}_\theta$ que es perpendicular, se puede escribir $\vec{r} = r\,\hat{e}_r$. Luego la velocidad se puede expresar como

$$\vec{\upsilon} = \frac{d(r\,\hat{e}_r)}{dt} \equiv \frac{dr}{dt}\hat{e}_r + r\frac{d\hat{e}_r}{dt}$$

Por otro lado, utilizando las componentes rectangulares de estos vectores unitarios, se tiene

(1.20)
$$\hat{e}_r = \cos\theta \ \hat{i} + sen\theta \ \hat{j}$$
$$\hat{e}_\theta = -sen\theta \ \hat{i} + \cos\theta \ \hat{j}$$

con lo cual $\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos\theta \ \hat{i} + sen\theta \ \hat{j}) = \frac{d\theta}{dt}\hat{e}_\theta$. Reemplazando en la ecuación de la velocidad se encuentra

(1.21)
$$\vec{\upsilon} = \frac{dr}{dt}\hat{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\hat{e}_\theta \equiv \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$$

donde $\frac{dr}{dt}\hat{e}_r$ es un vector paralelo a $\vec{r}$ (ver figura anterior) y recibe el nombre de ***velocidad radial*** y se debe al cambio en la distancia r de la partícula con respecto del punto O. El término $r\frac{d\theta}{dt}\hat{e}_\theta$ es un vector perpendicular a $\vec{r}$ y se debe al cambio en su dirección o a la rotación de la partícula alrededor de O, y recibe el nombre de ***velocidad transversal***. Entonces sus módulos respectivos (componentes escalares) están dados por

$$\upsilon_r = \frac{dr}{dt} \equiv \dot{r} \quad ; \quad \upsilon_\theta = r\frac{d\theta}{dt} \equiv r\dot{\theta} = r\omega$$

donde $d\theta / dt = \dot{\theta} \equiv \omega$, corresponde a la velocidad angular. En el caso de un movimiento circular $r = Cte$ y $dr/dt = 0$, se tiene sólo la velocidad transversal.

1.3.1. Componentes (escalares): radial y transversal para la aceleración

Teniendo presente las consideraciones anteriores, la aceleración está dada por

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$$

sustituyendo la velocidad por $\vec{\upsilon} = \dot{r}\,e_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$, se encuentra

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta) = \ddot{r}\frac{d\hat{e}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\ \hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\ \hat{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\,\hat{e}_\theta}{dt}$$

dado que

$$\frac{d\,\hat{e}_r}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos\theta\ \hat{i} + sen\theta\ \hat{j}) = \frac{d\theta}{dt}\ \hat{e}_\theta$$

y

$$\frac{d\,\hat{e}_\theta}{dt} = \frac{d}{dt}(-sen\theta\,\hat{i} + \cos\theta\ \hat{j}) = -\dot{\theta}\ \hat{e}_r$$

reemplazando se obtiene

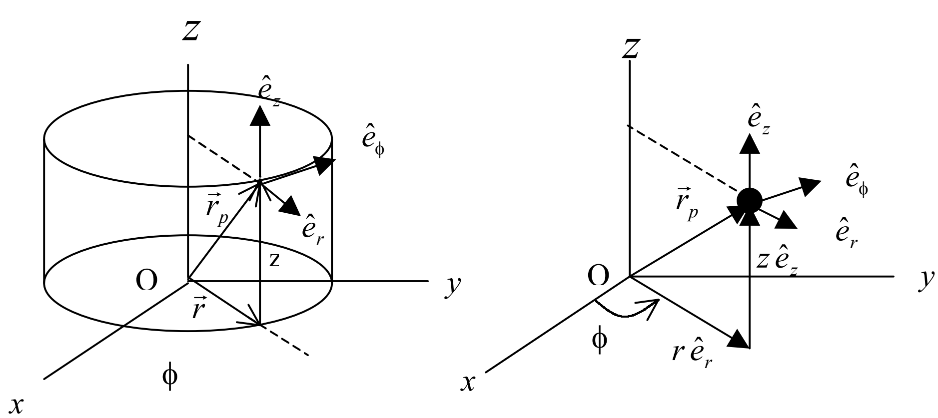
(1.22) $$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\ \hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\ \hat{e}_\theta$$

de donde se encuentra

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad \text{y} \qquad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

1.4. Movimiento en el espacio de una partícula (coordenadas cilíndricas (r,ϕ,z))

Utilizando los resultados anteriores, se puede describir el movimiento de una partícula cuando su posición en el espacio está definida por sus coordenadas cilíndricas r,ϕ,z tal como se muestra en la siguiente figura, en donde ha sido conveniente utilizar los vectores unitarios: $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\phi$ y $\hat{e}_z$.



El vector posición $\vec{r}_p$ de la partícula puede ser descompuesto a lo largo de estos vectores unitarios en la forma

(1.23) $$\vec{r}_p = r\,\hat{e}_r + z\,\hat{e}_z$$

Observando la figura anterior, nos damos cuenta que $\hat{e}_r$ y $\hat{e}_\phi$ definen en forma respectiva las componentes radial y transversal en el plano horizontal $x\,y$, además que el vector unitario $\hat{e}_z$ (que entrega la dirección axial) es constante, luego

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}_p}{dt} \equiv \dot{r}\,\hat{e}_r + r\,\dot{\hat{e}}_r + \dot{z}\,\hat{e}_z + z\,\dot{\hat{e}}_z$$

Teniendo presente que

$$\hat{e}_\phi = \frac{d\hat{e}_r}{d\phi} \quad ; \quad \hat{e}_r = -\frac{d\hat{e}_\phi}{d\phi}$$

se tiene $\dot{\hat{e}}_r = \dfrac{d\hat{e}_r}{dt} = \dfrac{d\hat{e}_r}{d\phi}\dfrac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}\,\hat{e}_\phi$; $\dot{\hat{e}}_\phi = \dfrac{d\hat{e}_\phi}{dt} = \dfrac{d\hat{e}_\phi}{d\phi}\dfrac{d\phi}{dt} = -\dot{\phi}\,\hat{e}_r$; $\dot{\hat{e}}_z = \dfrac{d\hat{e}_z}{dt} = 0$

remplazando se obtiene

(1.24)
$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}_p}{dt} \equiv \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi + \dot{z}\,\hat{e}_z$$

donde

$$\upsilon \equiv |\vec{\upsilon}| = \sqrt{\upsilon_r^2 + \upsilon_\phi^2 + \upsilon_z^2}$$

$$\upsilon_r = \dot{r} \ ; \ \upsilon_\phi = r\dot{\phi} \ ; \ \upsilon_z = \dot{z}$$

La aceleración está dada por

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}_p}{dt^2} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \equiv \ddot{r}\,\hat{e}_r + \dot{r}\,\dot{\hat{e}}_r + \dot{r}\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi + r\ddot{\phi}\,\hat{e}_\phi + r\dot{\phi}\,\dot{\hat{e}}_\phi + \ddot{z}\,\hat{e}_z$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\,\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi + \dot{r}\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi + r\ddot{\phi}\,\hat{e}_\phi - r\dot{\phi}^2\,\hat{e}_r + \ddot{z}\,\hat{e}_z$$

(1.25)
$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\,\hat{e}_r + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\,\hat{e}_\phi + \ddot{z}\,\hat{e}_z$$

donde
$$a \equiv |\vec{a}| = \sqrt{a_r^2 + a_\phi^2 + a_z^2}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \quad ; \quad a_\phi = r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} \quad ; \quad a_z = \ddot{z}$$

El caso anterior se puede reducir a ***coordenadas polares***, considerando $\hat{e}_z = 0$, obteniéndose

$$\vec{r}_p = r\,\hat{e}_r$$

(1.26) $$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}_p}{dt} \equiv \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi$$

(1.27) $$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\,\hat{e}_r + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\,\hat{e}_\phi$$

Para el ***movimiento circular*** basta considerar r constante, entonces

$$\vec{r}_p = r\,\hat{e}_r$$

$$\vec{\upsilon} = r\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi$$

$$\vec{a} = -r\dot{\phi}^2\,\hat{e}_r + r\ddot{\phi}\,\hat{e}_\phi$$

Por otro lado, si s se mide a lo largo de la trayectoria circular, se tiene que

$$s = r\phi$$

Entonces $\dot{s} = r\dot{\phi}$, $\ddot{s} = r\ddot{\phi}$ $\quad \dot{s}^2 / r = r\dot{\phi}^2$

Notamos que estas últimas ecuaciones *en coordenadas polares,* coinciden con las ecuaciones obtenidas anteriormente si se considera $\phi \equiv \theta$.

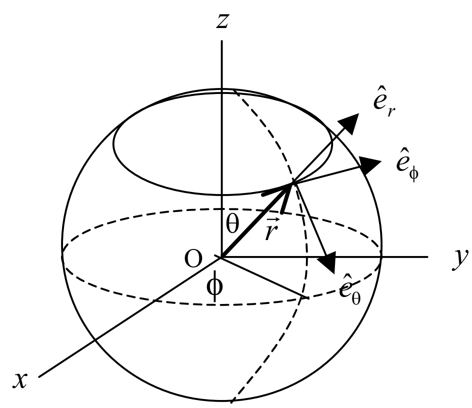
1.4.1 Movimiento en el espacio de una partícula (coordenadas esféricas (r,θ,ϕ))

En la siguiente figura se muestra un sistema en coordenadas esféricas representadas por r,θ,ϕ con vectores unitarios $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$ y $\hat{e}_\phi$, donde

$\hat{e}_r$ es un vector (unitario) radial y positivo del origen hacia afuera

$\hat{e}_\theta$ es un vector (unitario) tangente al círculo meridiano

$\hat{e}_\phi$ es un vector (unitario) tangente al círculo de latitud



Después de algún desarrollo matemático (ver apéndice), las derivadas temporales de los vectores unitarios están dadas por

$$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta}\,\hat{e}_\vartheta + \dot{\phi}\,sen\theta\,\hat{e}_\phi$$

$$\dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\,\hat{e}_r + \dot{\phi}\cos\theta\,\hat{e}_\phi$$

$$\dot{\hat{e}}_\phi = -\dot{\phi}\cos\theta\,\hat{e}_\vartheta - \dot{\phi}\,sen\theta\,\hat{e}_r$$

El desplazamiento ($\vec{r}$), la velocidad ($\vec{\upsilon} = \dot{\vec{r}}$) y la aceleración ($\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$) de un punto cualquiera en coordenadas esféricas, se pueden escribir en la forma

$$\vec{r} = r\,\hat{e}_r$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\,\dot{\hat{e}}_r$$

(1.28) $$\vec{\upsilon} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\vartheta + r\dot{\phi}\,sen\theta\,\hat{e}_\phi$$

Las componentes de la velocidad son

$$\upsilon_r = \dot{r} \quad ; \quad \upsilon_\theta = r\dot{\theta} \quad ; \quad \upsilon_\phi = r\dot{\phi}\,sen\theta$$

Para la aceleración se tiene

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\,\hat{e}_r + \dot{r}\,\dot{\hat{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{e}_\vartheta + r\ddot{\theta}\,\hat{e}_\vartheta + r\dot{\theta}\,\dot{\hat{e}}_\vartheta + \dot{r}\dot{\phi}\,sen\theta\,\hat{e}_\phi$$
$$+ r\ddot{\phi}\,sen\theta\,\hat{e}_\phi + r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{e}_\phi + r\dot{\phi}\,sen\theta\,\dot{\hat{e}}_\phi$$

Sustituyendo las derivadas de los vectores unitarios se encuentra

(1.29) $$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\,sen^2\theta)\,\hat{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2\,sen\theta\cos\theta)\,\hat{e}_\vartheta$$
$$+ (2\dot{r}\dot{\phi}\,sen\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta + r\ddot{\phi}\,sen\theta)\,\hat{e}_\phi$$

donde se pueden escribir cada una de las componentes de la aceleración

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 sen^2\theta$$

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2 sen\theta \cos\theta$$

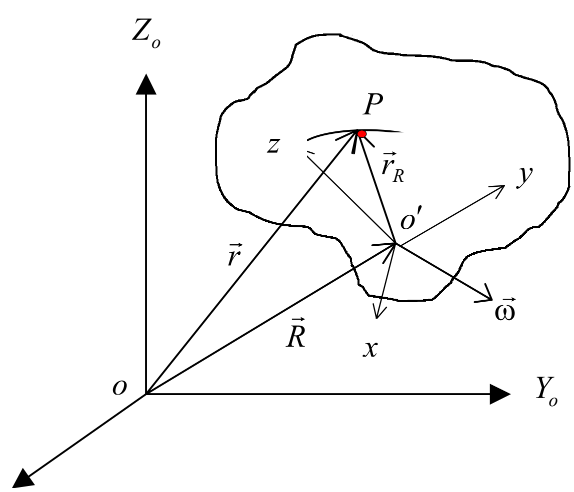
$$a_\phi = 2\dot{r}\dot{\phi} sen\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta + r\ddot{\phi} sen\theta$$

1.5. Movimiento relativo rotacional (coordenadas móviles)

1.5.1. Sistemas de coordenadas en rotación

En un gran número de problemas la descripción del movimiento o la relación entre las fuerzas, puede llegar a ser complicada cuando está referida a un sistema fijo de coordenadas, mientras que si el movimiento se refiere a un sistema móvil, su descripción se puede simplificar considerablemente, en tales casos puede ser ventajoso tratar el movimiento de puntos relativos a un sistema de referencia móvil y posteriormente determinar el movimiento absoluto de dicho sistema.

Consideremos el problema general de movimiento en un sistema móvil de coordenadas. La siguiente figura muestra un sistema de referencia fijo $X_0 Y_0 Z_0$ y un sistema de referencia móvil xyz que gira con respecto al anterior alrededor de un eje que pasa por su origen O', al mismo tiempo que O' se mueve con relación al origen fijo O.



A continuación, se obtendrán expresiones para la velocidad y aceleración absolutas de un punto P cualquiera, que recorre una trayectoria tal como se muestra en la figura.

Las magnitudes vectoriales de la figura anterior están descritas de la siguiente forma

(1.30) $$\vec{\omega} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k}$$

Corresponde a la velocidad angular del sistema de coordenadas xyz tomada con respecto al sistema $X_0Y_0Z_0$

(1.31) $$\vec{r}_R \equiv \vec{\rho} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$\vec{r}_R$ es el vector de posición del punto P referido a xyz (sistema rotatorio)

$\vec{R}$ es el vector de posición del origen móvil O' referido a $X_0Y_0Z_0$

$\vec{r}$ es el vector de posición de P referido a $X_0Y_0Z_0$ (sistema inercial)

De la figura se tiene que

(1.32) $$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}_R$$

Derivando con respecto al tiempo, se encuentra que la velocidad está dada por

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_R$$

Dado que $\vec{r}_R \equiv \vec{\rho}$ se mide en un sistema que gira se tendrá

$$\dot{\vec{r}}_R = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} + x\frac{d\hat{i}}{dt} + y\frac{d\hat{j}}{dt} + z\frac{d\hat{k}}{dt}$$

teniendo presente que $d\hat{i}/dt = \vec{\omega} \times \hat{i}$, $d\hat{j}/dt = \vec{\omega} \times \hat{j}$, $d\hat{k}/dt = \vec{\omega} \times \hat{k}$ se obtiene

$$\dot{\vec{r}}_R = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} + x(\vec{\omega} \times \hat{i}) + y(\vec{\omega} \times \hat{j}) + z(\vec{\omega} \times \hat{k})$$

de donde se encuentra que

(1.33) $$\dot{\vec{r}}_R = \vec{\upsilon}_R + (\vec{\omega} \times \vec{r}_R)$$

En un sistema de coordenadas que gira y se traslada se puede observar que la derivada temporal de un vector consta de dos partes, la velocidad $\vec{\upsilon}_R = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$ medida en el sistema xyz, y el término $\vec{\omega} \times \vec{r}_R$, que es la derivada temporal debida a la rotación de xyz.

Como $\dot{\vec{R}}$ representa la velocidad de O' relativa a $X_0Y_0Z_0$, entonces

(1.34) $$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \vec{\upsilon}_R + \vec{\omega} \times \vec{r}_R$$

Para analizar la ecuación anterior, es conveniente escribirla en la forma

(1.35) $$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{fijo} = \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_{fijo} + \left(\frac{d\vec{r}_R}{dt}\right)_{giratorio} + \vec{\omega} \times \vec{r}_R$$

También se puede tener que

(1.36) $$\vec{\upsilon}_{fijo} = \vec{V} + \vec{\upsilon}_{rotación} + \vec{\omega} \times \vec{r}_R$$

donde

$$\vec{\upsilon}_{fijo} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{fijo} \qquad (velocidad\ respecto\ de\ los\ ejes\ fijos)$$

$$\vec{V} = \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_{fijo} \qquad (velocidad\ lineal\ del\ origen\ móvil)$$

$$\vec{\upsilon}_{relativo} = \left(\frac{d\vec{r}_R}{dt}\right)_{giratorio} \qquad (velocidad\ relativa\ respecto\ de\ los\ ejes\ en\ rotación)$$

$\vec{\omega} \times \vec{r}_R =$ velocidad debida a la rotación de los ejes móviles

$\vec{\omega}$ = velocidad angular de los ejes en rotación

Para obtener la aceleración derivamos la velocidad con respecto al tiempo

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{\upsilon}}_R + (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_R) + (\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_R)$$

Como $\dot{\vec{\upsilon}}_R = \vec{a}_R + \vec{\omega} \times \vec{\upsilon}_R$ y $\dot{\vec{r}}_R = \vec{\upsilon}_R + (\vec{\omega} \times \vec{r}_R)$ se tiene que

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} + \vec{a}_R + \vec{\omega} \times \vec{\upsilon}_R + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_R + \vec{\omega} \times (\vec{\upsilon}_R + \vec{\omega} \times \vec{r}_R)$$

luego

(1.37) $\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} + \vec{a}_R + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_R + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_R) + 2\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}_R$ *o también se puede escribir*

$$\vec{a} = \vec{a}_{0'0} + \ddot{\vec{\rho}}_{Rel} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}}_{Rel}$$

Donde $\vec{r}_R = \vec{\rho}$, $\vec{\upsilon}_R = \dot{\vec{\rho}}_{Rel}$

$\ddot{\vec{R}} = \vec{a}_{0'0}$ es la aceleración del origen móvil O' con respecto a $X_0Y_0Z_0$.

$\vec{a}_R = \ddot{\vec{\rho}}_{Rel}$ Aceleración de P medida en el sistema móvil.

$\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_R$ aceleración tangencial de P considerado como fijo en xyz.

$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_R)$ aceleración normal de P considerado como fijo en xyz.

$2\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}_R$ es la ***aceleración de Coriolis***.

Cabe destacar que al plantear cualquier problema, es indispensable elegir un sistema de ejes móviles tal que el movimiento en este sistema quede bien definido.

Si se considera que $\ddot{\vec{R}} = 0$ y $\omega = Cte \Rightarrow \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_R = 0$, entonces

(1.38) $$\vec{a}_I \equiv \underbrace{\ddot{\vec{r}}}_{\substack{Aceleración \\ en\,el\,SRI}} = \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_R)}_{\substack{Aceleración \\ centrípeta}} + \underbrace{\vec{a}_R}_{\substack{Aceleración \\ en\,el\,sistema \\ en\,rotación}} + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}_R}_{\substack{Aceleración \\ de\,Coriolis}}$$

1.5.2. Movimiento relativo y eje instantáneo de rotación

Las ecuaciones de movimiento relativo para un cuerpo rígido están dadas por

$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \vec{\upsilon}_R + \vec{\omega} \times \vec{r}_R$ y $\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} + \vec{a}_R + \vec{\omega} \times \vec{\upsilon}_R + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_R + \vec{\omega} \times (\vec{\upsilon}_R + \vec{\omega} \times \vec{r}_R)$ cuando $\vec{\upsilon}_R = 0$.

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{r}_R$$

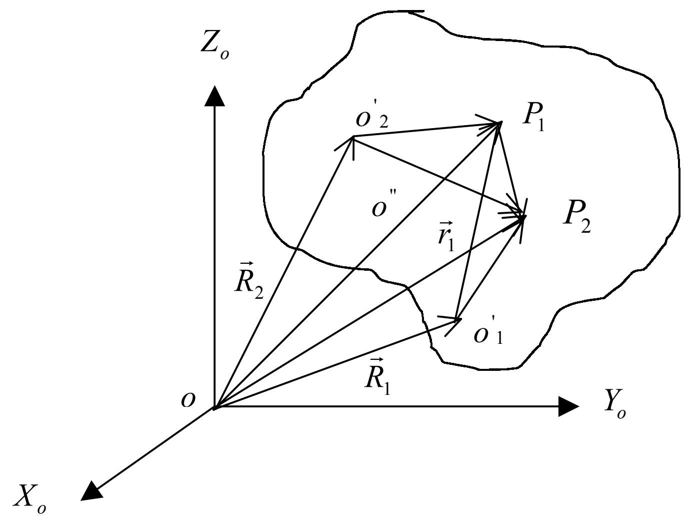
(1.39) $$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_R + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_R)$$

Estas ecuaciones muestran que el movimiento de un punto que pertenece a un cuerpo rígido, se debe a la combinación de dos movimientos

a) Una traslación de O' representada por $\dot{\vec{R}}$ y $\ddot{\vec{R}}$ (ver figura anterior)

b) Una rotación alrededor de un eje que pasa por O' representada por todos los productos vectoriales de las ecuaciones anteriores.

Por otro lado, para demostrar que el vector velocidad angular $\vec{\omega}$ es independiente del origen del sistema móvil de coordenadas, consideremos la siguiente figura en donde los orígenes de los dos sistemas están unidos al cuerpo rígido en o'_1 y o'_2. Se localizan en el cuerpo rígido dos puntos P_1 y P_2 a través de los vectores de posición $\overrightarrow{o'_1P_1}$, $\overrightarrow{o'_1P_2}$, $\overrightarrow{o'_2P_1}$ y $\overrightarrow{o'_2P_2}$ a partir del origen de cada de cada sistema de coordenadas.



Analicemos las consecuencias de suponer que las velocidades angulares $\vec{\omega}_1$ y $\vec{\omega}_2$ asociadas a cada origen son diferentes, según la ecuación $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{r}_R$, se puede escribir las velocidades de los puntos P_1 y P_2 en términos de cada sistema móvil de coordenadas.

Con respecto al origen en o'_1, se tiene

$$\dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{R}}_1 + \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{o'_1P_1}$$

$$\dot{\vec{r}}_2 = \dot{\vec{R}}_1 + \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{o'_1P_2}$$

Con respecto al origen en o'_2, se tiene

$$\dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{R}}_2 + \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{o'_2P_1}$$

$$\dot{\vec{r}}_2 = \dot{\vec{R}}_2 + \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{o'_2P_2}$$

Utilizando las dos primeras ecuaciones se puede eliminar $\dot{\vec{R}}_1$ y de las dos últimas se puede eliminar $\dot{\vec{R}}_2$, esto es

(1.40) $$\dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2 = \vec{\omega}_1 \times \left(\overrightarrow{o'_1P_1} - \overrightarrow{o'_1P_2}\right) = \vec{\omega}_2 \times \left(\overrightarrow{o'_2P_1} - \overrightarrow{o'_2P_2}\right)$$

Dado que $\left(\overrightarrow{o_1^{'}P_1} - \overrightarrow{o_1^{'}P_2}\right) = \left(\overrightarrow{o_2^{'}P_1} - \overrightarrow{o_2^{'}P_2}\right) \equiv \overrightarrow{P_2P_1}$, lo anterior se debe a que $\overrightarrow{P_2P_1}$ es arbitrario.

De donde se encuentra que $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2 \equiv \vec{\omega}$

Luego la velocidad angular de un cuerpo rígido es independiente del origen.

Definamos ($\dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2$) como la velocidad de P_1 con respecto a P_2, entonces

(1.41) $$\dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2 = \vec{\omega} \times \overrightarrow{P_2P_1}$$

de donde se observa que la velocidad relativa es independiente del sistema móvil de coordenadas (si $\vec{\omega} = 0$, todas las partículas del rígido tiene la misma velocidad)

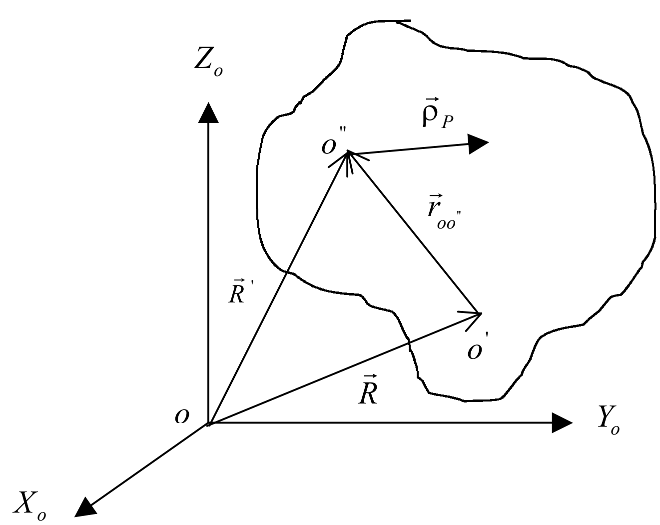
Derivando con respecto al tiempo la ecuación anterior, la aceleración relativa está dada por

$$\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{\omega} \times \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{P_2P_1}\right) + \dot{\vec{\omega}} \times \overrightarrow{P_2P_1}$$

o

(1.42) $$\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{\omega} \times \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{P_2P_1}\right) + \dot{\vec{\omega}} \times \overrightarrow{P_2P_1}$$

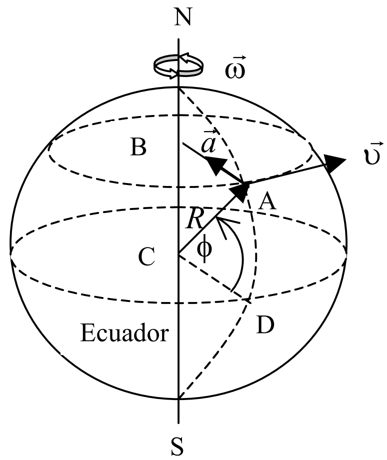
Dado que la posición de $o^{'}$ es arbitaria, entonces se puede considerar un nuevo origen $o^{''}$ tal que los vectores $\dot{\vec{R}}$ y $\vec{\omega}$ sean paralelos (ver la siguiente figura). Esto se asemeja al movimiento de un tornillo y en este caso el eje $\vec{\omega}$ recibe el nombre de ***eje instantáneo de rotación***. Para el movimiento en el plano $\dot{\vec{R}} = 0$, y a la intersección de $\vec{\omega}$ y el plano de movimiento se denomina ***centro instantáneo de rotación.***



1.6. Problemas resueltos

Problema 1.1

Considere el caso de la tierra, que rota uniformemente con respecto a su eje SN con una velocidad angular $\omega = 7.292\times 10^{-5}[\mathrm{s}^{-1}]$, y determine en función de la latitud (ángulo ϕ de la figura), la velocidad y la aceleración para un punto A sobre la superficie de la tierra.



Solución:

Dado el movimiento rotacional de la tierra, todos los puntos sobre su superficie se mueven con movimiento circular uniforme.

En la figura anterior, la latitud del punto A se define como el ángulo ϕ que forma el radio $R = CA$ con el radio CD situado en el ecuador. El giro de la tierra respecto del eje SN permite que el punto A describa un círculo de centro en B y de radio BA, de modo que:

$$BA = R\cos\phi$$

La velocidad ($\upsilon = \upsilon_A$) del punto A es tangente al círculo, y está dada por

$$\upsilon = \omega\, BA = \omega\, R\cos\phi$$

La aceleración ($a = a_A$) es centrípeta puesto que el movimiento es uniforme, está dirigida hacia B. Luego su magnitud es

$$a = \omega^2\, BA = \omega^2\, R\cos\phi$$

Sustituyendo el valor de la velocidad angular, $\omega = 7.292\times10^{-5}[\mathrm{s}^{-1}]$ y del radio de la tierra; $R \approx 6.350[\mathrm{km}] = 6.35\times10^{6}[\mathrm{m}]$, se encuentra

Para la velocidad: $\upsilon = 463\cos\phi\ [\mathrm{m}/s]$

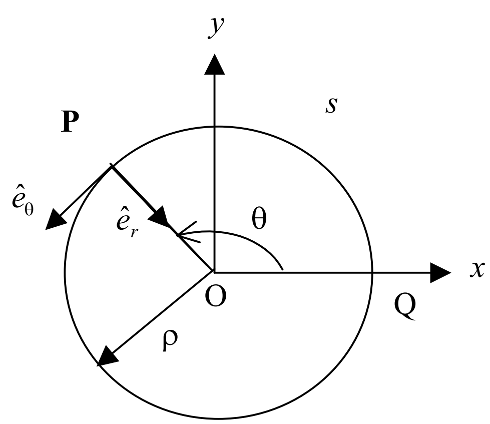
Para la aceleración: $a = 3.38\times10^{-2}\cos\phi\,[\mathrm{m/s^2}]$

los valores máximos para υ y a se obtienen cuando $\cos\phi = 1$; ($\phi = 0$), esto ocurre en el ecuador.

Problema 1.2

El punto P de la figura se mueve a lo largo de un alambre doblado en forma de circunferencia cuyo radio es $\rho = 4[\mathrm{m}]$. La distancia s que ha recorrido el punto a partir de Q (arco QP) se expresa como sigue $s = -c_1 t + c_2 t^4$ donde c_1 y c_2 son constantes positivas.

a) Determine la magnitud de la aceleración total de P en función del tiempo.
b) Si $c_1 = 4[m/s]$ y $c_2 = 1[\mathrm{m/s^4}]$, determine la aceleración en $t = 2[\mathrm{s}]$



Solución:

a) Utilicemos la expresión que nos permite determinar directamente la magnitud de la aceleración

$$|\vec{a}| \equiv a = \sqrt{\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\upsilon^2}{\rho}\right)^2}$$

En este caso $\upsilon = \dfrac{ds}{dt} = \dot{s}$ y $\dfrac{d\upsilon}{dt} = \ddot{s}$, entonces $a = \sqrt{(\ddot{s})^2 + (\dot{s}^2/\rho)^2}$

donde $\dot{s} = -c_1 + 4c_2t^3$; $\ddot{s} = 12c_2t^2$ y $\rho = R = 4[\mathrm{m}]$ luego,

$$a(t) = \sqrt{\left(12c_2t^2\right)^2 + \left((-c_1 + 4c_2t^3)^2/4\right)^2}$$

b) Sustituyendo los valores de las constantes para $t = 2[\mathrm{s}]$, se encuentra

$$a(t=2) = \sqrt{(48)^2 + \left((28)^2/4\right)^2}\ \left[m/s^2\right] = 201.8\left[m/s^2\right]$$

Problema 1.3

Determine el radio de curvatura ρ de una curva en el espacio que es una hélice de radio R con un paso de $2\pi\ p$. El vector posición está dado por $\vec{r} = R(\cos\varphi\ \hat{i} + sen\varphi\ \hat{j}) + p\varphi\ \hat{k}$.

Solución:

Teniendo presente que $\dfrac{1}{\rho} = \left|\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|$ se determinan

$$d\vec{r} = (-Rsen\varphi\ \hat{i} + R\cos\varphi\ \hat{j} + p\ \hat{k})\,d\varphi$$

$$ds = \sqrt{d\vec{r}\cdot d\vec{r}} = \sqrt{R^2 + p^2}\ d\varphi$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + p^2}}(-Rsen\varphi\ \hat{i} + R\cos\varphi\ \hat{j} + p\ \hat{k})$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{1}{(R^2 + p^2)}(-R\cos\varphi\ \hat{i} - R\,sen\varphi\ \hat{j})$$

Luego

$$\frac{1}{\rho} = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| = \sqrt{\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\cdot\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}} = \frac{R}{R^2 + p^2}$$

$$\rho = \frac{R^2 + p^2}{R}$$

Problema 1.4

Demostrar que el radio de curvatura ρ, se puede expresar en términos de las derivadas temporales de $\vec{r}$ a través de

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}}{\dot{\vec{r}}^{\,3}} \right|$$

Solución:

Determinemos el valor del producto vectorial

$$\vec{\upsilon} \times \vec{a} = \left(\frac{ds}{dt} \hat{e}_T \right) \times \left(\frac{d^2 s}{dt^2} \hat{e}_T + \frac{1}{\rho} \left[\frac{ds}{dt} \right]^2 \hat{e}_N \right)$$

$$\vec{\upsilon} \times \vec{a} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 (\hat{e}_T \times \hat{e}_N)$$

teniendo presente que $\vec{\upsilon} = \dot{\vec{r}}$ y que $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$, se tiene

$$\left| \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} \right| = \frac{1}{\rho} \left(\frac{ds}{dt} \right)^3$$

dado que $\dfrac{ds}{dt} = \left| \dot{\vec{r}} \right|$ se encuentra

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}}{\dot{\vec{r}}^{\,3}} \right|$$

También se puede escribir

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{\vec{\upsilon} \times \vec{a}}{\vec{\upsilon}^{\,3}} \right| = \frac{\left| \vec{\upsilon} \times \vec{a} \right|}{\upsilon^3}$$

Problema 1.5

Determinar el radio de curvatura del problema 1.3 utilizando la ecuación

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{\vec{\upsilon} \times \vec{a}}{\vec{\upsilon}^{\,3}} \right| = \frac{\left| \vec{\upsilon} \times \vec{a} \right|}{\upsilon^3}$$

Solución:

El vector posición está dado por $\vec{r} = R(\cos\varphi \ \hat{i} + sen\varphi \ \hat{j}) + p\varphi \ \hat{k}$

Entonces

$$\vec{\upsilon} = \dot{\vec{r}} = R(-\dot{\varphi}\, sen\varphi\, \hat{i} + \dot{\varphi}\cos\varphi\, \hat{j}) + p\dot{\varphi}\, \hat{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = R(-\ddot{\varphi}\, sen\varphi - \dot{\varphi}^2\cos\varphi)\hat{i} + R(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2 sen\varphi)\,\hat{j} + p\ddot{\varphi}\,\hat{k}$$

$$\vec{\upsilon}\times\vec{a} = R\,p\dot{\varphi}^3 sen\varphi\,\hat{i} - R\,p\dot{\varphi}^3\cos\varphi\,\hat{j} + R^2\dot{\varphi}^3\,\hat{k}$$

$$\left|\vec{\upsilon}\times\vec{a}\right| = R\sqrt{R^2+p^2}\;\dot{\varphi}^3$$

$$\vec{\upsilon}\cdot\vec{\upsilon} = \upsilon^2 = (R^2+p^2)\dot{\varphi}^2$$

$$\upsilon^3 = (R^2+p^2)^{3/2}\dot{\varphi}^3$$

Sustituyendo en $\frac{1}{\rho} = \left|\frac{\vec{\upsilon}\times\vec{a}}{\vec{\upsilon}^3}\right| = \frac{\left|\vec{\upsilon}\times\vec{a}\right|}{\upsilon^3}$, se encuentra

$$\frac{1}{\rho} = \frac{R}{R^2+p^2}$$

Problema 1.6

Determinar el radio de curvatura ρ para una curva suponiendo que $\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j}$, donde $x = x(t)$ e $y = y(t)$.

Solución:

Para determinar el valor de ρ, utilizamos la relación $\frac{1}{\rho} = \left|\frac{\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}}{\dot{\vec{r}}^3}\right|$, Entonces, dado que

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\,\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j} \quad \text{y} \quad \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\,\hat{i} + \ddot{y}\,\hat{j}$$

$$\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}} = (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})\,\hat{k}$$

se encuentra
$$\frac{1}{\rho} = \frac{(\dot{x}\,\ddot{y} - \dot{y}\,\ddot{x})}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}$$

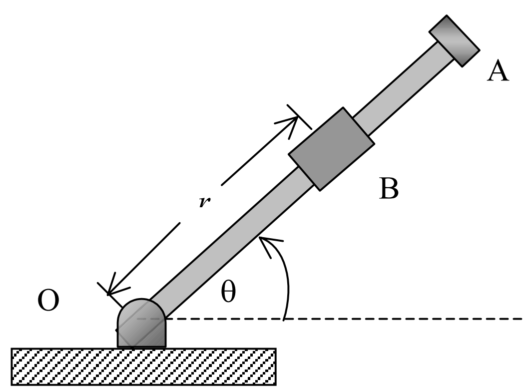
Por otro lado, si la ecuación de la curva plana es $y = f(x)$, se efectúa el cambio de variables respectivo $x = t$; $y = f(t)$; $\dot{x} = 1$; $\ddot{x} = 0$, y se obtiene la expresión para el radio de curvatura de una curva plana dada por

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}$$

Problema 1.7

La rotación del brazo de la figura con respecto a O, (cuya longitud es l) está dada por $\theta(t) = c_1 t^2$. El bloque B desliza a través del brazo en tal forma que su distancia con respecto a O es $r = c_2 - c_3 t^2$, (c_1, c_2, c_3 son constantes arbitrarias). Cuando el brazo OA ha girado en un ángulo $\theta = \theta_g$, determine para el bloque B.

a) Las componentes de la velocidad radial y transversal, y también su módulo y dirección.
b) Las componentes de la aceleración radial y transversal, y también su módulo y dirección.
c) La aceleración relativa del bloque con respecto al brazo.
d) Los valores numéricos de todo lo pedido anteriormente si $c_1 = 0.2$, $c_2 = 1.0$, $c_3 = 0.15$
   $\theta_g = 40$



Solución:

a) Las componentes radial y transversal para la velocidad están dadas en forma respectiva por $\upsilon_r = \dot{r}$ y $\upsilon_\theta = r\dot{\theta}$.

   El tiempo t lo determinamos a partir de $c_1 t^2 = \theta_g$ luego $t = \sqrt{\theta_g / c_1}$.

También

$$r = c_2 - c_3 t^2 \quad ; \quad \dot{r} = -2c_3 t \;\Rightarrow\; \ddot{r} = -2c_3$$

$$\theta(t) = c_1 t^2 \quad ; \quad \dot{\theta} = 2c_1 t \;\Rightarrow\; \ddot{\theta} = 2c_1$$

Entonces

$$\upsilon_r = \dot{r} = -2c_3 t = -2c_3(\sqrt{\theta_g / c_1})$$

$\upsilon_\theta = r\dot{\theta} = (c_2 - c_3 t^2)\,2c_1\,t$ Remplazando el valor del tiempo se tiene

$$\upsilon_\theta = (c_2 - c_3\theta_g / c_1)2c_1\sqrt{\theta_g / c_1}$$

El módulo de la velocidad se determina a partir de

$$|\vec{\upsilon}| = \upsilon = \sqrt{(\upsilon_r)^2 + (\upsilon_\theta)^2}$$

La dirección es $\gamma = \tan^{-1}\left(\dfrac{\upsilon_\theta}{\upsilon_r}\right)$

b) Las componentes radial y transversal para la aceleración están en forma respectiva por

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -2c_3 - (c_2 - c_3 t^2)(2c_1 t)^2 \qquad \text{con} \quad t = \sqrt{\theta_g / c_1}$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = (c_2 - c_3 t^2)2c_1 + 2(-2c_3 t)(2c_1 t) \qquad \text{con} \quad t = \sqrt{\theta_g / c_1}$$

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{(a_r)^2 + (a_\theta)^2}$$

La dirección es $\delta = \tan^{-1}\left(\dfrac{a_\theta}{a_r}\right)$

c) Dado que el movimiento del bloque con respecto al brazo es rectilíneo, y está definido solo por la variable r, se tiene que

$$a_{(OA)} = \ddot{r} = -2c_3$$

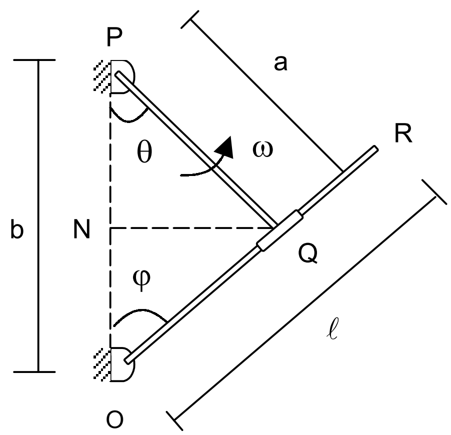
d) Se deja de tarea realizar los cálculos numéricos.

Problema 1.8

En el mecanismo de la figura, los ejes O y P son fijos. La manivela PQ gira con velocidad constante ω de modo que el bloque Q desliza a lo largo del brazo OR. Determinar:

a) La velocidad y aceleración angular del brazo OR

b) La velocidad $\vec{\upsilon}$ y la aceleración a del extremo R del brazo OR, en el instante que se muestra en la figura, en que PQ forma el ángulo θ .



Solución:

En la figura $\dot{\varphi}$ y $\ddot{\varphi}$ representan en forma respectiva la velocidad y la aceleración angular del brazo OR. De donde se tiene que

$$\tan\varphi = \frac{a sen\theta}{b - a\cos\theta}$$

derivando la expresión anterior con respecto al tiempo y teniendo presente que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dot{u} - u\dot{v}}{v^2}$$

se tiene

$$\dot{\varphi}\sec^2\varphi = \frac{(b - a\cos\theta)a\omega\cos\theta - a sen\theta\,(a\omega\, sen\theta)}{(b - a\cos\theta)^2} \quad ; \quad \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

de donde se encuentra que

$$\dot{\varphi}\sec^2\varphi = \frac{a\omega\,(b\cos\theta - a)}{(b - a\cos\theta)^2} \quad ;$$

Utilizando la identidad trigonométrica $\sec^2\varphi = 1+\tan^2\varphi$ y sustituyendo el valor de la tangente del ángulo se puede escribir

$$\dot{\varphi}\left[1+\left(\frac{a sen\theta}{b-a\cos\theta}\right)^2\right] = \frac{a\omega\,(b\cos\theta - a)}{(b-a\cos\theta)^2}$$

de donde se obtiene que

$$\dot{\varphi} = \frac{a\omega\,(b\cos\theta - a)}{(a^2+b^2-2ab\cos\theta)}$$

Derivando nuevamente con respecto al tiempo se tiene

$$\ddot{\varphi} = \frac{(a^2+b^2-2ab\cos\theta)(-ab\omega^2 sen\theta) - a\omega\,(b\cos\theta - a)(-2ab\omega\, sen\theta)}{(a^2+b^2-2ab\cos\theta)^2}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{(4a^2b^2\omega^2\cos\theta\, sen\theta - 3a^3b\omega^2 sen\theta - ab^3\omega^2 sen\theta)}{(a^2+b^2-2ab\cos\theta)^2}$$

luego

$$\ddot{\varphi} = \frac{a\omega^2\, b sen\theta\,(4ab\cos\theta - 3a^2 - b^2)}{(a^2+b^2-2ab\cos\theta)^2}$$

b) Para la velocidad se había encontrado que $\vec{\upsilon} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$. Sin embargo, para utilizar esta expresión en este caso, debemos considerar $\theta \equiv \varphi$, $r = l = Cte$, $\dot{r} = 0$ y $\ddot{r} = 0$. Entonces

$$\vec{\upsilon} = l\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi$$

reemplazando el valor de $\dot{\varphi}$ se encuentra

$$\vec{\upsilon} = \frac{al\omega\,(b\cos\theta - a)}{(a^2+b^2-2ab\cos\theta)}\hat{e}_\varphi$$

Para la aceleración se había encontrado que $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{e}_\theta$ imponiendo las condiciones de esta caso se tiene

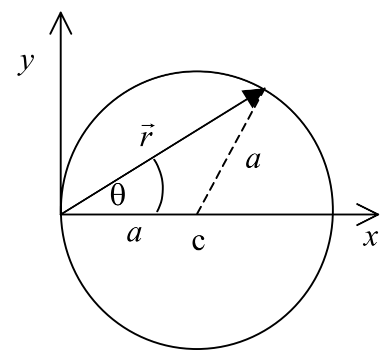
$$\vec{a} = (-l\dot{\varphi}^2)\,\hat{e}_r + (l\ddot{\varphi})\,\hat{e}_\varphi$$

Reemplazando los valores de $\dot{\varphi}$ y $\ddot{\varphi}$ se encuentra

$$\vec{a} = -l\left(\frac{a\omega\,(b\cos\theta - a)}{(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)}\right)^2 \hat{e}_r + l\left(\frac{a\omega^2\, b sen\theta\,(4ab\cos\theta - 3a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)^2}\right)\hat{e}_\varphi$$

Problema 1.9

Una partícula describe el círculo $r = 2a\cos\theta$, la componente de la aceleración dirigida hacia el origen es siempre cero. Demostrar que la componente transversal es: $\vec{a}_\theta = -4a\cos ec^2\theta\;\hat{e}_\theta$.



Solución:

Dado que en la figura anterior, el triángulo que se forma es isósceles, se tiene que $r = 2a\cos\theta$.

Las componentes radial y transversal para la aceleración están dadas en forma respectiva por

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad ; \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

Como $r = 2a\cos\theta$, entonces

$$\dot{r} = -2a\dot{\theta}\, sen\theta \qquad \ddot{r} = -2a\ddot{\theta}\, sen\theta - 2a\dot{\theta}^2\cos\theta$$

Notamos que en las ecuaciones anteriores no se conocen $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$. Luego para determinarlas, se utilizará la condición que $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \ddot{r} = r\dot{\theta}^2$, al sustituir los valores de r y $\ddot{r}$ se tiene

$$-2a\ddot{\theta}\, sen\theta - 2a\dot{\theta}^2\cos\theta = 2a\cos\theta\,\dot{\theta}^2$$

$$\ddot{\theta}\, sen\theta = -2\dot{\theta}^2\cos\theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{2\dot{\theta}^2\cos\theta}{sen\theta}$$

si se tiene que $\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\dot{\theta}$, entonces

$$\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = -\frac{2\dot{\theta}\cos\theta}{sen\theta}$$

separando variables

$$\frac{d\dot{\theta}}{\dot{\theta}} = -2\frac{\cos\theta}{sen\theta}d\theta$$

Integrando

$$\int\frac{d\dot{\theta}}{\dot{\theta}} = -2\int\frac{\cos\theta}{sen\theta}d\theta$$

$$Ln\dot{\theta} = -2Ln\,sen\theta + C$$

Eligiendo $C = 0$ se tiene

$$Ln\dot{\theta} = Ln\,sen^{-2}\theta \quad \Rightarrow$$

$$\dot{\theta} = sen^{-2}\theta$$

de donde $$\ddot{\theta} = -2\frac{\cos\theta}{sen^5\theta}$$

Sustituyendo en la componente transversal de la aceleración, se encuentra

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = -4a\cos\theta\,\frac{\cos\theta}{sen^5\theta} - 4a\,sen\theta\;\;sen^{-4}\theta$$

$$a_\theta = -4a\cos\theta\,\frac{\cos\theta}{sen^5\theta} - 4a\,sen\theta\;\;sen^{-4}\theta$$

$$a_\theta = -4a\frac{\cos^2\theta}{sen^5\theta} - 4a\frac{1}{sen^3\theta} = -\frac{4a}{sen^3\theta}\left(\frac{\cos^2\theta}{sen^2\theta} + 1\right)$$

$$a_\theta = -\frac{4a}{sen^3\theta}\left(\frac{1}{sen^2\theta}\right) = -4a\cos ec^5\theta$$

Problema 1.10

Una partícula se mueve en el espacio de modo que sus coordenadas cilíndricas están dadas por

$$r = 2t$$
$$\phi = \pi\, t$$
$$z = 3t^2$$

Determine la velocidad y la aceleración para cualquier tiempo.

Solución:

La velocidad y la aceleración (en coordenadas cilíndricas) se expresan respectivamente en la forma

$$\vec{\upsilon} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi + \dot{z}\,\hat{e}_z \qquad ; \qquad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\,\hat{e}_r + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\,\hat{e}_\phi + \ddot{z}\,\hat{e}_z$$

donde

$$\dot{r} = 2 \;\; ; \;\; \ddot{r} = 0$$
$$\dot{\phi} = \pi \;\; ; \;\; \ddot{\phi} = 0$$
$$\dot{z} = 6t \;\; ; \;\; \ddot{z} = 6$$

luego

$$\vec{\upsilon} = 2\hat{e}_r + 2\pi t\,\hat{e}_\phi + 6t\,\hat{e}_z \qquad ; \qquad \vec{a} = -2\pi^2\, t\,\hat{e}_r + 4\pi\,\hat{e}_\phi + 6\,\hat{e}_z$$

Problema 1.11

El vector posición de una partícula que se mueve a lo largo de una curva que se desarrolla en tres dimensiones está dado por $\vec{r}_1 = 2t^2 \cos\phi\,\hat{i} + 2t^2 sen\phi\,\hat{j} + 2t^3\hat{k}$ en donde $\phi = \pi\, t^2$. Describir el movimiento en ***coordenadas cilíndricas***.

Solución:

La posición, velocidad y la aceleración (en coordenadas cilíndricas) se expresan en la forma

$$\vec{r}_1 = r\,\hat{e}_r + z\,\hat{e}_z$$
$$\vec{\upsilon}_1 = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi + \dot{z}\,\hat{e}_z$$
$$\vec{a}_1 = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\,\hat{e}_r + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\,\hat{e}_\phi + \ddot{z}\,\hat{e}_z$$

Para este caso se tiene

$$\vec{r} = 2t^2 \cos\phi\,\hat{i} + 2t^2 sen\phi\,\hat{j} \quad \Rightarrow \quad r = 2t^2 \quad ; \quad \dot{r} = 4t \quad ; \quad \ddot{r} = 4$$

$$\phi = \pi t^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi} = 2\pi t \quad ; \quad \ddot{\phi} = 2\pi$$

$$z = 2t^3 \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = 6t^2 \quad ; \quad \ddot{z} = 12t$$

Sustituyendo los valores anteriores se encuentra

$$\vec{r}_1 = 2t^2\,\hat{e}_r + 2t^3\,\hat{e}_z$$

$$\vec{\upsilon}_1 = 4t\,\hat{e}_r + 4\pi\,t^3\,\hat{e}_\phi + 6t^2\,\hat{e}_z$$

$$\vec{a}_1 = 4(1 - 2\pi^2 t^4)\,\hat{e}_r + 20\pi\,t^2\,\hat{e}_\phi + 12t\,\hat{e}_z$$

Problema 1.12

Las coordenadas de una partícula están dadas por

$$x = r\cos(\upsilon_0 t/r) \quad ; \quad y = r\,sen(\upsilon_0 t/r) \quad ; \quad z = \upsilon_0 t + (1/2)bt^2$$

Determine la velocidad, la aceleración y sus respectivas magnitudes en función del tiempo (r, υ_0 y b son constantes)

Solución:

Utilizando ***coordenadas cilíndricas*** se tiene

$$\vec{r} = r\,\hat{e}_r + z\,\hat{e}_z$$

$$\vec{\upsilon} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi + \dot{z}\,\hat{e}_z$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\,\hat{e}_r + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\,\hat{e}_\phi + \ddot{z}\,\hat{e}_z$$

donde $\sqrt{x^2 + y^2} = |\vec{r}| = r = \text{Cte.} \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$

$$\phi = (\upsilon_0/r)t \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi} = (\upsilon_0/r) \quad ; \quad \ddot{\phi} = 0$$

$$z = \upsilon_0 t + (1/2)bt^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = \upsilon_0 + t \quad ; \quad \ddot{z} = 1$$

Remplazando se encuentra

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_0\,\hat{e}_\phi + (\upsilon_0 + t)\,\hat{e}_z$$

$$\vec{a} = (-\upsilon_0{}^2 / r)\,\hat{e}_r + b\,\hat{e}_z$$

de donde se tiene que sus magnitudes son

$$\upsilon = \sqrt{2\upsilon_0^2 + 2\upsilon_0 bt + bt^2} = \sqrt{2\upsilon_0(\upsilon_0 + bt) + bt^2}$$

$$a = \sqrt{(\upsilon_0^2 / r)^2 + b^2}$$

Problema 1.13

El movimiento de una partícula sobre la superficie de un ***cilindro*** circular está definido por las relaciones $r = A$; $\phi = 2\pi t$; $z = (1/4)At^2$; (A es una constante).
Determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración de la partícula para cualquier instante t.

Solución:

Utilizando ***coordenadas cilíndricas*** se tiene

$$\vec{\upsilon} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi + \dot{z}\,\hat{e}_z$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\,\hat{e}_r + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\,\hat{e}_\phi + \ddot{z}\,\hat{e}_z$$

donde $$r = A = Cte \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \ddot{r} = 0$$

$$\phi = 2\pi\, t \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi} = 2\pi \quad ; \quad \ddot{\phi} = 0$$

$$z = (A/4)t^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = (A/2)t \quad ; \quad \ddot{z} = A/2$$

Remplazando se encuentra

$$\vec{\upsilon} = 2\pi A\,\hat{e}_\phi + (A/2)t\,\hat{e}_z$$

$$\vec{a} = (-4\pi^2 A)\,\hat{e}_r + (A/2)\,\hat{e}_z$$

de donde se tiene que sus magnitudes son

$$\upsilon = \sqrt{4\pi^2 A^2 + A^2 t^2 / 4} = (A/2)\sqrt{(4\pi)^2 + t^2}$$

$$a = \sqrt{16\pi^4 A^2 + A^2 / 4} = (A/2)\sqrt{64\pi^4 + 1}$$

Problema 1.14

Si la trayectoria de una partícula en ***coordenadas esféricas*** está expresada por

$$r = k \quad ; \quad \theta = (\pi/2)\cos(2\omega t) \quad ; \quad \phi = \pi(1-\cos(\omega t))$$

Determine la velocidad y la aceleración para cualquier tiempo t.

Solución:

La velocidad y la aceleración en coordenadas esféricas está dadas por

$$\vec{\upsilon} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\vartheta + r\dot{\phi}\,sen\theta\,\hat{e}_\phi$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\,sen^2\theta)\,\hat{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2\,sen\theta\,\cos\theta)\,\hat{e}_\vartheta$$
$$+ (2\dot{r}\dot{\phi}\,sen\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta + r\ddot{\phi}\,sen\theta)\,\hat{e}_\phi$$

en este caso

$$r = k = Cte\,, \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \ddot{r} = 0$$

$$\theta = (\pi/2)\cos(2\omega t) \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = -\pi\omega\;sen(2\omega t) \quad ; \quad \ddot{\theta} = -2\pi\omega^2\cos(2\omega t)$$

$$\phi = \pi(1-\cos(\omega t)) \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi} = \pi\omega\,sen(\omega t) \quad ; \quad \ddot{\phi} = \pi\omega^2\cos(\omega t)$$

Remplazando, para la velocidad se encuentra

$$\vec{\upsilon} = -k\pi\omega\;sen(2\omega t)\,\hat{e}_\vartheta + k\pi\omega\,sen(\omega t)\,sen\theta\,\hat{e}_\phi$$

Y para la aceleración se obtiene

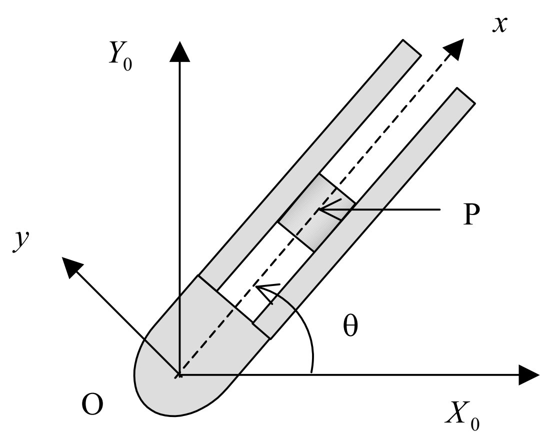
$$\vec{a} = k\pi^2\omega^2[-sen^2(2\omega t) - sen^2(\omega t)sen^2\theta]\hat{e}_r$$
$$+[-2k\pi\omega^2\cos(2\omega t) - k\pi^2\omega^2 sen^2(\omega t)sen\theta\,\cos\theta]\hat{e}_\vartheta$$
$$+[-2k\pi^2\omega^2 sen(\omega t)sen(2\omega t)\cos\theta + k\pi\omega^2\cos(\omega t)sen\theta]\hat{e}_\phi$$

Problema 1.15

(Coordenadas móviles)

El brazo ranurado de la figura gira con una rapidez angular constante ω_0 en el sentido de los punteros del reloj, y en el plano X_0Y_0. El bloque se mueve alejándose del origen del brazo con una velocidad constante $\upsilon_0 = Cte$. Cuando $\theta = \theta_0$ y $OP = l$. Determine para un punto P sobre el bloque.

a) La velocidad.
b) La aceleración.
c) La velocidad y la aceleración si $\omega_0 = 2[\text{rad/s}]$; $\upsilon_0 = 2[\text{m/s}]$; $OP = l = 2.5[\text{m}]$.



Solución:

a) El sistema móvil de coordenadas se une al brazo ranurado de manera que el movimiento del bloque en ese sistema sea una traslación pura.

La velocidad del punto P sobre el bloque (en general) está dada por

$$\dot{\vec{r}}_P = \vec{\upsilon}_P = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{r}_R + \vec{\upsilon}_R \quad ; \qquad r_R = \rho$$

En este caso $\dot{\vec{R}} = 0$ puesto que el origen O' está fijo, $\vec{\omega} = \omega_0(-\hat{k})$; $\vec{\upsilon}_R = \upsilon_0\,\hat{i}$; $\vec{r}_R = l\,\hat{i}$ remplazando en la ecuación para la velocidad se tiene

$$\vec{\upsilon}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_R + \vec{\upsilon}_R = \omega_0 l(\hat{k} \times \hat{i}) + \upsilon_0\,\hat{i}$$

$$\vec{\upsilon}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_R + \vec{\upsilon}_R = -\omega_0 l\,\hat{j} + \upsilon_0\,\hat{i}$$

b) Para determinar la aceleración, utilizamos la ecuación.

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a}_P = \ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_R + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_R) + \vec{a}_R + 2\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}_R$$

Dado que $\ddot{\vec{R}} = 0$; $\dot{\vec{\omega}} = 0$; $\vec{a}_R = 0$, entonces la aceleración está dada por

$$\vec{a}_P = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_R) + 2\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}_R$$

$$\vec{a}_P = \omega_0{}^2 l\,\hat{k} \times (\hat{j}) + 2\omega_0\upsilon_0\hat{k} \times \hat{i} = -\omega_0{}^2 l\,\hat{i} - 2\omega_0\upsilon_0\hat{j}$$

c) Remplazando valores $\omega_0 = 2[\text{rad/s}]$ $\upsilon_0 = 2[\text{m/s}]$ $OP = l = 2.5[\text{m}]$ se encuentra

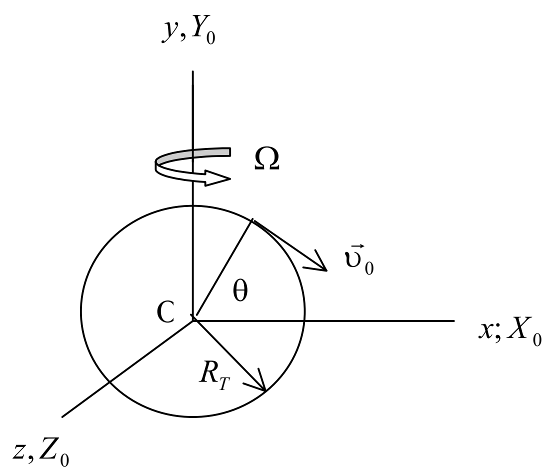
$$\vec{\upsilon}_P = -\omega_0 l\,\hat{j} + l\,\hat{i} \;\Rightarrow\; \vec{\upsilon}_P = (-5\hat{j} + 2.5\hat{i})[\text{m/s}]$$

$$\vec{a}_P = -\omega_0{}^2 l\,\hat{i} - 2\omega_0\upsilon_0\hat{j} \;\Rightarrow\; \vec{a}_P = -(10\hat{i} + 8\hat{j})[\text{m/s}^2]$$

Problema 1.16

(Coordenadas móviles)

Una partícula se mueve con una rapidez relativa constante υ_0 a lo largo de la periferia de un tubo circular de radio R_T, mientras el tubo está girando una velocidad angular constante alrededor del diámetro, como se muestra en la siguiente figura. Determine la velocidad y la aceleración de la partícula en la posición indicada.



Solución:

Se consideran los dos sistemas que se muestran en la figura, el fijo $X_0Y_0Z_0$ y el móvil xyz. Dichos sistemas coinciden y los ejes móviles x e y están en el plano del tubo. El eje Y_0 es el eje de rotación del tubo.

El movimiento del sistema de coordenadas móvil está dado por

$$\vec{R} = \overrightarrow{OO'} = 0$$

$$\vec{V} = \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_{fijo} = 0 \quad \rightarrow \text{velocidad lineal del origen móvil}$$

$$\ddot{\vec{R}} = 0 \ ; \qquad \vec{\omega} = \Omega\,\hat{j} = Cte \quad ; \qquad \dot{\vec{\omega}} = 0$$

El movimiento de la partícula con respecto a las coordenadas móviles, está descrito por

$$\vec{r}_R = R_T \cos\theta\,\hat{i} + R_T\, sen\theta\,\hat{j}$$

Por tratarse de un movimiento circular $\dot{\vec{r}}_R = \vec{\omega}_0 \times \vec{r}_R$ donde $\vec{\omega}_0 = \omega_0(-\hat{k})$;$\omega_0 = \dot{\theta}$. se tiene

$$\dot{\vec{r}}_R = \omega_0(-\hat{k}) \times (R_T \cos\theta\,\hat{i} + R_T sen\theta\,\hat{j}) = (\upsilon_0\, sen\theta\,\hat{i} - \upsilon_0 \cos\theta\,\hat{j})$$

donde $\upsilon_0 = \omega_0 R_T$,

$$\ddot{\vec{r}}_R = \vec{\omega}_0 \times \dot{\vec{r}}_R = \omega_0(-\hat{k}) \times \dot{\vec{r}}_R = -(\upsilon_0^2 / R_T)(\cos\theta\,\hat{i} + sen\theta\,\hat{j})$$

El valor de la velocidad se puede determinar a partir de la ecuación dada por

$$\vec{\upsilon}_{fijo} = \vec{V} + \dot{\vec{r}}_R + \vec{\omega} \times \vec{r}_R$$

Reemplazando las magnitudes correspondientes se encuentra

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_0 sen\theta\,\hat{i} - \upsilon_0 \cos\theta\,\hat{j} - R_T\Omega\cos\,\hat{k}$$

La aceleración se obtiene utilizando la ecuación

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_R + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_R) + \vec{a}_R + 2\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}_R$$

Realizando las sustituciones correspondientes en la ecuación anterior se tiene

$$\ddot{\vec{r}} = \Omega\,\hat{j}\times(\Omega\,\hat{j}\times(\;R_T\cos\theta\;\hat{i} + R_T sen\theta\;\hat{j})) - (\upsilon_0^2/R_T)(\cos\theta\;\hat{i} + \text{sen}\theta\;\hat{j}) +$$

$$+\;2\Omega\,\hat{j}\times(\upsilon_0 sen\theta\;\hat{i} - \upsilon_0\cos\theta\;\hat{j})$$

Teniendo presente que $\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}$; $\hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}$; $\hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$ y que el producto cruz entre dos vectores es anticonmutativo, se encuentra que la aceleración está dada por

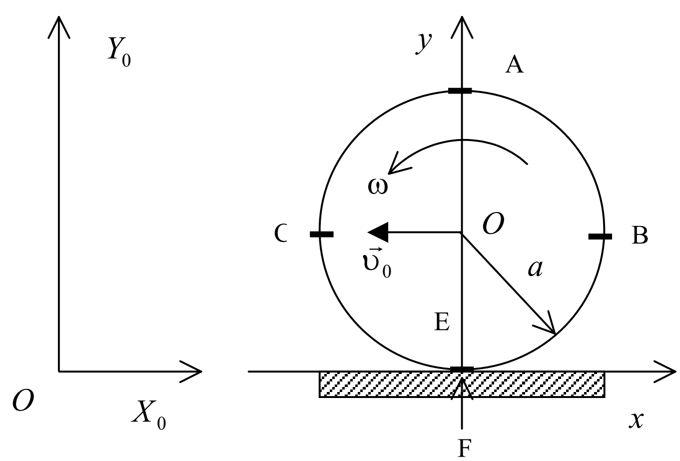
$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = -(\upsilon_0^2/R_T + R_T\Omega^2)\cos\theta\;\hat{i} - (\upsilon_0^2/R_T)\,\text{sen}\theta\;\hat{j} - 2\Omega\upsilon_0\,\text{sen}\theta\;\hat{k}$$

Problema 1.17

(Coordenadas móviles)

El centro del disco de la figura se está moviendo con una velocidad $\vec{\upsilon}_0$ y rueda sin deslizar con una velocidad angular $\vec{\omega}$. Determine:

a) Las velocidades de los puntos A, B y C.
b) Las magnitudes de las velocidades de los puntos respectivos si $a = 2[\text{m}]$ y $\upsilon_0 = 4[\text{m/s}]$.



Solución:

a) Dado que el disco gira sin deslizar, entonces el punto E de la periferia y el punto F del plano (coincidentes en el instante en que el disco está en la posición indicada), no se mueven uno con respecto al otro, y la velocidad de E relativa F es cero, luego el disco tiende a girar en torno a un punto de contacto, por el cual se debe hacer pasar un eje instantáneo de rotación.

Las velocidades para los puntos respectivos, está dadas por

$$\dot{\vec{r}}_A = \vec{\upsilon}_A = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{EA}$$

$$\dot{\vec{r}}_B = \vec{\upsilon}_B = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{EB}$$

$$\dot{\vec{r}}_C = \vec{\upsilon}_C = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{EC}$$

Dado que la velocidad del punto E es cero, se tien que $\dot{\vec{R}} = 0$, entonces

$$\dot{\vec{r}}_A = \vec{\upsilon}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_{EA} \quad ; \qquad r_{EA} = 2a$$

$$\dot{\vec{r}}_B = \vec{\upsilon}_B = \vec{\omega} \times \vec{r}_{EB} \quad ; \qquad r_{EB} = \sqrt{2}\, a$$

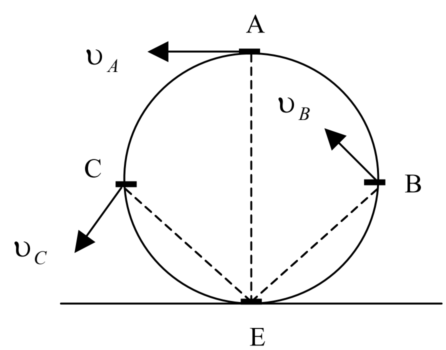
$$\dot{\vec{r}}_C = \vec{\upsilon}_C = \vec{\omega} \times \vec{r}_{EC} \quad ; \qquad r_{EC} = \sqrt{2}\, a$$

b) Para $a = 2[\text{m}]$ y $\upsilon_0 = 4[\text{m/s}]$ se encuentra $\omega = \dfrac{\upsilon_0}{a} = 2\,[\text{rad/s}]$ con lo cual

$$\upsilon_A = 4[\text{m/s}]$$

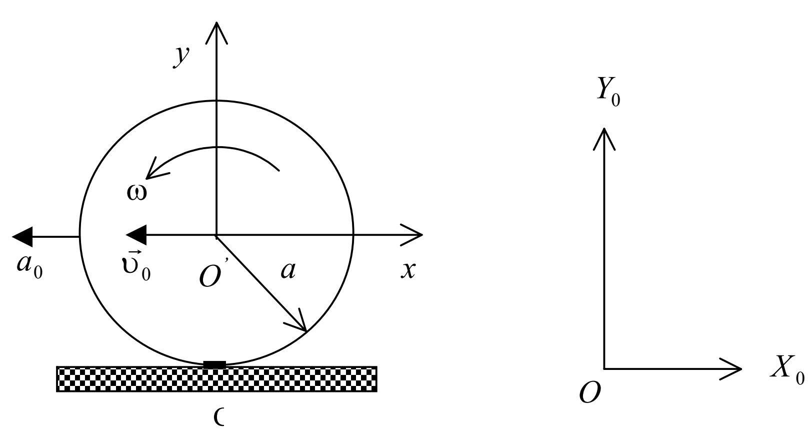
$$\upsilon_B = 2\sqrt{2}\,[\text{m/s}]$$

$$\upsilon_C = 2\sqrt{2}\,[\text{m/s}]$$



Problema 1.18

Demostrar que todo centro instantáneo de rotación (representado por el punto C de la figura), de velocidad cero tiene una aceleración.



Solución:

Utilizando la expresión general para la aceleración, para el punto C se puede escribir

$$\ddot{\vec{r}}_C = \ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_R + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_R) + \vec{a}_R + 2\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}_R$$

donde

$$\ddot{\vec{R}} = -a_0\,\hat{i} \quad ; \quad \vec{\omega} = \omega\,\hat{k} \quad ; \quad \dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}\,\hat{k} \quad ; \quad \vec{r}_R = -O'C\,\hat{j} \quad ; \quad \vec{a}_R = 0 \quad ; \quad \vec{\upsilon}_R = 0$$

luego

$$\ddot{\vec{r}}_C = -a_0\hat{i} + O'C\dot{\omega}\;\hat{i} + O'C\omega^2\;\hat{j}$$

$$\ddot{\vec{r}}_C = (-a_0 + O'C\dot{\omega}\,)\hat{i} + O'C\omega^2\;\hat{j}$$

Dado que el punto C es el centro instantáneo de rotación del disco cuando rueda sin deslizar, entonces

$$\vec{\upsilon}_0 = \vec{\omega} \times \overrightarrow{CO'} \quad \Rightarrow \quad -\upsilon_0\hat{i} = \omega\,\hat{k} \times CO'\,\hat{j} = -\omega\,CO'\,\hat{i}$$

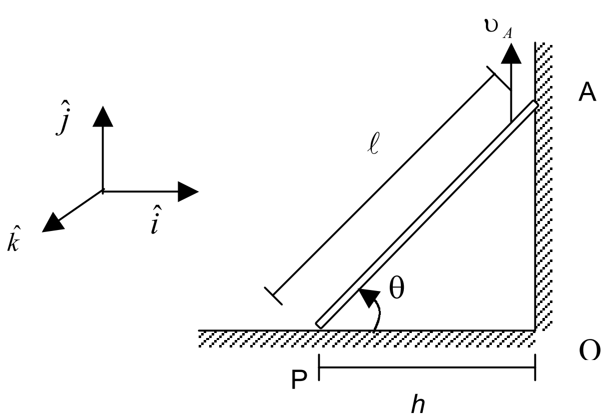
$$\upsilon_0 = \omega\,OC'$$

derivando con respecto al tiempo se tiene $\dot{\upsilon}_0 = \dot{\omega}\,OC' = a_0$. Sustituyendo en $\ddot{\vec{r}}_C = (-a_0 + O'C\dot{\omega}\,)\hat{i} + O'C\omega^2\;\hat{j}$, se encuentra

$$\ddot{\vec{r}}_C = \vec{a}_C = O'C\omega^2\;\hat{j}$$

Problema 1.19

Una barra de largo l se mueve sobre una pared vertical, de modo que su extremo A se mueve verticalmente con $\vec{\upsilon}_A = \upsilon_A\;\hat{j} = cte$. Calcular la velocidad angular y la velocidad del punto P de la barra.



Solución:

La velocdad del punto P está dada por

$$\vec{\upsilon}_p = \vec{\upsilon}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AP}$$

donde $$\vec{\upsilon}_A = \upsilon_A \hat{j}$$

$$\overrightarrow{AP} = -AO\,\hat{j} - h\,\hat{i}\,, \quad \text{de la figura} \quad AO = h\tan\theta\,, \quad \text{luego}$$

$$\overline{AP} = -h\left(\hat{i} + \tan\theta\ \hat{j}\right)$$

y $$\vec{\omega} = \omega\ \hat{k}$$

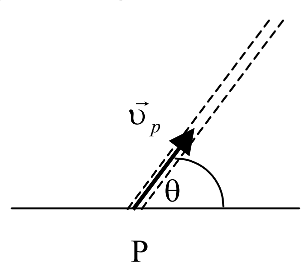
Sustituyendo en la proimera ecuación, se encuantra

$$\vec{\upsilon}_p = \upsilon_A \hat{j} - \omega\ \hat{k} \times h\left(\hat{i} + \tan\theta\ \hat{j}\right)$$

$$\vec{\upsilon}_p = \upsilon_A\ \hat{j} - \omega\ h\hat{j} + \omega\ h\tan\theta\ \hat{i}$$

o $$\vec{\upsilon}_p = (\upsilon_A - \omega\ h)\,\hat{j} + \omega\ h\tan\theta\ \hat{i}$$

Por otro lado, con ayuda de la siguiente figura



también se puede escribir $$\vec{\upsilon}_p = \upsilon_p\left(\cos\theta\ \hat{i} + sen\theta\ \hat{j}\right)$$

comparando las componentes de estas dos últimas expresiones se tiene

$$\omega\ h\tan\theta = \upsilon_p \cos\theta$$
$$\upsilon_A - \omega\ h = \upsilon_p\ sen\theta$$

de donde se tiene
$$\upsilon_p = \frac{\omega\, h \tan\theta}{\cos\theta}$$

y
$$\upsilon_p = \frac{\upsilon_A - \omega\, h}{sen\theta}$$

igualando las dos última ecuaciones, se obtiene

$$\upsilon_A = \omega\, h\left(1 + \tan^2\theta\right) = \frac{\omega\, h}{\cos^2\theta}$$

de donde se encuentra que la velocidad angular de la barra está dada por

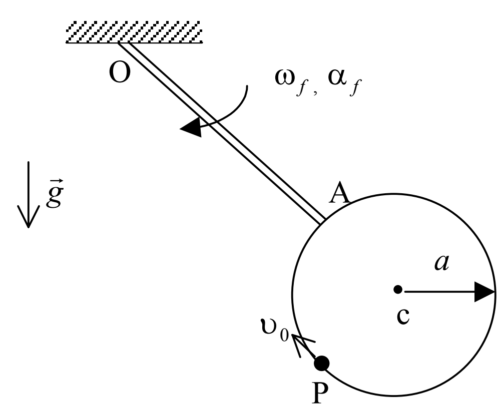
$$\omega = \frac{\upsilon_A}{h}\cos^2\theta \qquad \text{o} \qquad \vec{\omega} = \frac{\upsilon_A}{h}\cos^2\theta\,\hat{k}$$

reemplazando el valor de ω en $\upsilon_p = \dfrac{\omega\, h \tan\theta}{\cos\theta}$, se encuentra que velocidad del punto P de la barra es

$$\upsilon_p = \upsilon_A\, sen\theta$$

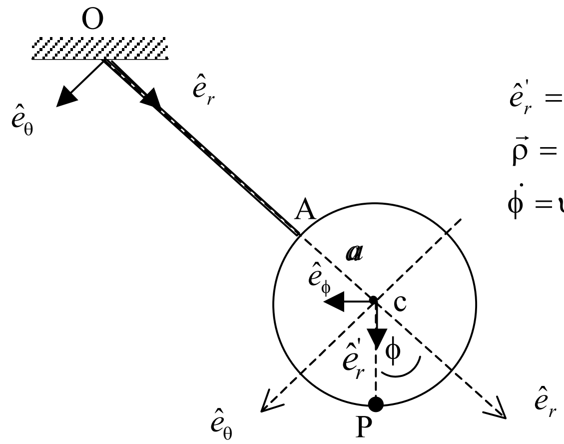
Problema 1.20

El disco pequeño de radio a está soldado a la barra OA (de longitud $3\,a$), la cual gira en torno al eje fijo horizontal O, con velocidad angular ω_f y aceleración angular α_f. Determine la aceleración (con respecto a un sistema fijo) de una partícula P que recorre el borde del disco con una rapidez υ_0 constante relativa al disco.



Solución:

Consideremos la siguiente figura



$$\hat{e}_r^{'} = \cos\phi\,\hat{e}_r + sen\phi\,\hat{e}_\theta$$
$$\vec{\rho} = a\hat{e}_r^{'} = a(\cos\phi\,\hat{e}_r + sen\phi\,\hat{e}_\theta)$$
$$\dot{\phi} = \upsilon_0 / a$$

Con respecto a un sistema fijo en O, y un sistema móvil en c, se tiene

$$\vec{a} = \vec{a}_{CO} + \ddot{\vec{\rho}}_{\mathrm{Re}l} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}}_{\mathrm{Re}l}$$

Dado que el sistema móvil no gira, $\vec{\omega} = 0$; $\dot{\vec{\omega}} = 0$, entonces

$$\vec{a} = \vec{a}_{CO} + \ddot{\vec{\rho}}_{\mathrm{Re}l}$$

donde $$\vec{a}_{CO} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta$$

De la figura se tiene que $r = 4a$=Cte. $\dot{r} = \ddot{r} = 0$, $\dot{\theta} = \omega_f$ y $\ddot{\theta} = \alpha_f$, reemplazando en la ecuación anterior se obtiene

$$\vec{a}_{CO} = -4a\omega_f^2\hat{e}_r + 4a\alpha_f\hat{e}_\theta$$

Por otro lado, $\vec{\rho} = a(\cos\phi\,\hat{e}_r + sen\phi\,\hat{e}_\theta)$, por tratarse de un movimiento circular, se puede escribir

$$\ddot{\vec{\rho}}_{\mathrm{Re}l} = -\frac{\upsilon_0^2}{a}(\cos\phi\,\hat{e}_r + sen\phi\,\hat{e}_\theta)$$

La expresión anterior, también se puede obtener a partir de $\ddot{\vec{\rho}}_{\mathrm{Re}l} = \ddot{\rho}_r\hat{e}_r + \ddot{\rho}_\theta\hat{e}_\theta$, donde $\rho_r = a\cos\phi$ y $\rho_\theta = a\,sen\phi$, siendo

$$\vec{a} \equiv \vec{a}_{CO} + \ddot{\vec{\rho}}_{\mathrm{Re}l} = -4a\omega_f^2\hat{e}_r + 4a\alpha_f\hat{e}_\theta - \frac{\upsilon_0^2}{a}(\cos\phi\,\hat{e}_r + sen\phi\,\hat{e}_\theta)$$
$$\vec{a}_P = -(4a\omega_f^2\hat{e}_r + \frac{\upsilon_0^2}{a}\cos\phi)\hat{e}_r + (4a\alpha_f - \frac{\upsilon_0^2}{a}sen\phi)\hat{e}_\theta$$