UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS

VICERRECTORADO

CEPIES
CENTRO DE ESTUDIOS DE POSTGRADO
Y DE INVESTIGACION EN EDUCACION SUPERIOR

EDUCACIÓN MATEMÁTICA MEDIANTE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

TESIS DE GRADO PARA OPTAR AL TITULO DE:
MAGÍSTER SCIENTIARUM EN EDUCACIÓN SUPERIOR

AUTOR : Lic. Luis Tordoya Lazo
TUTOR : Dr. David Mora

LA PAZ – BOLIVIA
2006

Luis Tordoya Lazo

EDUCACIÓN MATEMÁTICA MEDIANTE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Tutor: David Mora

CEPIES

UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRES

VICERRECTORADO

CENTRO DE ESTUDIOS DE POSTGRADO

Y DE INVESTIGACION EN EDUCACION SUPERIOR

La presente tesis titulada:

“EDUCACIÓN MATEMÁTICA MEDIANTE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS”

Para optar al Título y Grado Académico de Magíster Scientiarum en Educación Superior del postulante:

Lic. Luis Tordoya Lazo

Ha sido …… según reglamento de tesis vigente en el Centro de Estudios de Postgrado y de Investigación en Educación Superior CEPIES por el siguiente tribunal:

Presidente: ……..…… …….……

Director CEPIES: ……..…… …….……

Tribunal: …….. ……..

Tribunal: …….. ……..

Tutor: …….. ……..

La Paz, …….

La Paz – Bolivia

2006

Al presentar esta tesis como uno de los requisitos de acuerdo a Reglamento de Postgrado de la Universidad Boliviana, la Universidad Mayor de San Andrés y del Centro de Estudios de Postgrado y de Investigación en Educación Superior CEPIES para la obtención del Grado Académico de Magíster Scientiarum en Educación Superior, autorizo al CEPIES y/o la Biblioteca de La Universidad Mayor de San Andrés y del CEPIES, para que haga de la tesis un documento disponible para su consulta de acuerdo a las normas universitarias.

Luis Tordoya Lazo

C.I. 499695 L.P.

La Paz, Mayo de 2006

A Julieta y Luis
A Esther

Agradecimientos

En primer lugar deseo expresar mi agradecimiento a mi tutor de tesis, David Mora por el tiempo que me ha dedicado, sus consejos y su inestimable ayuda sin la cual no hubiera sido posible la realización de esta tesis.

A mis compañeros Clemente Cáceres y Oscar Bobarín por la ayuda prestada en la realización del trabajo de campo. Particularmente agradecer a Santiago Conde, por el apoyo y motivación para continuar en el camino de la Educación

A la Dirección del Curso Prefacultativo de la Facultad de Ciencias Puras y Naturales, por proporcionarme información necesaria, como fuente fundamental para el presente trabajo.

Al Centro de Estudios de Postgrado y de Investigación en Educación Superior (CEPIES), por haber sido el Centro Educativo, de mi nueva formación en Educación Superior.

Quiero agradecer a mi familia y de manera especial a mi esposa Esther, su incondicional apoyo y su paciencia y comprensión durante la realización de este trabajo.

Finalmente, quiero agradecer de manera particular a mis hijos: Julieta y Luis, por toda la ayuda prestada en la transcripción del presente trabajo.

Nadie tiene derecho a la verdad…
Solamente a lo que las pruebas demuestran, y nada más

E. Howard Hunt

ÍNDICE DE CONTENIDOS

RESUMEN EN ESPAÑOL v

RESUMEN EN INGLES vi

INTRODUCCIÓN 1

1. *IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA* 3

1.1 ALGUNAS CARACTERÍSTICAS DE LOS PROGRAMAS DE ESTUDIO UTILIZADOS *3*

1.2 ALGUNAS CARACTERÍSTICAS DE LOS EXÁMENES PARCIALES Y LOS TRABAJOS PRÁCTICOS DESARROLLADOS POR LOS ESTUDIANTES *6*

1.3 RESPECTO A LA BIBLIOGRAFÍA UTILIZADA POR DOCENTES Y ESTUDIANTES *7*

1.4 EN CUANTO A LOS PROCESOS DE TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA Y LA RELACIÓN CON LA EPISTEMOLOGÍA DE LA MATEMÁTICA *7*

1.5 REFERENCIAS Y REPRESENTACIÓN ESTADÍSTICA DE RESULTADOS DE CALIFICACIONES DEL CURSO PREFACULTATIVO DE LAS GESTIONES: 1999 - 2004 ..... *8*

2. *PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA* 17

3. OBJETIVOS 27

4. MARCO TEÓRICO 28

4.1 DESARROLLO DE LA CATEGORIA O HILO CONDUCTOR DIMENSIÓN MEDIANTE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS *29*
4.1.1 INTRODUCCIÓN 29
4.1.2 MEDICIÓN DE VOLUMENES 30
4.1.3 REPRESENTACIÓN VISUAL DE DIMENSIONES 30
4.1.4 COORDENADAS EN DIFERENTES DIMENSIONES 31
4.1.5 CORTES EN DIFERENTES DIMENSIONES 32
4.1.6 COMBINACIONES DE CONTEO 33
4.1.7 DIMENSIÓN Y MEDIDA 34
4.1.8 PROBLEMA SOBRE DIMENSION (AUTOSEMEJANZA) 36

4.2 DESARROLLO DE LA CATEGORIA O HILO CONDUCTOR CANTIDAD MEDIANTE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS *41*
4.2.1 INTRODUCCIÓN 41
4.2.2 CANTIDAD EN LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES 42
4.2.3 CONCEPTOS FUNDAMENTALES 43
4.2.4 PROCEDIMIENTOS 47
4.2.5 SISTEMAS NUMÉRICOS 49
4.2.6 APLICACIONES 52
4.2.7 METAS 52
4.2.8 MATEMATIZACIÓN DE LOS CONCEPTOS EMPÍRICOS DE MAGNITUD Y MEDIDA 53
4.2.9 LA MEDIDA COMO FUNCIÓN 56

4.3 DESARROLLO DE LA CATEGORIA O HILO CONDUCTOR INCERTIDUMBRE MEDIANTE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS *62*
4.3.1 INTRODUCCIÓN 62
4.3.2 PENSAMIENTO ESTADÍSTICO 63

4.4 DESARROLLO DE LA CATEGORIA O HILO CONDUCTOR FORMA MEDIANTE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS *68*
4.4.1 INTRODUCCIÓN 68
4.4.2 VISUALIZACIÓN 72
4.4.3 CUESTIONES CURRICULARES 72

4.5 DESARROLLO DE LA CATEGORIA O HILO CONDUCTOR CAMBIO MEDIANTE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS *76*
4.5.1 INTRODUCCIÓN 76
4.5.2 LAS MATEMATICAS DEL CAMBIO 76
4.5.3 EJEMPLOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE PERMITEN EL DESARROLLO DEL FENÓMENO CAMBIO 87

4.6 FUNDAMENTOS TEÓRICOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS *100*
4.6.1 INTRODUCCIÓN 100
4.6.2 PROBLEMA CIENTÍFICO 101
4.6.3 INTERÉS POR LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS 103
4.6.4 CONCEPTUALIZACIÓN DE PROBLEMA MATEMÁTICO 103
4.6.5 CLASIFICACIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS SIMPLES 110
4.6.6 PROTOCOLO PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: ESTRUCTURA, DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LAS FASES 115
4.6.7 VARIABLES INTERVINIENTES EN EL ESTUDIO DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS 120
4.6.8 MÉTODOS, TÉCNICAS Y ESTRATEGIAS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS. 126
Ejemplo de un proceso de comprensión por modelación 130

4.7 VALORES DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA QUE DEBEN DESARROLLARSE MEDIANTE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS *135*

4.7.1 INTRODUCCIÓN 135
4.7.2 IDEOLOGÍA: RACIONALISMO – OBJETISMO 136
4.7.3 EJEMPLO RACIONALISMO – OBJETISMO 138
4.7.4 SENTIMIENTO: CONTROL - PROGRESO 140
4.7.5 EJEMPLO: CONTROL - PROGRESO 142
4.7.6 SOCIOLOGÍA: APERTURA- MISTERIO 145
4.7.7 EJEMPLO: APERTURA – MISTERIO 147

5 EPISTEMOLOGÍA DE LAS MATEMÁTICAS Y DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA 150

5.1 EPISTEMOLOGÍA DE LAS MATEMÁTICAS *150*

5.2 EPISTEMOLOGÍA DEL CONTEXTO DE JUSTIFICACIÓN Y FUNDACIONALISMO EN LA FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS. *151*

5.3 VISIONES SOCIOLÓGICAS DE LAS MATEMÁTICAS *156*

5.4 EPISTEMOLOGÍAS DEL SIGNIFICADO *158*

5.5 EPISTEMLOGÍA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA *159*

6. *MODELO METODOLÓGICO DE INVESTIGACIÓN UTILIZADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA MEDIANTE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS* 167

6.1 TECNICAS E INSTRUMENTOS DE INVESTIGACION *168*

6.2 OBSERVACIÓN *170*

6.3 ENTREVISTA *173*

6.4 MATERIALES ESCRITOS *175*

6.5 ANALISIS *176*

6.6 TEORÍA *178*

6.7 REDACCIÓN *180*

6.8 TRIANGULACIÓN *180*

OBSERVACIÓN: 182

DOCENTE – ESTUDIANTE 182

7 ANÁLISIS DE RESULTADOS 196

7.1 CARACTERISTICAS DE LA OBSERVACION NO PARTICIPANTE *196*

7.2 NOTAS DE CAMPO SOBRE LA ENTREVISTA *199*

7.2.1 ENTREVISTA A ESTUDIANTES *200*

7.2.2 ENTREVISTA A DOCENTES *210*

7.3 MATERIALES ESCRITOS *220*

8. CONCLUSIONES 221

BIBLIOGRAFÍA 226

ANEXO 237

ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 1.1 *CUADRO ESTADÍSTICO GESTIÓN I/1999* *9*
FIGURA 1.2 *CUADRO ESTADÍSTICO GESTIÓN II/1999* *9*
FIGURA 1.3 *CUADRO ESTADÍSTICO GESTIÓN I/2000* *10*
FIGURA 1.4 *CUADRO ESTADÍSTICO GESTIÓN II/2000* *11*
FIGURA 1.5 *CUADRO ESTADÍSTICO GESTIÓN I/2002* *12*
FIGURA 1.6 *CUADRO ESTADÍSTICO GESTIÓN II/2003* *13*
FIGURA 1.7 *CUADRO ESTADÍSTICO GESTIÓN I/2004* *13*
FIGURA 1.8 *CUADRO ESTADÍSTICO GESTIÓN II/2004* *14*
FIGURA 4.1 *COMBINACIONES DE CONTEO* *34*
FIGURA 4.2 *"B ENTRE A Y C"* *35*
FIGURA 4.3 *INTERIOR –EXTERIOR- FRONTERA* *35*
FIGURA 4.4 *AUTOSEMEJANZA* *36*
FIGURA 4.5 *CONJUNTO DE CANTOR* *38*
FIGURA 4.6 *ESPACIO DE SIERPINSKI* *39*
FIGURA 4.7 *CURVA DE KOCH* *39*
FIGURA 4.8 *HABITACIÓN EN FORMA DE PARALELEPÍPEDO* *61*
FIGURA 4.9 *REPRESENTACIÓN DE LA DIAGONAL CD* *61*
FIGURA 4.10 *TRIANGULO DE PASCAL* *66*
FIGURA 4.11 *EL NÚMERO DE ESCUDOS POSIBLES EN UN TIRO* *68*
FIGURA 4.12 *POLIEDRO CONVEXO* *74*
FIGURA 4.13 *TETRAEDRO CONVEXO* *75*
FIGURA 4.14 *VISIÓN INTEGRADORA PARA INTERPRETAR EL CAMBIO* *77*
FIGURA 4.15 *LONGITUD – LATITUD* *80*
FIGURA 4.16 *REPRESENTACIONES PARA INTERPRETAR EL CAMBIO* *87*
FIGURA 4.17 *EDAD- PESO* *90*
FIGURA 4.18 *CRECIMIENTO POBLACIONAL* *91*
FIGURA 4.19 *SISTEMA DE LORENZ* *94*
FIGURA 4.20 *CAMBIOS DE LA VARIABLE X* *96*
FIGURA 4.21 *PUNTO LÍMITE* *97*
FIGURA 4.22 *PUNTO FIJO* *98*
FIGURA 4.23 *PUNTOS PERIÓDICOS (PERIODO 2)* *99*
FIGURA 4.24 *PUNTOS PERIÓDICOS (PERIODO 4)* *99*
FIGURA 4.25 *CAOS MATEMÁTICO* *100*
FIGURA 4.26 *PROBLEMA RECREATIVO* *115*
FIGURA 4.27 *DESPLAZAMIENTO DE F(X+1) RESPECTO DE F(X)* *129*
FIGURA 4.28 *COMPARACIÓN DE SEGMENTOS* *139*
FIGURA 4.29 *CUADRADO DE LADO UNIDAD* *139*
FIGURA 4.30 *SUMA DE LOS ÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO* *147*
FIGURA 4.31 *CUERDAS PARALELAS EN UN CÍRCULO* *148*
FIGURA 4.32 *CUERDAS PARALELAS EN UNA ELIPSE* *148*
FIGURA 6.1 *MODELO CUALITATIVO* *170*

ÍNDICE DE TABLAS

TABLA 1.1 *TABLA ESTADÍSTICA GESTIÓN I/1999* *8*
TABLA 1.2 *TABLA ESTADÍSTICA GESTIÓN II/1999* *9*
TABLA 1.3 *TABLA ESTADÍSTICA GESTIÓN I/2000* *10*
TABLA 1.4 *TABLA ESTADÍSTICA GESTIÓN II/2000* *10*
TABLA 1.5 *TABLA ESTADÍSTICA GESTIÓN I/2001* *11*
TABLA 1.6 *TABLA ESTADÍSTICA GESTIÓN I/2002* *12*
TABLA 1.7 *TABLA ESTADÍSTICA GESTIÓN I/2003* *12*
TABLA 1.8 *TABLA ESTADÍSTICA GESTIÓN II/2003* *13*
TABLA 1.9 *TABLA ESTADÍSTICA GESTIÓN I/2004* *13*
TABLA 1.10 *TABLA ESTADÍSTICA GESTIÓN II/2004* *14*
TABLA 4.1 *POBLACIÓN BLANCA DE ESTADOS UNIDOS* *92*
TABLA 4.2 *POBLACIÓN BLANCA AJUSTADA POR LA FUNCIÓN DE VERHULST* *92*

RESUMEN EN ESPAÑOL

La idea general del presente trabajo de investigación denominado “Educación Matemática Mediante la Resolución de Problemas” se vincula a la necesidad de: identificar, verificar, analizar, constatar, contrastar, … la presencia de las Categorías o Hilos Conductores de las ideas matemáticas profundas: dimensión, cantidad, incertidumbre, forma y cambio, en el contexto de las actividades que realizan docentes y estudiantes del Curso Prefacultativo de la Universidad Mayor de San Andrés, al entorno de la resolución de problemas. Se presenta el fundamento teórico necesario sobre estas actividades, que relacionan el aspecto *cognoscitivo* del alumno, se desarrollan los fundamentos teóricos en la resolución de problemas que caracterizan el *saber hacer* del alumno, y finalmente se presentan las orientaciones teóricas de los valores de la matemática, que dirigen el *saber ser* del alumno. La metodología cualitativa de investigación que se sigue en el trabajo, permite la obtención de resultados y conclusiones que implican el logro de los objetivos propuestos.

RESUMEN EN INGLES

The general idea of the present investigation dauntless "Mathematic Education through the Resolution of Problems" is bind to the need of: identify, verify, analyze, ascertain, contrast,... the presence of activities or thread-conductor of the deep mathematics ideas: dimension, quantity, doubt, form and change, in the context of the activities that both teachings and students of the pre-physician of the "Universidad Mayor de San Andres" realize, to the medium of the resolution of problems. I provide the theoretical ground-work necessary about these activities, that link the cognositive aspect of the student, consequently, the theoretical groundworks are develops in the resolution of problems that characterize to know make of the student and finally, the theoretical orientations of the values of the mathematic are presents, that guide the knowledge of the student. The qualitative methodology of investigation that follows in this work, let attain of the results and conclusions that imply the profit of the objectives proposes.

INTRODUCCIÓN

La idea general que dio lugar al presente Trabajo de Investigación titulado "*Educación Matemática Mediante la Resolución de Problemas"* se vincula a la necesidad de: identificar, analizar y contrastar la presencia de *Patrones* de la Educación Matemática, en el contexto de las actividades que realizan docentes y estudiantes del Curso Prefacultativo de la Facultad de Ciencias Puras y Naturales de la Universidad Mayor de San Andrés, al entorno de la resolución de problemas, y que dichos patrones caractericen: el desarrollo *cognitivo*, el desarrollo del *"saber hacer"* y finalmente el desarrollo del *"saber ser"* del estudiante.

Para tales efectos y consideraciones la organización del trabajo se estructuró a partir de la siguiente significación codificada: en la parte 1, se describe la *Identificación del Problema*, en base a observaciones de la realidad, que consisten en identificar características del Curso Prefacultativo, tales como: programas de estudio utilizados, exámenes parciales y trabajos prácticos desarrollados por los estudiantes, bibliografía utilizada, procesos de transposición didáctica, y finalmente una referencia y representación estadística de calificaciones correspondientes a las gestiones: 1999 - 2004. En la parte 2 se formulan: antecedentes teóricos sobre los *Contenidos Matemáticos* (Starico, 1996) y *las actividades o hilos conductores* de la matemática propuestos por (Steen, 1998) y la postura de (Bishop, 1999) que hace relevancia y caracteriza los *Valores de la Matemática*. Consecuentemente se formulan: *El Planteamiento del Problema.* Los *Objetivos* del Trabajo de Investigación se describen en la parte 3. En la parte 4 figura el *Marco Teórico*, donde se explicitan y se ejemplifican los patrones de la matemática: *Dimensión, Cantidad, Incertidumbre, Forma* y *Cambio*, se da un panorama general sobre los fundamentos teóricos en la resolución de problemas matemáticos, y también se caracterizan los valores de la educación matemática que se describen en forma de pares complementarios: r*acionalismo – objetismo, control – progreso* y *apertura – misterio.* En la parte 5 se da una visión general sobre la *Epistemología de la Matemática* y *La Epistemología de la*

Educación Matemática. En el la parte 6 se describe y se caracteriza en detalle, la *Metodología* utilizada en la presente investigación que esencialmente es de carácter *cualitativo.* En las partes 7 y 8 se describen, transcriben y anexan respectivamente: *Análisis de Resultados, Conclusiones y Anexo.*

Autor: Luis Tordoya Lazo

1. *IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA*

En la facultad de Ciencias Puras y Naturales de la Universidad Mayor de San Andrés, a través de la Dirección del Curso Prefacultativo, se administra semestralmente el Curso Prefacultativo, donde una de sus asignaturas de matemática es “Introducción a la Matemática” cuya sigla es MAT 099. Recientemente en la Gestión 2004 se introduce la asignatura de “Introducción a la Geometría” (GMT 99). Semestralmente los estudiantes en el desarrollo de sus actividades académicas deben cursar un determinado Programa de Estudios, desarrollados en tres horas teóricas de dos sesiones por semana, y una hora de trabajos prácticos en una sesión por semana. Deben, además, desarrollar tres exámenes parciales y la presentación global de trabajos prácticos, conformando una evaluación acumulativa, y consecuentemente la promoción o remoción del indicado Curso. Aproximadamente el número de estudiantes inscritos es de 500 por semestre, distribuidos en cinco grupos o paralelos, donde un docente y un auxiliar de docencia por paralelo, son los encargados académicos de administrar el trabajo docente en el aula.

Las consideraciones a continuación significan: antecedentes, informaciones y observaciones de la realidad al entorno del Curso Prefacultativo, correspondientes a las gestiones 1999 - 2004. Particularmente significan algunas características de los “Contenidos” como “herramientas” para la comprensión del mundo que nos rodea (Starico, 1996).

1.1 ALGUNAS CARACTERÍSTICAS DE LOS PROGRAMAS DE ESTUDIO UTILIZADOS

La siguiente información dada a continuación, proviene de los Programas de Contenidos Mínimos de la Carrera de Matemática en la Universidad Mayor de San Andrés.

- Algunos son simplemente un listado de contenidos; por ejemplo en la Gestión 1996 el Programa Sintético contiene los capítulos de: Lógica, Conjuntos, Sistemas Numéricos, Operaciones Algebraicas, Funciones y Ecuaciones, Trigonometría e Introducción a la Geometría Analítica. Evidentemente cada uno de estos capítulos contiene mucha información sobre matemáticas introductorias.

- Otros tienen la descripción de objetivos generales y los Programas Sintético y Analítico respectivos, por ejemplo, los capítulos correspondiente a las gestiones 1999 - 2002, del Programa Sintético son: Conceptos Fundamentales, Operaciones Algebraicas, Ecuaciones, Inducción Matemática, Teorema del Binomio, Para Resolver un Problema se Necesita, Tipos de Problemas, Problemas Sugerencias y Soluciones. Donde además se explicita el siguiente objetivo general:

  "Introducir al estudiante en la matemática universitaria, siendo el primer objetivo orientar al estudiante hacia el tratamiento conceptual de los contenidos del álgebra inicial. Esto resulta, en la mayor parte de los casos, dolorosamente nuevo, al tratarse de jóvenes portadores de una arraigada conducta de adiestramiento, memorización y mecanicismo; opuesta a las necesidades del aprendizaje de la matemática, que suponen discernimiento y creatividad. Se ha sacrificado la rigurosidad de la presentación en beneficio de una buena comprensión intuitiva. Esto a través de ejemplos introductorios o verificando casos particulares, dejando de lado detalles técnicos" (2003)

- Otros describen varios objetivos; contenidos, metodología del trabajo y Programa Analítico; por ejemplo los contenidos en los programas de la Gestión 2003 son: Cómo Plantear y Resolver Problemas, Sistemas Numéricos, Ecuaciones y Desigualdades, Funciones y Gráficas, Funciones Polinomiales y Racionales, Funciones Exponenciales y Logarítmicas y Funciones Trigonométricas. Evidentemente cada uno de estos capítulos describe un extenso contenido analítico.

Los objetivos de esta gestión describen:

a) Proporcionar al estudiante una adecuada base de conocimientos conceptuales y metódicos de las matemáticas afianzando su comprensión que hubiera estudiado antes y guiándole en forma progresiva y sensata a la comprensión de otros nuevos. De tal modo se prevee brindarle la preparación apropiada para que la transición colegio-universidad, en cuanto a metodología y contenido de las matemáticas, le resulte natural y expedita.

b) Destacar el rol de razonamiento en el trabajo en matemáticas e inducir a los estudiantes a ejercer sus facultades de raciocinio. Dada la multiplicidad de sus facetas, no es fácil decir en pocas palabras qué es la matemática; sin embargo, no estaremos lejos de la verdad al decir que la matemática es aquella actividad en la cual el razonamiento desempeña el rol fundamental. Desafortunadamente, y resulta paradójico, en muchas clases de matemáticas se ha relegado el razonamiento al olvido, dando en cambio mayor relevancia al aprendizaje de técnicas y procesos áridos y mecanicistas.

c) Mostrar a los estudiantes que las matemáticas no son simplemente un conglomerado de conocimientos abstrusos, ni una sucesión inacabable de abstracciones áridas e inútiles, que deben aprender de memoria antes de los exámenes para olvidarlas inmediatamente después. Por el contrario, procurar que los jóvenes comprendan o al menos vislumbren, que las matemáticas han sido y son el instrumento fundamental e imprescindible en la investigación y comprensión del universo en que habitamos; que han contribuido de un modo invaluable al progreso de la ciencia y la tecnología y que han ejercido una profunda influencia en el desarrollo de la cultura humana; en fin, que las matemáticas constituyen el ejemplo supremo y mas notable del poder de la mente para encarar problemas.

   En la metodología de trabajo, se destaca como principal el concepto de función, modelización, utilizar la metodología de G. Polya en la Resolución de Problemas, con la consigna de “Comprender, no Memorizar”.

1.2 ALGUNAS CARACTERÍSTICAS DE LOS EXÁMENES PARCIALES Y LOS TRABAJOS PRÁCTICOS DESARROLLADOS POR LOS ESTUDIANTES

Por lo general, en un gran porcentaje, consiste en lo que G. Polya llamaría, "Problemas por Resolver". Es decir, aquellos donde el propósito es el de descubrir o encontrar cierto objeto: la incógnita del problema, dónde se presentan los elementos principales, como son: La **incógnita,** los **datos,** y la **condición**. En un porcentaje menor está la presencia de "Problemas por Demostrar" tal como lo denomina G. Polya, donde sus elementos principales son la **hipótesis** y la **conclusión** del teorema o proposición que hay que demostrar o refutar. Con muy poca frecuencia se presentan problemas de construcción geométrica.

A continuación mostramos algunos modelos de exámenes y trabajos prácticos que los estudiantes realizan:

a) Muestre que $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}-\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

b) Resolver $\log_a x+\log_a y=2,\ \log_b x-\log_b y=4$

c) Si $x<0, y<0$, el signo del número real:

$$\frac{x+y}{xy}+x^2y$$ es (i) positivo, (ii) negativo, (iii) ninguno

(encerrar la respuesta correcta en un óvalo)

d) Hallar los valores de *k* para que la ecuación tenga raíces iguales

$$x^2-(4k-6)x+3k=0$$

e) Se ha inscrito una circunferencia en un triángulo rectángulo cuyos catetos miden *a* y *b* unidades respectivamente y cuya hipotenusa mide *c* unidades. Muestre que el radio *r* de la circunferencia es dado por

$$r=\frac{ab}{a+b+c}$$

1.3 RESPECTO A LA BIBLIOGRAFÍA UTILIZADA POR DOCENTES Y ESTUDIANTES

La bibliografía es muy variada, desde libros que contienen bastante tecnicismo algebraico, como: “1000 Problemas de Aritmética, Álgebra, Geometría y Trigonometría (N. Antonov, M. Vigodsky V. Nikitin, A. Sankin 1985)”, pasando por libros como el de “Álgebra de Charles H. Lehmann (1968), cuya característica principal es el de tener un contenido extenso y completo de diferentes temas matemáticos e incluso con temas de álgebra, que tradicionalmente se estudia en los primeros cursos de la universidad. Actualmente se utilizan libros como el “Álgebra” (Rees–Sparks–Rees 1993), y “Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica (Swokowski 1992), cuya característica principal de ambos libros es la extensión en temas matemáticos, la estructuración de los temas con un enfoque funcional, y lo relevante es la presencia de una buena cantidad de ejemplos de aplicación.

1.4 EN CUANTO A LOS PROCESOS DE TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA Y LA RELACIÓN CON LA EPISTEMOLOGÍA DE LA MATEMÁTICA.

Estos están referidos concretamente a los procesos de enseñanza por parte del docente y al aprendizaje por parte del estudiante. Estos se ven reflejados en el trabajo docente en el aula a través del discurso matemático y las acciones que complementan, y de la construcción de significados por parte del estudiante que se reflejan en las acciones y actividades que realizan al tomar los registros de las lecciones y las estrategias, métodos, etc., que utilizan en la resolución de problemas. En el anexo se incluyen algunas fotocopias de registros de lecciones de clases, de prácticas y exámenes realizados por los estudiantes.

1.5 REFERENCIAS Y REPRESENTACIÓN ESTADÍSTICA DE RESULTADOS DE CALIFICACIONES DEL CURSO PREFACULTATIVO DE LAS GESTIONES: 1999 - 2004

A manera de información estadística, y con el sólo propósito de que dicha información coadyuve en algún sentido a la investigación cualitativa que seguirá el proceso del siguiente trabajo de investigación, consideramos la siguiente información correspondiente a los estudiantes del Curso Prefacultativo, de la Facultad de Ciencias Puras y Naturales de la Universidad Mayor de San Andrés, de calificaciones o notas finales en la Asignatura de Introducción a la Matemática, de las siguientes gestiones: I / 1999, II/ 1999, I / 2000 y II/ 2000, en estas gestiones se describen los siguientes parámetros:

- Alumnos cuya calificación es 0 (abandono)
- Alumnos cuya calificación esta entre 1 – 25 (reprobados)
- Alumnos cuya calificación esta entre 26 – 50 (reprobados)
- Alumnos cuya calificación es 51 (Aprobados)
- Alumnos cuya calificación esta entre 90 - 100 (aventajados)

La información es como sigue:

GESTION I / 1999 SOBRE 650 ESTUDIANTES

Calificación Sobre 100	0 Abandono	1 – 25 Reprobado	26 – 50 Reprobado	51 Aprobado	52 – 89 Aprobado	90 – 100 Aventajado	Total Aprobados	Total Reprobados
Nº de estudiantes	64	286	129	69	102	0	171	415

Tabla 1.1 Tabla Estadística Gestión I/1999

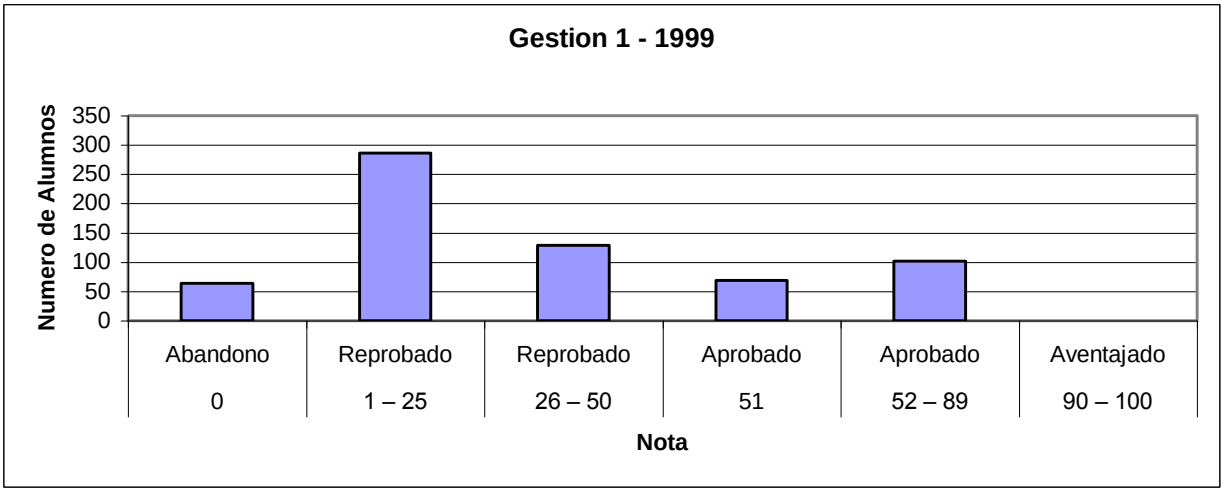


Figura 1.1 Cuadro Estadístico Gestión I/1999

GESTION II / 1999 SOBRE 825 ESTUDIANTES

Calificación Sobre 100	0 Abandono	1 – 25 Reprobado	26 – 50 Reprobado	51 Aprobado	52 – 89 Aprobado	90 – 100 Aventajado	Total Aprobados	Total Reprobados
Nº de estudiantes	137	298	168	98	124	0	222	603

Tabla 1.2 Tabla Estadística Gestión II/1999

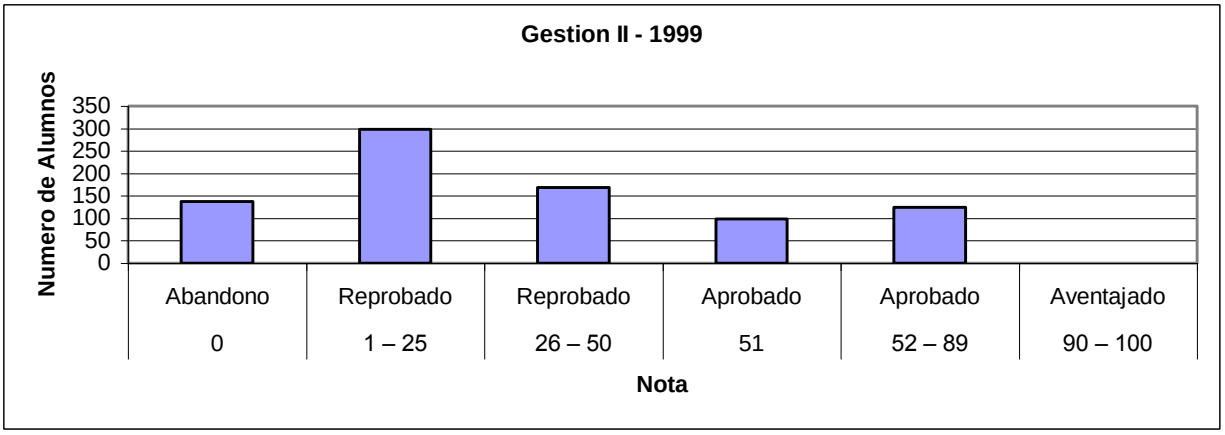


Figura 1.2 Cuadro Estadístico Gestión II/1999

Conclusión numérica: Gestión 1999 sobre 1475 estudiantes

1. Alumnos cuya calificación esta entre 1 – 25 = 584 (reprobados)
2. Alumnos cuya calificación esta entre 26 – 50 = 297 (reprobados)
3. Alumnos cuya calificación es 51 = 167 (aprobados)
4. Alumnos cuya calificación esta entre 52 – 89 = 226 (aprobados)
5. Alumnos cuya calificación esta entre 90 - 100 = - (aventajados)
6. Alumnos cuya calificación es 0 = 201 (abandono)

TOTALES

Nº de aprobados 393 (27%)
Nº de reprobados 881 (60%)
Nº de abandonos 201 (13%)

Total 1475

GESTION I / 2000 SOBRE 800 ESTUDIANTES

Calificación Sobre 100	0 Abandono	1 – 25 Reprobado	26 – 50 Reprobado	51 Aprobado	52 – 89 Aprobado	90 – 100 Aventajado	Total Aprobados	Total Reprobados
Nº de estudiantes	131	233	195	36	205	0	241	559

Tabla 1.3 Tabla Estadística Gestión I/2000

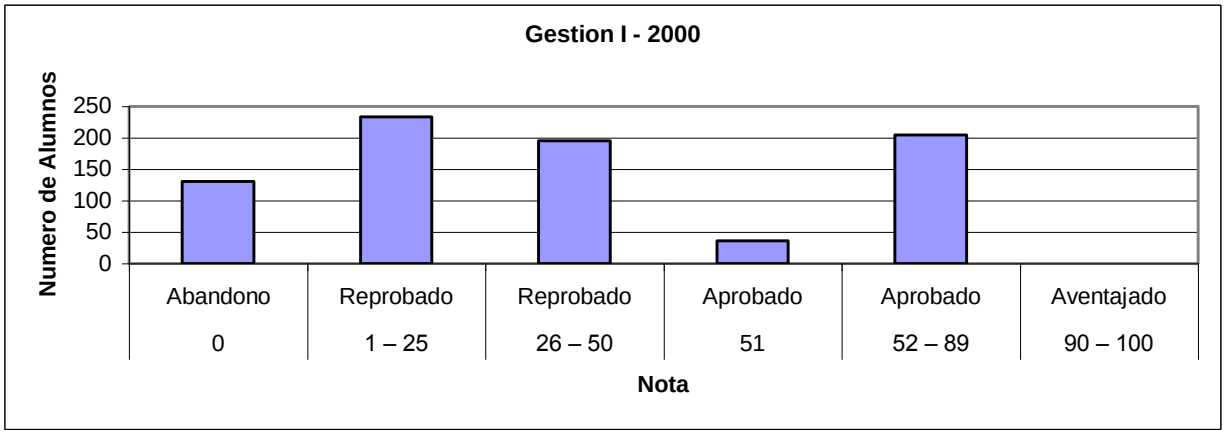


Figura 1.3 Cuadro Estadístico Gestión I/2000

GESTION II / 2000 SOBRE 770 ESTUDIANTES

Calificación Sobre 100	0 Abandono	1 – 25 Reprobado	26 – 50 Reprobado	51 Aprobado	52 – 89 Aprobado	90 – 100 Aventajado	Total Aprobados	Total Reprobados
Nº de estudiantes	151	218	180	34	187	0	221	549

Tabla 1.4 Tabla Estadística Gestión II/2000

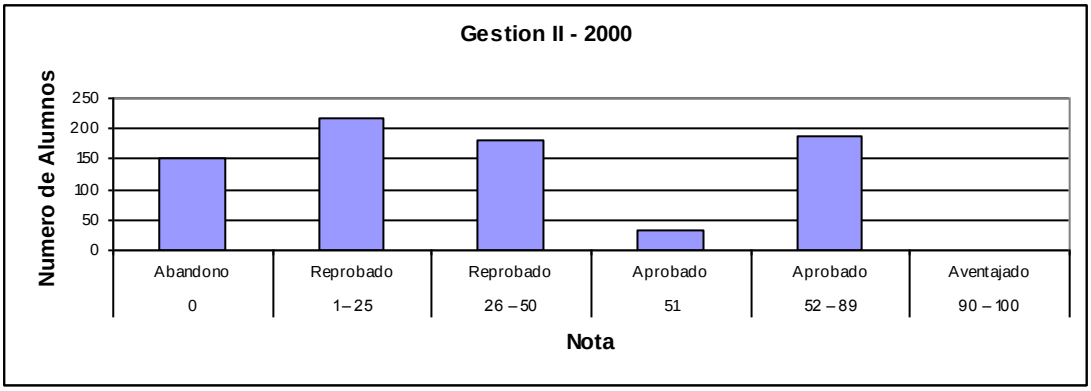


Figura 1.4 Cuadro Estadístico Gestión II/2000

Conclusión numérica: Gestión 2000 sobre 1570 estudiantes

1. Alumnos cuya calificación esta entre 1 – 25 = 451 (reprobados)
2. Alumnos cuya calificación esta entre 26 – 50 = 375 (reprobados)
3. Alumnos cuya calificación es 51 = 70 (aprobados)
4. Alumnos cuya calificación esta entre 52 – 89 = 392 (aprobados)
5. Alumnos cuya calificación esta entre 90 - 100 = - (aventajados)
6. Alumnos cuya calificación es 0 = 282 (abandono)

TOTALES

Nº de aprobados 462 (29%)
Nº de reprobados 826 (52%)
Nº de abandonos 282 (19%)

Total 1570

Además en la gestión I/ 2001 se agregaron los parámetros de procedencia de colegios Fiscal o Particular en sus modalidades de urbano o rural, que figuran como DATOS DE REFERENCIA ACADEMICA en la FICHA DE INSCRIPCIÓN

		0 Abandono	1 - 25 Reprobados	26 – 50 Reprobados	51 Aprobado	52 – 89 Aprobado	90 – 100 Aventajado	Total Aprobados	Total Reprobados	TOTAL
FISCAL	**Urbano**	35	146	62	18	60	1	79	208	322
	Rural	5	10	1	1	5		6	11	22
PARTICULAR	**Urbano**	29	79	30	8	31		39	109	177
	Rural			1					1	1
									total	522

Tabla 1.5 Tabla Estadística Gestión I/2001

GESTION I / 2002 SOBRE 1274 ESTUDIANTES

Calificación Sobre 100	0 Abandono	1 – 25 Reprobado	26 – 50 Reprobado	51 Aprobado	52 – 89 Aprobado	90 – 100 Aventajado	Total Aprobados	Total Reprobados
Nº de estudiantes	218	456	283	117	199	1	317	957

Tabla 1.6 Tabla Estadística Gestión I/2002

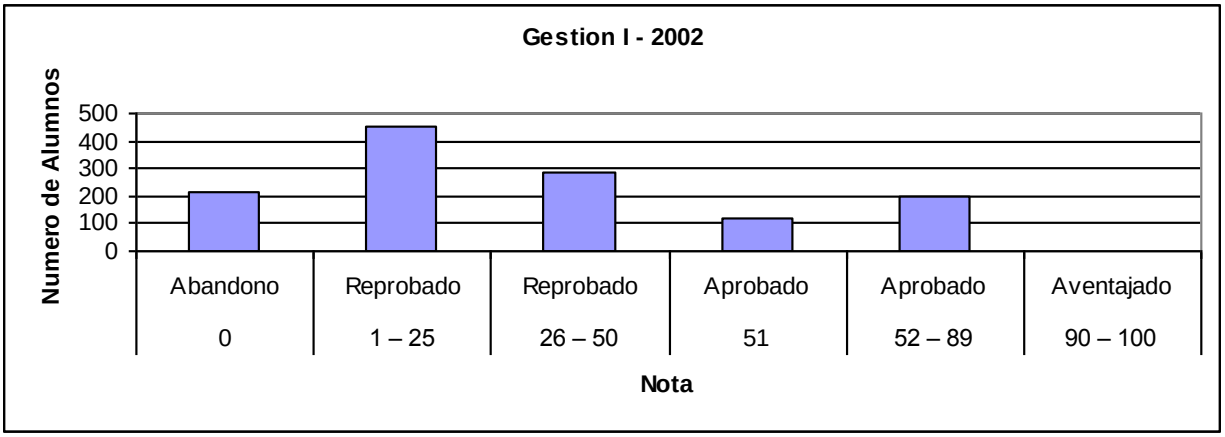


Figura 1.5 Cuadro Estadístico Gestión I/2002

GESTION I / 2003 SOBRE 1435 ESTUDIANTES

Calificación Sobre 100	0 Abandono	1 – 25 Reprobado	26 – 50 Reprobado	51 Aprobado	52 – 89 Aprobado	90 – 100 Aventajado	Total Aprobados	Total Reprobados
Nº de estudiantes	222	571	314	120	208	0	328	1107

Tabla 1.7 Tabla Estadística Gestión I/2003

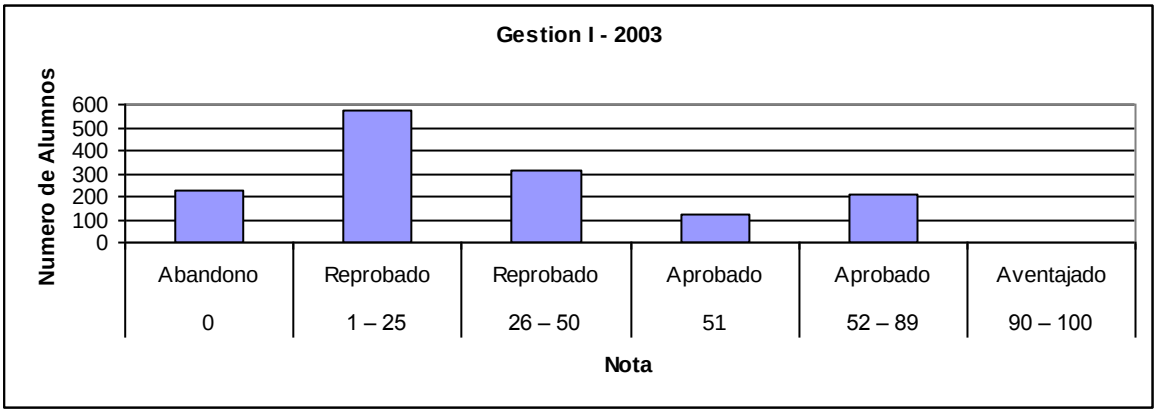


Figura 1.6 Cuadro Estadístico Gestión I/2003

GESTION II / 2003 SOBRE 1124 ESTUDIANTES

Calificación Sobre 100	0 Abandono	1 – 25 Reprobado	26 – 50 Reprobado	51 Aprobado	52 – 89 Aprobado	90 – 100 Aventajado	Total Aprobados	Total Reprobados
Nº de estudiantes	229	310	187	141	254	3	398	726

Tabla 1.8 Tabla Estadística Gestión II/2003

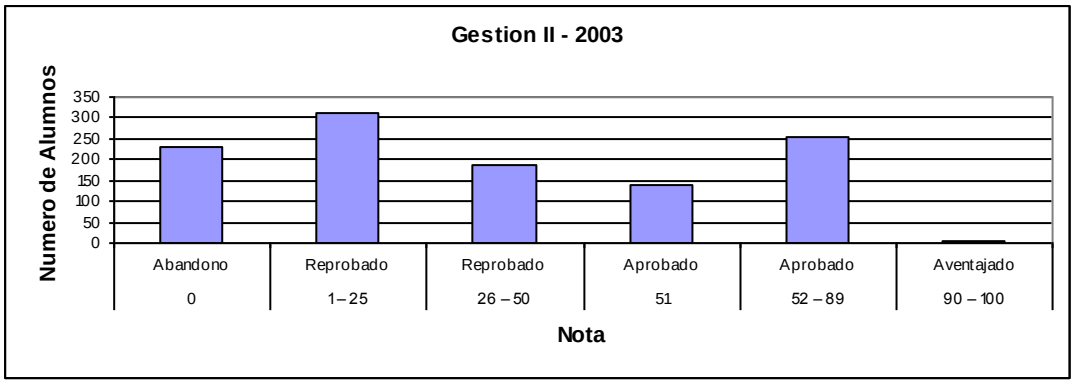


Figura 1.6 Cuadro Estadístico Gestión II/2003

GESTION I / 2004 SOBRE 1184 ESTUDIANTES

Calificación Sobre 100	0 Abandono	1 – 25 Reprobado	26 – 50 Reprobado	51 Aprobado	52 – 89 Aprobado	90 – 100 Aventajado	Total Aprobados	Total Reprobados
Nº de estudiantes	123	468	244	124	222	3	349	835

Tabla 1.9 Tabla Estadística Gestión I/2004

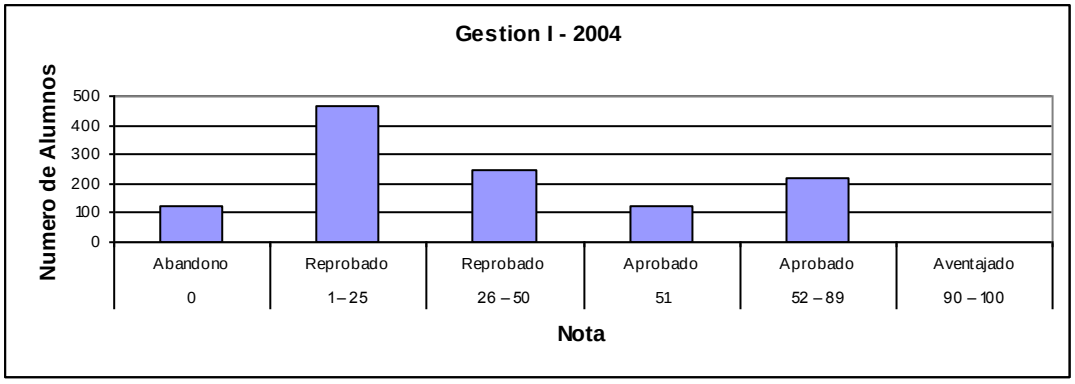


Figura 1.7 Cuadro Estadístico Gestión I/2004

GESTION II / 2004 SOBRE 989 ESTUDIANTES

Calificación Sobre 100	0 Abandono	1 – 25 Reprobado	26 – 50 Reprobado	51 Aprobado	52 – 89 Aprobado	90 – 100 Aventajado	Total Aprobados	Total Reprobados
N° de estudiantes	107	419	173	93	196	1	290	699

Tabla 1.10 Tabla Estadística Gestión II/2004

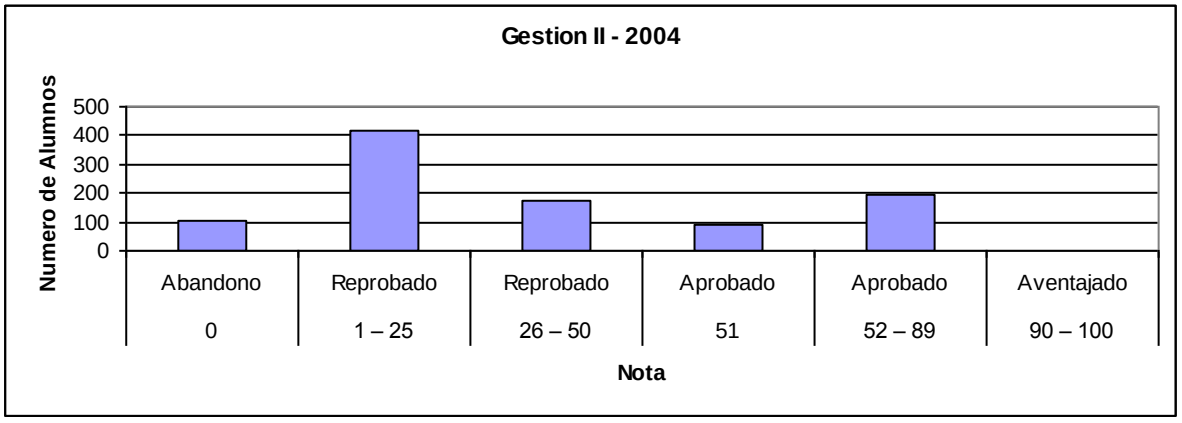


Figura 1.8 Cuadro Estadístico Gestión II/2004

Observando las tablas y representaciones estadísticas de las gestiones: 1999, 2000, 2003 y 2004, aproximadamente un 56 % de los estudiantes que se inscriben al Curso Prefacultativo, **reprueban** el Curso, de los cuales un 36 % con una calificación de menor o igual a 25 puntos sobre 100, y el 15 % corresponden a alumnos que **abandonan** el indicado Curso.

De la información anterior podemos interpretar que la forma didáctica tradicional del proceso de enseñanza y aprendizaje que se desarrolla en las aulas implican: Extensos conceptos clásicos de álgebra, mayor preferencia por métodos y procedimientos mecánicos de resolución de problemas, los problemas y exámenes que se plantean para su resolución no da la oportunidad de que el estudiante desarrolle las operaciones básicas del pensamiento (análisis, síntesis, generalización, abstracción, comprensión…), casi nada sobre problemas por demostrar, por ejemplo en el sentido de (Polya, 1992), y tampoco están

explicitadas en los programas, ni en las acciones que realizan docentes y estudiantes, contenidos actitudinales que orienten al alumno hacia el ”saber ser”, es decir, desarrollar los valores de las matemáticas. Al respecto de los contenidos:

“[…] el conjunto de saberes o formas culturales cuya asimilación y apropiación por los alumnos y alumnas se considera esencial para su desarrollo y socialización”. (Starico, 1996, p.33)

En cuanto a la importancia de la resolución de problemas como una nueva corriente pedagógica dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje, Danilov y Skathin (1978) señalan:

… Su esencia consiste en que los alumnos, guiados por el profesor se introducen en el proceso de búsqueda de la solución a problemas nuevos para ellos, gracias a lo cual aprenden a adquirir independientemente los conocimientos, a emplear los antes asimilados, y a dominar la experiencia de la actividad creadora. (p. 211)

Y finalmente con respecto a los Valores de las Matemáticas y los Contenidos Actitudinales se registran en Kline (2000).

Estas son, pues, las matemáticas: Evocan las formas invisibles del espíritu; dan vida a sus propios descubrimientos; hacen despertar la conciencia y purifican el intelecto; sacan a la luz nuestras ideas intrínsecas; nos liberan del olvido y la ignorancia con que nacemos… (p. 537)

Proclo Diádoco

y respecto a los Contenidos:

“Convertir a las actitudes en contenidos educativos es crear la posibilidad de definir con claridad los valores y las normas que la escuela debe transmitir”. (Starico, 1996, p. 33)

Todos los anteriores análisis y consideraciones, permiten el planteamiento del problema que se desarrolla en el presente trabajo de investigación.

2. *PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA*

Un acercamiento interesante al problema del conocimiento científico es el que plantean las reflexiones filosóficas y epistemológicas que los científicos hacen a partir de su propio quehacer. Tomamos, por ejemplo la afirmación:

"*El matemático, como el pintor o el poeta, es un creador de patrones. Si sus patrones son más permanentes que los de los otros es por que están hechos con ideas…" (Hardy,1992, p.35)*

Esta afirmación, sin duda poética, pone a la matemática al nivel de las bellas artes y hace difícil la labor de difundir los conocimientos matemáticos, si se quiere que éstos queden a un nivel distinto al contemplativo. Tal como señala Hardy (1992), el matemático es un "creador de patrones":

> *¿cómo entrenar al joven para crear estos patrones*?, *¿cómo reproducir en el aula las condiciones que permitan o fortalezcan esta creación*?, *¿hay patrones establecidos que se puedan enseñar*? *¿cómo "educar" al joven para que aprecie la belleza de las matemáticas, como se puede apreciar la belleza de una sinfonía?* y, al fin de cuentas*, ¿cómo lograr que al joven la ejecute o que componga algo similar?(p.36)*

Por otro lado, cuando nos referimos a los conceptos de **transposición didáctica de los Contenidos como "herramientas",** en el sentido como lo describe Starico (1996) y de la relación de éstos con la **epistemología de las matemáticas,** estas categorías hacen su aparición, a nivel de la práctica de la enseñanza y de la construcción de significados por parte del estudiante (es decir, en su aprendizaje). Consecuentemente surge la siguiente pregunta:

¿Cuáles son las diferencias entre estos niveles a la hora
de la resolución de problemas matemáticos?.

Esta pregunta, más las planteadas por Hardy, son el punto de partida del presente trabajo de investigación, cuyo propósito es caracterizar ciertas dimensiones que implican: capacidades cognitivas que deben desarrollar los estudiantes; capacidades del “saber hacer” del estudiante y finalmente valores que signifiquen el “saber ser”.

La necesidad de lograr una formación integral del estudiante preuniversitario, de manera particular la formación de un estudiante prefacultativo de la Facultad de Ciencias Puras y Naturales de la Universidad Mayor de San Andrés, en el contexto de la Educación Matemática mediante la Resolución de Problemas Matemáticos, significa que los alumnos deben lograr *saberes* para alcanzar las capacidades que les permitan afrontar diversas situaciones personales o sociales que se les presentan. Estas capacidades incluyen conocimientos, procedimientos actitudinales y valores que en definitiva están expresados como *Contenidos Matemáticos*. Estos contenidos son “herramientas” para la comprensión del mundo y abarcan conceptos, procedimientos, valores y actitudes.

¿Qué dicen los especialistas acerca de los *Contenidos*?

Starico (1996) se refiere:

> Sin contenidos no hay enseñanza; cualquier proyecto educativo acaba concentrándose en la aspiración de conseguir algunos efectos en los sujetos que se educan […]. Cuando hay enseñanza es por que se enseña algo, y se ordena el ambiente para que alguien aprenda algo, […] (p.33)

La Escuela Católica Nº 26, en Starico (1996) se refiere:

> Los contenidos son `saberes relevantes`, es decir, saberes socialmente significativos, reconocidos culturalmente como imprescindibles para el desarrollo de las potencialidades cognitivas, prácticas, afectivas y sociales de los alumnos, como persona individual y como inteligente de la sociedad. Estos

> saberes - que abarcan conceptos, nociones, principios, relaciones, hechos, valores, actitudes, normas, destrezas, habilidades, procedimientos, estrategias, etc.-, constituyen el punto de partida de todo aprendizaje para que los alumnos puedan aplicarlos -vinculándolos con sus esquemas de aprendizaje y según su desarrollo evolutivo – en la resolución de situaciones problemáticas concretas en el marco de una adecuada inserción social y dando testimonio de una opción de vida personal. Sólo cuando se opere este proceso, el aprendizaje de los contenidos específicos cumplirá la misión asignada que constituye la razón de ser de la escuela: […] la formación integral de la persona humana, a través de la comunicación sistemática y crítica de la cultura. (p33)

Cuando nos referimos a los **contenidos conceptuales matemáticos**, queremos significar que éstos se caracterizan mediante:

- Comprensión y relación con conocimientos previos.
- Permiten relacionar datos y hechos otorgándoles significados.
- Se construyen y se integran a una jerarquía de relaciones significativas formadas por:
- Conceptos estructurales, generales, de gran nivel de abstracción y que subyacen en la organización conceptual de un área.

- Conceptos específicos subordinados a los estructurantes.

En este sentido, se observa que la tradición en los *Contenidos Matemáticos* del curso Prefacultativo muestran que:

- La Aritmética, el Álgebra se presentan como conocimientos con mayor prioridad y recientemente se exhiben programas de Geometría introductoria, representando estos, los fundamentos de las Matemáticas.

- En los trabajos prácticos, en los exámenes parciales y en la toma de registros de las lecciones en clases (apuntes), no se dan las oportunidades de desarrollar en forma integral los fundamentos teóricos y las bases psicopedagógicas en la resolución de problemas matemáticos, donde una de sus partes esenciales es la consideración de: métodos, técnicas y estrategias.

- No están descritos explícitamente en las actividades que los estudiantes realizan, las actitudes y los valores que se desarrollan en ellos, hacia las matemáticas.

En la identificación del problema, se registran a manera de resultados y representaciones estadísticas, algunos parámetros que reflejan índices de: promoción, remoción y abandono de estudiantes que se inscriben al indicado curso en las gestiones 1999-2004, existiendo un gran porcentaje de alumnos en la modalidad de reprobados. Tales consideraciones motivan a formular las siguientes preguntas:

¿Cuáles son los intereses y las motivaciones
de los estudiantes hacia los conocimientos matemáticos?

¿Es reconfortable para los alumnos, que sepan resolver problemas usando los conocimientos, métodos, técnicas, estrategias y habilidades aprendidos tanto en la escuela como en la comunidad?

¿Cuáles son las actitudes y los valores de los estudiantes hacia las matemáticas?

No obstante de que la metodología de investigación utilizada en el siguiente trabajo, es enteramente de carácter *cualitativo,* vale decir: *etnográfico*; la información adicional estadística anterior coadyuva en algún sentido como información alternativa.

Sin embargo, existe mucho más en el sistema de las matemáticas, ideas profundas que alimentan el desarrollo de las ramas de la matemática. Las ideas matemáticas son, en esencia, producto de diversos procesos y podríamos plantear la hipótesis de que el carácter de estos productos es muy posible que difiera de una cultura a otra. En consecuencia, debemos orientarnos a la búsqueda de las actividades y los procesos que conducen al desarrollo de las matemáticas. Lo cual sugiere la pregunta:

¿Cuáles son las actividades matemáticas equivalentes
a la comunicación que dio lugar el desarrollo del lenguaje?

Relacionado a esta pregunta, Bishop (1999) se refiere: que las dos actividades más evidentes eran *contar* y *medir*. Estas se ocupan de ideas relacionadas con el número, aunque se trata de ideas bastante diferentes. El aspecto discreto de *contar* es su característica esencial y contrasta notablemente con la continuidad de los fenómenos a los que imponemos sistemas de medición. La historia muestra que la estructura espacial, da origen a dos tipos diferentes de ideas geométricas: la de *localizar*, que destaca los aspectos topográficos y cartográficos del entorno, y *diseñar,* que trata de las conceptualizaciones de objetos y artefactos y conduce a la idea de "*forma*". Además desde el punto de vista cultural, se ve la necesidad de presentar dos actividades fundamentales importantes para la matemática que son *jugar* y *explicar*. Jugar se refiere a las reglas y los procedimientos sociales para la actuación y también estimula el aspecto de la conducta imaginaria e hipotética. Explicar es la última actividad y su función es indicar los diversos aspectos cognitivos de investigar y conceptuar el entorno y compartir estas conceptualizaciones.

Evidentemente el presente trabajo comparte con la propuesta de Bishop (1999), sobre las anteriores actividades relacionadas con el entorno y la cultura matemática. Sin embargo, y con el mismo propósito anterior de caracterizar los Contenidos Matemáticos, se presenta otra propuesta de Steen (1998) cuya diferencia con la

anterior no es significativa. Esta propuesta considera cinco categorías o hilos conductores diferentes que son: *Dimensión, Cantidad, Incertidumbre, Forma* y *Cambio*.

Desarrollar y examinar estas actividades por los estudiantes les permite abordar los **conceptos que deben saberse** a fin de comprender la matemática, realizar acciones comunes como: **representar, describir, demostrar, resolver**… desarrollará en ellos sus capacidades para **hacer matemáticas**, y finalmente deben abordar los contenidos actitudinales representados por los **valores de la matemática**, que no están explicitados en los diseños escolares tradicionales, por lo tanto llenan un vacío importante e imprescindible para el desarrollo de las potencialidades y capacidades de la persona, las que se reflejan por ejemplo cuando los estudiantes: dan la importancia al razonamiento deductivo y su relación con el objeto de estudio, dan la relevancia e importancia al desarrollo y crecimiento de la matemática a través de la historia y su vínculo con las culturas, etc. Estos valores son los que orientan al estudiante hacia el **"saber ser"**

Desarrollar la *categoría dimensión* por los estudiantes mediante la resolución de problemas, equivale a desarrollar sus capacidades y potencialidades cognitivas de asignar un número **d** llamado "*dimensión*" a cada conjunto de puntos y representaciones de un espacio euclidiano, posiblemente asignar también dicho número a espacios un tanto patológicos. Este número en general es independiente de la medida de los objetos.

En cambio, que los estudiantes realicen actividades problémicas vinculadas con "*cantidad"* o "*cantidad de magnitud"*, supone desarrollar en nuestro medio, capacidades intelectuales y acciones de asignar un número a una cantidad de magnitud: longitud, área, volumen, temperatura, humedad, presión, ingresos, etc. En realidad, medir una cantidad de magnitud significa asignar un número que al multiplicarlo por la unidad, nos resulte la cantidad que queremos.

Los conceptos de dimensión y la idea de cantidad están fuertemente relacionadas, sin embargo, conceptualmente son diferentes. Una es topológica y el otro métrica.

Las actividades mediante la resolución de problemas, vinculadas con procesos de "*incertidumbre"*, implican temas relacionados con **datos** y **azar**. En general la estadística y la probabilidad son partes de las matemáticas que tratan de datos y el azar respectivamente. Cuando nos referimos a datos queremos significar que se tratan de **números con un contexto**. La probabilidad como un campo dentro de las matemáticas es una impresionante demostración del poder de las matemáticas para producir resultados de gran alcance e inesperados a partir de premisas simples. Consecuentemente los estudiantes deben desarrollar el pensamiento estadístico entendido en un sentido amplio.

El desarrollo de la "*forma"* mediante la resolución de problemas, permite descubrir semejanzas y diferencias de los objetos, analizar los componentes de las formas, reconocer formas en diferentes representaciones, descubrir invariantes geométricas y topológicas, etc. Por ejemplo una de las herramientas principales para abordar este tipo de problemas es la **clasificación**, lo que significa dar un listado de formas no equivalentes (en algún sentido) entre sí, de manera que cualquier otra forma sea equivalente a una de ellas. Resolver un problema de **representación** significa determinar un modelo de la misma, por ejemplo, un modelo esférico es un modelo de la Tierra, de la Luna o de cualquier planeta.

Todo fenómeno natural, es una manifestación del "*cambio"*, y para **entender** y **controlar** esta manifestación es necesario: representar los cambios en una forma comprensible, **entender** los tipos fundamentales de cambios, **identificar** las situaciones particulares y aplicar éstas técnicas al mundo exterior que nos rodea. Las estructuras de **sistemas dinámicos** describen comportamientos de estado, de elementos de un espacio de estados en un determinado instante, y la consecuencia de lo sucedido con dicho estado en el tiempo presente, o la predicción del estado mismo en un tiempo posterior. Esto permite la presencia de comportamientos:

periódicos, situaciones fijas, fenómenos convergentes e incluso situaciones caóticas donde hay falta de periodicidad y falta de predicibilidad.

Consecuentemente el estudiante, en diferentes niveles de su proceso de formación, particularmente el estudiante prefacultativo, debe desarrollar de manera integral los **contenidos matemáticos** anteriormente descritos, con la ayuda de procesos que combinan distintos elementos que los alumnos poseen (conocimientos previos que sirven en una nueva situación, reglas, estrategias, procedimientos, capacidades especiales, reflexión …) lo que implica aprendizaje de la matemática mediante la resolución de problemas, es decir lo que permite el desarrollo del "saber hacer" en el estudiante.

Consecuentemente se plantean de manera concreta, las primeras preguntas de interés para el trabajo de investigación:

¿Están presentes en el planteamiento y en la resolución de problemas, que los docentes y los estudiantes procesan, las categorías: dimensión, cantidad, incertidumbre, forma y cambio como parte de los Contenidos Matemáticos .

¿Qué fundamentos teóricos y bases psicopedagógicas consideran los docentes y estudiantes en el aprendizaje de la matemática mediante la resolución de problemas; de manera particular, qué métodos, técnicas, estrategias se utilizan en la resolución de problemas?

En relación, con los valores de la Educación Matemática, que son los contenidos actitudinales que orientan al estudiante hacia el "saber ser", a continuación se describen:

Los de carácter **ideológico** que involucran el *racionalismo* y el *objetismo* ambos complementarios, significa que los estudiantes deben desarrollar capacidades del

manejo de métodos de demostración que pueden ser: inductivos, deductivos, por contradicción o demostración indirecta, etc. y a la vez estar vinculados con imágenes de objetos materiales que les permita desarrollar ideas sobre estos objetos.

Por otro lado, la capacidad de predicción es un componente importante del conocimiento que se ocupa del "*control"*, y consecuentemente tomar medidas de protección frente a algunas fuerzas de la naturaleza o cambios en el contexto social. Un **sentimiento** complementario al sentimiento de control, entorno a las matemáticas, constituye lo que denominamos "*progreso*" que representa un sentimiento más dinámico que el anterior, es un sentimiento de progreso, de cambio, de crecimiento, y el principal aspecto de este valor es que se puede llegar a conocer lo desconocido, el estudiante puede transitar desde un problema "conocido" hasta otro problema "potencialmente soluble".

Respecto a los valores de carácter **sociológico**, es decir, aquellos relacionados con las personas y las instituciones sociales desde el punto de vista matemático, son los denominados "*apertura*" y "misterio". El primero, se refiere a que las proposiciones, teoremas y las ideas matemáticas están en general propuestas al examen y reflexión de toda persona, particularmente de todo estudiante. El segundo, se refiere a desarrollar y reflexionar sobre la pregunta: *¿De donde proceden las matemáticas y quién las genera*?.

Consecuentemente y con el propósito de integrar: conocimiento matemático ("saberes"que los estudiantes deben tener), las acciones que deben realizar ("saber hacer" del estudiante) y finalmente las actitudes o valores que deben desarrollar ("saber ser" del estudiante); permite plantear la siguiente pregunta:

¿Están presentes en el planteamiento y en la resolución de problemas, que los docentes y los estudiantes procesan, los valores: ideológicos (racionalismo-objetismo), sentimiento (control-progreso) y sociológicos (apertura-misterio) como parte de la Educación Matemática?

El presente trabajo de investigación pretende indagar: sobre las matemáticas que docentes y estudiantes desarrollan en las actividades de aula; métodos, técnicas, procedimientos y estrategias utilizadas en la resolución de problemas; y educación acerca de las matemáticas, mediante las matemáticas y con las matemáticas. Para estos efectos se plantean los siguientes objetivos:

3. OBJETIVOS

- Identificar si están presentes las categorías de: dimensión, cantidad, incertidumbre, forma y cambio; y analizar si éstas están dentro del contexto de los conocimientos como parte de los Contenidos, que los docentes y estudiantes procesan en el planteamiento y en la resolución de problemas matemáticos.

- Verificar y analizar, de manera particular, los métodos, las técnicas y estrategias, que los docentes y estudiantes utilizan como parte de los fundamentos teóricos y bases psicopedagógicas en el aprendizaje de la matemática, mediante la resolución de problemas.

- Constatar y discutir la presencia, en el planteamiento y en la resolución de problemas que los docentes y estudiantes desarrollan valores: ideológicos (racionalismo-objetismo), sentimiento (control-progreso) y sociológicos (apertura-misterio) , como parte de la Educación Matemática.

4. MARCO TEÓRICO

En el presente trabajo se consideran cinco ejemplos del poder creador de las matemáticas profundas: dimensión, cantidad, incertidumbre, forma y cambio. En cada una de estas ideas se explora una rica variedad de patrones que pueden presentarse a los estudiantes en varios niveles, en particular en edades tempranas, cuando la curiosidad abierta se mantiene en un nivel elevado. Experiencias tempranas con patrones tales como el volumen, la semejanza, el tamaño y la aleatoriedad preparan a los estudiantes tanto para la investigación científica como para las matemáticas más formales y con mayor precisión lógica. Así, cuando en el salón de clases se realiza una demostración rigurosa años más tarde, el estudiante que se haya beneficiado de las experiencias matemáticas informales adquiridas mucho tiempo atrás podrán decir con sincero placer "*Ahora veo por qué eso es cierto*". Además, como parte del marco teórico, consideramos los fundamentos teóricos en la resolución de problemas matemáticos.

Todas las ideas propuestas se relacionan de múltiples maneras con la familia de las ciencias de las matemáticas. Algunos ejemplos de este tipo de relaciones son: medición, simetría, representación visual y los algoritmos.

Al examinar varios hilos conductores diferentes de la matemática se amplía nuestra perspectiva de los rasgos comunes y las ideas dominantes. Los conceptos recurrentes (por ejemplo: número, función, algoritmo) llaman la atención hacia lo que debe saberse a fin de **comprender** la matemática; las acciones comunes (por ejemplo: representar, descubrir, demostrar) revelan capacidades que deben desarrollarse para **hacer** matemáticas. En conjunto, los conceptos y las acciones son respectivamente, los sustantivos y los verbos del lenguaje de la matemática. Para crecer matemáticamente, los estudiantes desde sus primeros niveles deben exponerse a una rica variedad de patrones apropiados a sus propias vidas a través de los cuales puedan ver la variedad, la regularidad y las conexiones internas. Las propuestas de estos cinco hilos conductores: **dimensión, cantidad, incertidumbre,**

forma y cambio de la Educación Matemática son propuestas por varios investigadores consideradas en Steen (1998).

4.1 DESARROLLO DE LA CATEGORIA O HILO CONDUCTOR DIMENSIÓN MEDIANTE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

4.1.1 INTRODUCCIÓN

La idea consiste en estimular a los estudiantes para que observen objetos geométricos desde las etapas más tempranas de su educación, estas ideas volverían a ellos una y otra vez en el curso de instrucción escolar, haciéndose más sólidas con cada nuevo nivel de complejidad. La apreciación rudimentaria de formas y figuras adquiridas a nivel básico se depuraría a medida que los estudiantes lograrán nuevas habilidades aritméticas de medición y posteriormente algebraicas y geométricas más formales, aumentando aún más el grado de abstracción.

Es un hecho que se obtiene un conocimiento profundo investigando la geometría de la dimensión más elemental: la recta, en la que el número y la geometría se entrelazan de manera íntima y poderosa. El impulso obtenido al pasar de la primera a la segunda dimensión puede conducirnos a nuestra propia dimensión con una comprensión renovada. La analogía dimensional es una herramienta poderosa.

Los objetos siempre deberían estar a la mano. Percatarse del espacio y del volumen debería ser un elemento permanente de la experiencia matemática en todos los niveles escolares. Refinamientos tales como la medición de cantidades y aprender a relacionarlas con fórmulas llegarán en su oportunidad. Con frecuencia, en el sistema tradicional la primera vez que se alienta a un estudiante a pensar en el significado del volumen es el mismo día en que se le presenta una fórmula para calcular el volumen de una esfera o un cono.

4.1.2 MEDICIÓN DE VOLUMENES

Muchos estudiantes nunca se enteran qué son los *volúmenes* porque apenas rebasan el nivel de la geometría plana. Quienes sí lo hacen, a menudo llegan al cálculo diferencial e integral tan rápido que dejan poco tiempo para el tipo de pensamiento geométrico en que florece el cálculo. Cuando un estudiante finalmente ve la justificación detallada de la fórmula para obtener el volumen de una esfera, debería ser una experiencia culminante que cumpliera con la promesa implícita en todas las experiencias que haya tenido con conos y esferas a lo largo de toda su vida escolar.

Los **modelos de descomposición;** ilustran ideas con un grado mayor de profundidad que las comparaciones de volúmenes ya que no sólo ponen de manifiesto relaciones sino que muestran así mismo **por qué** se cumplen estas relaciones. Con el tiempo, los estudiantes deberán llegar a ver que todas las relaciones geométricas se basan en razones.

Los estudiantes que exploren modelos de pirámides con bloques de madera y pilas de naipes en el curso de sus primeros años escolares ciertamente tendrán más probabilidades de comprender y apreciar las demostraciones formales de los teoremas correspondientes de cálculo diferencial e integral. La dedicación y esfuerzo para preparar a los estudiantes en las técnicas algebraicas debería ser la misma para su formación en geometría.

4.1.3 REPRESENTACIÓN VISUAL DE DIMENSIONES

Los *factores de crecimiento* en las dimensiones que involucran procesos aritméticos como los **exponentes** revelan con toda claridad un patrón de crecimiento. Es importante que el estudiante desarrolle el proceso de que a cada dimensión le corresponde su propio exponente de crecimiento, y esto le permita identificar objetos geométricos que tienen una especie de "dimensión fraccionaria" (cuyos exponentes

no son enteros) como por ejemplo los patrones geométricos conocidos como "fractales". Los fractales se usan para motivar gran número de análisis matemáticos, puesto que surgen como resultado de un proceso infinito, se pueden analizar en **relación con series geométricas o decimales periódicos.**

4.1.4 COORDENADAS EN DIFERENTES DIMENSIONES

Una de las ideas de mayor importancia que se puede transmitir a los estudiantes de todos los niveles es la utilidad de las **descripciones con coordenadas tanto para especificar posiciones** como para dar instrucciones. La invitación para examinar coordenadas desde el punto de vista dimensional está abierta en todo momento: tan solo se tiene que hacer concientes a los estudiantes de lo que están viendo.

RECTAS NUMÉRICAS Y CIRCULOS. Un espacio está; identificado por un número específico y uno se mueve en una trayectoria unidimensional, en un sentido o en otro, para pasar de una posición a otra. Una vez entendido el procedimiento básico pueden agregarse refinamientos, tales como la estimación de la distancia que debe recorrerse para llegar de un sitio a otro, el cuál lleva a la **interpretación geométrica de la sustracción** así como la noción de valor absoluto.

Es posible llevar a cabo ejercicios en *una recta numérica* con direcciones postales positivas o en calles reales mediante un juego cuya finalidad sea encontrar números. Posteriormente, se pueden usar las mismas nociones en escalas con valores negativos, como la temperatura, en las que la orientación vertical del termómetro enfatiza la direccionalidad. "¿Qué ocurre cuando la temperatura pasa de 18 grados a 14 grados?", "Baja 4 grados". Estas observaciones pueden efectuarse mucho antes de introducir los números con signo. Sin embargo en una avenida *circular* el problema de localizar una dirección particular es análogo al de poner un reloj a la hora: es posible avanzar en ambos sentidos y llegar en última instancia al destino propuesto. Desde luego en un sentido podría resultar mucho más sencillo que en otro.

El problema fundamental de la geometría tratándose de fenómenos unidimensionales es la determinación de la *distancia* a lo largo de una trayectoria. Ejemplos fundamentales incluyen el cálculo o la comparación de *perímetros* de curvas o polígonos. Existe un número geométrico π, cuya comprensión debería ser asimilada por todos los estudiantes. Encontrar la longitud de una circunferencia de un círculo es un problema unidimensional, por lo que su solución deberá tener un punto que la represente en la recta numérica. Pero ¿donde está?, ¿Cómo puede determinarse si un número dado es menor o mayor que esta longitud?. Las comparaciones con la circunferencia (¿el perímetro?) de polígonos circunscrita e inscrita es una estrategia eficaz para abordar estas preguntas. Aunque con tales comparaciones no es posible determinar el valor exacto de π, permite mostrar de manera conveniente si $\frac{22}{7}$ está un poco más arriba o un poco más abajo de π.

4.1.5 CORTES EN DIFERENTES DIMENSIONES

Uno de los ejercicios más intrigantes en la comprensión de formas en el espacio, a saber, es la *determinación de cortes transversales*. El ejercicio de mayor dificultad para los estudiantes es la representación de la forma del “ecuador” de un cubo suspendido de un vértice. Un estudiante que haya mirado atentamente un cubo real tendrá una mejor oportunidad de imaginar que la respuesta es un hexágono. Este hecho puede mostrarse de manera correcta al colocar una liga alrededor del cubo, o algún otro procedimiento que facilite la representación.

La investigación de cortes transversales en objetos poliédricos conduce a un interesante acertijo. Si una pirámide triangular es cortada por un plano paralelo a una de sus caras, se obtiene una serie de triángulos. Si los cortes se hacen con planos paralelos a una de las aristas, se obtienen rectángulos y en la posición central, un cuadrado. Los estudiantes pueden hacer modelos de cartón de las dos partes poliédricas de esta descomposición al recortar y doblar el patrón correspondiente. Las técnicas de corte son importantes en muchas aplicaciones científicas modernas,

en especial desde el desarrollo de las gráficas de computadora. En la tomografía de rayos X se usan gráficas de computadora para reconstruir objetos tridimensionales a partir de regiones planas. Topógrafos y geólogos construyen y analizan mapas de contorno indicando las elevaciones de diferentes configuraciones arriba y debajo de la superficie de la Tierra. Cuando los estudiantes se encuentran cursando cálculo, apreciaron el potencial de las técnicas de corte, por ejemplo, al relacionar el volumen de una superficie de revolución con las áreas variables de sus secciones transversales circulares o al determinar las líneas de contorno sobre la superficie de una gráfica en el espacio tridimensional.

4.1.6 COMBINACIONES DE CONTEO

Muchas cuestiones combinatorias y algebraicas surgen en la investigación de figuras geométricas; éstas pueden introducirse en diferentes niveles escolares, justo hasta las fronteras de la investigación. ¿Cuántas aristas tiene una pirámide triangular?, para dar respuesta se puede hacer un modelo o simplemente puede dibujarse el objeto y contar las seis aristas. El **procedimiento para dibujar el diagrama sugiere un algoritmo** para determinar el número de aristas. Procedimientos que permiten determinar patrones tales como: el número de aristas en la etapa n es la suma de todos los números menores que n, o que el número de aristas en cualquier etapa es el total del número de aristas precedentes y el número de vértices precedentes. Tales procedimientos y algoritmos se pueden ampliar para el conteo de: triángulos, cuadrados y cubos y como consecuencia establecer diferentes patrones expresados en fórmulas algebraicas.

Por ejemplo en la siguiente tabla se dan resultados del número de aristas obtenidas en función de puntos dados:

Número de puntos	1	2	3	4	5	6
Número de aristas	0	1	3	6	10	15

En cada caso el número de aristas es el número de pares de puntos, lo que lleva directamente al estudio de las combinaciones. Con base en la secuencia de construcción, es fácil ver que el número de aristas de la etapa n es la suma de todos los números menores que n. Por ejemplo, el número de aristas formadas por seis puntos es $1+2+3+4+5=15$. Algunos estudiantes pueden conocer la fórmula $\frac{n(n+1)}{2}$ para la suma de los n primeros enteros, quizás en relación con la famosa anécdota del Joven Gauss, quien usó esta fórmula para sumar los números del 1 al 100. También como se dijo en el párrafo anterior, la tabla revela otro tipo de patrón: el número de aristas en cualquier etapa es el total del número de aristas precedentes y el número de vértices precedentes. La siguiente representación es para el caso $n = 4$

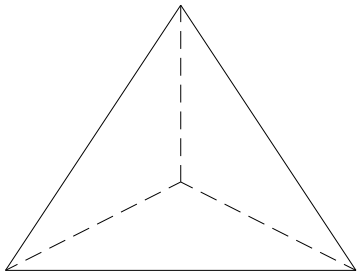


Figura 4.1 Combinaciones de Conteo

4.1.7 DIMENSIÓN Y MEDIDA

La percepción intuitiva de dimensión, asocia con la palabra 1–dimensional a objetos que tienen longitud o la medida lineal, con la palabra 2–dimensional a objetos que tienen área o medida 2–dimensional, con la palabra 3–dimensional a objetos que tienen volumen o medida 3–dimensional, y así sucesivamente. Este sentimiento intuitivo conduce a obstáculos, debido a que la dimensión es un concepto topológico mientras que la medida es un concepto métrico. No obstante existe una conexión fuerte entre los dos conceptos, puesto que; todo espacio de dimensión n tiene medida n -dimensional positiva, el recíproco sin embargo no es verdad. Por ejemplo el conjunto de números irracionales del intervalo cerrado [0,1] tiene dimensión cero, pero este conjunto tiene **medida unitaria**.

Para el desarrollo de la categoría o hilo conductor **Dimensión** mediante la resolución de problemas, es necesario el estudio de ciertas propiedades fundamentales de las figuras geométricas que no dependen, en modo alguno, del tamaño de la forma. Dichas propiedades son funciones únicamente de la posición general de las líneas y puntos de una figura. Por ejemplo, sobre la línea ABC el hecho de que el punto B este comprendido entre los puntos A y C es tan importante como el hecho de que la línea ABC sea recta o curva, o tenga cierta longitud.

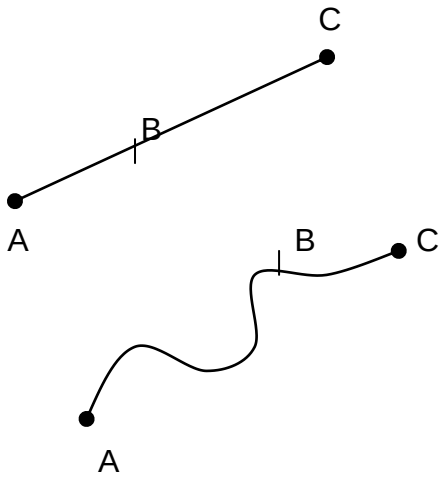


Figura 4.2 "B entre A y C"

Nuevamente cuando un **punto interior** de un triángulo se une con un **punto exterior**, la línea que ellos determinan debe cortar en un **punto de la frontera** (del triángulo) a un lado del triangulo.

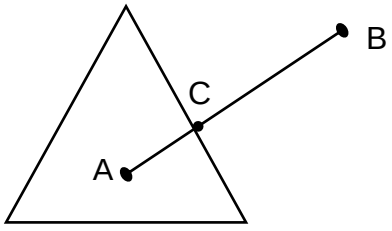


Figura 4.3 Interior –exterior- frontera (Kasner & Newman 1959 p.287)

El estudio de dichas propiedades que no son afectadas cuando se deforma la figura, es lo que constituye la ciencia de la topología. La topología es una geometría del lugar, de la posición (lo que explica su otra denominación de *Análysis Situs*), y que se distingue de las geometrías métricas de Euclides, Lobachevsky, Rieman, etc., que tratan de magnitud y ángulo. En topología nunca preguntamos "¿Qué longitud?" o "¿A qué distancia?" o "¿De qué magnitud?", sino que inquirimos "¿Dónde?", "¿Entre qué?", "¿Interior, o exterior o frontera?". La topología es una geometría no cuantitativa. Sus propiedades serían tan verdaderas en figuras hechas de goma como en las figuras rígidas que se encuentran en la geometría métrica. Podemos desde un cierto punto, conceptuar a la topología como el estudio de las propiedades de los espacios, o sus configuraciones invariantes bajo transformaciones continuas biyectivas.

4.1.8 PROBLEMA SOBRE DIMENSION (AUTOSEMEJANZA)

¿Cuál es la dimensión de un intervalo [0,1] o de un cuadrado o de un cubo?
Observemos las figuras correspondientes:

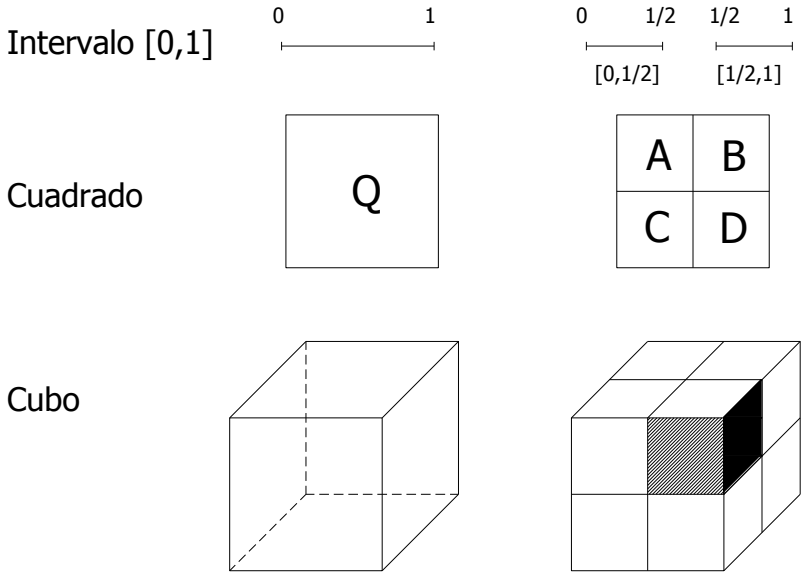


Figura 4.4 Autosemejanza (Guzmán 1997 p.222)

Vemos que son figuras autosemejantes, es decir: las figuras de la izquierda son semejantes a los de la derecha y recíprocamente. Para este tipo de representaciones se puede diseñar una forma de medida de sus puntos, que se comporte al modo de una medida que llamamos longitud, área, etc. ¿Qué características naturales se le deberían exigir a tal medida?

Para el intervalo [0,1] observamos que:

$$\text{Longitud de } [0,1] = \text{Longitud de } [0,1/2] + \text{Longitud de } [1/2,1]$$
$$= 2 \text{ Longitud de } [0,1/2]$$

Para el cuadrado

$$\text{Área cuadrado Q} = \text{Área A} + \text{Área B} + \text{Área C} + \text{Área D}$$
$$= 2^2 \text{ Área A}$$

Observando lo que sucede con la longitud, área, volumen, sugiere que debemos imponer que:

1. Medida de la unión U de figuras A, B, C, D,…, que no se solapan = Suma de medidas de cada una de las figuras, es decir:

$$m(U) = m(A) + m(B) + m(C) + m(D) + \ldots$$

2. Medida de una figura A homotética de una figura A^* = Medida de la figura A^* multiplicada por una potencia de la razón **k** de homotecia, es decir:

$$m(A) = k^d \, m\,(A^*)$$

El exponente d de la razón de semejanza que figura en esta relación de las figuras del conjunto original y su parte semejante a él, es lo que llamamos **dimensión del conjunto**. Así, un intervalo tiene dimensión 1, un cuadrado dimensión 2, un cubo dimensión 3.

¿La dimensión de un espacio, es siempre un número entero?. Con el objeto de dar respuesta a la pregunta planteada, veamos las siguientes representaciones autosemejantes:

(i) El conjunto de Cantor

Un segmento rectilíneo de longitud 1 se divide en tres partes iguales. Se elimina la parte central (abierta, es decir sin incluir los extremos). Cada una de las otras dos se divide en tres partes iguales y se eliminan las partes centrales en cada una de ellas. Se procede igual con cada uno de los cuatro segmentos que quedan. Y se **repite el proceso infinitas veces.** Lo que queda, un conjunto de puntos con muchos agujeros, es el **conjunto de Cantor.**

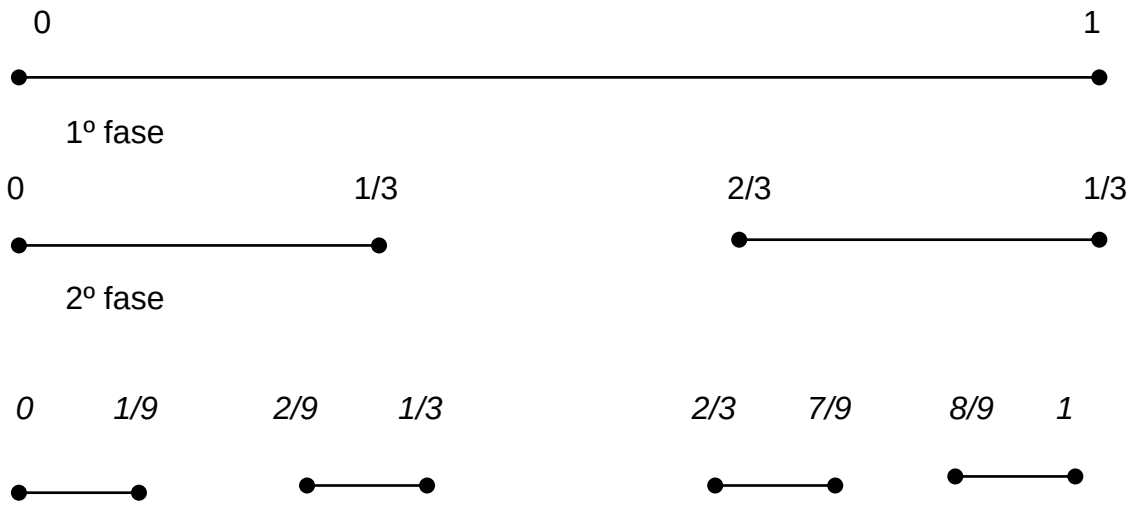


Figura 4.5 Construcción del Conjunto de Cantor (Guzmán 1997 p.217)

(ii) El espacio de Sierpinski

El primer paso para construir la figura de Sierpinski es suprimir un triángulo pequeño de la parte media de uno grande. El segundo paso es igual al primero: suprimir el triángulo de en medio de cada uno de los triángulos resultantes. **El proceso se repite infinitas veces**.

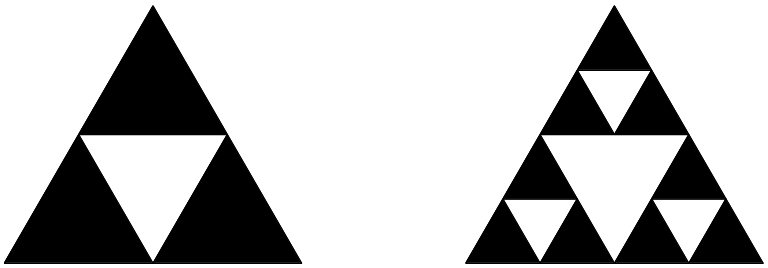


Figura 4.6 Espacio de Sierpinski (Steen 1998, p.32)

(iii) Construcción de la curva de Koch

La curva de Koch resulta a través de un proceso parecido al del conjunto de Cantor. Partimos del intervalo [0,1]. La **prime fase** de la construcción consiste en dividirlo en tres partes iguales, **construir un triángulo equilátero sobre la de en medio y suprimir la base de este triángulo equilátero. La segunda fase** de la construcción consiste en hacer lo mismo que hemos hecho en la primera fase con cada uno de los cuatro intervalos que han resultado. **Y se repite indefinidamente este proceso**. La curva a la que se van aproximando estas poligonales que resultan de cada fase es la curva de Koch.

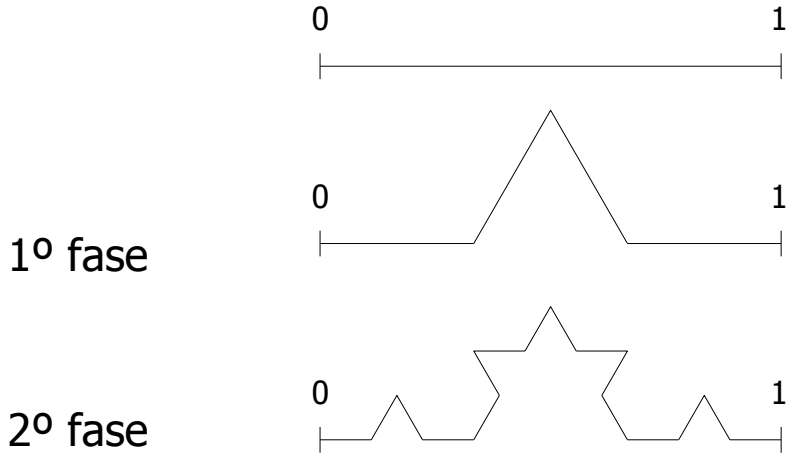


Figura 4.7 Curva de Koch (Guzmán 1997 p.217)

La pregunta razonable ahora es: **¿Se les podrá asignar a las anteriores representaciones una dimensión d con las características anteriores?. ¿La longitud o medida del conjunto de Cantor coincide con su dimensión**?.

Las extrañas representaciones anteriores, son ejemplos de una fascinante colección de patrones geométricos conocidos como **"fractales"**. Un fractal viene a ser el producto final que se origina a través de la iteración infinita de un proceso geométrico bien especificado. Este proceso geométrico elemental, que es generalmente de naturaleza muy simple, determina perfectamente la naturaleza final, que muy frecuentemente, debido a la **repetición infinita** que se ha efectuado, tiene una complicación aparente extraordinaria. Una de las características comunes de estas representaciones es que tienen una especie de **"dimensión fraccionada"**.

La geometría fractal viene a constituir como un puente entre la geometría clásica y el análisis moderno, utilizando como éste de modo muy fundamental los procesos infinitos de construcción (esencialmente el paso al límite), pero ampliando los objetos a los que se aplican tales procesos, que son de naturaleza más global y geométrica. A las consideraciones de naturaleza estática, características de la geometría de corte clásico, incorpora el dinamismo de los procesos infinitos introducidos en la matemática con el análisis moderno.

Se puede afirmar que los fractales son objetos aparentemente complicados que simulan muchas estructuras presentes en la naturaleza (ramificación de los árboles o de los bronquios en los alvéolos pulmonares,…) pero cuyo tratamiento matemático se hace posible gracias a la simplicidad de las reglas que rigen las operaciones que los originan, en muchos casos fácilmente implementables con el ordenador.

Para finalizar, el desarrollo de la teoría de la dimensión es enteramente en un contexto topológico, su tratamiento es conjuntista y da la oportunidad de desarrollar, analizar, determinar, representar, aplicar,…, la dimensión de diferentes espacios. En realidad esta teoría permite asignar un número $\boldsymbol{d}$ llamado "dimensión" a cada

conjunto de puntos de un espacio euclidiano e incluso a representaciones un tanto patológicas como las representaciones del conjunto de Cantor, espacio de Sierpinsky, etc., donde para su interpretación, por ejemplo, el hecho de que la dimensión de la curva de Koch *(d= log4/log3)* que está entre 1 y 2, nos dice que en cierto sentido la curva de Koch está a medio camino entre una curva normal (1-dimensional) y una superficie (2-dimensional).

4.2 DESARROLLO DE LA CATEGORIA O HILO CONDUCTOR CANTIDAD MEDIANTE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

4.2.1 INTRODUCCIÓN

Uno de los principales factores en el desarrollo intelectual del ser humano es el desarrollo de comprender los mundos físicos y biológicos en que vivimos. Buscamos en los testimonios históricos señales que expliquen nuestra condición actual y creamos teorías para predecir el futuro. Prácticamente en cualquier descripción del pasado o proyección del futuro, entre los factores de relieve se incluyen atributos **cuantitativos**: longitud, área y volumen de ríos, masas de tierra, y océanos, temperatura, humedad y presión de nuestra atmósfera; poblaciones, distribuciones y tasas de crecimiento de especies; movimientos de proyectiles, mareas y planetas; ingresos, costos y utilidades en la actividad económica; periodicidad, intensidad y frecuencia de sonidos, fuentes luminosas y terremotos.

Desde una perspectiva relativa y producto de la observación se ha notado que los patrones de los objetos pueden caracterizarse mediante números de tal manera que ayuden al razonamiento. Quizás sea una exageración la afirmación de Lord Kelvin:

*"*Cuando aquello de lo que se está hablando puede medirse o expresarse con números, se sabe algo acerca del mismo; pero cuando no puede medirse, cuando no puede expresarse en números, el conocimiento es de calidad pobre e insatisfactoria*".*

(Steen, 1998, p.67)

Pero no es exagerado decir que los sistemas numéricos de las matemáticas son herramientas indispensables para comprender e interpretar el mundo en que vivimos.

4.2.2 CANTIDAD EN LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES

La aritmética y el álgebra escolares siempre han estado dominadas por la meta de capacitar a los estudiantes en la manipulación de símbolos numéricos y algebraicos. La finalidad de toda esta manipulación es encontrar la respuesta de problemas aritméticos o resolver ecuaciones algebraicas. El núcleo de las matemáticas en la enseñanza básica incluyen la adición, la sustracción, la multiplicación y la división de números enteros y fracciones; el núcleo de las matemáticas en la escuela secundaria abarca las mismas operaciones con expresiones polinomiales, racionales y exponenciales. En el pasado la destreza con habilidades rutinarias de manipulación era un prerrequisito para la aplicación eficaz de las matemáticas. Sin embargo, el surgimiento de calculadoras y computadoras electrónicas ha cambiado esta situación para siempre.

Ahora los alumnos de la escuela elemental pueden trabajar con datos numéricos reales, números muy grandes o muy pequeños en forma decimal o fraccionaria sin el prerrequisito de dominar los intrincados algoritmos de cálculo para operar dichos números. Los estudiantes de educación media pueden abordar problemas de variables, funciones, y relaciones expresadas en lenguaje algebraico mucho antes de que dominen las reglas para manipular dichas expresiones. Fuera de la escuela, prácticamente todos recurren a las calculadoras para realizar cálculos rápidos y precisos. Pero los planes de estudio escolares todavía tienen que ser modificados a fondo en respuesta a estas nuevas condiciones, **por influencia de la tecnología**, lo que significa la búsqueda de algoritmos eficaces que guiarán los procedimientos computarizados, que a su vez implica un primer cambio en los planes de estudio.

Un segundo cambio fundamental que afecta los planes de estudio escolares es la **influencia de las aplicaciones** traducido en la difusión de los métodos cuantitativos

en casi todos los aspectos de la vida personal, profesional y contemporánea. Muchos problemas de aplicación y otros de complejidad e importancia, requieren la capacidad de organizar, manipular e interpretar información cuantitativa. La destreza en el manejo de los algoritmos escritos tradicionales de la aritmética o el álgebra o para resolver problemas típicos planteados en lenguaje coloquial no solo constituye una preparación insuficiente para dichas tareas, sino que en gran parte irrelevante.

Otro cambio reciente en las circunstancias de la enseñanza de temas relacionados con la cantidad en las matemáticas escolares es el surgimiento de una extensa serie de investigaciones de la **influencia de las investigaciones psicológicas** de la cognición humana, respecto a las formas en que los jóvenes desarrollan la comprensión de los sistemas numéricos y su aplicación. Por lo tanto, las investigaciones al respecto proponen un conocimiento profundo de la interacción dinámica entre desarrollo cognitivo del ser humano y los conceptos, principios y habilidades que queremos que los jóvenes aprendan.

4.2.3 CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Podemos iniciar con la siguiente pregunta "¿Cuáles serán las capacidades cuantitativas fundamentales en el futuro de la matemática?". A pesar de los intensos debates entre profesionales que tuvieron lugar en la década pasada, aún no existe consenso en cuanto a una dirección de cambio adecuado y la evidencia indica en su mayoría que las escuelas no han dado paso alguno hacia un cambio radical.

En ramas bien establecidas de las matemáticas, como la teoría de los números, el análisis o el álgebra, muchos conceptos y operaciones fundamentadas pueden presentarse en un sistema coherente de ideas abstractas, es decir, usando un reducido número de definiciones y axiomas a partir de los cuales puede inferirse lógicamente cualquier otro principio. Pero esta organización rigurosa y eficaz de las matemáticas contemporáneas no es sino el producto final de un proceso histórico en el cuál se emplearon de manera informal ideas fundamentales mucho antes de que

se convirtieran en definiciones y teoremas formales. Además, los conocimientos prácticos no se limitan a la habilidad para recitar o deducir principios formales. Requieren la capacidad de identificar relaciones cuantitativas en un ámbito amplio de situaciones concretas, así como habilidades técnicas para hacer representaciones y razonamientos acerca de dichas relaciones.

Al reflexionar sobre las matemáticas escolares, muchos matemáticos y profesores han sostenido que la mejor guía es un plan de estudios que recorre de nuevo la sinuosa trayectoria histórica seguida en el desarrollo de las técnicas numéricas. Otros sugieren que deberían capitalizarse los aspectos estructurales fundamentales que han surgido al final de esta trayectoria, a fin de ofrecer a los niños una forma más eficaz de desarrollar los conceptos y las técnicas numéricas. No hay evidencia suficiente que indique la elección correcta entre ambas opciones, pero sería válido decir que la comprensión cuantitativa requiere del entendimiento de los aspectos fundamentales incluidos en cada perspectiva.

La destreza en el razonamiento cuantitativo es un prerrequisito básico en cualquier ocupación científica, técnica o comercial y la lista en que se emplean los números en dichos campos es a la vez larga y diversa. Sin embargo, la búsqueda de los rasgos comunes en las tareas de razonamiento cuantitativo revela que puede agruparse en unas cuantas categorías. Un análisis común del uso de los números indica que cualquier ejemplo se relaciona con una de tres tareas básicas:

1. **MEDICIÓN:** El **uso de operaciones aritméticas** para hacer razonamientos acerca del tamaño, a fin de responder a preguntas tales como ¿cuántos o cuanto?.
2. **ORDENAMIENTO:** El **uso de los números** para indicar la posición dentro de una secuencia con la relación de “Mayor que” y “Menor que”
3. **CODIFICACIÓN**: La asignación de etiquetas de identificación a los objetos de una colección.

Usisking y Bell (Steen, 1998) propusieron un análisis más detallado de las clases fundamentales de los **usos de los números**. Sugieren seis usos diferentes de los números individuales.

- Cuantificación de colecciones discretas (poblaciones).
- Medición de cantidades continuas (tiempo, longitud, masa).
- Comparación por cocientes (descuentos, probabilidades, escalas de mapas).
- Localizaciones (temperatura, recta de tiempo, calificaciones de pruebas).
- Códigos (carreteras, teléfonos, número de modelo de un producto); y
- Constantes obtenidas de fórmulas ($\pi en\ A = \pi r^2$)

Una taxonomía paralela sugiere formas en que las **operaciones sobre números** pueden asociarse a las operaciones sobre los objetos que describen números.

- La adición equivale quitar, comparar, cambiar o recuperar un sumando;
- La multiplicación representa cambio de tamaño, actuar en, o bien, usar un factor de proporcionalidad; y
- La división representa cocientes, razones de cambio de tamaño, o la recuperación de un factor.

La atención prestada al anterior análisis ayuda a enfocar la instrucción en la tarea fundamental de preparar a los estudiantes en el uso eficaz de los números para resolver problemas. Los ejemplos de las diferentes maneras en que se usan los números ponen de relieve los **componentes esenciales** de cualquier tarea de razonamiento cuantitativo, estos componentes son: f**enómenos, un sistema numérico y una correspondencia entre fenómenos y números** que preserva la estructura esencial. A cada objeto se le asigna un número de tal forma que objetos “semejantes” tendrán números “semejantes” y las relaciones entre los objetos corresponderán a las relaciones del sistema numérico.

El patrón típico es una relación entre dos o más cantidades variables. Las ideas matemáticas claves requeridas para hacer razonamientos acerca de tales patrones son los conceptos centrales del álgebra elemental: variables, funciones, relaciones, ecuaciones, desigualdades y razones de cambio. Actualmente en las matemáticas escolares los estudiantes dedican mucho tiempo a trabajar con variables en la forma de literales para denotar números desconocidos y con ecuaciones o desigualdades que establecen condiciones sobre dichos números. La instrucción algebraica se enfoca en los procedimientos formales para transformar expresiones simbólicas y resolver ecuaciones a fin de encontrar el valor oculto de la variable.

Pero esas habilidades son tan sólo una reducida parte del potencial ofrecido por el álgebra. En muchos problemas que tienen que ver con una relación en tres, dos o más cantidades variables, el núcleo conceptual de la cuestión es la comprensión de las relaciones existentes entre varias cantidades cuyos valores cambian. La noción de variable que los estudiantes deben comprender no es simplemente “una letra que representa un número” o “el valor desconocido en una ecuación”. Debe incluir asimismo la consideración de las variables como cantidades mensurables que cambian cuando las situaciones en las que ocurren cambian.

El informe Science for All Americans de la Asociación Americana para el Avance de la Ciencia, sugiere que los estudiantes deberían ser sensibles al menos a las siguientes clases de relaciones entre variables.

- Variación directa e inversa, cuando una variable se incrementa, la otra también se incrementa (o decrementa) en razón similar.
- Variación acelerada, cuando una variable se incrementa uniformemente, una segunda variable se incrementa en una razón creciente.
- Variación convergente, cuando una variable se incrementa sin límite, otra se aproxima a un valor límite.
- Variación cíclica, cuando una variable se incrementa otra cambia a saltos.

4.2.4 PROCEDIMIENTOS

El primer paso para resolver problemas de manera eficaz es analizar el problema e identificar los conceptos numéricos que se ajusten a las condiciones del mismo. Pero es sólo una parte de la etapa representativa de la solución de problemas, la descripción conceptual de lo que se conoce. La solución de problemas también requiere la influencia de nueva información que proporcione una nueva perspectiva. En las matemáticas esta inferencia se apoya invariablemente en técnicas sistemáticas para representar y manipular información y en problemas cuantitativos, en procedimientos para calcular los resultados. En análisis recientes de pedagogía matemática esta clase de conocimiento se describe como **procesal,** por oposición al conocimiento **conceptual** requerido para identificar las ideas fundamentales.
Las representaciones de las ideas sirven de ayuda a la memoria y como un medio de comunicación. **Una de las primeras tareas de las representaciones en las matemáticas** es que se convierten en objetos de estudio en sí mismos, fuentes nuevas, abstracciones que, con sorprendente frecuencia, sirven de modelos adecuados para patrones no contemplados en situaciones concretas.

La segunda tarea principal de la **representación de información numérica** es de expresar relaciones que se cumplan para todos los números, para muchos números o para ciertos números desconocidos. Los conceptos matemáticos fundamentales que intervienen son los de variable, función y relación.

En tanto que los numerales con valores posicionales y las expresiones algebraicas tradicionales son las formas simbólicas más importantes para registrar información cuantitativa, muchas otras formas de representación como la **representación gráfica** son de uso común. Aunque sin lugar a dudas esta forma de representación no es tan concisa ni de tanta utilidad para la ejecución de cálculos como la visión simbólica, comunica de inmediato una representación completa de la condición cuantitativa. Sin embargo, el advenimiento de calculadoras y software de computadora con capacidades de graficación ha tenido un efecto significativo sobre

la facilidad de producir gráficas y, por tanto, sobre su utilidad. Como resultado las representaciones gráficas se están haciendo cada vez más complejas. **Por tanto, es importante que los estudiantes de matemáticas adquieran experiencia en la interpretación inteligente de las representaciones gráficas y la comprensión de las conexiones entre formas simbólicas, gráficas y numéricas de las mismas ideas.**

El **Segundo aspecto** principal del conocimiento procesal consiste en las técnicas a las que es común referirse como **algorítmicas** para usar información matemática en la solución de problemas. Un algoritmo es "una secuencia de reglas definidas con precisión que indican cómo producir la información de salida especificada a partir de la información de entrada en un número finito de pasos, es la consideración de Knuth (Steen, 1998). El desarrollo de la habilidad de los estudiantes en la ejecución de algoritmos matemáticos ha dominado siempre los planes de estudio escolares tanto en el nivel primario como secundario. Los algoritmos más destacados han sido los procedimientos para sumar, restar, multiplicar y dividir número enteros, fracciones comunes decimales, junto con las operaciones paralelas con polinomios y expresiones racionales en álgebra. El diseño y la aplicación de algoritmos se encuentran obviamente, en el centro de las matemáticas. El potencial de las matemáticas se deriva de la forma en que estas ideas abstractas pueden aplicarse para resolver problemas en contextos sin semejanzas aparentes. Los algoritmos de la aritmética y el álgebra que se emplean en el mundo de los negocios y la economía son los mismos que los usados en la física y la ingeniería.

Para poder usar los algoritmos basados en computadoras, resulta conveniente comprender atributos tales como precisión, economía y robustez, así como conceptos matemáticos fundamentales como inducción y recursión, los cuales reciben tan poca atención en los planes de estudio tradicionales. La interacción entre **comprensión y habilidad** en las matemáticas se ha estudiado y discutido intensamente durante muchos años, pero con renovado entusiasmo en la década pasada. Recientes investigaciones concluyen que el uso inteligente de las

calculadoras puede fortalecer la comprensión conceptual de los estudiantes, la solución de problemas y las actitudes hacia las matemáticas, sin menoscabo aparente de la adquisición de las habilidades tradicionales.

4.2.5 SISTEMAS NUMÉRICOS

Es importante recordar que el poder único de los conceptos matemáticos depende de la significación abstracta la cual se encuentra en el centro de cualquier encarnación concreta. El aprendizaje de los fundamentos de cualquier rama de las matemáticas debería incluir la identificación a dichos principios estructurales básicos, los cuales determinan las relaciones entre los conceptos y los métodos. En caso de los sistemas numéricos, una colección bastante reducida de ideas plenas y con un enorme potencial determina la estructura del sistema. En una perspectiva cercana al fin del siglo XX es posible organizar todas esas estructuras en sentido inverso, al desarrollo histórico de los sistemas numéricos.

- El sistema de los números reales R es el único campo ordenado completo.
- El sistema de los números racionales Q es el subcampo más pequeño de R
- El sistema de los números enteros I es el anillo más pequeño de R que incluye el idéntico multiplicativo.
- El sistema de los números naturales N es el subconjunto más pequeño de R que incluye el idéntico multiplicativo y que es cerrado bajo la adición.

Hay diferencias significativas en las propiedades algebraicas y topológicas de los diferentes sistemas, diferencias que hacen a cada uno de especial interés desde ambas perspectivas, la teoría y la aplicada. El análisis de esas diferencias, progresivamente desde las más simples hasta las más sutiles, contribuye a desarrollar en el estudiante la comprensión profunda de la naturaleza de los números y de los sistemas numéricos. Aún cuando los estudiantes deberán emerger de las matemáticas escolares con un rico conocimiento conceptual o procesal, también es

importante que tengan cierta comprensión de los principios teóricos que proporcionan coherencia lógica a los sistemas numéricos.

Las estructuras aditiva, multiplicativa y de orden fundamentales de los **números naturales y los enteros** se basan en varios principios simples, pero con un gran potencial. En primer término se encuentra el principio de inducción finita. Tal concepto se emplea para definir conceptos con parámetros enteros, y para demostrar proposiciones en la que intervienen los números naturales en su totalidad. Ha adquirido una importancia especial como técnica de demostración en la ciencia de las computadoras, un campo en que los procesos algorítmicos discretos son los principales objetos de estudio. Existe una diferencia crítica entre ambos sistemas. Los números enteros es un grupo aditivo, lo cuál implica que la sustracción está definida. La multiplicación y división de números enteros se rigen por dos propiedades principales. **El teorema fundamental de la aritmética,** y el **algoritmo de la división**. Estos dos principios revisten una enorme importancia práctica y teórica en la teoría de los números y, en la forma más general, en el álgebra.

El sistema numérico más pequeño que incluye elementos para representar cualquier división posible de los enteros $\frac{a}{b}(con\, b \neq 0)$ es, desde luego el **sistema de los números racionales Q.** Los matemáticos, hacen referencia a Q como un **campo.** La ordenación común de los números racionales los hace un conjunto **denso**. Además Q es un campo ordenado **arquimedeano.** Las propiedades de densidad y arquimedeano se combinan para sentar las bases de la precisión en las mediciones, garantizando el uso de una unidad con cualquier grado de refinamiento deseado para cubrir una longitud de cualquier extensión finita. El sistema de los números racionales Q que incluyen a los naturales y enteros, no son la última palabra en lo que a sistemas numéricos se refiere. La demostración de que no existe ningún números racional cuyo cuadrado sea 2 (o cualquier otro entero que no sea un cuadrado perfecto) refleja el carácter automáticamente incompleto de Q. Hay “agujeros” en una recta numérica que solo tiene puntos con coordenadas racionales.

El único campo ordenado **completo**, uno que **llene** todos los agujeros, es el **sistema de los números reales R.**

Los números reales R, representan un paso significativo en el desarrollo de conceptos y métodos cuantitativos en otro sentido fundamental. En tanto que los naturales, los enteros y los racionales son cada uno conjuntos infinitos de números, su uso principal es contar, ordenar y comparar conjuntos finitos de objetos discretos. Los números reales proporcionan la herramienta matemática esencial para describir y hacer razonamientos acerca de procesos infinitos e infinitesimales. Por si solos ofrecen las bases para el desarrollo riguroso de los conceptos de límite y continuidad; proporcionan el puente para el análisis del movimiento y el cambio. La ampliación de los números racionales a los reales hace posible la solución de muchas ecuaciones algebraicas simples y significativas, pero deja de resolver una colección igualmente importante de ecuaciones algebraicas, tales como las siguientes ecuaciones polinómicas simples: $x^2+1=0$ *o* $x^2+x+1=0$ que no tienen raíces reales. El sistema requerido para dar solución lógica a estas ecuaciones, y a todas las ecuaciones polinómicas en general, es el de los números complejos C.

Los números complejos C, están determinados por pares ordenados de números reales. Los números reales pueden ordenarse en una correspondencia uno a uno con los puntos de una recta, los números complejos corresponden a puntos de un plano bidimensional y no están ordenados linealmente. La correspondencia entre números complejos y puntos en el plano da una poderosa conexión entre la aritmética y el álgebra de C y la geometría de formas y transformaciones en el plano.

El desarrollo de **nuevos sistemas numéricos** en modo alguno ha terminado. Por ejemplo, desde su invención a mediados del siglo XIX, el álgebra de matrices se ha convertido en una herramienta invaluable para hacer razonamientos acerca de los datos numéricos complejos. La excepción más notable es el hecho de que la multiplicación de matrices no es conmutativa, un hecho que tiene muchas consecuencias importantes en la teoría del álgebra lineal. Las matrices son de

particular utilidad en la descripción de conjuntos complejos de datos cuantitativos como los que manejan rutinariamente las computadoras.

4.2.6 APLICACIONES

Las Matemáticas escolares deben desarrollar en los estudiantes la comprensión de los principios básicos, la destreza en el manejo de las técnicas y la agilidad en el razonamiento. Pero la prueba final de las matemáticas escolares es si capacitan a los estudiantes para aplicar sus conocimientos en la solución de problemas cuantitativos importantes. La habilidad para resolver problemas no solo es la meta más importante de las matemáticas escolares sino también la tarea educativa más difícil de realizar. Posteriormente abordaremos el término “Problema” con mayor detalle.

4.2.7 METAS

A fin de preparar a los estudiantes para el reto del razonamiento cuantitativo en el mundo moderno, las matemáticas escolares deben desarrollar la habilidad de los estudiantes para:

- Comprender las propiedades fundamentales de los sistemas numéricos y la vinculación entre estos sistemas matemáticos y las situaciones de la vida real en las que están incluidos.

- Describir e interpretar estructuras cuantitativas usando representaciones simbólicas, verbales y gráficas.

- Efectuar cálculos tanto exactos como aproximados en los que intervienen ideas aritméticas y algebraicas por medio de diferentes métodos adecuados, operaciones mentales, técnicas de lápiz y papel, calculadoras, computadoras.

- Aplicar la destreza en el manejo de números y expresiones algebraicas para resolver problemas cuantitativos tanto rutinarios como inéditos.

4.2.8 MATEMATIZACIÓN DE LOS CONCEPTOS EMPÍRICOS DE MAGNITUD Y MEDIDA

Para la formación de nuevos conceptos matemáticos, son necesarios tomar en cuenta otros conceptos y saberes anteriores, y relacionarlos. Además presentar a los estudiantes desde los primeros niveles, colecciones de objetos variados que permitan encontrar atributos muy diferentes y establecer así el mayor número posible de relaciones entre ellos. En este sentido comparto, con Aebli (1987):

> *Todo acto intelectual se construye progresivamente a partir de reacciones anteriores y más primitivas. Cada operación tiene su historia. A lo largo de la génesis del pensamiento infantil, puede observarse cómo las operaciones se diferencian poco a poco a partir de esquemas de acción elementales para formar sistemas cada vez más complejos y más móviles, capaces de captar finalmente al universo entero. Debe apelar (el maestro) a los esquemas anteriores de que el niño dispone y a partir de ellos desarrollar la nueva operación"* (p, 102)

Del mismo modo con DeVries (1983):

> *La relación más elemental y la base para todas las relaciones lógico-matemáticas más complejas es la que se establece entre dos objetos. Cuando por ejemplo, el niño encuentra dos cucharas de distinto tamaño, puede concebirlas como "iguales", "diferentes", "más grande que" o "dos". Estas relaciones no existen ni en una cuchara ni en la otra, las relaciones las crea literalmente el sujeto que pone en relación los objetos, y si no los pusiera en*

relación, para él cada objeto permanecería separado y sin relacionar con el otro (p.19)

Muchos conceptos importantes en matemáticas se construyen sobre **procesos de clasificación** y **seriación**, entre los más importantes cabe destacar las de magnitud y número natural, pues no en vano el conjunto de los números naturales es una magnitud.

Veamos ahora un análisis que permite ver cómo se construye una **cantidad de magnitud** y a qué **modelo matemático corresponde.** Se parte de un conjunto de objetos, y de entre todos sus atributos: color, tamaño, masa, longitud, área, temperatura, etc., se escoge uno medible. Medible en el caso de que tiene sentido definir la suma, que también son llamadas **magnitudes extensibles.** Aquellas magnitudes en las que no es posible definir (con sentido) la suma, reciben el nombre de magnitudes intensivas o no medibles, por ejemplo: la temperatura, la densidad, etc. Si en una bañera mezclamos 20 litros de agua a 40ºC y 10 litros de agua a 10ºC, obtenemos 30 litros de agua que no están a 50ºC".

Supongamos que el atributo elegido es la longitud. Ese conjunto M de objetos que tienen la misma característica o atributo observable en este caso longitud, se compara según criterio "es tan largo como". En M se define la relación de equivalencia R:

el objeto $m \in M$ está relacionado con el objeto $m' \in M$ si y sólo si

$m = m'$ (m tiene la misma longitud que m')

La comparación proporciona una partición $A = M / R = \{[m] : m \in M\}$ en el conjunto de objetos M, de manera que cada subconjunto de la partición $[m]$ (Clase de equivalencia) se caracteriza por que todos los objetos que lo forman tienen la misma longitud. Se ha obtenido una clasificación (relación de equivalencia) de los objetos de

partida atendiendo al atributo “longitud”. Cada clase de equivalencia $[m]$ así obtenida recibe el nombre de **cantidad de magnitud,** en este caso **cantidad de longitud.**

De la misma forma que el proceso de contar permite encontrar el cardinal de un conjunto finito de objetos separados, se ha visto que el proceso de medir, consiste en comparar una cantidad de longitud, masa, volumen, etc., con la longitud, masa o volumen respectivo de un objeto dado al que llamamos unidad, permite asociar un número a una cantidad de magnitud. Sobre la naturaleza de dicho número, si es natural, entero, racional o real nos referimos:

En el caso de los números naturales: intuitivamente se justifica el poder hablar de los números naturales, $\mathbb{N}$, como magnitud, pues los axiomas siguientes indican que es así:

1. Ninguna cantidad es mayor o menor que si misma
2. L es mayor que M o L es menor que M
3. Si L es mayor que M, entonces M es menor que L,
4. Si L es mayor que M y M es mayor que N, entonces L es mayor que N .

El número natural es la respuesta a la pregunta ¿cuántos? que uno se hace ante una colección finita. Como entre los números naturales n y $n+1$, nunca existe un número natural m tal que $n<m<n+1$, entonces los números naturales como magnitud, corresponden a una magnitud discreta. Y si la medida requiere cierta relación biunívoca entre los números y las magnitudes, de forma que el orden de las magnitudes medidas corresponda al de los números, puede deducirse sin dificultad que el conjunto de los números naturales no es suficiente para medir magnitudes continuas, que se describe a continuación:

En el caso de los números reales $\mathbb{R}$ y particularmente los números reales $\mathbb{R}_+$ que incluyen los racionales positivos Q_+, la estructura algebraica y de orden de estos conjuntos se corresponden muy bien con las estructuras de orden y algebraica de las

magnitudes continuas tales como: longitud, masa, volumen, área, etc. Por ejemplo dadas las longitudes a, b con $a < b$, se puede tener longitud c tal que $a < c < b$ y continuar este proceso, es decir; hallar longitudes c_1, c_2 tales que $a < c_1 < c$ y $c < c_2 < b$ y continuar de este modo.

4.2.9 LA MEDIDA COMO FUNCIÓN

¿Qué hacemos cuando medimos?, la definición de medida matemática es bastante natural y, por otra parte, responde a lo que se entiende normalmente por medir. Medir supone asignar un número a una cantidad de magnitud.

En el conjunto de las cantidades de magnitud (conjunto de clases de equivalencia) $A = M / R$ se definen una ley de composición interna τ, y una relación de orden total $\leq$, de tal modo que la terna $(A, \tau, \leq)$ tiene estructura de **semigrupo conmutativo con elemento neutro y totalmente ordenado**. Se considera a los números reales positivos $\mathbb{R}^+$ con la adición y multiplicación conocidas, de tal modo que $\mathbb{R}^+$ forme la **estructura de semianillo**, además la operación de multiplicar un elemento de $\mathbb{R}^+$ con un elemento de A debe cumplir propiedades estructurales. Es decir; el conjunto A con la composición τ $\mathbb{R}$, el orden $\leq$, y el producto de un número real positivo por un elemento de A, es un **semimódulo ordenado sobre el semianillo formado por los números reales positivos multiplicables por todos los elementos de A.** Tal estructura lo denotamos por $(A, \tau, \leq, .)$

Para poder definir medida y unidad, es necesario además exigirle a $(A, \tau, \leq, .)$ la siguiente propiedad: Sea S el subconjunto de números reales multiplicables por todos los elementos de A, debe existir un elemento $u \in A$ de manera que para cualquier $a \in A$ existe un $r \in S$, tal que $a = r \cdot u$. El elemento u que cumple esta condición se llama **unidad** (no tiene por que ser único). Dependiendo de S, se pueden distinguir dos tipos característicos de magnitudes: las magnitudes continuas y las discretas.

- Una magnitud se dice **discreta** si sólo los números naturales son multiplicables por todas las cantidades de la magnitud. Un ejemplo de este tipo es el cardinal de un conjunto.
- Una magnitud se dice **continua** si todos los números reales positivos son multiplicables por todas las cantidades de magnitud. Ejemplos de este tipo son la longitud, masa, tiempo, capacidad, superficie, etc.

Veamos, ahora, que se entiende por medida. Para medir una cantidad en realidad lo que se busca es un número que al multiplicarlo por la unidad, nos resulte la cantidad que queremos medir. De esta manera se dice que esa cantidad mide dicho número de unidades. La definición matemática es como sigue:

Sea a una cantidad de magnitud y sea u una unidad. Se llama medida de a respecto a la unidad u al número real r, que cumple:

$$r \cdot u = a \text{ y se escribe: } m_u(a) = r$$

Realmente lo que supone la medida, es una identidad entre el conjunto de cantidades de una magnitud con su composición y su orden $(A, \tau, \leq)$, y un subconjunto de números reales con su suma y el orden natural definido en los conjuntos numéricos.

Matemáticamente se dice que la medida es un isomorfismo (la misma etimología de la palabra ya lo indica, **iso**: igual, **morfos**: forma) entre el conjunto A y un subconjunto de números reales. Sea S el subconjunto de números reales multiplicables por todos los elementos de A y sea la función:

$$M_u : A \to S$$

$$a \to m_u(a) = r \quad \text{(es decir } \; r \cdot u = a \text{)}$$

Esta función es biyectiva, esto es, cada cantidad de magnitud se corresponde con un número (su medida) y cada número de S se corresponde con una cantidad de magnitud. Además esta función cumple las siguientes propiedades:

(i) $m_u(a \tau b) = m_u(a) + m_u(b)$

Esta propiedad es la que permite identificar la composición de cantidades τ con la suma de números. De ahí que se hable de “suma de longitudes”, “suma de masas”, etc.

(ii) $m_u(r \cdot a) = r \cdot m_u(a)$

Esta propiedad permite afinar que si se multiplica una cantidad de magnitud por un número, la medida también queda multiplicada por ese número.

(iii) Si $a \leq b$, entonces $m_u(a) \leq m_u(b)$

Esto supone identificar el orden definido en A con el orden natural de los números, es decir, con las medidas de las cantidades es posible ordenar dichas cantidades, que muchas veces es el proceso que se sigue.

Finalmente, para caracterizar la importancia y la necesidad de desarrollar el hilo conductor **cantidad** mediante la resolución de problemas, consideremos los alcances registrados al respecto por: Piotr Lavréntievich Ulyánov Mijail Ivanovich Dyachenko (2000).

> El análisis clásico estudiaba, en general, las funciones con algún grado de suavidad. Pero en la segunda unidad del siglo XIX comenzaron a verse con nitidez ciertos problemas en el Análisis que era necesario resolver, relacionado con una clase de funciones más generales y también con un estudio más profundo de funciones suaves. Valgan como ejemplos, el problema de la medida de un conjunto, los problemas de la longitud de una curva y del área de una superficie, los problemas de aproximación y representación de funciones, los problemas de la integral indefinida y de la integral definida, de la integración término a término de las series, de las propiedades de las funciones obtenidas por medio de un paso al límite, etc. Los medios clásicos del análisis no podrían dar respuestas satisfactorias a cuestiones de este tipo. En consecuencia al final del siglo XIX apareció la necesidad insistente de revisar las bases del Análisis Matemático, revisión que

> se realizó a finales del siglo XIX y principios del siglo XX, basándose en la teoría de conjuntos y terminando con la creación de los fundamentos del Análisis Real Contemporáneo. (p. 5)

Como se deduce de lo dicho, el análisis real, con ciertas reservas, se podrían dividir en Análisis Matemático Clásico y en su parte más moderna, que fue fundada por E. Borel, P. Baire y, por supuesto, por H. Lebesgue. En el año 1902 H. Lebesgue introdujo el concepto de medida de un conjunto, de extraordinaria importancia. Luego, basándose en esa noción, H. Lebesgue creó la Teoría de la Integral. **Esos dos conceptos – el de la medida y el de la integral – son el fundamento del Análisis Real actual**

Ejemplo sobre un problema de conteo

Queremos probar que en una reunión de n personas con $n \geq 2$, siempre hay dos personas (por lo menos) que tienen el mismo número de amigos en aquel grupo.

Solución: Sea X el conjunto formado por las n personas, es decir, tenemos un conteo del conjunto X. Como todo conteo es una función, en este caso existe una función biyectiva

$$f : I_n = \{1, 2, ..., n\} \to X \quad \text{tal que}$$

$$f_{(1)} = x_1$$
$$f_{(2)} = x_2$$
$$.$$
$$.$$
$$f_{(n)} = x_n$$

Tal correspondencia f se llama un **conteo** de los elementos de X. En este caso, n se llama el **número cardinal** del conjunto X o, simplemente, el número de elementos de X. La condición $n \geq 2$, significa que si X está constituido por una sola persona, entonces a partir de X no es posible hallar dos personas en X que tienen el mismo número de amigos en el grupo. Para dar solución al problema, imaginemos n cajas

numeradas con $0,1,2,...n-1$. A cada una de las personas entregamos una tarjeta que pedimos depositar en la caja correspondiente al número de amigos que tiene en aquel grupo. Sean y el conjunto de las n cajas cuyo cardinal es $y(n)=n$ y Z el conjunto de las tarjetas cuyo cardinal también es $Z(n)=n$. ¿Existen algunas restricciones o condiciones para la solución del problema?. Evidentemente existen: las cajas numeradas con 0 y $n-1$ no pueden ambas recibir tarjetas, pues si hubiera alguien que no tiene amigos allí, entonces ninguno de los presentes puede ser amigo de todos y viceversa. Entonces tenemos, en realidad, n tarjetas para ser depositadas en $(n-1)$ cajas. Como $Z(n)=n$ es mayor que $(n-1)$, entonces por el **principio del palomar** (propiedad básica del número cardinal), ninguna función $h:Z\to W$ es inyectiva, donde W es el conjunto cuyo cardinal es $(n-1)$. Es decir, por lo menos una de las cajas va a recibir una o más tarjetas. Esto significa que dos o más personas allí tienen el mismo número de amigos entre los presentes. Como sólo los números naturales son multiplicables por todas las cantidades de magnitud (cajas, personas, tarjetas) las magnitudes consideradas en el problema son magnitudes discretas. Por ejemplo, en el caso de **n-personas**, n pertenece a los números naturales y **persona** es la unidad.

Ejemplo: Problema sobre magnitud continua

La siguiente figura muestra la ilustración de una habitación (en forma de paralelepípedo) cuyas dimensiones son: Longitud AB = 2.53 m, longitud AC= 4.65 m, y longitud BD = 6 m. La recta AB (determinada por el encuentro de dos paredes) es la perpendicular común a las rectas alabeadas AC y BD. Determinar la distancia de la diagonal CD y la distancia entre las rectas alabeadas.

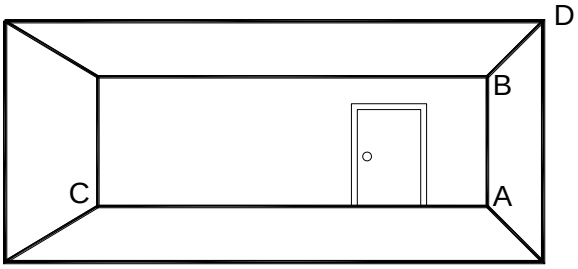


Figura 4.8 Habitación en forma de paralelepípedo

Solución:

La perpendicular común AB a las alabeadas AC y BD indicada en la ilustración anterior, nos proporciona la distancia entre las rectas alabeadas. Es decir: longitud del segmento AB = 2,53m es la distancia pedida. Calcular la diagonal CD, significa calcular la diagonal CD = z de un paralelepípedo rectangular EFACGDBH

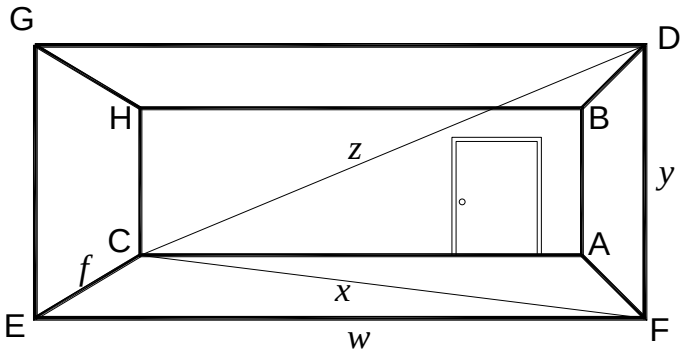


Figura 4.9 Representación de la diagonal CD

Resolvemos el problema utilizando el Teorema de Pitágoras en los triángulos rectángulos CEF y CFD.

Tenemos: $CF^2 = x^2 = f^2 + w^2$ (en el triángulo CEF) y $CD^2 = z^2 = CF^2 + FD^2$;

$FD^2 = y^2$ (en el triángulo CFD). Entonces: $z^2 = f^2 + w^2 + y^2$

Luego: $CF^2 = f^2 + w^2 = CE^2 + EF^2 = BD^2 + AC^2 = 6^2 + 4.65^2$

$FD^2 = y^2 = AB^2 = 2.53^2$

Entonces: $z^2 = CD^2 = 6^2 + 4.65^2 + 2.53^2 = 36 + 21.6225 + 6.4009$

Luego $z^2 = 64{,}0234$

Entonces la longitud de la diagonal CD **=** $\sqrt{64.0234}$ = 8.001462366 m.

Como los números reales positivos $\mathbb{R}_+$ son multiplicables por todas las cantidades de magnitud (en este caso longitud en metros), la magnitud considerada en el problema es magnitud continua. Por ejemplo, en el caso de **8.00142366 metros**, 8.001462366 es el número real y **metro** es la unidad.

4.3 DESARROLLO DE LA CATEGORIA O HILO CONDUCTOR *INCERTIDUMBRE* MEDIANTE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

4.3.1 INTRODUCCIÓN

El vocablo “incertidumbre” se usa con la intención de evocar dos temas relacionados: **datos** y **azar**. Ninguno de ellos es un campo separado dentro de las matemáticas; sin embargo, ambos fenómenos constituyen objetos de estudio de la matemática. En términos generales, la **estadística** y la **probabilidad** son las disciplinas matemáticas que tratan de los datos y el azar, respectivamente.

Los **datos** no son simples números sino **números con un contexto.** El número 4.6 en ausencia de contexto no transmite información alguna; el hecho de que el peso al nacer de un niño fue de 4.6 kg, nos permite comentar el saludable tamaño del pequeño. Es decir, los datos participan a nuestros conocimientos de un contexto para ejercer la comprensión y la interpretación en vez de limitarnos a efectuar operaciones aritméticas.

Los fenómenos cuyos resultados individuales son inciertos pero que cuentan con un patrón regular de los mismos en muchas repeticiones se llaman **aleatorios.** “Aleatorio” no es sinónimo de “fortuito”, sino la descripción de un tipo de orden diferente del determinista que suele asociarse con la ciencia y las matemáticas. La probabilidad es la rama de la matemática que describe la aleatoriedad. Los psicólogos han demostrado que nuestra intuición del **azar** contradice de manera profunda las leyes de la probabilidad que describen el comportamiento aleatorio real.

Entre el entendimiento incorrecto es muy difícil corregir por medio de la instrucción formal. Los intentos por enseñar probabilidad en inferencia estadística sin la preparación intuitiva adecuada, constituyen un segundo escollo principal al introducir datos y azar como temas de los planes de estudio escolares.

Por la presencia de **calculadoras y computadoras** el nuevo paradigma del análisis estadístico es un dialogo entre modelos y datos. Se permite que los datos critiquen o incluso refuten el modelo original. Los métodos de diagnóstico que participan en este proceso constituyen un campo importante de la investigación estadística.

DE LOS DATOS A LA INFERENCIA: Existen varios principios de organización que nos ayudan a ver el estudio matemático de datos al azar como un todo coherente. Uno de estos principios es: **la progresión de las ideas del análisis de datos a la producción de datos a la probabilidad a la inferencia.** El análisis de este ensayo se organiza con base en estas etapas:

- **Análisis de datos:** que incluye las tareas de organizar, describir y resumir datos.
- **Producción de datos,** generalmente para responder a preguntas específicas acerca de una población más grande.
- **Probabilidad**, la descripción matemática de la aleatoriedad.
- **Inferencia,** el hecho de sacar conclusiones a partir de datos.

4.3.2 PENSAMIENTO ESTADÍSTICO

La estadística y la probabilidad son las ciencias que se ocupan de la incertidumbre, de la variación presente en todo género de procesos naturales y creados por el hombre. Como tales son más que una parte de los planes de estudios de matemáticas, aunque encajan bien en este marco. La probabilidad es un campo dentro de las matemáticas, la estadística, como la física o la economía es una disciplina independiente que hace un uso intenso y esencial de las matemáticas. El

pensamiento estadístico entendido en su sentido amplio, deberá ser parte del aparato mental de toda persona educada. Los elementos centrales del pensamiento estadístico pueden resumirse de la siguiente manera:

1. La omnipresencia de la **variación** en los procesos. Los individuos son variables: las mediciones repetidas del mismo individuo son variables. Los dominios del determinismo estricto en la naturaleza y en los asuntos humanos son bastantes restringidos.

2. La necesidad de **datos** acerca de los procesos. La estadística es resueltamente empírica, no especulativa. La atención a los datos tiene prioridad máxima.

3. El diseño de la **producción de datos** con la variación en mente. Concientes de las fuentes de variación no controlada, evitamos muestras autoseleccionadas e insistimos en la realización de comparaciones en los estadios experimentales. Y la variación planeada en la producción de datos se introduce mediante el uso de la aleatorización.

4. La **cuantificación** de la variación. La variación aleatoria se describe matemáticamente por la **probabilidad.**

5. La **explicación** de la variación. El análisis estadístico busca los efectos sistemáticos subyacentes en la variabilidad aleatoria de individuos y mediciones.

Ejemplo

El hombre creó las matemáticas para ayudarse con el fin de entender el universo y utilizar los recursos del mundo físico. Pero en el mundo físico del hombre civilizado figuran actividades tales como arrojar dados, jugar a las cartas, apostar en las carreras de caballos, poner a prueba su suerte contra la ruleta y otras formas de

juegos de azar. Para entender y dominar estos fenómenos, se agregó una nueva rama de las matemáticas: la teoría de las probabilidades. La profundidad y el significado de la teoría son tales que ya no se identifican con los de la esfera de aplicación dentro de la cuál nació. Es deplorable la falta de certidumbre en algunas fases del trabajo científico, pero esto no es obstáculo insuperable. Muy poco de lo que esperamos que nos ocurra en prevenir es cierto. ¿Cómo se procede ante la incertidumbre? Descartes señaló el curso que seguimos todos, consciente o inconscientemente: “Cuando no está en nuestra mano determinar lo que es verdad, debemos actuar de acuerdo con lo que es más probable”.

En general, la definición de medida cuantitativa de la probabilidad es la siguiente: Si, de n resultados igualmente probables, m están a favor de que ocurra cierto acontecimiento, la probabilidad de que este sucede es m/n y la probabilidad de que no ocurra es de $1-m/n=n-m/n$. Por consiguiente, la medida numérica de la probabilidad puede variar de 0 a 1, de la imposibilidad a la certidumbre.

Consideremos el siguiente ejemplo como ilustración de aplicación de la anterior definición de probabilidad: Supongamos que se arrojan al aire tres monedas ¿Cuáles son las probabilidades de que caigan?

a) Tres escudos
b) Dos escudos y una cara
c) Dos caras y un escudo
d) Tres caras

Si denotamos por E escudo y C cara, los resultados posibles son:

EEE	ECE	CEE	CCE
EEC	ECC	CEC	CCC

Hay ocho resultados posibles

a) Para calcular la probabilidad de obtener tres escudos, observemos que sólo uno de los resultados posibles es favorable. Entonces la probabilidad de obtener tres águilas es *1/8*.
b) La probabilidad de obtener dos escudos y una cara, es *3/8*, pues de los ocho resultados posibles tres son favorables.
c) De igual manera, la probabilidad de dos caras y un escudo es *3/8*

Posiblemente surgen preguntas en el estudiante tales como ¿Cuál es la posibilidad de obtener tres escudos en tres tiros consecutivos de una moneda? ¿Cuál es la probabilidad de obtener un escudo en un tiro de una moneda?

Las respuestas podrían conducirnos a resultados generales como: la probabilidad de que ocurra toda una serie de acontecimientos distintos, si estos son independientes unos de otros, es el producto de las probabilidades de cada uno de ellos. Cuando se tienen tres monedas (o cuando se tiran tres veces una moneda), hay ocho resultados posibles: uno, de obtener tres escudos, tres de obtener dos escudos y una cara, tres de obtener un escudo y dos caras, y otros más de obtener tres caras. Podríamos calcular el total y la distribución de los resultados al tirar cuatro monedas, cinco monedas, etc. Reflexionando en este problema de arrojar muchas monedas, Pascal terminó por construir el siguiente “triángulo” (que por cierto lleva su nombre)

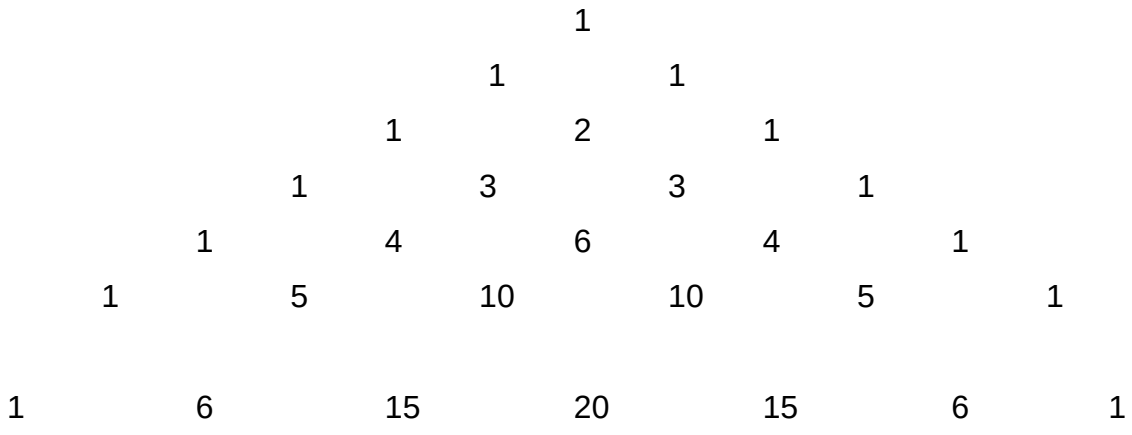


Figura 4.10 Triángulo de Pascal

Pascal descubrió que este triángulo representa perfectamente las probabilidades de obtener escudos o caras al arrojar monedas. Veamos como ejemplo el caso de tres monedas. El número de resultados posibles es 8, que es la suma de los números de la **cuarta** fila, las probabilidades respectivas: 1/8, 3/8, 3/8, 1/8, se obtienen de cada uno de los números de la cuarta fila, a saber 1, 3, 3, 1. De igual modo, las probabilidades de las varias posibilidades que pueden darse en el proceso de lanzar cinco monedas, se encuentran es la sexta fila del triángulo y así sucesivamente. (El número 1 de la primera fila nos indica que la probabilidad de ganar en un tiro de 0 monedas es 1. Este es el único caso en que puede uno estar seguro de ganar). Como los elementos de la fila $(n+1)$ del triángulo de Pascal representan los coeficientes del desarrollo del binomio $(a+b)^n$. Las distribuciones que aparecen en cualquier fila del triángulo se llaman **distribuciones binomiales**. Observemos la séptima fila del triángulo de Pascal. Los números de esta fila se refieren al lanzamiento de seis monedas y su suma es 6/64. Nos dicen, por ejemplo, que la probabilidad de obtener seis escudos es 1/64; que la de obtener cinco escudos y una cara es 6/64; que la de obtener cuatro escudos y dos caras *15/64* etc. Si representamos el número de escudos posibles como abscisas y las probabilidades de estos varios números de escudos como ordenadas, obtendremos la siguiente gráfica. La forma de esta gráfica sugiere la curva normal de probabilidades.

Datos

0	1	2	3	4	5	6
1/64	6/64	15/46	20/64	15/64	6/64	1/64

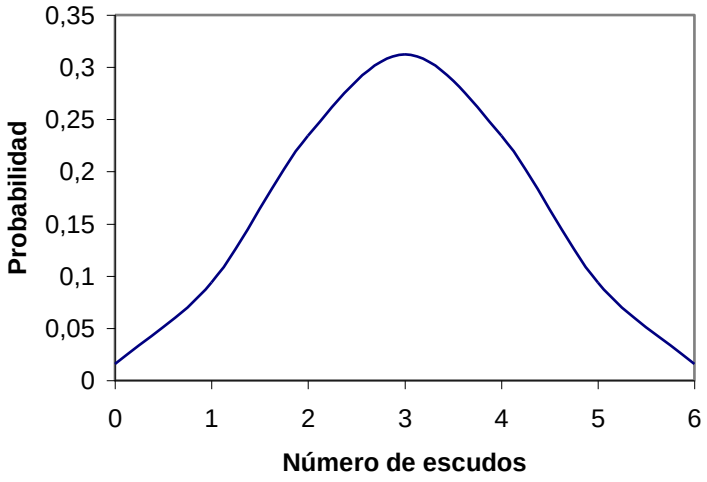


Figura 4.11 El número de escudos posibles en un tiro de seis monedas, en función de la probabilidad (Kline 2000 p. 530)

El estudiante puede quedar con la impresión de que las matemáticas se han absorbido demasiado en el lanzamiento de monedas y acepte este desmesurado interés como otra peculiaridad de mentes estrafalarias, lo cierto es que el lanzamiento de monedas es tan solo un ejemplo útil y concreto que abre el camino hacia aplicaciones más serias, por ejemplo en el campo médico donde se obtiene conclusiones útiles. De hecho, es precisamente esta teoría la que se utiliza para determinar la eficacia de la mayoría de los tratamientos médicos, como la vacuna Salk contra la poliomielitis.

4.4 DESARROLLO DE LA CATEGORIA O HILO CONDUCTOR *FORMA* MEDIANTE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

4.4.1 INTRODUCCIÓN

La forma es un tema vital, creciente y fascinante de las matemáticas que tiene estrechos vínculos con la geometría clásica pero que la rebasa por mucho en contenido, significación y método. Desarrollado adecuadamente el estudio de la forma puede constituir un componente central de la educación matemática, un componente que incida y contribuya no sólo en las matemáticas sino también en las

ciencias y en las artes. Como muchos otros conceptos importantes “forma” es un término indefinible. No es posible precisar el significado de “forma”, debido en parte a que siempre se están descubriendo nuevos tipos de formas. Demos por sentado que sabemos que son las formas, más o menos: podemos reconocer una forma cuando la vemos sea con los ojos o con la imaginación.

En el estudio de la forma nuestras metas no son muy diferentes de las de los filósofos griegos de la antigüedad: descubrir las semejanzas y diferencias de los objetos, analizar los componentes de la forma y reconocer formas en diferentes representaciones. La **clasificación,** el **análisis** y la **representación** constituyen nuestras tres herramientas principales. Desde luego estas herramientas guardan una estrecha interrelación, por lo que las distinciones entre ellas son hasta cierto punto artificiales. ¿La **simetría** es una herramienta para clasificar patrones o una herramienta para analizarlos?. De hecho, es ambas cosas.

CLASIFICACIÓN

En **primer lugar,** para contar el número de objetos de una cierta clase uno debe tener conciencia de que son “de una cierta clase”. Es decir, debe reconocerse que estos objetos tienen propiedades que los distinguen de otros objetos y debe ser posible la caracterización sin ambigüedades de sus rasgos distintivos. En **segundo lugar,** debe ser posible el uso de estos criterios para determinar con precisión que objetos los satisfacen. Mencionamos a continuación algunos esquemas de clasificación que han demostrado su efectividad en muchas aplicaciones:

Congruencia y Semejanza: Dos objetos son congruentes si son exactamente iguales hasta el más mínimo detalle, excepto por su posición en el espacio. Dos objetos son semejantes si solo difieren en posición y escala.

Simetría y autosemejanza: La simetría clasifica a los objetos de acuerdo con la disposición de sus partes constituyentes.

Así como la congruencia lleva a la simetría (que es tan solo otro nombre para la autocongruencia). La semejanza se extiende a la autosemejanza.

Propiedades combinatorias: Congruencia y semejanza son conceptos métricos: pueden alterarse al cambiar las longitudes o los ángulos. Pero otras propiedades de las formas permanecen invariables bajo estas transformaciones. Por ejemplo el número de aristas y vértices de un polígono no se altera si el polígono se estira o se dobla. **Topología,** la equivalencia topológica es todavía más general que la equivalencia combinatoria. En la perspectiva de la topología, todos los polígonos son bucles y todos los poliedros son iguales. Piaget sostenía que los conceptos topológicos ocurrían antes que los métricos en el desarrollo del niño: Un niño puede reconocer un bucle antes de distinguir varios tipos de bucles como los círculos y los triángulos. El hecho de ser un bucle por oposición a un nudo es una propiedad topológica de la forma. En la escuela la topología suele describirse como la "geometría de lámina elástica", da lugar a ampliar el concepto de flexibilidad de la forma.

ANÁLISIS

Para interpretar y crear patrones en el mundo actual pletórico de imágenes, no basta con identificar las semejanzas y las diferencias: también es necesario analizarlas. Esto nos lleva a la investigación de la manera en que las formas grandes se construyen a partir de otras más pequeñas y la identificación de los patrones presentes y de sus propiedades. La naturaleza también crea patrones. Como los patrones hechos por el hombre, los patrones naturales aparecen en varios niveles: los átomos se organizan en moléculas en tanto que las moléculas se organizan en cristales y células, las cuales a su vez con frecuencia son las subunidades de organizaciones a un nivel aún superior.

REPRESENTACIÓN

Una tercera herramienta importante en el estudio de la forma es la **representación**. En la vida cotidiana así como en las ciencias, las matemáticas y el arte, no solo tratamos con formas en si mismas, sino también con varios tipos de representaciones de las formas, modelos, fotografías, dibujos. Las herramientas de representación incluyen la capacidad para comprender modelos a escala: para leer mapas; para entender las sombras, las secciones y las proyecciones; para reconstruir formas a partir de sus imágenes; para dibujar con precisión y para usar gráficas de computadora. El punto subyacente es el mismo en cada caso, determinar la relación entre una forma y su imagen o entre diferentes imágenes de la misma forma. La representación más simple de una forma es un **modelo** de la misma, construido en una escala adecuada. Un globo esférico es un modelo de la tierra, de la luna o de cualquier planeta. Un globo no es un replica exacta de la tierra, sino aproximada que pone de relieve de manera muy conveniente ciertas características de la tierra.

Surgen cuestiones interesantes acerca de la relación entre forma e imagen, por ejemplo, en el estudio de los **mapas.** ¿Por qué usamos tantos globos como mapas planos?, la respuesta es simple: para propósitos diferentes. Aún cuando un globo y un mapa plano representan la misma cosa, a saber la tierra, muestran sus propiedades de modo muy diferente. Los mapas planos resultan muy convenientes para representar regiones pequeñas de la tierra, ya que es posible conseguir una buena aproximación de parte de la superficie de un objeto esférico por medio de un plano. La relación entre globos y mapas planos conduce con rapidez a cuestiones geométricas de importancia fundamental.

La **computadora** no es un sustituto de los modelos tridimensionales. Las imágenes en la pantalla de una computadora incluso las llamadas imágenes tridimensionales, sólo tiene sentido si el observador cuenta con una amplia experiencia con estructuras tridimensionales. Además, todas las personas deberían tener nociones de la

geometría que se encuentra detrás de las gráficas de computadora, sobre todo, la geometría coordenada, para poder usar los paquetes de gráficas de manera inteligente y crítica.

4.4.2 VISUALIZACIÓN

La **visualización** constituye un tema general con implicaciones en diversos aspectos de nuestras vidas. Posee una importancia determinante para las matemáticas en su conjunto y esto ha sido así en el curso de la historia. Los matemáticos consiguieron un gran avance con la invención de los numerales que son representaciones visuales de los números. Sin lugar a dudas uno de los principales logros matemáticos de los últimos siglos fue el desarrollo de la geometría analítica, que nos permitió combinar el pensamiento matemático visual con el formal.

4.4.3 CUESTIONES CURRICULARES

Una **visión integrada de la forma** puede contribuir a dar mayor fuerza al tema en su conjunto. El papel de la **geometría** es un tema permanente de la educación matemática en todos los niveles, desde la escuela elemental hasta la superior. Durante muchos años la geometría ha sido el niño problema de los planes de estudio de matemáticas. El problema con la geometría se debe en parte a la falta de consenso acerca de qué es la geometría y por que debe estudiarse. ¿Se estudia para aprender a disciplinar el pensamiento? ¿Para preparar a los estudiantes para otras materias escolares?, ¿o es por que existe un contenido importante en el tema en si mismo?. A continuación se describen algunas características del estudio de la forma:

El estudio de la forma es interdisciplinario. Como ya se señaló, muchos temas en los que interviene la forma por lo general no se conciben del todo como matemática en un sentido estrecho o restringido. La óptica geométrica es una rama de la física; la semejanza y otras transformaciones son conceptos centrales de la biología; los

químicos trazan polígonos y poliedros para hacer modelos de la estructura de las moléculas. Incluso dentro de la matemática, la forma es interdisciplinaria; requiere capacidades visuales y de cálculo, pensamiento lógico y muchas otras herramientas. La enseñanza de la forma en una manera coherente y con sentido puede estimular la estrecha cooperación entre los profesores de varias asignaturas.

El estudio de la forma es un tema de laboratorio. Todos nosotros, niños y adultos, aprendemos acerca de las formas haciéndolas y estudiando modelos. Como reza un antiguo proverbio: "*Escucho y olvido; veo y recuerdo; hago y entiendo"***.** Si queremos construir una forma, un cubo, una casa a escala o un poliedro puntiagudo, es necesario que sepamos recortar y ensamblar piezas de los tamaños correctos, esta es una de las razones por las que la geometría básica (Medición de ángulos, rectas paralelas, etc.) aún es indispensable. Construir modelos, en este sentido muy concreto, es una de las mejores maneras de unificar la teoría y la práctica.

El estudio de la forma es para todos. Es común decir que el estudio de la forma es ideal para quienes aprenden con lentitud. Sin lugar a dudas es cierto que los estudiantes que tienen problemas con los axiomas y las abstracciones encontrarán menos difícil y con mayor sentido un plan de estudio de la forma basado en la experiencia manual y orientada a problemas. El error de este planteamiento se encuentra en el otro lado de la moneda, la creencia generalizada de que los estudiantes más adelantados no necesitan estudiar la forma.

El estudio de la forma es divertido. Los estudiantes disfrutan trabajar con formas como todos lo hacemos. En la enseñanza de la forma, particularmente en un ambiente de taller no es probable que un profesor encuentre la falta de motivación o la resistencia que en ocasiones surge en los cursos de geometría.

El estudio de la forma es abierto. En una época de cambios acelerados, el estudio de la forma facilita las estrategias de aprendizaje abiertas. Así como la supercomputadora está cambiando los métodos de investigación, así las

computadoras ordinarias están proporcionando imágenes que la mayoría de nosotros no hubiéramos podido imaginar hace una década.

Ejemplo: Problema sobre la característica de Euler, como esquema de clasificación para estudiar la forma.

En diferentes niveles de formación matemática, los estudiantes mediante la resolución de problemas deben distinguir características y elementos geométricos que permitan clasificar a las formas geométricas. Consecuentemente poder utilizar el esquema apropiado de clasificación. En el caso de la Característica de Leonardo Euler (eminente matemático suizo del siglo XVIII, que jugó un papel insigne en el desarrollo de las matemáticas, la matemática, la física y la técnica). Refiriéndonos a las propiedades combinatorias, como por ejemplo, el número de aristas y vértices de un polígono permanece invariante si el polígono se estira o se doble. En 1758 Euler, en las "Memorias de la Academia de Ciencias de Petersburgo" publicó la demostración de la fórmula: $v-a+c=2$ que enlaza entre sí los números de vértices v, aristas a y caras c de un poliedro convexo P arbitrario. En el caso siguiente, $v=8;\ a=12;\ c=6$, se tiene: $v-a+c=8-12+6=2$

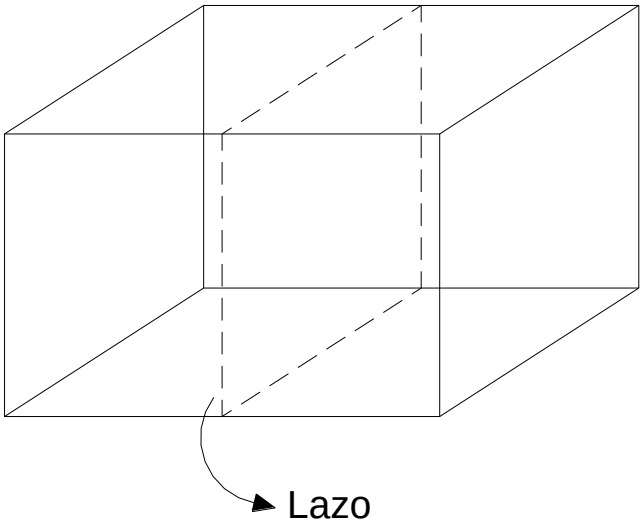


Figura 4.12 Poliedro convexo

Para el siguiente poliedro, con $v=4;\ a=6;\ c=4$, se tiene: $v-a+c=8-12+6=2$

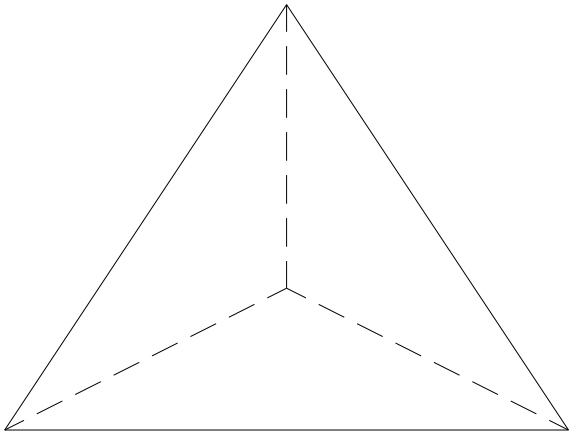


Figura 4.13 Tetraedro convexo

Evidentemente después de procesar lo que significa un poliedro conexo P, se tiene la siguiente clasificación: Sea P un poliedro que satisfaga:

a) Dos vértices cualesquiera de P se pueden unir mediante una cadena de aristas
b) Todo lazo de P (lazo en X es una aplicación continua de una circunferencia en X) formado con segmentos rectilíneos (no necesariamente aristas) separa a P en dos piezas. Entonces $v-a+c=2$ para P

En realidad existen fórmulas análogas a la anterior, para la recta, el plano y el espacio, que mostraremos con algún de talle en la parte de los Fundamentos Teóricos en la Resolución de Problemas Matemáticos. Más general, a cada figura ϕ de cierta clase (digamos, de la clase de los polígonos) puede asignarse su característica de Euler $\chi(\phi)$, es decir en un conjunto de figuras se determina una función χ por la fórmula: $\chi(\phi)=v-a+c$, tal fórmula no depende del método de partición de la figura.

¿Cómo iniciar este tipo de construcción de clasificación en la recta y en el plano?
¿Si ϕ es una circunferencia o es una esfera, cuál es la construcción de $\chi(\phi)$?

4.5 DESARROLLO DE LA CATEGORIA O HILO CONDUCTOR CAMBIO MEDIANTE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

4.5.1 INTRODUCCIÓN

Todo fenómeno natural, desde las vibraciones cuánticas de las partículas subatómicas hasta el propio universo, es una manifestación del cambio, los organismos en desarrollo cambian conforme crecen. Las poblaciones de criaturas vivas, desde los virus hasta las ballenas, sufren modificaciones día con día o de un año a otro. La historia, la política, la economía y el clima están sujetos a cambios constantes y con frecuencia desconcertantes. Para estudiar, entender y controlar los **patrones de cambio** es necesario:

- Representar los cambios en una forma comprensible
- Entender los tipos fundamentales de cambio
- Identificar tipos particulares de cambio cuando ocurran
- Aplicar estas técnicas al mundo exterior, y
- Controlar un universo cambiante para nuestro mejor provecho.

El medio más eficaz para llevar a cabo estas tareas son las matemáticas. Con las matemáticas construimos universos modelo y los descomponemos para investigar la forma en que operan, resaltamos sus rasgos estructurales importantes y percibimos y desarrollamos principios generales. Las matemáticas son el summun en la "transferencia de tecnología": los patrones percibidos en un ejemplo individual pueden aplicarse en el espectro entero de las ciencias y el mundo de los negocios.

4.5.2 LAS MATEMATICAS DEL CAMBIO

El enfoque tradicional de las matemáticas del cambio se puede resumir en un solo término: **Cálculo diferencial e integral**. En el cálculo, el sistema cambiante se representa por una ecuación particular (técnicamente, una ecuación diferencial) que describe la relación entre las razones de cambio de las diferentes variables. Preparar

a los estudiantes para el estudio del cálculo ha sido la meta central de las matemáticas escolares: plantear y resolver las ecuaciones del cálculo es el fluido vital de las matemáticas tradicionales enfocadas a la ingeniería.

Nuevos problemas y nuevos descubrimientos requieren de un ámbito más variado del aparato mental, cabe mencionar dos tendencias importantes: El uso de métodos aproximados con una complejidad creciente y la explotación de la geometría y las gráficas por computadora.

En consecuencia, hoy en día existen muy pocas ramas de las matemáticas que no guarden alguna relación con el cambio. Esto se debe en parte a que las matemáticas son una estructura altamente integrada e interconectada. Además el cambio es un fenómeno a tal punto complejo y variado que para abordarlo requerimos de todas las ideas que podamos reunir. Para estudiar el cambio el científico del futuro necesitará **combinar**, en una sola visión integrada del mundo, aspectos de las **matemáticas tradicionales**, de las **matemáticas modernas**, de la **experimentación** y de la **computación**.

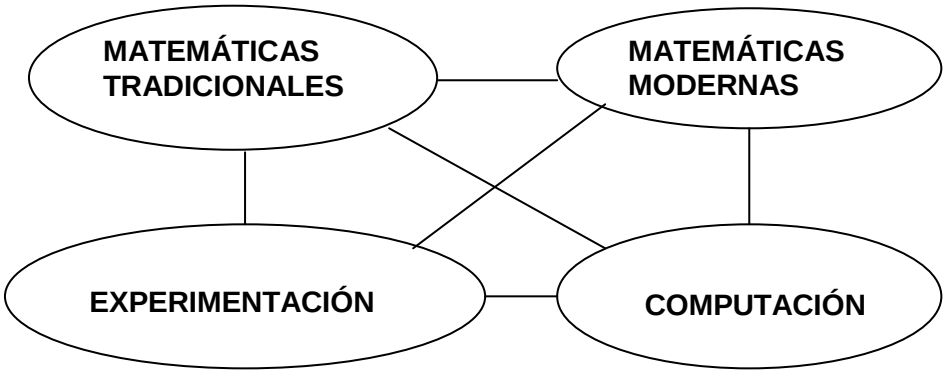


Figura 4.14 Visión integradora para interpretar el cambio

Conforme el siglo XX llego a su fin, **emerge un nuevo estilo de matemáticas. Un estilo cuyo rasgo distintivo es la variedad**. Las matemáticas se desarrollan de

nueva cuenta en estrecha conjunción con sus aplicaciones en las ciencias físicas, biológicas, conductuales y sociales.

El hecho de combinar las anteriores dimensiones, con el objeto de un nuevo enfoque en el aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas, **no** significa que sea posible abandonar el énfasis tradicional en la formulación precisa de los conceptos y la demostración rigurosa. Por el contrario, siguen siendo un componente esencial del quehacer matemático. El rigor y la precisión son tan esenciales a las matemáticas como la experimentación lo es para el resto de las ciencias, y en gran medida por la misma razón: proporcionan razones firmes para creer en la solidez de las ideas y los métodos. En la formación de matemáticos profesionales continuará requiriéndose necesariamente el pensamiento lógico preciso y la comprensión precisa del significado de “demostración”. Sin embargo, el hecho de que la demostración sea importante para el matemático profesional no implica que la enseñanza de las matemáticas a un auditorio dado deba limitarse a las ideas cuyas demostraciones sean accesibles para el mismo. Es probable que tal restricción haga de las matemáticas un tema aburrido, insulso y farragoso, pues muchas de las ideas más estimulantes y llamativas dependen de teorías cuyas demostraciones presentan un alto grado de complejidad. Sin embargo, muchos de los conceptos matemáticos pueden entenderse sin necesidad de tratar sus demostraciones formales.

Las matemáticas del cambio pueden considerarse en muchos **niveles de descripción:**

- El cuadro general: ¿Cuáles son los tipos de cambio posible?
- Áreas específicas de la técnica matemática: ¿Cómo se resuelven las ecuaciones?
- Áreas generales de aplicación: ¿Cómo varía el tamaño de una población de organismos vivos con el tiempo?
- Aplicaciones individuales: Diseñar un reactor químico para producir margarina.
- Ejemplos teóricos simples: ¿Cómo oscila un péndulo?

Para ilustrar estos temas se plantearan algunas preguntas específicas que ejemplifiquen el nuevo estilo de las matemáticas. Estas preguntas se han elegido no como metas específicas en sí mismas, sino por que motivan ideas matemáticas importantes:

- ¿Cómo cambian las poblaciones vivas?
- ¿De donde vienen los meteoritos?
- ¿Por qué tienen rayas los tigres?

Sólo en la primera de estas preguntas parece estar presente el cambio. Las otras parecen referirse a fenómenos estáticos. Los meteoritos simplemente están ahí, o no, al azar. Un tigre tiene rayas, un leopardo no y un par de ellas juntas se cortarán. De hecho todas las preguntas se refieren a cierto tipo de cambio. ¿Los meteoritos en realidad penetran “el azar” en la atmósfera terrestre o hay algo más estructurado detrás de su aparición en el cielo nocturno? Un tigre rayado maduro no existe tan solo como un objeto estático: Se desarrolla a partir de una sola célula (sin rayas). En algún momento en el curso de su desarrollo las rayas hacen su primera aparición. El cambio es el tema detrás de cada una de éstas variadas preguntas.

La mayor parte de la información acerca de los fenómenos de cambio, se difunden por medio de tablas y de gráficas, que son dos de las formas de expresar una relación funcional. Asimismo, en el campo de la enseñanza de las ciencias, desde las tradicionales como la física, la química o la biología hasta las más recientes, como las ciencias sociales; un objetivo principal es la obtención de modelos matemáticos que permitan comprender como ciertas magnitudes dependen de otras y expresarlas en forma sencilla, ya sea mediante tablas y gráficas de rápida interpretación visual, o bien mediante fórmulas que constituyan la expresión más abstracta de una función. Por lo tanto, un objetivo fundamental debería ser el de capacitar a los estudiantes del curso prefacultativo para el tratamiento correcto de la información y en particular aquella relacionada con el concepto de función, mediante la resolución de problemas. Asimismo fomentar unas matemáticas basadas en la actividad de los alumnos, útiles, y vivas, que sirvan para interpretar la realidad y actuar sobre ella.

La resolución de problemas como un tipo de aprendizaje de las matemáticas coadyuva en el hecho de que: para enseñar un concepto hay que conocerlo profundamente, y, por supuesto, cuanto más complejo es dicho concepto más habrá que estudiarlo en sus distintas facetas. Este es el caso del concepto de función que junto a la dificultad de su definición ofrece la complejidad de su simbolismo y de su representación, la diversidad de sus problemas y de sus modelos y la amplia gama de sus aplicaciones.

A continuación describiremos: *las principales contribuciones para el desarrollo del concepto de función*, con el objeto de considerarlo en el proceso de aprendizaje de las matemáticas por medio de la resolución de problemas.

En *el mundo Antiguo (Edad Antigua),* el estudio de fenómenos de cambio en esta era es aún muy reducido y que las aproximaciones cuantitativas y cualitativas de dichos fenómenos se hallan totalmente disociadas y por lo tanto no es posible hablar de la formulación explícita de nociones como variable, dependencia o función.

En la era de *edad Media*, la influencia inicial de Nicolás Oresme en el estudio de los fenómenos que cambian, mediante la representación de diversos tipos de cambio, por ejemplo, para representar la velocidad de un móvil a lo largo del tiempo, Oresme traza un segmento horizontal cuyos puntos representan los sucesivos instantes de tiempo (longitudes) y para cada instante traza un segmento perpendicular (latitud) cuya longitud representa la velocidad en aquel instante.

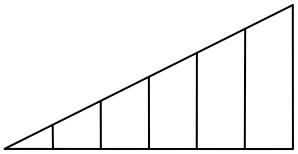


Figura 4.15 Longitud – latitud (Azcárate & Deulofeu 1996, p.45)

Los extremos superiores de las latitudes determinan una curva, en nuestro ejemplo una recta, y si el movimiento parte del reposo, la totalidad de las latitudes cubren un triángulo rectángulo. Oresme pretende que se entienda más fácil y más rápidamente

la naturaleza de los cambios, ya sean cuantitativos o cualitativos, de forma que sea posible dar una representación de todos ellos. No obstante, no podemos considerar las representaciones de Oresme como la expresión de una dependencia en sentido actual; ello sería posible si nos concentramos en la "línea superior o de intensidades" como tal o, todavía mejor, **con su derivada**, y por la superficie que queda bajo la curva, **es decir por la integral de la curva**.

En la *Edad Moderna,* cerca de tres siglos separan la obra de Oresme del siglo XVII, periodo que podemos considerar como el más fecundo para la formación del concepto de función, puesto que en el vivieron entre otros: Galileo, Descartes, Fermat, Newton, Leibnitz y Gregory cuya contribución, desde distintos puntos de vista, dará lugar nada menos que al nacimiento primero de la geometría analítica y luego del cálculo infinitesimal, con el consiguiente progreso para el estudio de las funciones que permitirá la aparición de las primeras definiciones así como el término de función.

Al referirnos a Galileo (1554 – 1642), él estudia el movimiento de una forma cuantitativa dando justificaciones experimentales de las leyes establecidas, es decir, describiendo con detalle experimentos en los que usa ingeniosos instrumentos para tomar medidas que le permitan establecer leyes entre magnitudes que son auténticas relaciones funcionales. Esta es la gran diferencia entre Oresme, para quien el camino de la experimentación era inexistente, y Galileo que en sus trabajos da una gran importancia a las numerosas experiencias descritas, tratando de mejorar los métodos de medida para poder determinar, o cuanto menos verificar las leyes establecidas.

Descartes en 1637, publica su célebre trabajo, La Géométrie, libro que marca el nacimiento y expansión de la geometría analítica, que permitirá, a partir de este momento, interpretar curvas y superficies por medio de ecuaciones, y que un siglo más tarde llevará a la algebrización de la geometría. Esta idea fundamental, afectará igualmente de forma decisiva a las funciones, ya que en este mismo trabajo aparece por vez primera el hecho de que una ecuación en x e y es una forma para expresar

una dependencia entre dos cantidades variables, de manera que, a partir de ella, es posible calcular los valores de una variable que corresponden a determinados valores de la otra.

Descartes, en una publicación escrita antes de 1637, expone los principios fundamentales del **método de las coordenadas** para expresar funciones. Pocos años después, el descubrimiento del desarrollo de funciones en series infinitas de potencias, debido entre otros a Newton, redujo notablemente las restricciones de Descartes, haciendo posible la representación analítica de la mayoría de las funciones estudiadas en aquellos tiempos.

El desarrollo en series de potencias de una función tuvo una gran importancia, a partir de la mitad del siglo XVII, hasta el punto que durante mucho tiempo se convirtió en el método fundamental para el estudio de las funciones. En las contribuciones de Newton al desarrollo del estudio de las funciones, cabe señalar su interpretación geométrica-cinemática de los conceptos fundamentales del análisis matemático, siguiendo las ideas de Barroco, en las que tomando el tiempo como argumento analiza las variables dependientes como cantidades continuas que poseen una determinada velocidad de cambio. En los trabajos principales, publicado hasta 1736, en el que expone sus ideas sobre el cálculo infinitesimal, resulta clara su intención de exponer las ideas básicas a través de la mecánica, al presentar los dos principales problemas del cálculo infinitesimal, la diferenciación y la integración, en términos de movimiento, es decir dada la ley para la distancia determinar la velocidad, para el primer caso, y dada la velocidad determinar la distancia, para el segundo.

Leibnitz (1646-1716) es otro de los matemáticos de la segunda mitad del siglo XVII que contribuyó decisivamente al desarrollo del concepto de función. Al igual que Newton sus primeras obras fueron dedicadas al estudio de series infinitas, también llegando a la misma conclusión sobre la importancia y generalidad del cálculo infinitesimal. Introdujo las notaciones para representar las diferencias (dx, dy) y la integral $\int$. Como indica Boyer en su historia de la matemática, "*la manera de razonar*

de Newton estaba mucho más próxima de la fundamentación moderna del cálculo que la de Leibnitz, pero la eficacia de la notación diferencial y lo plausible de las ideas de Leibnitz provocaban una tendencia a aceptar mejor la idea de diferencial que la de fluxión"

(Al determinar un movimiento x=f(t) sobre el eje x, en el tiempo t, lo que caracteriza dicho movimiento es su velocidad, es decir el valor límite del cociente de diferencias Δx/Δt. Esta velocidad, con la cuál varía la variable x en el tiempo, es lo que Newton llama "fluxión de x")

La primera definición explícita de función como una expresión analítica, publicada en 1718, se debe a Jean Bernoulli, cuya notación no perduró, correspondiendo a Euler (1940) la notación f(x) utilizada hasta nuestros días.

Euler en 1748 hace un detallado estudio del concepto de función y de otros términos relacionados con este tales como: término constante, cantidad definida que toma siempre un mismo valor determinado, y variable, cantidad indeterminada, o universal, y define función: **una función de una cantidad variable es una expresión analítica formada de cualquier manera a partir de esta cantidad variable y números o cantidades constantes.** Posteriormente Euler explicitará la definición de función como una noción general de correspondencia entre pares de elementos, cada uno perteneciente al conjunto en el que toman valores las correspondientes variables, esta nueva definición no mantiene la expresión analítica.

Nuestro interés por mostrar como poco a poco se va ampliando el concepto de función, puede esconder en cierto modo cuál era el verdadero problema. En efecto, no se trata simplemente de hallar definiciones cada vez más generales, sino que es necesario que éstas sean operativas, que tengan sentido en un determinado contexto, que sean aplicables a todas las funciones conocidas en aquel momento y que permitan resolver los problemas planteados que resultan cada vez más complejos.

Dirichlet en 1837 (Del siglo XIX a la teoría de conjuntos) propuso una definición muy general en los siguientes términos: Si una variable y esta relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cuál queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x. Para ejemplificar la arbitrariedad de la regla propuso lo que se llama función de Dirichlet: Sean a y b dos números reales distintos: entonces si x es racional $y = a$, mientras que si x es irracional $y = b$. Esta función es discontinua para todos los valores de x, y por lo tanto no es diferenciable para ninguno de ellos.

Generalizando a la definición de función en términos conjuntistas, todas las definiciones anteriores corresponden a casos particulares de esta nueva generalización: la definición dice: dados dos conjuntos arbitrarios A y B una función (o aplicación) de A en B es una ley que a cada elemento x de A hace corresponder un solo elemento y de B. Hay que resaltar que se trata de una última generalización del concepto y que, como tal, pierde muchos de los atributos que tenían las definiciones clásicas, como son la idea de variación, de continuidad, de la variable como parámetro temporal, de dependencia, característicos de la mayoría de problemas que generaron la necesidad de concepto de función.

Por tanto, en el aprendizaje de las matemáticas mediante la resolución de problemas en relación a una situación o fenómeno real, se recomienda considerar en niveles de educación secundaria y nivel preuniversitario las sucesivas abstracciones del concepto de función, con el objeto de aplicar las matemáticas a los problemas típicos de nuestro tiempo.

En el siglo XVI el estudio del movimiento apareció como problema central de la física y como consecuencia de ello se desarrollaron las matemáticas que estudiaban la interdependencia de las magnitudes variables, es decir, el concepto de variable y de

función. En el caso del movimiento uniforme de velocidad constante v_o, la ley se expresa en la forma:

$$d = v_o t$$

diciendo que la distancia d es función del tiempo t. En el caso de movimiento uniformemente acelerado de aceleración constante a y que parte del reposo, diremos que la variable velocidad v es función del tiempo t y la ley se expresa en la forma

$$v = at$$

En el caso de la ley de Ohm, diremos que la diferencia de potencial V aplicada a un conductor de resistencia constante R es proporcional a la intensidad de corriente eléctrica I y que se expresa como:

$$V = RI$$

Mediante la resolución de problemas los estudiantes deben desarrollar **las operaciones básicas del pensamiento**, en este caso la **operación básica de abstracción** y poder interpretar todas estas fórmulas resumiendo en una sola:

$y = mx$**,** donde m es constante.

Ya en el campo de las fórmulas matemáticas se puede dar un grado superior de abstracción que consiste en representar mediante la fórmula abstracta:

$$y = f(x)$$

la regla de una función $y = f(x)$ se puede expresar de las siguientes maneras:

- **Utilizando una expresión verbal como**:

- A cada circunferencia C del dominio X, le corresponde un radio que es un número real.
- Ley de Verhulst

  El crecimiento biológico de una población es proporcional al tamaño de la población al tiempo considerado y a la diferencia entre una cierta barrera de población que el medio impone y la población actual. La ley de Verhulst podemos considerarla más cercana a la realidad, que la ley de Malthus.

- **Utilizando una fórmula o modelo matemático como**:

$$h: \square \rightarrow \square$$
$$x \rightarrow 2x-1$$
$$h(x) = 2x-1$$

- ***Ley de Malthus***

$P_1 = P_o + k P_o = P_o(1+k)$ en el primer año

$P_n = P_o(1+k)^n$ al acabo de n años. Donde P_o es la población inicial y k es la tasa de crecimiento, que significa k elementos nuevos por año.

- ***Ley de Verhulst***:

La población en el año $n+1$, P_{n+1}, a partir de la población en el año n, P_n, está dado por:

$$P_{n+1} = k P_n (1-P_n)$$

donde k es el coeficiente de reproductividad, que depende del tipo de población.

$T(x) = kx(1-x)$, donde k es una constante numérica y x esta entre 0 y 1.

- **Expresar la ley $y = f(x)$ mediante tablas.**

  La tabla permite descubrir regularidades como diferencias constantes, diferencias que crecen (o decrecen), regularidades, productos o cocientes constantes, etc. Son de gran utilidad cuando se recogen datos experimentales, tanto para verificar una ley como para averiguarla.

- **Expresar la ley mediante una gráfica**

  El concepto de función a través de la historia, muestra que una idea fundamental fue la de conectar el concepto de función con la representación geométrica de una curva. Dar la gráfica de una función es una manera de

definir la función, dando una visión geométrica de ella. El problema que se plantea es de lectura e interpretación.

4.5.3 EJEMPLOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE PERMITEN EL DESARROLLO DEL FENÓMENO CAMBIO

En el aprendizaje de las matemáticas mediante la resolución de problemas, el lenguaje tiene un papel muy importante. Podemos afirmar que el aprendizaje de un concepto depende en gran parte de la capacidad de reconocer e interpretar una representación del mismo. Dentro del esquema del concepto de función (como en otros conceptos matemáticos) subyacen distintos objetos tales como: variable, dependencia, transformación, sucesión o isomorfismo, etc. Es posible abordar la idea de función desde cada uno de estos conceptos, con lo cuál se pondrán de relieve distintas características, diferentes visiones de lo que se entiende por función.

Partiendo de la idea de función como expresión de una dependencia entre variables, podemos considerar las siguientes representaciones:

Figura 4.16 Representaciones para interpretar el cambio

Cada una de estas representaciones permite expresar un fenómeno de cambio, una dependencia entre variables.

El **modelo físico o simulación,** es el lenguaje más cercano al fenómeno estudiado, el menos simbólico, y que aparece al realizar un experimento o al simularlo con un ordenador.

La **descripción verbal**, utiliza el lenguaje común para darnos una visión descriptiva y generalmente cualitativa de la relación funcional.

En un orden creciente de abstracción, la **tabla de valores** nos da una visión cualitativa, fácilmente interpretable desde la óptica de una correspondencia, pero en la mayoría de los casos parcial e insuficiente puesto que de ella difícilmente podemos extraer las características globales de la función.

Los dos lenguajes de mayor abstracción y por tanto más difíciles de interpretar, la gráfica y la fórmula o expresión algebraica, permiten obtener una visión general y completa de la función estudiada, tanto cualitativa como cuantitativa (aunque aproximada en el caso de la gráfica) pero proporcionando mayor o mejor información que los lenguajes anteriores, al mismo tiempo que posibilitan la caracterización de modelos.

El aprendizaje de las funciones mediante la resolución de problemas pasa, en primer lugar, por un conocimiento de cada uno de estos lenguajes de representación, es decir, por la adquisición de la capacidad para leer e interpretar cada uno de ellos y posteriormente para traducir de uno a otro. Si, por ejemplo, analizamos los ejercicios que aparecen en los textos escolares actuales o las prácticas planteadas a los estudiantes, veremos que, salvo contadas excepciones, la mayoría de ellos se reducen a la aplicación en tan solo dos procedimientos de traducción, seguramente los que admiten un aprendizaje mecánico y menos interpretativo. En efecto, un ejercicio del tipo: "construir la gráfica de la función que tiene por ecuación $y = 2x - 3$" ejemplo típico y muchas veces exclusivo del trabajo sobre gráficas de funciones, pretende que los alumnos construyan una tabla de valores a partir de una fórmula dada, y a partir de los valores de la tabla construyan la gráfica (trazado), y en muchos de los casos para su comprensión del concepto de función se inicia en la abstracción última y general de la definición de función. Esta visión tan reducida de los procesos de traducción de un lenguaje a otro, que además parte de la expresión algebraica en un caso o de la definición abstracta en el otro, sin duda las más

difíciles de interpretar, lleva a los alumnos a mecanizar el proceso (en un caso) o memorizar (en el otro) sin comprenderlo.

Ciertamente, algunos de los procedimientos en las diferentes representaciones son difícilmente abordables en un nivel introductorio, dado que precisan de un **trabajo previo sobre los modelos** y un cierto dominio de los mismos, pero otros, como la **lectura y construcción de tablas y la lectura e interpretación de gráficas** son perfectamente abordables y permiten una interesante introducción del concepto de función a partir de situaciones reales, externas a las matemáticas, que sirven de soporte concreto para la elaboración del concepto.

A continuación mostraremos ejemplos donde se plantean preguntas o problemas que permitan en tablas y gráficas cartesianas el desarrollo de **lectura** e **interpretación** de representaciones de funciones que implican fenómenos reales de cambio. En primer lugar debemos aclarar la diferencia que hay entre lo que llamamos **lectura** y lo que entendemos por **interpretación** de una gráfica cartesiana.

Cuando tratamos de obtener información de una gráfica, en primer lugar, debemos identificar las variables representadas en cada uno de los ejes, el significado del origen, la unidad y la graduación de los ejes, para pasar después a la identificación de los puntos de la gráfica, es decir, dado el valor de una de las variables hallar el valor correspondientes de la otra, o bien identificar si un punto dado por sus coordenadas pertenece o no a la gráfica. Todas estas actividades constituyen lo que llamamos **lectura de la gráfica**. Por otra parte, **interpretar el gráfico** es una actividad más compleja, ligada a cada situación, y que consiste en la capacidad para describir la función representada de forma global, atendiendo a las características generales de la gráfica, es decir, las variaciones que presenta. En lugar de puntos determinados será necesario considerar intervalos en los que se mantienen o se modifican de una determinada manera de variación de la función (variaciones y periodos constantes, crecimiento, continuidad, concavidad, máximos y mínimos, periodicidad, convergencia, existencia de puntos fijos, etc.)

Ejemplo 1. Evolución del peso de un chico y una chica hasta los veinte años

Las cuestiones que pueden guiar la interpretación de la gráfica pueden separarse en dos grupos; las que corresponden a la lectura de la gráfica, como:

- ¿Cuál era el peso de Enrique a los nueve años? ¿Y el de Rosa a los diecisiete?
- ¿A qué edad Enrique pesaba 50 Kg? ¿Y Rosa 20 Kg?
- ¿Cuándo Enrique pesaba más de 40 Kg? ¿Y Rosa menos de 30 Kg.?

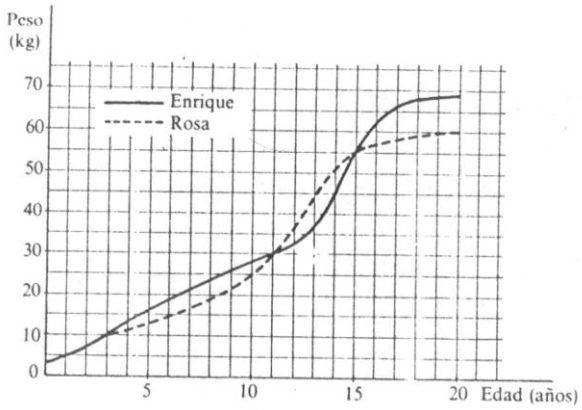


Figura 4.17 Edad- Peso (Azcárate & Deulofeu 1996, p.70)

Y que otras se refieren más propiamente a la interpretación de la gráfica:

- ¿Cuándo Enrique pesaba más que Rosa? ¿Cuándo pesaban igual?
- ¿Cuál fue el aumento de peso de Rosa entre los diez y los quince años?
- ¿Cuál fue el promedio de aumento por año en el periodo anterior?
- ¿Cuándo aumento Rosa más rápidamente de peso? ¿Y Enrique?

Ejemplo 2. Modelo biológico de crecimiento: Malthus Vs. Verhulst

Es lo que ocurre por ejemplo con el modelo biológico de crecimiento y muerte diseñado por Malthus (1766 – 1834), este modelo un tanto adaptado a la realidad

corresponde a la evolución de una población como consecuencia no solo de los nacimientos, sino de las muertes que se producen. El caso de crecimiento exponencial fue considerado especialmente por Malthus, quien enunció la siguiente ley: “Todos los animales de acuerdo con leyes conocidas de reproducción deben tener una capacidad de crecer geométricamente”. Este crecimiento geométrico de Malthus, que ahora se llama exponencial, fue discutido por sociólogos y economistas durante muchos años y se debía presentar en toda población que tuviera **suficientes medios de subsistencia alimentaría**. Pero pronto surgieron fuertes discrepancias, lo que impidió validar el modelo de Malthus que en un caso predice crecimiento infinito, y que **no tiene en cuenta limitaciones de alimentos, energía y otros factores ambientales.** En contraposición, el crecimiento logístico que se ajusta a la realidad introducido por Verhulst en 1837, modifica el modelo, sustituyendo la idea de crecimiento proporcional, por crecimiento dependiente también de la **densidad de la población alcanzada**, para tener en cuenta que si los recursos alimenticios son limitados el crecimiento se restringe. Suponiendo que k es el máximo de población alcanzable y $y(0)$ representa la población inicial, la gráfica del crecimiento logístico es:

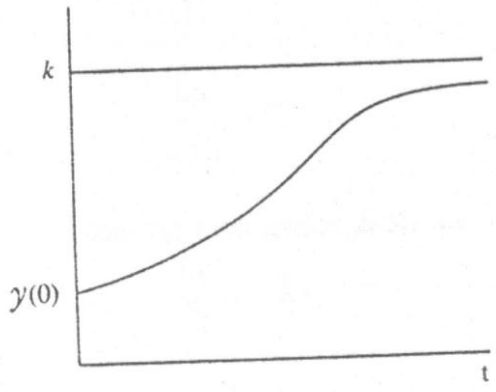


Figura 4.18 Crecimiento poblacional (Rios 1995, p.66)

Evidentemente el modelo de Verhulst tras la **validación,** es un ejemplo de **predicción** en nuevos resultados.

La siguiente tabla contiene la población blanca de Estados Unidos observada y estimada por la fórmula de Malthus (Rios, 1995, p.67)

Años	Población	Valores estimados ($x10^6$)
1820	9,6	10,0
1830	12,9	13,7
1840	17,1	18,7
1850	23,2	25,6
1860	31,4	35,0
1870	38,6	47,8
1880	50,2	65,5
1890	62,9	89,6
1900	76,0	122,5
1910	92,0	167,6
1920	106,5	229,3
1930	123,2	313,7

Tabla 4.1 Población blanca de Estados Unidos (Rios 1995, p.63)

de acuerdo a estos resultados el modelo de Malthus predice crecimiento infinito, y que no tiene en cuenta limitaciones de alimentos, energía y otros factores ambientales.

En cambio, en la tabla adjunta se ven los valores efectivos y los que predice la función de Verhulst, y se observa un buen ajuste que valida el modelo.

Años	Población($x10^6$)	Población estimada
1820	9,6	9,7
1830	12,9	13,0
1840	17,1	17,4
1850	23,2	23,0
1860	31,4	30,2
1870	38,6	38,1
1880	50,2	49,9
1890	62,9	62,4
1900	76,0	76,5
1910	92,0	91,6
1920	106,5	107,0
1930	123,2	122,0

Tabla 4.2 Población blanca ajustada por la función de Verhulst (Rios 1995, p.67)

Ejemplo 3. Desarrollo inicial en los Sistemas Dinámicos

Con el acceso al software adecuado y con el planteamiento de problemas en diferentes niveles, al estilo de un currículum en espiral en relación a la posibilidad de emplear métodos sistemáticos para buscar y encontrar un objeto o un dato, se pueden desarrollar conceptos y teorías de alto grado de complejidad en el contexto de los **sistemas dinámicos**, que tratan sobre modelos de crecimiento, es decir conjuntos de elementos interrelacionados que sumergidos en un ambiente exterior evolucionan en el tiempo, lo fundamental es que **el estado** del sistema de un cierto instante se considera consecuencia de lo sucedido en el tiempo precedente. Como es el caso del estudio de la evolución y descripción de su estructura geométrica a "largo plazo" en el futuro, del estado **x** que pertenece a un espacio de estados M, es decir del conjunto de elementos: $x, f(x), f^2(x), ..., f^n(x), \ldots$ llamado **órbita de** x**,** donde f representa una función de M en M y que supondremos al menos continua, en realidad f es lo que llamamos un sistema dinámico. Este estudio incluye implícitamente, teorías importantes del sistema tales como: **convergencia hacia un punto fijo de** f**, periodicidad del sistema, "sensibilidad a las condiciones iniciales"** es decir en este último: si un sistema que evoluciona a partir de dos estados iniciales muy semejantes, los movimientos resultantes con facilidad se pueden volver muy diferentes, tal como ocurre con el atractor de Lorenz al observar simplemente cómo dos valores iniciales casi iguales se apartan y se vuelven independientes. Sin embargo la demostración rigurosa de que el sistema de Lorenz se comporta en realidad como sugieren los experimentos de computadora no sólo rebasa las capacidades del individuo promedio, sino que los matemáticos profesionales aún no han llegado a ella y aún es un problema abierto para la investigación futura. También se puede desarrollar en este sentido la idea de **caos** en sistemas dinámicos que lleva consigo dos ingredientes: **falta de periodicidad** y **falta de predicibilidad.**

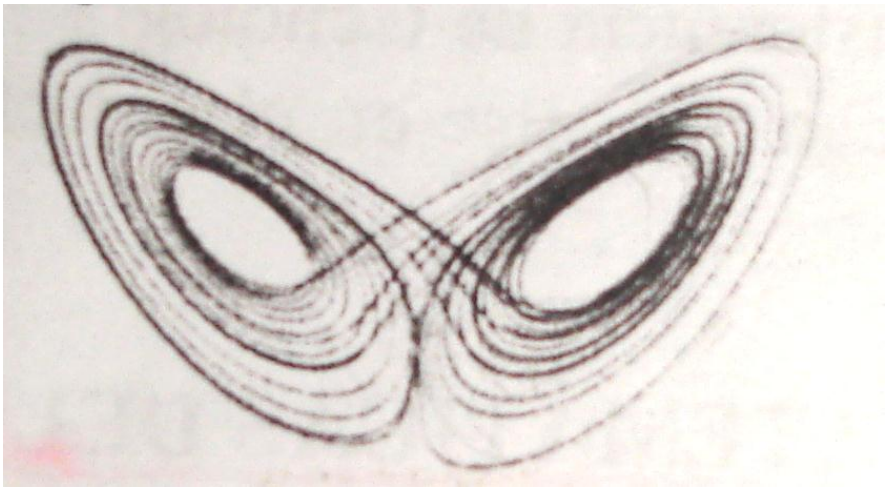


Figura 4.19 Sistema de Lorenz (Steen 1998, p.195)

La ***calculadora***, no es sólo una herramienta que nos permite calcular rápida y eficazmente, sino que también puede servir a los alumnos para mejorar su comprensión de conceptos matemáticos y descubrir resultados por si mismos. En el nivel medio, la calculadora gráfica permite al alumno trabajar con representaciones alternas del mismo concepto. Por ejemplo, una función puede ser representada en forma gráfica, tabular o mediante una ecuación algebraica. Los alumnos también pueden utilizar las calculadoras graficadoras para resolver en forma alterna problemas tales como encontrar el mínimo de una función, ceros de polinomios y otras funciones y resolver ecuaciones simultáneas.

La distinción entre calculadora y computadora se vuelve cada vez menos importante conforme la tecnología se vuelve más poderosa y accesible. Las calculadoras gráficas programables son capaces de realizar hoy funciones que hace apenas unos años solo se podían realizar con una computadora. El uso de ***programas en computadora***, ha avanzado de modo impresionante en estos últimos años, y hay actualmente más y mejores programas de cómputo para la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, necesitamos utilizar la computadora de modo que efectivamente contribuya a la compresión de las matemáticas. Al interactuar con la computadora el alumno debe tener un papel activo: el alumno utiliza la computadora

como herramienta que le “enseña” a hacer algo. La computadora se debe utilizar para desarrollar conceptos importantes de las matemáticas. En realidad la computadora ha colocado en primera línea la atención de la matemática contemporánea un campo que sería inabordable en oportunidad sin su ayuda eficaz desde el punto de vista numérico y gráfico. En el siguiente problema modelo, se muestran algunas de las características anteriormente indicadas:

Problema Modelo

Sea la función $f:[0,1]\to$ definida por $f(x)=kx(1-x)$, donde k es una constante real positiva que durante los procesos, en una calculadora gráfica o en una computadora, puede tomar diferentes valores, con el objeto de controlar el sistema. Podemos considerar a $M=[0,1]$ como el espacio de estados. Queremos investigar sobre la evolución del estado x perteneciente a M, es decir, sobre el comportamiento de la órbita de x:

$$x, f(x), f^2(x),..., f^n(x),\ \textbf{...}\ \text{donde:}\ f^2(x)=f(f(x)),..., f^n(x)=f^{n-1}(f(x))$$

a una cierta cantidad de tiempo fijo n. Para simplificar la notación hagamos:

$x_o=x,\ x_1=f(x), x_2=f^2(x),..., x_n=f^n(x),...$ Para delimitar el problema consideremos los siguientes casos:

a) k = 0.75 con x_o = 0.400
b) k = 2.5 con x_o = 0.300 y $x_o{}^*$= 0.900
c) k = 3.2 con x_o = 0.100 y $x_o{}^*$= 0.700
d) k = 3.5 con x_o = 0.820
e) k = 3.8 y x_o = 0,4
   k = 4 y x_o = 0.4
   k = 4 y x_o = 0.6

Al respecto se plantean las siguientes preguntas:

i) **representar** los cambios del estado x en una forma comprensible
ii) **entender** los tipos fundamentales de cambio
iii) **identificar** tipos particulares de cambio cuando ocurran
iv) **aplicar** estas técnicas al mundo exterior, y

v) **controlar** el sistema *f* mediante la constante *k* (lo que en un contexto más general significaría **controlar** el universo cambiante para nuestro mejor provecho)

Algunas soluciones a las preguntas anteriores:

Para la representación de los cambios de x, en. $f(x)=4x(1-x)$, para $k=4$ y $x_o=0.6$, veamos en la figura a continuación, iniciamos por ejemplo con $x_o=0.6$, luego obtenemos $x_1=f(x_o)$ en la gráfica de f que lo tenemos representada en un sistema cartesiano $x\,y$. Basta mirar el punto de abscisa x_o, levantar la vertical por él hasta cortar la curva $y=f(x)$. La ordenada del punto de intersección es, naturalmente, $x_1=f(x_o)$. Para obtener x_2 haría falta tomar sobre el eje *O X* el punto de abscisa x_1 levantar la vertical por él hasta cortar la curva $y=f(x)$ y la ordenada del punto de corte es x_2. Pero, como fácilmente se ve por la figura, si por el punto $(x_o, f(x_o))$ que ya habíamos obtenido en el paso anterior trazamos la paralela al eje *O X* hasta cortar la bisectriz $y=x$ del primer cuadrante, es claro que este punto sobre la bisectriz es (x_1,x_2) y así tiene la abscisa x_1. Basta ahora trazar por él la vertical hasta cortar la curva $y=f(x)$ y obtenemos el punto (x_1,x_2), es decir, el punto que estábamos buscando.

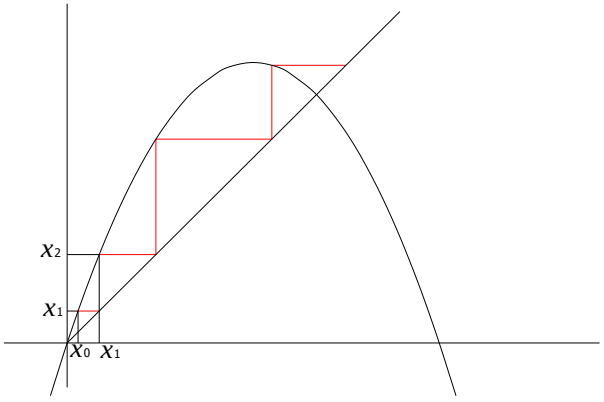


Figura 4.20 Cambios de la variable x **(Guzmán 1997$_a$, 247)**

Esto nos da la receta para obtener los puntos de ordenadas $x_1, x_2, x_3 \ldots$ vamos trazando, a partir del punto inicial, $(x_o, 0)$, *la vertical hasta la curva, luego la paralela hasta la bisectriz, vertical hasta la curva, paralela hasta la bisectriz…*Estas líneas hace mucho más la comprensión de lo que sucede con las iteraciones: $x, f(x), f^2(x), ..., f^n(x),$

Para entender e identificar tipos de cambio:

Escribimos $x = P_o$ y $f(x) = kx(1-x)$, entonces tenemos:

$$P_1 = f(x) = x_1$$
$$P_2 = f^2(x) = x_2$$
$$P_3 = f^3(x) = x_3$$
.
.
$$P_n = f^n(x) = x_n$$
$$P_{n+1} = f^{n+1}(x) = x_{n+1}$$
$$P_{n+1} = k\,P_n(1-P_n)$$

$$P_{n+1} = 0.75P_n(1-P_n), \quad P_o = 0.400$$

P_0 =	0.400
P_1 =	0.180
P_2 =	0.111
P_3 =	0.074
P_4 =	0.051
P_5 =	0.036
P_6 =	0.026
P_7 =	0.019
P_8 =	0.014
P_9 =	0.010
P_{10} =	0.008
P_{11} =	0.006
P_{12} =	0.004

$P_n \to 0$

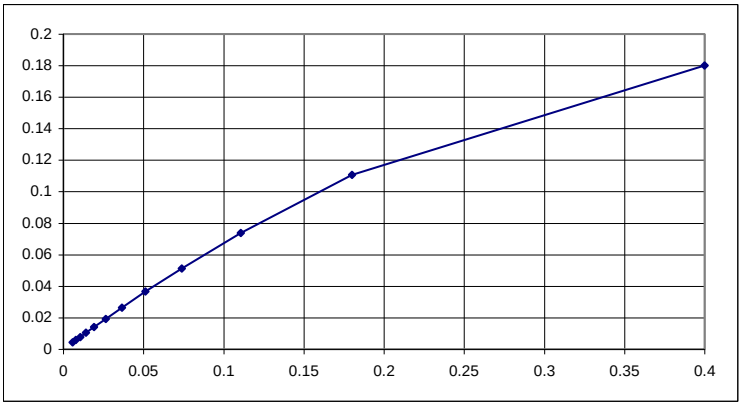


Figura 4.21 Punto Límite

(lo mismo ocurre cuando se inicia con cualquier x en $[0,1]$). Es decir, se observa que P_n se va acercando al valor 0, este valor 0 es un **punto límite** de P_n.

Exploremos ahora lo que pasa al sustituir el coeficiente 0.75 por 2.5 es decir, al poner ahora $f(x) = 2.5x(1-x)$. Nuestra tabla de valores, comenzando con 0.3 (izquierda) y con 0.9 (derecha) es la siguiente:

$$P_{n+1} = 2.5P_n(1-P_n)$$

P_0 =	0.300	0.900
P_1 =	0.525	0.225
P_2 =	0.623	0.436
P_3 =	0.587	0.615
P_4 =	0.606	0.592
P_5 =	0.597	0.604
P_6 =	0.602	0.598
P_7 =	0.599	0.601
P_8 =	0.600	0.600
P_9 =	0.600	0.600
P_{10} =	0.600	0.600
.	.	.
.	.	.
$P_n \rightarrow 0.600$		

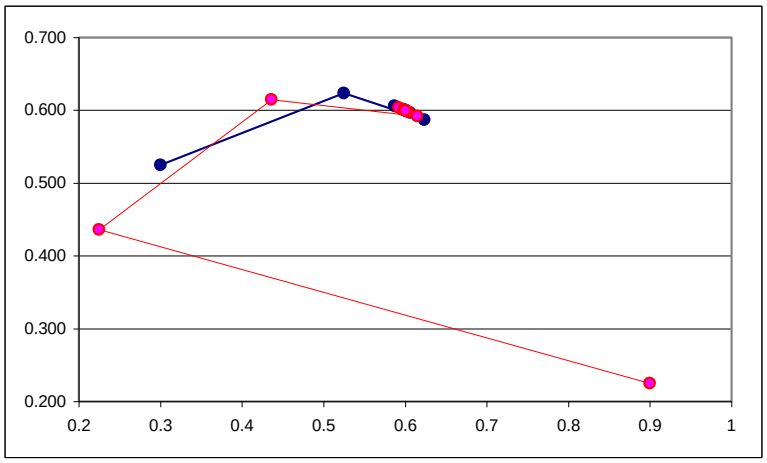


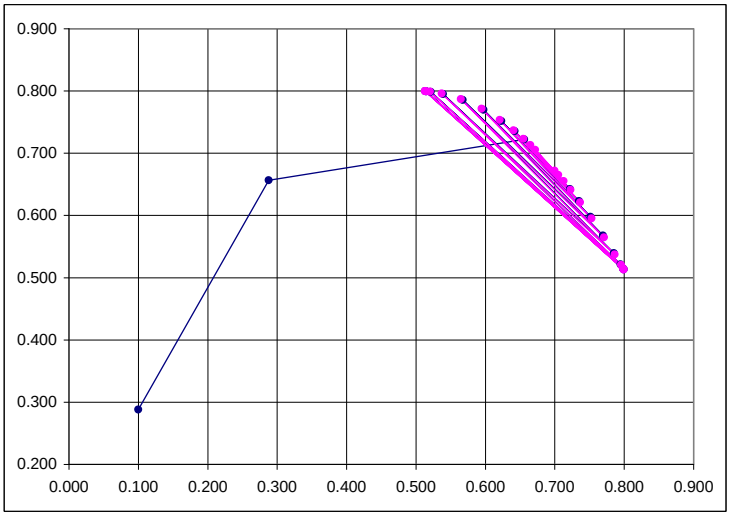
Figura 4.22 Punto fijo

Observamos que, comenzando con cualquier valor, vamos acercándonos a 0.600 y ahí nos quedamos. **El punto** 0.600 **es punto fijo de la transformación** f, es decir, es tal que $f(0.600) = 0.600$

Al aumentar un poco más el coeficiente, poniendo 3.2 en lugar de 2.5, un fenómeno extraño aparece en la tabla que se puede observar, comenzando con 0.100 y con 0.700.

$$P_{n+1} = 3.2P_n(1-P_n)$$

P_0 =	0.100	0.700
P_1 =	0.288	0.672
P_2 =	0.656	0.705
P_3 =	0.722	0.665
P_4 =	0.642	0.713
P_5 =	0.735	0.655
P_6 =	0.623	0.723
P_7 =	0.752	0.641
P_8 =	0.598	0.737
P_9 =	0.770	0.621
P_{10} =	0.567	0.753
P_{11} =	0.785	0.595
P_{12} =	0.539	0.771
P_{13} =	0.795	0.565
P_{14} =	0.521	0.787
P_{15} =	0.799	0.537
P_{16} =	0.515	0.796
P_{17} =	**0.799**	0.520
P_{18} =	**0.513**	0.799
P_{19} =	**0.799**	0.515
P_{20} =	**0.513**	**0.799**
P_{21} =	**0.799**	**0.513**
P_{22} =	**0.513**	**0.799**
P_{23} =	**0.799**	**0.513**
P_{24} =	**0.513**	**0.799**



Periodo 2

Figura 4.23 Puntos periódicos (periodo 2)

Los valores 0.799 y 0.513 son los que aparecen alternativamente y que se repiten, independientemente del valor con el que comencemos, ***son puntos periódicos de periodo 2 a los que van a parar las trayectorias.***

Si se toma el coeficiente 3.5 y hacemos experimentos semejantes obtenemos, partiendo de 0.82 como valor inicial, no dos, ***sino cuatro valores, puntos periódicos de periodo cuatro a los que se van a parar las trayectorias.***

$$P_{n+1} = 3.5P_n\left(1-P_n\right)$$

P_0 =	0.820
P_1 =	0.517
P_2 =	0.874
P_3 =	0.385
P_4 =	0.829
P_5 =	0.496
P_6 =	0.875
P_7 =	**0.383**
P_8 =	**0.827**
P_9 =	**0.501**
P_{10} =	**0.875**
P_{11} =	**0.383**
P_{12} =	**0.827**
P_{13} =	**0.501**
P_{14} =	**0.875**
P_{15} =	0.383

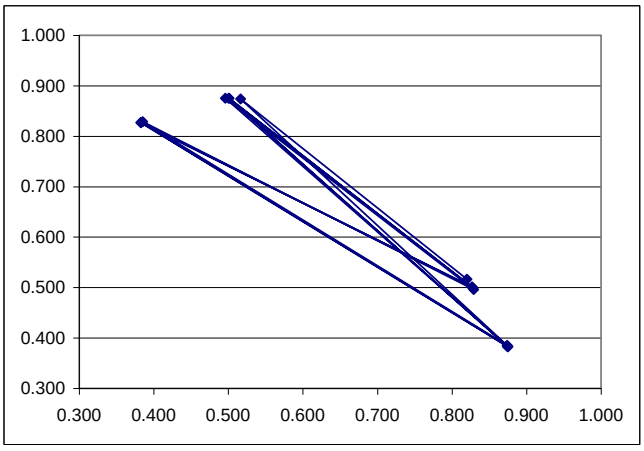


Figura 4.24 Puntos periódicos (periodo 4)

A partir del valor 3.8 del coeficiente se obtienen trayectorias en las que no aparece ningún orden. Hemos llegado a lo que se denomina ***caos matemático***.

$$P_{n+1} = 3.8P_n\left(1-Pn\right) \qquad\qquad P_{n+1} = 4P_n\left(1-P_n\right)$$

P_0 =	0.400	0.400
P_1 =	0.912	0.960
P_2 =	0.305	0.154
P_3 =	0.805	0.520
P_4 =	0.595	0.998
P_5 =	0.915	0.006
P_6 =	0.294	0.025
P_7 =	0.789	0.099
P_8 =	0.632	0.358
P_9 =	0.884	0.919
P_{10} =	0.391	0.298
P_{11} =	0.905	0.837
P_{12} =	0.328	0.547
P_{13} =	0.837	0.991
P_{14} =	0.518	0.035
P_{15} =	0.949	0.135
P_{16} =	0.185	0.466
P_{17} =	0.572	0.995
P_{18} =	0.930	0.018
P_{19} =	0.247	0.071
P_{20} =	0.706	0.263
P_{21} =	0.789	0.774
P_{22} =	0.633	0.699
P_{23} =	0.883	0.842
P_{24} =	0.393	0.532
P_{25} =	0.906	0.996

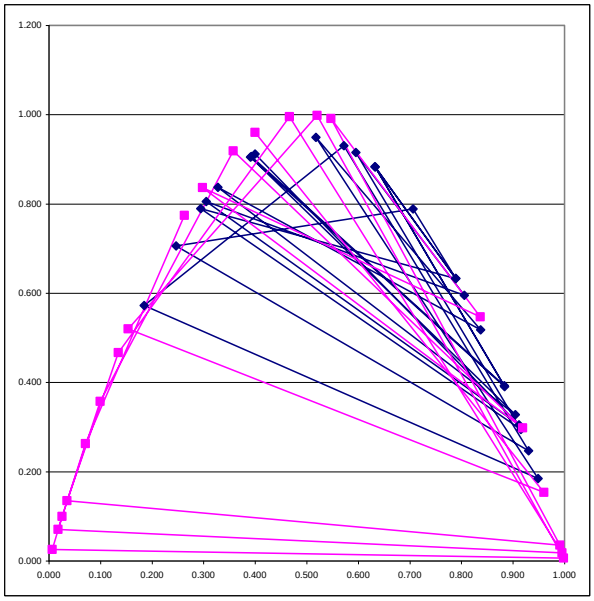


Figura 4.25 Caos Matemático

Los valores danzan caprichosamente como si fueran escogidos al azar, siendo así que están totalmente determinados por una fórmula tan sencilla como $kx\left(1-x\right)$.

4.6 FUNDAMENTOS TEÓRICOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

4.6.1 INTRODUCCIÓN

El presente enfoque en el contexto de Educación Matemática, pretende describir de manera breve un análisis de los fundamentos teóricos en la resolución de problemas matemáticos. La intención es aportar con ideas que permitan despertar en los interesados, estrategias válidas y creativas para el diseño de actividades originales. El objetivo central es: mejorar el rendimiento de los estudiantes en la resolución de

problemas matemáticos. Este objetivo sin lugar a dudas es una preocupación de instituciones educativas, centros de investigación, por que la resolución de problemas es esencialmente una actividad del pensamiento. En este sentido podemos citar a:

"El objetivo que dirige y fortalece a todos los otros objetivos de la educación, el hilo común de la educación, es el desarrollo de la capacidad de pensar"

(Mayer, 1986, p. 40)

Una de las funciones más representativas de la resolución de problemas consiste en ayudar a los alumnos a acercarse lo más posible a ese objetivo central. Los aspectos teóricos que se presentan en la presente sección, que pretenden ser una herramienta de estudio y análisis teórico para la construcción del conocimiento matemático y la resolución de problemas, son los siguientes:

- Problema científico
- Interés por la resolución de problemas
- Conceptualización de problema matemático
- Clasificación de problemas matemáticos simples
- Protocolo para la resolución de problemas: estructura, descripción y análisis de las fases.
- Variables intervinientes en el estudio de la resolución de problemas
- Métodos, Técnicas y estrategias para la resolución de problemas matemáticos

4.6.2 PROBLEMA CIENTÍFICO

Plantear el problema de investigación es sinónimo de preguntar por el objeto que será estructurado en el proceso de indagación inicial hasta llegar a su conceptualización. Por lo tanto, un problema no es: **"una oración interrogativa que pregunta la relación que existe entre dos o más variables",** sino su enfoque

conceptual, su extensión y la contextualización de sus fines, lo que le otorga el calificativo de “científico”. Según Kelinger (1981), para que un problema pueda ser considerado científico debe:

- **Ser relevante**, es decir, su resolución ha de tener interés para la sociedad.

- **Estar formulado de forma precisa**, sin ambigüedad. La formulación precisa, permite averiguar de que se trata realmente, contextualizar el problema y dirigir los pasos necesarios para su resolución.

- **Estar fundamentado**, es decir, enmarcado dentro de alguna teoría.

- **Ser resoluble**: susceptible de verificación empírica, esto es, que humanamente pueda formular una hipótesis con posible solución (Resolver un problema implica encontrar una solución, como demostrar la ausencia de ésta). (p.11)

Considerando que los fundamentos de la matemática no son más que los fundamentos del pensamiento de la observación, de la intuición, de la imaginación y del razonamiento lógico; de la capacidad para establecer relaciones, para inducir, inferir, deducir, para aplicar un significado a una simbología que opera en nuevas creaciones de significado; se hace entonces necesario estudiar los fundamentos teóricos sobre la resolución de problemas matemáticos. No todos los estudiantes tienen la misma capacidad para aprender Matemáticas, pero sí todos tienen la misma necesidad de aprenderlas. En la resolución de problemas no importa tanto los resultados como los procesos que conllevan a esos resultados:

“la noción de que las Matemáticas son un canon de reglas y formalismos inventados por los expertos que todo el mundo tiene que memorizar y usar para obtener respuestas únicas y correctas, debe cambiar” (NCTM, 1991,433).

4.6.3 INTERÉS POR LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Respecto al interés por la resolución de problemas en la educación matemática, podemos rescatar lo que establecen Sánchez y Fernández (2003) que subrayan el sentido del aprendizaje de la matemática en los siguientes principios:

- Encontrar la solución de un problema matemático no es el final de la empresa matemática, sino el punto inicial para encontrar otras soluciones, extensiones y generalizaciones del problema.
- Aprender matemáticas es un proceso activo que requiere de discusiones sobre conjeturas y pruebas.
- Actuar como moderador mientras los estudiantes discuten problemas.
- Discutir con los estudiantes problemas que involucren el uso de varios métodos de solución o que incluyan varias soluciones
- Es importante que los estudiantes participen en el proceso de formular o rediseñar problemas. Estos se identifica como un componente esencial en el hacer matemático. (p.124)

4.6.4 CONCEPTUALIZACIÓN DE PROBLEMA MATEMÁTICO

La diferencia que encierra la definición del término "**problema**" está ligada a la multitud de variables implícitas, tanto en su realidad como objeto identificado en un texto, como en las aportaciones al sujeto que lo resuelve. Desde un punto de vista psicológico, Sarduy (1987) se refiere:

> **Un rasgo peculiar de los problemas en su sentido psicológico radica en que no pueden ser resueltos a partir de la aplicación mecánica y directa de la experiencia anterior, en otras palabras, el planteamiento o el surgimiento de un verdadero problema implica que el sujeto no tiene acceso a la respuesta sólo a través de su memoria, sino que está obligado a pensar, a razonar, para encontrar los conocimientos necesarios, que conducen a la**

respuesta o, en términos más amplios, a la solución de problemas" (p,8)

Sin embargo, otros autores no tienen en cuenta el aspecto psicológico eliminándolo de la definición de problema, sino enfatizan el contenido objetivo del problema sin hacer intervenir el aspecto psicológico; el problema es visto como determinado sistema material que para su caracterización no requiere de la acción del sujeto. (Fridman, 1977).

Cualquier definición de "problema" debería consistir en tres ideas:

- el problema está actualmente en un estado, pero
- se desea que esté en otro estado, y
- no hay una vía directa y obvia para realizar el cambio. (Mayer, 1986, p.99)

Según Lester (1983), un problema es una tarea para la cuál:

- El individuo o grupo que se enfrenta a ella quiere o necesita encontrar una solución.
- No hay un procedimiento fácilmente accesible que garantice o determine completamente la solución.
- Y el individuo o grupo debe de hacer un intento para encontrar la solución. (p.30)

Santos Trigo (1996) anuncia la necesidad de varios componentes para poder identificar un problema:

- La existencia de un interés. Es decir, una persona o un grupo de individuos quiere o necesita encontrar una solución;
- La inexistencia de una solución inmediata. Es decir, no hay un procedimiento o regla que garantice la solución completa de la tarea. Por ejemplo, la

aplicación directa de algún algoritmo o conjunto de reglas no es suficiente para determinar la solución.

- La presencia de diversos caminos o métodos de solución (algebraico, geométrico, numérico). Aquí, también se considera la posibilidad de que el problema pueda tener más de una solución: La atención por parte de una persona o un grupo de individuos para llevar a cabo un conjunto de acciones tendentes a resolver esa tarea. Es decir, un problema es tal hasta que existe un interés y se emprenden acciones específicas para intentar resolverlo. (p.35-36)

Mayer (1986) distingue el hecho de la intención al exponer ideas que permitan llegar al concepto de problema:

- **Datos.** El problema tiene en un primer momento determinadas condiciones, objetos, trozos de información, etc, al comienzo del trabajo en el problema.
- **Objetivos.** El estado deseado o terminado del problema es el estado de alcanzar el objetivo, y el pensamiento deberá transformar el problema desde el estado inicial dado al estado terminal.
- **Obstáculos.** El que piensa tiene a su disposición algunas vías para modificar el estado dado o el estado terminal del problema. Sin embargo, todavía no sabe las respuesta correcta; es decir, la secuencia correcta de comportamientos que resolverían el problema no es inmediatamente obvia. (p.18)

La ***resolución de problemas*** está basada en procesos cognitivos que tienen como resultado encontrar una salida a una dificultad, una vía alrededor de un obstáculo, alcanzando un objetivo que no era inmediatamente alcanzable. En este sentido, Polya (1992) establece:

que tener un problema significa buscar concientemente alguna acción apropiada para lograr una meta claramente concebida, pero no inmediata de alcanzar. Esta caracterización identifica tres componentes de un problema.

- Estar conciente de una dificultad
- tener deseos de resolverla; y
- la no existencia de un camino inmediato para resolverlo. (p.9)

En un sentido general, un problema matemático se identifica como un problema que requiere conocimientos matemáticos para resolverlo y para el cuál no existe un camino directo o inmediato para obtener su solución o soluciones. Respecto a la construcción del conocimiento matemático en la resolución de problemas: se considera que: resolver problemas y hacer Matemáticas son sinónimos. La resolución de problemas debería ser usada para introducir nuevos contenidos matemáticos, ayudar a los estudiantes la comprensión de los conceptos y facilitar el aprendizaje de procesos, así como aplicar y revisar los procesos que los estudiantes hayan aprendido. El proceso de aprendizaje debería requerir de ellos, analizar las situaciones a la luz de los conocimientos que tengan, desarrollar técnicas matemáticas apropiadas y consecuentemente aplicar técnicas a la resolución de problemas.

Los problemas abiertos representan un papel importante en esta concepción de ver la enseñanza-aprendizaje de la Matemática como proceso y resultado. Sanz (1990)**,** al referirse a los problemas abiertos, comenta:

> Al promover la enseñanza actual a través de situaciones problemáticas abiertas, se valora la influencia que la forma de los mismos ejerce en la formación integral del alumno, y no sólo los resultados específicos de aprendizaje de ciertos contenidos… Al ser la forma el condicionante y no el contenido, es aplicable este método de enseñanza –aprendizaje a todas las áreas ... Estimo que la difusión del método de enseñanza-

> aprendizaje de la Matemática a través de problemas abiertos ha sido propiciado, además por el estado de rápida evolución en que se encuentra la cultura científica actual; la enseñanza tradicional apoyada en “imitar al maestro”, “ser capaz de hacer como el hace”, ya no es suficiente, pues hay que enfrentarse a un medio muy variable, donde es preciso actuar en situaciones nuevas. Ya no se valoran las capacidades de cálculo, ni siquiera la de resolución de problemas fuertemente estructurados en los que basta la aplicación de reglas sintácticas o algoritmos bien conocidos, pues todo esto puede hacerse con los ordenadores más rápido y menos fallos. Por eso, hay que potenciar desde edades tempranas la capacidad de extraer toda la información que ofrece una situación, analizar posibles formas de resolución y alternativas. Además, se impone el trabajo en equipo en todos los campos científicos para lograr resultados, por tanto, hay que entrenarse en ello. Y la cultura actual no admite el “criterio de autoridad”, ha de ser el individuo el que ha de convencerse de la validez de su razonamiento, sólo o apoyado por los compañeros (p. 229- 230)

Respecto al concepto de “Problema Matemático” que tienen los estudiantes, es necesario considerar la medida de la distancia que existe entre lo que A “debe entender” sobre B. Considerar, entonces lo que el alumno entiende por “problema”- verificándolo con el modo de actuar – y lo que el alumno debe entender por “problema”. El análisis de esta diferencia orientaría los medios hacia la disminución de esa distancia, acercándolo, lo más posible, la expresión de su medida a cero. Además realizar la investigación paralela sobre las dificultades presentadas con mayor frecuencia por los alumnos en la resolución de problemas matemáticos.

La resolución de Problemas es un componente importante del aprendizaje. En el aprendizaje de las matemáticas, la Resolución de Problemas representa uno de los intentos de renovación más serios emprendidos hasta ahora. No se trata de una simple modificación del Currículo de matemáticas para el período obligatorio, ni

tampoco de la inclusión de un nuevo tópico, al estilo de la Teoría Intuitiva de Conjuntos. A efectos metodológicos conviene establecer que, en todo problema hay ***tres componentes fundamentales:*** **la información, la pregunta y el procedimiento o procedimientos para alcanzar la respuesta.** Por **información** se entiende no sólo aquellos datos que forman parte del "enunciado" del problema, sino todos aquellos otros conocimientos y relaciones que se suponen disponibles por parte de la persona que debe plantearse una cuestión y darle respuesta. **La pregunta** es aquella cuestión que se plantea o le plantean a alguien, forma parte de la pregunta no sólo la cuestión, sino también la manera de plantearla. Finalmente, el **procedimiento de resolución** es cualquier secuencia de relaciones y destrezas que permite alcanzar algún dato que satisface los requisitos establecidos en la pregunta.

Podemos hacer la distinción entre **problemas por resolver y problemas por demostrar**. El propósito de un problema por resolver es descubrir cierto objeto, la incógnita del problema. El propósito de un problema por demostrar consiste en mostrar de modo concluyente la exactitud o falsedad de una afirmación claramente enunciada. Los principales elementos de un problema por resolver son la **incógnita, los datos y la condición.** Los principales elementos de un problema por demostrar son **la hipótesis y la conclusión.** En este sentido Polya (1992) postuló cuatro fases al tratar de encontrar la solución de un problema:

- **Comprender el problema,** es decir, ver claramente lo que se pide.
- **Concebir un plan,** es decir, captar las relaciones que existen entre los diversos elementos, ver lo que liga a la incógnita con los datos a fin de encontrar la idea de la solución y poder trazar un plan.
- **Poner en ejecución el plan.**
- **Visión retrospectiva,** es decir, volver atrás una vez encontrada la solución, revisarla y discutirla.

Además en el método de Polya debemos considerar los siguientes aspectos:

a. Para encontrar la solución de un “problema por resolver” hay que conocer, de modo preciso, los elementos principales, incógnita, datos y condición. Nuestra lista contiene numerosas preguntas y sugerencias concernientes a dichos elementos.

¿Cuál es la incógnita?; ¿cuáles son los datos?; ¿cuál es la condición?.
Distinga las diversas partes de la condición.
Encuentre la relación entre los datos y la incógnita.
Mire bien la incógnita. Trate de pensar en algún problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una similar.
No conserve más que una parte de la condición, descarte la otra; ¿en que medida la incógnita queda entonces determinada?; ¿cómo puede variar?.
¿Puede deducir de los datos algún elemento útil?; ¿podría pensar en otros datos que le permitiesen determinar la incógnita?; ¿podría cambiar la incógnita o los datos o los dos si es necesario, de tal manera que la nueva incógnita y los nuevos datos estuviesen más relacionados entre sí?.
¿Ha empleado todos los datos?; ¿ha utilizado la condición por completo?.

b. Si tiene que resolver un “problema por demostrar” debe conocer exactamente sus partes principales, hipótesis y conclusión. Existen a propósito de dichos elementos preguntas y sugerencias útiles correspondientes a las de nuestra lista que están especialmente adaptadas a los “problemas por resolver”.

¿Cuál es la hipótesis?; ¿cuál es la conclusión?
Distinga las diversas partes de la hipótesis.
Encuentre la relación entre la hipótesis y la conclusión.

Mire bien la conclusión. Trate de pensar en algún teorema que le sea familiar y que tengan la misma conclusión o una similar.
No conserve más que una parte de la hipótesis, descarte la otra parte; ¿Sigue siendo válida la conclusión?;¿Podría deducir de la hipótesis algún elemento útil?; ¿podría pensar en otra hipótesis de la cuál usted pudiera deducir fácilmente la conclusión?; ¿podría cambiar la hipótesis o la conclusión o las dos si es necesario, de modo que la nueva hipótesis y la nueva conclusión estuviesen más relacionadas entre sí? ¿Ha empleado la hipótesis completa? (p.19)

4.6.5 CLASIFICACIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS SIMPLES

Actualmente se perciben dos tendencias de clasificación: las que corresponden con la **composición del problema**, y las que se corresponden con una **dimensión subjetiva**, en tanto a las relaciones exigidas de pensamiento de la persona que lo resuelve. Respecto a la *dimensión subjetiva* es firme la vinculación que existe entre *problemas y pensamiento*. Para Mayer (1986), una definición de pensamiento incluye tres ideas básicas:

- El pensamiento es cognitivo pero se infiere de la conducta. Ocurre internamente, en la mente o el sistema cognitivo, y debe ser inferido indirectamente.
- El pensamiento es un proceso que implica alguna manipulación o establece un conjunto de operaciones sobre el conocimiento en el sistema cognitivo.
- El pensamiento es dirigido y tiene como resultado la “resolución” de problemas o se dirige hacia una solución. (p.21)

Al respecto de la clasificación de problemas, Fredericksen (1984) sugiere tres categorías:

- **Problemas bien estructurados** son aquellos que aparecen claramente formulados, se pueden resolver con la aplicación de algún algoritmo conocido y existen criterios para verificar si la solución es correcta.

- **Problemas estructurados** que requieren un "pensamiento productivo". Son parecidos a los bien estructurados con la condición de que el que los resuelve necesita diseñar todo el proceso de solución o parte de este. Por ejemplo el probar que si un cuadrilátero tiene un par de lados opuestos paralelos e iguales entonces los otros dos lados son iguales también, es un problema en el que se requiere la introducción de una diagonal no dada. Además aquí no existe un algoritmo que produzca directamente la demostración.

- **Problemas mal estructurados** los cuales carecen de una clara formulación, de un procedimiento que garantice una solución, y, no existen criterios definidos para determinar cuando se ha obtenido una solución. Quién confronta este tipo de problemas necesita reformular el enunciado y desarrollar una serie de estrategias para su solución (p.30)

Otra clasificación de problemas matemáticos simples

En la metodología de la enseñanza de la matemática, usualmente los problemas simples se clasifican en grupos, **atendiendo a las operaciones aritméticas a partir de los cuales ellos pueden resolverse, y a los conceptos matemáticos que los alumnos asimilen en el curso de la solución.**

En función de los conceptos matemáticos que asimilan los alumnos. Los grupos de problemas que se constituyen a partir de ese criterio, son los tres siguientes:

- **El primer grupo,** que engloba los problemas simples cuya solución revela a los alumnos el significado concreto de cada uno de las operaciones aritméticas. A través de ellos, los alumnos asimilan la correspondencia que existe entre las operaciones aritméticas y las operaciones con conjuntos.

Ejemplo: Determinación de la suma de dos cifras: “Martha tiene 3 cuadernos rojos y 2 verdes. ¿Cuantos cuadernos tiene Martha en total?”

- **En el segundo grupo** se incluyen aquellos problemas a partir de los cuales el escolar aprende el vínculo existente entre los componentes y los resultados de las operaciones aritméticas.

Ejemplo: Determinación del primer sumando conociendo la suma y el segundo sumando: “Paula compró algunas cintas azules y 3 blancas. En total compró 8 cintas. ¿Cuantas cintas azules compró Paula? ”

- **El tercer grupo** incluye los problemas que permiten revelar a los alumnos nuevos significados de las operaciones aritméticas. De este grupo participan problemas asociados a los conceptos de diferencia y de relación:

(i) Problemas que revelan nuevos significados de las operaciones aritméticas. Ejemplo: Diferencia comparativa de números o determinación de la diferencia de dos números: “Una casa se construye en 10 meses y otra en 8 meses. ¿Cuántos meses más que la segunda se tarda en la construcción de la primera casa?”

(ii) Problemas en los cuales se introducen conceptos de relación. Ejemplo: Relación multiplicativa de números o determinación de la relación de dos números: “Un aula tiene 24 niñas y 8 niños. ¿Cuántas veces más niñas que niños hay en el aula?”

En función de la exigencia que plantean al que los resuelve

En correspondencia con el tipo de exigencia que plantean al que los resuelve, los problemas se dividen en problemas de **hallazgo o determinación, problemas de construcción y problemas de demostración.**

Son ejemplo de problemas de **hallazgo o determinación** todos los expuestos hasta ahora. En el caso de los **problemas de construcción** como planteamos, al alumno se le sitúa la tarea de confeccionar, según las condiciones del problema, esquemas, gráficos, igualdades, ecuaciones, tablas, etc.

Los problemas de demostración aparecen fundamentalmente como problemas geométricos en los cuales se requiere demostrar propiedades de figuras geométricas o de algunos de sus elementos constituyentes. La demostración se realiza a partir de un conjunto de razonamientos que se suceden en un orden riguroso y lógico. No siempre un problema se puede ubicar en un grupo excluyendo su pertenencia a otro; por ejemplo muchas veces durante la solución de un problema de hallazgo o determinación, surge la necesidad de realizar alguna construcción. En tales casos bien podría decirse que el problema es un híbrido (hallazgo y construcción). Otras veces un problema de demostración se presenta también como de hallazgo, pues antes de demostrar lo que se nos pide, debemos encontrar un valor, una propiedad, etc., de los elementos que lo integran.

Hacemos también referencia, dentro de la clasificación de problemas matemáticos, a dos tipos de problemas que, desafortunadamente, están ausentes de la enseñanza actual de esta asignatura: **los denominados problemas de razonamiento y los recreativos. Los problemas de razonamiento** precisan para ser resueltos del análisis lógico de elaboración de hipótesis, inferencias, etc. Desde luego, la denominación del problema de razonamiento es en cierta medida tautológica, todo verdadero problema implica la reflexión, el razonamiento por parte del que lo

resuelve, no obstante tal denominación no hace más que reafirmar el hecho de que estos problemas requieren de una forma especial, el razonamiento. Por exigir una alta dosis de trabajo mental, este tipo de problema constituye un factor esencial, en la formación del pensamiento y en la asimilación de los conocimientos matemáticos. Presentemos algunos ejemplos de problemas matemáticos de razonamiento que se pueden emplear en la enseñanza primaria:

"En el aula B hay 10 alumnos menos que en el aula A. ¿Cómo varía esta diferencia si del aula A se trasladan 5 alumnos para el aula B?, ¿Cómo varía si se trasladan 5 alumnos de la B a la A?".

Respecto a los **problemas recreativos** cabe decir que presentan situaciones interesantes que estimulan el razonamiento y la fantasía. Los problemas matemáticos recreativos con texto sitúan a los alumnos ante la necesidad de analizar detenidamente situaciones planteadas.

Al respecto Sarduy (1987) afirma:

"Las relaciones entre los elementos que las componen (datos, condiciones, exigencias) se ofrecen enmascaradas, con la introducción de elementos contradictorios u otros que dirigen al razonamiento por causes incorrectos. La necesidad y el esfuerzo por superar tales aspectos constituyen una de las más potentes condiciones para el desarrollo del pensamientos y la estimulación de la actividad mental" (p.29)

Presentamos el siguiente ejemplo de un problema recreativo: Del siguiente juego con piedrecillas y haciendo cálculos:

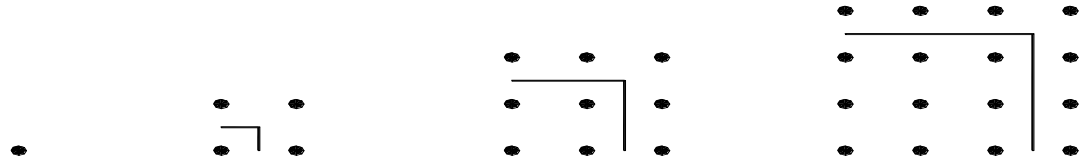


Figura 4.26 Problema recreativo (Guzmán 1997_b, p. 59)

¿Cuáles son las igualdades numéricas?, ¿Cuál es la representación y su relación numérica? y ¿cómo se generaliza el problema?

4.6.6 PROTOCOLO PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: ESTRUCTURA, DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LAS FASES

Actualmente se admite que la resolución de problemas no es un acto puramente cognitivo. Callejo (1994) recoge diversas variables que forman parte del proceso de resolución:

> Una base de conocimientos (intuiciones y conocimientos informales sobre el dominio del problema, hechos, procedimientos algorítmicos, procedimientos rutinarios no algorítmicos, reglas para trabajar en el dominio del problema, estrategias heurísticas) y al control y regulación de dichos conocimientos, intervienen también los afectos (creencias, actitudes y emociones) y las condiciones socioculturales en que se realiza la tarea. (p.35)

Ante todo resolver un problema es un **acto creativo,** que comparte diversas fases: **un trabajo consiente de preparación o familiarización con el problema: la incubación de las ideas con las que se ha trabajado en la etapa anterior; la**

inspiración o iluminación sobre el camino que lleva a la solución; y la verificación del proceso que lleva al resultado buscado.

M. De Guzmán (1991) define protocolo como:

"el acta en que queda constancia de los fenómenos interesantes que han ocurrido a lo largo de nuestra ocupación en el problema" (p.108)

Polya (1992) introduce 4 pasos en la resolución de problemas basados en observaciones que realizó como profesor de matemáticas:

- **Comprensión del problema** El que debe resolver el problema reúne información acerca del problema y pregunta "¿Qué quiere (o que es lo que se desconoce)?¿Qué tiene (o cuáles son los datos y condiciones)?"
- **Elaboración de un plan** El sujeto intenta utilizar la experiencia pasada para encontrar un método de solución y pregunta: "¿Conozco un problema relacionado?¿Puedo reformular el objetivo de una nueva forma utilizando mi experiencia pasada (trabajando hacia atrás) o puedo reordenar los datos de una nueva forma que se relacione con mi experiencia pasada? (trabajando hacia delante)" (Aquí es donde surge el destello del ajá)
- **Puesta en marcha del plan:** El sujeto pone en práctica su plan de solución comprobando cada paso.
- **Reflexión:** El sujeto intenta comprobar el resultado utilizando otro método, o viendo como todo encaja y se pregunta: "¿Puedo utilizar este resultado o este método para resolver otros problemas?". (p. 38)

M. De Guzmán (1991), sugiere que la resolución de un problema pasa por cuatro fases:

- **Familiarización con el problema**. Comprender el problema: ¿De qué trata? ¿Cuáles son los datos? ¿Guardan los datos relaciones entre sí?...

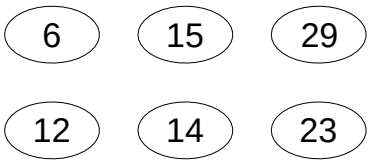
- **Búsqueda de estrategias.** Simplificación, particularización, ensayo y error analogía, semejanza, reducción al absurdo…
- **Desarrollo de la estrategia.** Aplicación de la estrategia seleccionada.
- **Revisión del proceso**. ¿Cómo hemos llegado a la solución? ¿Por qué no la hemos alcanzado?¿Podemos obtener otros resultados por el mismo método? ¿El mismo resultado por otros métodos…? (p.119)

Como vemos, las estructuras de los modelos propuestos se apoyan, en la mayoría de los casos, en aquellos que les han precedido. No obstante en esta visión de enumeración y análisis de las fases protocolarias para la resolución de problemas, echamos de menos una que no aparece y que cabría citar a nuestro juicio, como primera**:** *querer***.** Si no importante para el problema en sí, si necesaria en la **relación problema – sujeto.** Querer resolver el problema significa "Voy a ver"; y esa expresión nace del deseo de introducirse en la curiosidad de observar lo que se obtiene al indagar, al afrontar la duda. "Voy a ver" es la aportación de iniciativa y el afán por descubrir. Sin esta fase difícilmente se obtendrá éxito en las siguientes.

El siguiente ejemplo, ilustra algunas características protocolarias señaladas anteriormente.

Los Huevos de gallina y de pata

Un granjero tiene ante sí seis cestas con huevos. Cada una tiene huevos de una clase, de gallina o de pata. Cada cesta tiene el número de huevos que se indica.



El granjero dice, señalando una cesta que no acierto a ver cuál es exactamente: "Si vendo esta cesta, me quedará el doble de huevos de gallina que de de pata"
¿Podrías ayudarme a averiguar de qué cesta está hablando?

Protocolo del proceso

Comienzo

1) Parece un simple ejercicio de álgebra y ecuaciones en números enteros.
2) Experimento cierta confianza en que lo voy a resolver fácilmente.
3) Me familiarizo con el problema. En un principio había entendido que en cada cesta pudiera haber huevos de dos tipos. Al leer mejor compruebo que no es así.
4) Parto llamando G al número de huevos de gallina y P al de huevos de pata, de

$$G + P = 12 + 6 + 15 + 29 + 14 + 23$$

Parece que dice poco.

5) Si quito un cesto queda doble número de huevos de gallina que de pata. Busco estrategias.
6) Podría proceder por ensayos. No es imposible, pero parece un poco largo… Pienso que algunas combinaciones se pueden descartar por razón de la paridad (el doble…).
7) Ahora no me parece tan sencillo. Tal vez jugando un poco.
8) Si “la cesta” fuese la de 15, habría que escoger de entre 6, 12, 14, 23, 29 varias que sumen el doble de lo que suman las otras…
9) Por la paridad, si se escoge 29 hay que escoger también 23. Tendría 29 + 23 = 52, mitad 26, y 6 + 12 + 14 = 32. Es imposible. La cesta de 29 sólo con la de 23 es imposible.
10) Parece que es imposible que “la cesta” sea la de 15. Los de gallina sólo podrían ser 23, 29 y esto es imposible…
11) Eso da idea de que tampoco podría ser “la cesta” la de 23 ni la de 29 por la misma razón…Pruebo con 14. Quedan 6, 12, 15, 23, 29…

15 minutos

Veo luz probando. Una pista es la paridad. Otra la magnitud de los números.

12) No hay que hacer muchos experimentos. Se va a poder descartar casi todo rápidamente. Interesante.
13) ¿Podrá ser “la cesta” la de 29? Quedan 6, 12, 14, 15, 23. A un lado 15 + 23 = 38. Mitad 19. Imposible…
14) Ahora veo que mi razonamiento no es exacto. A un lado podría quedar 15, 23 más alguna otra cesta.
15) Empiezo con 15 de nuevo. Si “la cesta” fuese la de 15, quedan 6, 12, 14, 23, 29. por un lado 23 + 29 al menos, 23 + 29 = 52 con alguna otra cesta probablemente. No marcha.
16) Si “la cesta” fuese la de 23, quedan 6, 12, 14, 15, 29.
    A un lado 15 + 29 + … = 44 + …
    Descartado añadir el 6, el 12 y el 14. Imposible el 23
17) Si “la cesta” fuese la de 29, quedan 6, 12, 14, 15, 23.
    Por un lado 23 + 15 + … = 38 + …
    Descartado el 6, el 12 y el 14. Imposible.
18) Si “la cesta” fuese la de 14, quedan 6, 12, 15, 23, 29. Por una lado 23 + 29 + …
    Descartado el 6, 12, 15.
    O bien por un lado 29 + 15 +… Imposible
    O bien por un lado 23 + 15 +… Imposible
19) Si “la cesta” fuese la de 6, quedan 12, 14, 15, 23, 29.
    Por un lado 29 + 23 + … = 52 + … Imposible
    O bien 29 + 15 +… = 44 +… Imposible
    O bien 23 + 15 +… = 38 +… Imposible

30 minutos

20) Si “la cesta” fuese la de 12, quedan 6, 14, 15, 23, 29.
    Por un lado 29 + 23 +… = 52 +…
    El 6 casa en los puntos suspensivos,

29 + 23 + 6 = 58 = (15 + 14)2

¡"La cesta" es la de 12 huevos!

21) Reflexiono un poco. Parece un problema muy "particular", muy ligado a números concretos que no proporciona métodos generales.
22) Uno de esos problemas que con suerte (si llego a experimentar el 12 al principio) hubiera salido una solución en muy poco tiempo.
23) Me quedo con la duda sobre si hubiera podido proceder de otro modo. No lo veo.

4.6.7 VARIABLES INTERVINIENTES EN EL ESTUDIO DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Se han estudiado variables que intervienen en la resolución de problemas, desde distintas vías, Estas variables se han clasificado en dos grandes grupos.

- Aquellas variables que se relacionan con el sujeto que resuelve el problema o que se relacionan con el problema en sí, o con la interacción problema-sujeto. A estas variables se las identifica con el nombre de **variables intrapersonales.**

- Aquellas variables que se relacionan con situaciones que el resolutor no puede controlar, así: metodología didáctica, disposición del o la profesor/a, características sociales. A estas variables las identificamos con el nombre de **variables de situación.**

A. VARIABLES INTRAPERSONALES. Son variables intrapersonales:

- las cognitivas, entre las que destacamos el grado de memoria, el desarrollo del razonamiento lógico, la comprensión lectora, el grado de creatividad o la intuición del resolutor;

- los fundamentos matemáticos previos de la persona que resuelve el problema, la comprensión de las operaciones y su aplicación, su didáctica;
- las afectivas; Mcleod (1985) destaca factores afectivos en la resolución de problemas (en Blanco Nieto, 1993):

- Magnitud y dirección en la resolución de problemas. Las influencias afectivas varían en intensidad y en dirección (positiva o negativas).
- Duración de la emoción. Es importante controlar, en referencia al tiempo, la sensación de frustración que aparece en el resolutor de problema cuando está bloqueado.
- Conocimiento y control de sus propias emociones. En este caso es bien conocida la reacción de nuestros alumnos a abandonar al primer fracaso en el primer intento. (p.74)

Una actitud inadecuada en la formación del aprendizaje que no tenga en cuenta las variables afectivas descritas con anterioridad, supone el surgimiento de bloqueos en el resolutor. Se destacan cuatro tipos de bloqueos (Blanco, 1996):

* **Bloqueos de tipo inercial** (surcos de la mente). Nuestro proceder suele acomodarse inconscientemente a unas reglas fijas, ello empobrece nuestra capacidad y reduce nuestras posibilidades de éxito.

* **Bloqueos de origen afectivo**. Hay una amplia gama de sentimientos que favorecen el bloqueo, como la apatía, la pereza ante el comienzo, el miedo al fracaso, la ansiedad, etc.

* **Bloqueo de tipo cognoscitivo**. Cuando tenemos la dificultad para percibir el problema, identificarlo, definirlo o desglosarlo en tareas más sencillas, corremos un alto riesgo de derivar en un estado de bloqueo. Hay, además otras actitudes que suelen conducirnos a la misma situación: una tendencia hipercrítica hacia nuestro trabajo, la rigidez mental en el empleo de procesos o en la espera de resultados, la

incapacidad para dilucidar cuándo disponemos de suficiente información para abordar el problema, etc.

* **Bloqueo de tipo cultural y ambiental**. El conjunto de ideas y formas de pensar prevalentes en nuestro ambiente influyen del modo más sutil en nuestro *modus operandi*. Entran a formar parte de nuestra estructura de pensamiento y dirigen, sin nosotros percibirlo, nuestra actuación hacia zonas que no son siempre fructíferas.

(p.16)

- las variables de formación de aprendizaje, es decir, las formas de aprender que rodean al alumno. Dependiendo de lo que entendamos por resolución de problemas, así actuaremos en la formación de su aprendizaje. Actualmente, tienen vigencia las teorías que se apoyan en el descubrimiento y la acción investigadora del sujeto. Los desafíos a los que se enfrenta permiten que el alumno construya la comprensión de los conceptos y la validez del aprendizaje. La figura del alumno como receptor de conocimientos no se admite en la teoría, pero, tristemente, sigue siendo habitual en la práctica actual. El modo de aprendizaje es el método de resolver problemas. La diferencia está en el tipo de problemas que han de ser resueltos y en los materiales que deberán aportarse para su solución. El proceso del aprendizaje tendría que partir de algún interés compartido por toda la clase.

- investigador, sus creencias sociales, sus dificultades y errores… Las dificultades más representativas se dirigen a la selección de la información. Algunos alumnos destacan los datos e ignoran la pregunta; otros señalan sólo la pregunta como componente del problema. Esto apunta, en la mayoría de los autores, a que el sujeto realiza un análisis superficial y fragmentario del texto del problema. El alumno expresa determinada pasividad intelectual que se hace palpable en la insuficiente investigación de las relaciones del problema. En el aprendizaje se deberían encontrar con problemas abiertos, incompletos, capaces de conseguir que el estudiante construya las relaciones necesarias para la resolución. Existe una disminución de dificultades, cuanta

más relación tenga la información que ofrecen los problemas con el entorno en el que se desenvuelven.

B. VARIABLES SITUACIONALES. Una vez estudiadas las variables intrapersonales - que se relacionan con el sujeto que resuelve el problema, con el problema en sí y con la interacción problema-sujeto -, pasamos a considerar las variables situacionales, que se relacionan con situaciones que el resolutor no puede controlar:

Metodología didáctica para la enseñanza de la resolución de problemas. Schoenfeld (1985) nos hace partícipes de las conclusiones que elabora a través de la observación sobre cómo actúan sus alumnos, advirtiendo que el trabajo matemático es, ante todo, un trabajo de descubrimiento. Reflexión y propuesta a la vez; lo que ocurre frente a lo que debería ocurrir. Cierto, significa la apertura de vías capaces de acercar lo más posible las formas de pensar a las formas de pensamiento matemático. En este sentido, y al tratarse de la educación primaria, hay que tener en cuenta dos aspectos: a) El aprendizaje representativo y, b) la forma de conseguir un aprendizaje representativo. Respecto al primero cabe destacar los trabajos de Semadeni (1984) que sugiere la aplicación en el aula del "principio de permanencia en lo concreto". En esta dirección, el NCTM (1989) propone los siguientes objetivos sociales para la educación en el área de matemáticas:

- Trabajadores que sepan leer y escribir matemáticamente ya que las demandas tecnológicas de la sociedad requerirán cada vez más habilidades y comprensión de las mismas, así como la resolución de problemas complejos. En este aspecto, saber leer y escribir matemáticamente denotaría una capacidad para explorar, conjeturar, razonar lógicamente y usar una variedad de métodos matemáticos para resolver distintos problemas.

- Aprendizaje para toda la vida, ya que cada vez es más frecuente cambiar de trabajo y la habilidad para la resolución de problemas ayudará para explorar,

crear, acomodar a las nuevas condiciones y crear nuevos conocimientos para la nueva vida.

- Oportunidad para todos ya que las Matemáticas han llegado a ser un filtro para trabajar y para la participación en nuestra sociedad. Por este motivo deben ser accesibles a todos los estudiantes.

- Ciudadanos informados ya que el incremento de la complejidad y de las aportaciones de la técnica hace que la participación de los ciudadanos requiera de este cierto conocimiento para poder interpretar determinadas informaciones.

- La resolución de problemas es la principal razón para estudiar Matemáticas, en la línea de considerarla como un proceso de aplicación de conocimientos previamente adquiridos a situaciones nuevas y desconocidas. Resolver problemas supone plantear cuestiones, analizar situaciones, traducir resultados, ilustrar resultados, dibujar diagramas y refutar pruebas y errores.

En cuanto a las **variables socioculturales, a**ctualmente, y no por casualidad, los cursos de “Creatividad” y “Problem solving” se consideran sinónimos. La esencia última de la creatividad consiste en resolver problemas. En los cursos de creatividad, según (Marin, 1984:115), los problemas que han de resolver los alumnos, por principio son elegidos por éstos, y normalmente también son propuestos por ellos. Son problemas reales a lo sumo ligeramente enmascarados. Los problemas para que estimulen el pensamiento creativo tienen que ofrecer por definición múltiples soluciones.

Se trata de situaciones que, como la mayor parte de las que se presentan en la vida corriente, permiten varias respuestas; cuestiones que pudiéramos llamar abiertas, es decir, aquellas que no quedan zanjadas sencillamente calculando o haciendo acopio de información. Las condiciones que se exigen para los problemas de creatividad,

son dos: que sean reales y que se presten a soluciones abundantes. El poder de las influencias sociales y culturales ha sido un tema que viene despertando interés desde años atrás, al respecto:

"Si las influencias culturales o históricas tienen tanto poder, ello es posible por los maestros, los métodos educativos y los materiales, al igual que los padres"(Torrance en De la Torre, 1984, p. 133).

Entre las influencias culturales negativas que afectan al desarrollo, se resaltan en De la Torre (1984)

- Orientación hacia el éxito, que perjudica a la creatividad cuando se extrema este enfoque en la vida. Las distintas formas de aprendizaje creativo comportan experimentación, riesgo, faltas y errores. Si prescindimos de ello, abandonamos una de las características más reconocidas en la persona creativa: la atracción por lo desconocido.

- Orientación de los superiores, tan grabada en la infancia. Hacer las cosas para que los padres o los superiores den su conformidad.

- Sanciones ante preguntas e indagaciones. El 43% tiene ciertos reparos a preguntar sus dudas y sólo el 17% no tiene temor. (p.134-135)

Se enfoca mal el papel del género, resultando las diferencias como algo peligroso en lugar de mirarlas como mutuo enriquecimiento. Se convierten en tabú determinadas áreas de experiencia y se asigna al hombre y a la mujer un papel diferente en la sociedad. Confunden la divergencia con la anormalidad. Quienes sobresalen en su comportamiento o ideas son observados y relegados del grupo. No se reconoce en ellos potencialidades que debieron desarrollarse.

4.6.8 MÉTODOS, TÉCNICAS Y ESTRATEGIAS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS.

Kilpatrick (1985), enfocó la enseñanza de la resolución de problemas en cinco categorías: **ósmosis, memorización, imitación, cooperación y reflexión:**

> **La enseñanza por ósmosis**, se apoya en la idea de que aprender a resolver problemas es resolver muchos problemas y que, al hacerlo, se aprenden las técnicas, los métodos o las herramientas heurísticas que están implícitas en ello.
>
> **La memorización,** implica descomponer un problema en elementos más simples y abordar la solución mediante la enseñanza de elemento a elemento. Este enfoque también está presente en planteamientos no tan tradicionales, que pretenden enseñar "heurística".
>
> **La imitación** consiste en situar al alumnado en presencia de un modelo de resolvente competente y se enseña de alguna manera a analizar esa conducta competente y a compararla con conductas propias o ajenas.
>
> **La cooperación** consiste en la necesidad de observar cómo sus compañeros resuelven el problema, respetar, ajustar y canalizar las ideas que escuchan.
>
> **La reflexión** es muy importante en la resolución de problemas. Explica el éxito, el fracaso, las direcciones mal elegidas, la falta de razonamiento en las estrategias… incidiendo en conclusiones válidas para las situaciones futuras.
>
> (p. 191-192)

Estas categorías que enumeran los distintos enfoques de enseñanza para la resolución de problemas, de poco nos servirían si no analizamos los métodos utilizados que facilitan esa resolución de los problemas matemáticos. Se hace necesario ver la resolución de problemas como una actividad mental, y en éstas se

hallan las **operaciones básicas del pensamiento**: el análisis, la síntesis, la generalización, la abstracción y la comparación.

El análisis es la operación mediante la cual el objeto de conocimiento (el problema) se descompone o se separa en partes en la mente.

La síntesis es el acto de reunir mentalmente los diferentes elementos, conformando un todo: un elemento aislado en el problema se ve en su íntima relación con los otros, en sus nexos e interdependencias.

La generalización se comprende en dos sentidos: Según el primero de ellos, a través de la generalización se diferencian o destacan, en dos o más objetos, propiedades comunes, que no varían de uno a otro. La segunda forma de comprender la generalización es verla como la operación mental que permite distinguir en uno o más objetos, sus propiedades esenciales, bajo la forma de un concepto general.

La abstracción se considera como la operación a partir de la cual se separan determinadas propiedades o índices de ciertos objetos, a la vez que no se tienen en cuenta otras propiedades o índices de esos mismos objetos.
La comparación es la contraposición de diferentes elementos (objetos, problemas, etc.) con el fin de determinar la similitud o diferencia en sus propiedades generales y particulares.

En cuanto a la **exposición de métodos para la resolución de problemas matemáticos,** podemos considerar:

El principio del "desvío". Se refiere al **desplazamiento del problema original a otro dominio conveniente** en el cual sea más fácil de resolver. Melzak (1983, 195 en Sanchez & Fernandez 2003) ilustra mediante este método la multiplicación de dos números romanos: XIX y LXXVIII; se realiza la multiplicación de los números 19

y 78, después el resultado (1428) se escribe utilizando la numeración romana, MCDXXVIII.

La idea se resolver un problema por medio de una transformación adecuada no es peculiar de la geometría, pues se encuentra en toda la matemática. Por ejemplo, se desea demostrar que la ecuación: $x^7-2x^5+10x^2-1=0$ no tiene ninguna raíz mayor que 1. Para su solución, en principio podríamos definir una función f de los números reales en los números reales $\square$, mediante $f(x)=x^7-2x^5+10x^2-1$. La gráfica de la función f es una representación en el plano cartesiano $x\ y$, que mediante un **desplazamiento horizontal** en este caso hacia la izquierda de la gráfica de f se tiene:

$$f(x+1)=f(x-(-1))=(x+1)^7-2(x+1)^5+10(x+1)^2-1$$
$$=x^7+7x^6+19x^5+25x^4+15x^3+11x^2+17x+8$$

es decir, estaríamos desplazando el problema original a otro dominio conveniente en el cuál sea más fácil de resolver de acuerdo al principio del "desvío". Decir que x_o es raíz de $f(x+1)=0$ equivale a que $x_o+1=x$ es solución de $f(x)=0$. Es decir, también debemos desplazar horizontalmente la solución x_o esta vez hacia la derecha de la grafica de $f(x+1)$. Como todos los coeficientes de $f(x+1)=0$ son positivos, entonces necesariamente la solución x_o de $f(x+1)$ debe ser negativo, $x_o<0$. Entonces como $x_o+1=x$, se tiene que la solución x debe cumplir la condición $x_o=x-1<0$, de donde $x<1$. La representación siguiente corresponde a los desplazamientos de $f(x+1)$ y $f(x)$

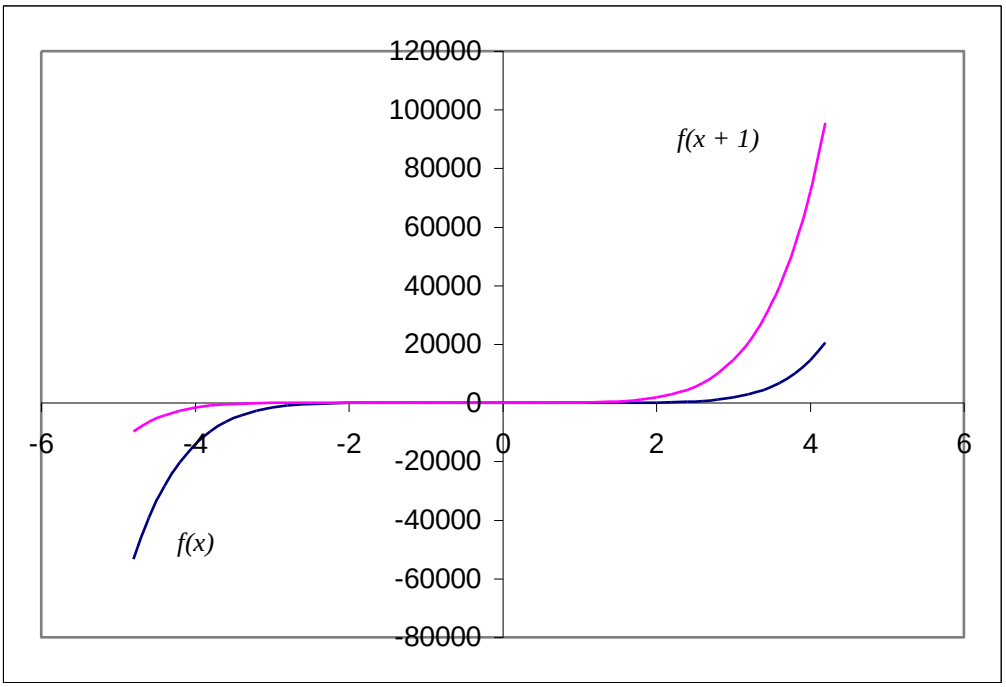


Figura 4.27 Desplazamiento de f(x+1) respecto de f(x)

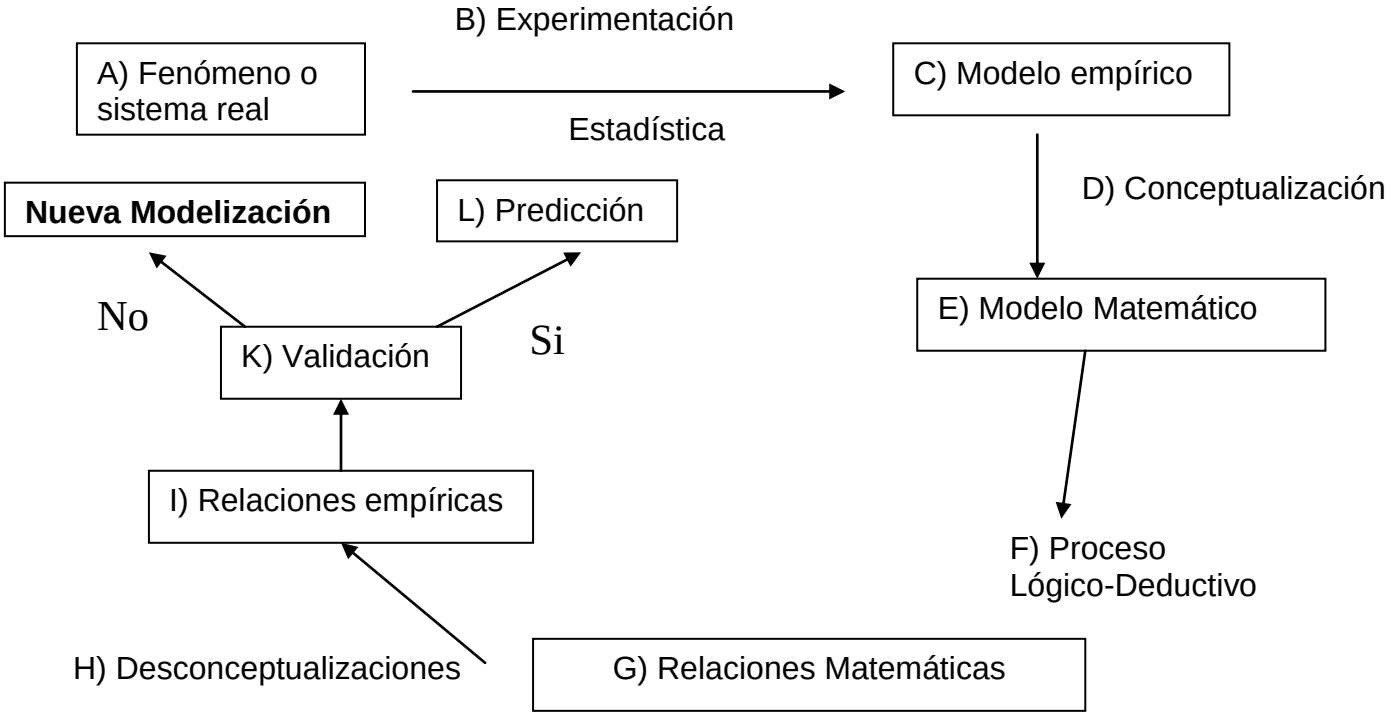
El método de los dos caminos. Expresar el problema mediante dos vías distintas e igualarlas. Este método se utiliza en la didáctica de la Matemática para llegar a comprender algunos conceptos; así por ejemplo: Una potencia de exponente 0 es igual al número 1. Por un lado utiliza la definición de división de potencias de la misma base con dos potencias de igual exponente, obteniendo una potencia de exponente 0; por otro lado utiliza el algoritmo de la división con el dividendo igual al divisor, siendo el cociente el número 1.

El método de cancelación. Consiste en reordenar los términos o datos de un problema de tal forma que simplifique su solución.

Reducción de un problema a casos más simples. Consiste en pasar de la consideración de un conjunto de objetos dados, a la consideración de un conjunto más pequeño contenido en el conjunto dado. **Modelación:** Es otra forma de reducción, que consiste en buscar una interpretación (Un modelo), del problema dado, en otro dominio, con el fin de poder aplicar las leyes del nuevo dominio, a la

resolución del problema transformado y, realizando la transformación inversa del modelo, llegar a la resolución del problema de partida.

El esquema adjunto representa la propuesta de Ríos (1995), donde se resumen las etapas principales, que con más dificultades en unas etapas o en otras, permiten llegar a profundizar en el proceso de planteamiento y modelización de problemas de la realidad, que es previo a su tratamiento matemático convencional y requiere actividades intelectuales diferentes.



(Ríos 1995, p. 32)

Observemos que las matemáticas que tradicionalmente se enseñan, intervienen casi exclusivamente en F) Proceso lógico-deductivo (p. 32)

EJEMPLO DE UN PROCESO DE COMPRENSIÓN POR MODELACIÓN

Como ejemplo de un proceso de comprensión de las ideas y conceptos matemáticos, mediante la modelización, donde:

“Modelizar una situación o fenómeno real es destacar sus líneas y relaciones más importantes para, a través de esta simplificación, emprenderlo mejor y poder resolver y explicar los problemas que plantee” (Ríos, 1995, p.1)

Lo que significa que modelizar reúne las siguientes características: aplicación de diversas actividades humanas dentro de la cultura que van de la ciencia y tecnología a los organismos productivos, proceso mental que conduce a convertir un problema opaco de la realidad en un problema clasificado matemático, los problemas se presentan vinculados a la realidad con frases como las siguientes:

“Cómo evolucionará una población de 1000 truchas que se colocan en un vivero con una cierta cantidad de alimentos…” , “Cómo podemos encontrar la relación…” y no como tradicionalmente están expresados con las frases: “Demostrar que todo triángulo isósceles…” , “probar que la suma…” resolver problemas en íntima conexión con la vida diaria, énfasis en la comprensión de las diferentes fases del proceso de modelización, mediante ejemplos reales clasificados por sus objetivos generales: crecimiento, equilibrio, organización, sistema, incertidumbre, azar, caos, inferencia, decisión, optimización juego,… considerando como puntos de vista secundario y de apoyo las técnicas matemáticas. En modelización intervienen:

A) Descripción del problema, sistema o fenómeno real. B) obtención de información, C) modelo empírico de relaciones, D) conceptualización, E) modelo matemático, F) proceso lógico educativo y G) consecuencias matemáticas del modelo H) Descontextualizar, es decir, pasar del modelo y sus consecuencias a las aplicaciones obteniendo I) relaciones empíricas y K) que consiste en la **validación** del modelo o su rechazo. Aceptando el modelo descrito en el modelo matemático, se utilizará para la predicción (L) de nuevos resultados. En el ejemplo a continuación, se debería seguir la secuencia anterior para un proceso de modelización:

Ejemplo

Juan es un joven inteligente, con la formación matemática del bachillerato y un manejo aceptable de la bicicleta. Vive en El Alto y quiere hacer una excursión el sábado después de comer, para llegar a Viacha, que esta a 20 Km. y volver antes de que sea de noche. Modelizar el proceso de ida y vuelta.

Organización. Realizar croquis, gráficos, figuras, diagramas o esquemas apropiados. El sujeto trata de esquematizar las relaciones entre los datos de formas convencionales, para encontrar así las relaciones necesarias. La solución de un problema matemático con texto es la construcción de un conjunto de modelos o sistemas de modelos.

Describiremos algunos modelos:

- **Manipular y experimentar**. Consiste en comprender las relaciones del problema a partir del manejo de materiales manipulativos.

- **Modificar el problema**. El sujeto modifica el problema excluyendo algunos datos y después, basándose en la explicación lógica del resultado de estos cambios, encuentra la manera de resolver el problema.

- **Analogía**. El sujeto resuelve un problema análogo pero más sencillo. Para ello se busca en el archivo de nuestra experiencia con problemas, situaciones parecidas y relaciones similares.

- **Ensayo y error**. Se elige un resultado, operación o relación posible. Se lleva a cabo esa elección cumpliendo las condiciones que indica el problema. Se comprueba si se ha logrado el objetivo, de no ser así, se verifica el error y se vuelve a ensayar con otro resultado, operación o relación.

- **Codificación**. Consiste en representar los datos o el lenguaje del problema con una expresión que facilite su comprensión. Este método es un derivado del método expuesto anteriormente como Organización.

- **Trabajar marcha atrás**. Se considera el problema resuelto. Andando el camino desde el estado final al estado inicial para advertir las relaciones necesarias para verificar su solución.

- **Contradicción**. También llamado reducción al absurdo. Consiste en suponer verdad algo que es falso para llegar a una relación absurda y demostrar la nulidad de la suposición de la que hemos partido.

- **Inducción matemática**. Se debe a Peano. Se quiere demostrar una propiedad “p” asociada a N. Se comprueba que es válida para 1. Se supone válida para n y se demuestra para n + 1; si se consigue se acepta su veracidad.

- **Principio del palomar de Dirichlet**. Si m palomas ocupan n nidos y m > n, entonces hay al menos un nido con dos o más palomas.

Los procedimientos de solución en la resolución de problemas matemáticos se pueden clasificar en dos grandes clases: ***los algoritmos y los heurísticos.*** **El vocablo “heurística”o “heurística” proviene del griego y significa: hallar, descubrir, inventar.** Ambos tienen en común que se aplican en la solución de ejercicios y problemas de diversos tipos. Su diferencia esencial consiste en que: si para una determinada clase de ejercicios se conoce un algoritmo de solución, entonces todo ejercicio de esta clase se puede resolver con seguridad, en la misma forma, mediante la aplicación de dicho algoritmo, en cambio, si para un ejercicio no se dispone de ningún algoritmo de solución (porque no existe o no se conoce), entonces primero hay que determinar una vía de solución apropiada. Para ello puede ser útil tener en cuenta los procedimientos heurísticos que permiten realizar un

trabajo sistemático orientado hacia este objetivo, pero sin que sea posible asegurar que de ese modo se encuentre una vía de solución. La *heurística* como disciplina científica, es relativamente joven, y en épocas muy recientes es que aparecen sistematizados los procedimientos heurísticos en la literatura pedagógica, el método heurístico se caracteriza como un método de enseñanza mediante el cual se le plantean a los alumnos impulsos que facilitan la búsqueda independiente de problemas y de las soluciones de estos, donde el maestro no le informa a los alumnos los conocimientos terminados, sino que los lleva al redescubrimiento de las suposiciones y reglas correspondientes, de forma independiente.

El objetivo principal de la heurística es investigar las reglas y métodos que conducen a los descubrimientos y a las invenciones e incluye la elaboración de principios, reglas, estrategias y programas que facilitan la búsqueda de vías de solución a tareas de carácter no algorítmico de cualquier tipo y de cualquier dominio científico o práctico.

En cuanto a los ***Procedimientos algorítmicos.*** El término algoritmo se emplea con frecuencia en matemática por estudiantes y profesores. Se define como: *"… regla exacta sobre la ejecución de ciertos sistema de operaciones en un determinado orden, de modo que resuelvan todos los problemas de un tipo dado".* Las operaciones que conforman el algoritmo tienen que ser elementales para el ejecutor. Una operación es elemental o simple cuando puede ser ejecutada sin necesidad de descomponerla en otras operaciones. El algoritmo debe expresar el proceso en un número finito de operaciones que si se ejecutan correctamente a partir de ciertos datos iniciales permiten obtener siempre el resultado correcto. La descomposición algorítmica para resolver un ejercicio no es generalmente única, pues la sucesión de pasos que la describe depende de las operaciones definidas hasta ese momento y el nivel de los alumnos, entre otros aspectos. Un algoritmo es más potente en la medida que resuelve problemas más generales, no se elabora para resolver un problema particular, sino una clase de problemas del mismo tipo.

4.7 VALORES DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA QUE DEBEN DESARROLLARSE MEDIANTE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

4.7.1 INTRODUCCIÓN

Las investigaciones realizadas (Lancy, 1983) permiten concluir que el desarrollo cognitivo desde un punto de vista cultural, no son los individuos quienes alcanzan las etapas de las operaciones concretas o formales, sino que son las sociedades las que llevan a cabo esas transiciones. Esta investigación se basa en un modelo por etapas más general que el propuesto por Piaget.

Al respecto de los valores de la Educación Matemática:

"Los valores proporcionan la única base para una comprensión totalmente inteligible de la cultura por que la verdadera organización de todas las culturas se da, fundamentalmente, en función de sus valores".

(Kroeber & Kluckhohn,1952, p,340)

Por tanto, debemos tratar de conocer a fondo los valores de las matemáticas si queremos comprenderlos lo suficiente como para enculturar adecuadamente a nuestros estudiantes. Según Bishop (1999), se identifican seis conjuntos diferentes de ideales y valores, formando pares complementarios. Estos ideales y valores son: Racionalismo – Objetismo, Control – Progreso y Apertura- Misterio. El propósito es ofrecer los principales valores asociados con las matemáticas, basándose los argumentos en la documentación histórica y cultural.

4.7.2 IDEOLOGÍA: RACIONALISMO – OBJETISMO

RACIONALISMO

El racionalismo, con su interés por el razonamiento deductivo como único método válido para alcanzar explicaciones y conclusiones, desafió y en última instancia desbancó al pragmatismo basado en el ensayo y el error, a las reglas basadas en la práctica, a la sabiduría tradicional, al razonamiento y al razonamiento analógico. Eran los tiempos en que la Matemática empezaba a diferenciarse de la ciencia tanto una como otra se centraba, y se centran en la explicación, pero mientras la ciencia emplea la validación empírica como prueba de sus explicaciones, las matemáticas acabaron centrándose en los criterios "internos" de la lógica, la compleción y la coherencia.

El racionalismo, que ha continuado desarrollando el núcleo de las matemáticas, también proporcionó a Descartes la luz que los guió, sustentó las nuevas geometrías y álgebras del siglo XIX y provocó el teorema de Gödel. El racionalismo, como opuesto a la tradición, al dogma religioso y a la experiencia o la condición personal es el principio rector del desarrollo matemático.

Como dijo Kline (1972):

> En su aspecto más amplio las matemáticas son un espíritu de racionalidad. Este espíritu desafía, estimula, vigoriza y dirige las mentes humanas para que den el máximo de si. Este espíritu pretende influir decididamente en la vida física, moral, y social del hombre pretende responder a los problemas planteados por nuestra existencia misma, se esfuerza por comprender y controlar la naturaleza y hace un gran esfuerzo para explorar y establecer las implicaciones más profundas y extremas del conocimiento ya obtenido". (p, 88)

Por tanto, en el proceso de resolución de problemas, cuando criticamos una línea de razonamiento, cuando refutamos una hipótesis, cuando encontramos un contra ejemplo, cuando seguimos una línea de razonamiento “hasta su conclusión lógica” y encontramos que está en contradicción con algo que ya sabemos que es cierta y cuando conciliamos un argumento, estamos siendo guiados por los valores del racionalismo y, al mismo tiempo, también los mantenemos. Racionalizar es intentar fraguar una conexión lógica entre dos ideas que hasta ese momento pueden haber estado desconectadas o conectadas, mediante una incongruencia. Las explicaciones se refieren a abstracciones y las abstracciones son la savia de las matemáticas como la demostración es la forma pura de explicación matemática. Así pues, además de valorar la lógica, también debemos aceptar el poder de la abstracción y de operar con ideas de hecho, y para emplear otra palabra se valora también “teorizar”. En matemáticas lo que se valora es una manera particular de teorizar sobre los fenómenos. Por lo tanto para que los estudiantes aprecien el racionalismo en el proceso de resolución de problemas es necesario hacer que sean concientes de la explicación, la abstracción y la teorización.

OBJETISMO

Existe otra ideología complementaria al racionalismo que nos ofrece unos conjuntos de valores bastantes diferentes que también ha influido con fuerza en la naturaleza y el carácter de las matemáticas. Esta línea ideológica se denomina “objetismo”, en un intento de caracterizar una visión del mundo dominada por imágenes de objetos materiales. Naturalmente la distinción entre **objetos e ideas** es básica para el desarrollo de valores racionales, pero lo que se indica ahora es el hecho de que las ideas son esencialmente **ideas sobre objetos**. Por otra parte, existen abundantes pruebas que demuestran que no solo las ideas se originan en nuestra interacción con el entorno, sino también que los objetos materiales proporcionan las bases intuitivas e imaginativas para estas ideas. En este sentido Newman (1959):

> Cómo podrían trabajar y hacer descubrimientos los matemáticos si se abstuvieran de tener intuiciones geométricas?. Naturalmente, no se abstienen de ello…Uno de nuestros fines es emplear algunas de nuestras nociones geométricas… como una guía, a medida que buscamos a tientas la demostración de un nuevo teorema. Cuando la encontramos, eliminamos cuidadosamente todo rastro de geometría o de mecánica de nuestra demostración estrictamente axiomática: y la persona que la lea probablemente las volverá a incluir mientras forcejea con los argumentos. (p, 92).

Estamos concientes de que las matemáticas se ocupan de abstracciones y que en el nivel pre-universitario se dedica un enorme esfuerzo a desarrollar lo que se suele denominar “pensamiento abstracto”. Lo que ahora es especialmente importante es que nos demos cuenta de que, en las Matemáticas, el poder de “objetificar” (Traducido “objetivise” por “objetificar” en el sentido de “convertir en objetos”) esas abstracciones es lo que permite que se puedan manejar con tanta precisión. Esta situación también se debe abordar en Educación Matemática a la hora de resolver problemas.

El racionalismo pone el énfasis en la lógica del razonamiento pero el objetismo dio a las Matemáticas la base intuitiva para la búsqueda de los “átomos” de razonamiento. Después de todo, ¿qué son los axiomas sino las partículas elementales a partir de las cuales se construyen proposiciones, teoremas y demostraciones complejas?. Esta imagen es inevitable en la resolución de problemas.

4.7.3 EJEMPLO RACIONALISMO – OBJETISMO

El **racionalismo y objetismo** están presentes en Geometría que etimológicamente significa medida de la tierra, las primeras demostraciones matemáticas se deben a Tales, que vivió en siglo sexto A.C. A partir de ahí, durante 800 años los griegos cultivaron y perfeccionaron, con singular brillo, la geometría organizada deductivamente, con axiomas, teoremas, corolarios, etc. Ese modelo fue adoptado

por las generaciones subsiguientes y es así que hasta hoy la Matemática es estructurada. Uno de los objetivos es estudiar la noción de medida en Geometría bajo sus aspectos uni, bi y tridimensional, esto es, medida de segmentos de recta (longitud), de figuras planas (área) y de figuras sólidas (volumen). En este estudio se ve como la **medida de objetos** geométricos está fuertemente relacionada con la idea de número real tal como sería en el desarrollo o hilo conductor de cantidad y como en realidad el **descubrimiento de los números irracionales** se dio en la Geometría y no en la Aritmética o en el Álgebra.

Cuando se trata de la medida de un segmento de recta, es el proceso que consiste en **comparar** un segmento arbitrario con otro fijado como unidad lo cual conduce a considerar el sistema numérico: números reales positivos, enteros, racionales e irracionales. Es decir, fijado el segmento unitario u, la longitud de un segmento AB es un número racional m/n cuando existe un segmento w que esté contenido n veces en u y m veces en AB. Y decimos que estos dos segmentos son conmensurables en este caso la medida de w es 1/n y, la medida de AB es m/n

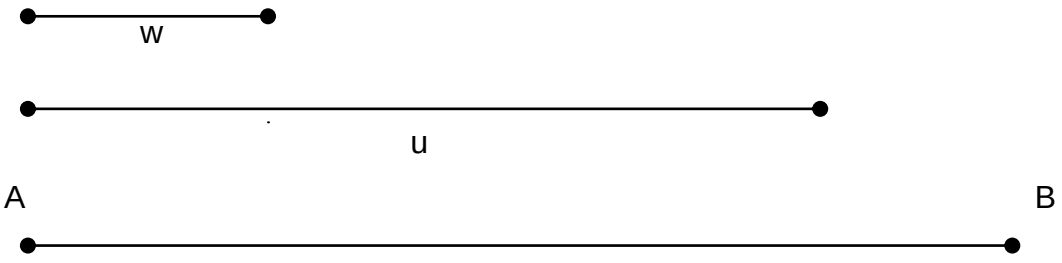


Figura 4.28 Comparación de segmentos

Pitágoras y sus discípulos descubrieron, el primer ejemplo de un par se segmentos inconmensurables, esto es, segmento que no parecen un submúltiplo común. Este descubrimiento causó enorme impacto en el desarrollo de la Matemática griega. El ejemplo de Pitágoras es bastante simple: si tomamos el lado de un cuadrado como un segmento unitario, la diagonal de ese cuadrado no puede tener longitud racional

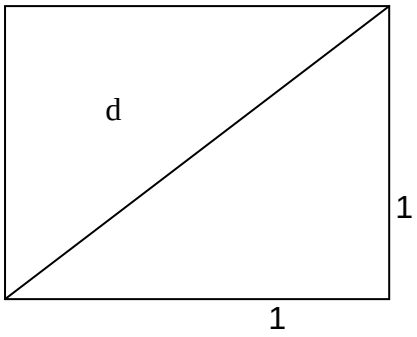


Figura 4.29 Cuadrado de lado unidad

Es decir, el lado y la diagonal de un cuadrado son magnitudes inconmensurables. Los estudiantes deben desarrollar el razonamiento deductivo como método para alcanzar conclusiones y explicaciones al respecto del anterior problema, vale decir **demostrar que la diagonal del cuadrado anterior no tiene longitud racional.** *¿Cuáles son los elementos y teorías matemáticas para lograr la demostración del anterior problema?, ¿Cuál es la longitud de la diagonal de un terreno cuadrado cuyo lado mide 2 m.?*

4.7.4 SENTIMIENTO: CONTROL - PROGRESO

CONTROL

Se ha visto que el racionalismo y el objetismo son las ideologías complementarias que se han desarrollado en las matemáticas. Según Alan J. Bishop (1999,96) debemos concentrarnos en lo que White denomina el “componente sentimental”. Esta expresión, quizá algo equívoca, se ocupa en esencia de sentimientos y actitudes y, como antes, es posible identificar dos sentimientos muy importantes y complementarios que han impulsado las cultura matemática y que, de hecho, también han sido reforzados por ella. Al primero de estos sentimientos, que está estrechamente relacionado con la ideología anterior del objetismo, lo llamaré “**control**” y el segundo lo llamaré “**progreso**”.

La búsqueda del conocimiento y las explicaciones mediante la solución de problemas de los fenómenos naturales están asociadas con un deseo de predecir y, sin duda, la capacidad de predicción es un conocimiento poderoso. En este sentido, el conocimiento se ocupa del control. Saber que los planetas se comportarán de una manera determinada equivale a saber que no se comportarán de otras maneras: en particular, equivale a saber que no se comportarán de una manera impredecible o aleatoria. Saber esto equivale a obtener una especie de seguridad dentro de nuestro mundo un perpetuo cambio. Hoy podemos reconocer fácilmente lo importante que es el valor del "control" en la cultura general, por que cuando se produce un desastre natural, una inundación, una sequía o quizá un terremoto, no solo se da un sentimiento de compasión hacia la víctima. También se da una inquietud genuina por que estas cosas se podrían haber impedido, o por lo menos se podría haber predicho para tomar medidas de protección. Existe algo de irritación pesar e incluso culpa ligada a nuestra incapacidad para controlar algunas fuerzas de la naturaleza. El desarrollo de la ciencia por medio de la resolución de problemas en las matemáticas nos muestra la conocida evolución desde la descripción hasta la predicción, pasando por la explicación, y a medida que el respeto y la aceptación hacia la ciencia y sus aplicaciones han aumentado, también ha aumentado el ritmo de la investigación científica. En todos los campos se da la tendencia hacia el control del entorno de la materia, y los instrumentos son, naturalmente matemáticos, y las acciones son por supuesto el planteamiento y la resolución de problemas vinculados con el control.

PROGRESO

Existe otro fuerte sentimiento y otra actitud en torno a las matemáticas que se agrupan bajo la etiqueta de "progreso" y que es complementaria del "control". El progreso representa un sentimiento más dinámico que el anterior: El control, con su trasfondo de seguridad, presenta un conjunto de asociaciones más estático.

Aquí nos encontramos con los sentimientos de crecimiento, de desarrollo, de progreso de cambio, y el primer aspecto importante de este valor es que lo

desconocido se puede llegar a conocer. Las matemáticas se han desarrollado por que han demostrado su valía. Cuando se vio que las primeras explicaciones racionales y materiales se podían verificar contrastándolas con la evidencia empírica, apareció la apasionante sensación de que es posible comprender más, que no debemos permanecer por siempre ignorantes ante determinados fenómenos.

Una vez más, el estudiante preuniversitario de matemáticas puede comprender este sentimiento. Tras desarrollar, por ejemplo, un algoritmo para resolver un problema o un procedimiento heurístico para demostrar un teorema, es extremadamente revelador saber que, **como consecuencia**, se podrán solucionar otros problemas. A partir de este descubrimiento, pronto se desarrolla la idea de que realmente podemos abordar problemas "desconocidos" y tratar de encontrar maneras de resolverlos. Las abstracciones de las matemáticas permiten llevar a cabo esta generalización desde un problema "conocido" hasta otro problema "potencialmente soluble".

Uno de los peligros del deseo de "progreso" y de cambio es que necesariamente crea insatisfacciones e inquietudes acerca del alcance de la seguridad y del "control" que tenemos sobre el entorno. ¡La misma riqueza de las alternativas disponibles crea su propia inseguridad!. Otro peligro es que si la sociedad da demasiado valor al "progreso" tecnológico como ocurre en algunas sociedades, el resultado puede ser la proliferación de productos que esa sociedad necesita y para los cuales se ha creado la "necesidad" pertinente. Las economías de estas sociedades son tan dependientes de la tecnología y de las "soluciones", tecnológicas a los problemas, que sus instituciones sociales se encuentran "atrapadas" por este entorno artificial. El problema reside en cómo progresar ofreciendo soluciones no tecnológicas a problemas creados por el desarrollo y el logro tecnológico, y definidos en función de ellos mismos.

4.7.5 EJEMPLO: CONTROL - PROGRESO

Control

Recordemos que uno de los ejemplos analizados en el desarrollo de la actividad **cambio** era estudiar el comportamiento de la trayectoria de la transformación f del punto x, es decir la naturaleza de la sucesión de valores $x, f(x), f^2(x), f^3(x),..., f^n(n),\ldots$ que es la órbita de x, en el caso en que $f(x)=kx(1-x)$ donde k es una constante o parámetro que controla al sistema dinámico f y $x\in[0,1]$. Recordemos que a partir de $k_1=3.8$ se obtenían trayectorias en la que no aparece ningún orden, es decir no hay periodicidad y falta de predicibilidad, es decir se ha llegado a lo que se conoce como **caos matemático.** En cambio cuando $k_1=3.2$ se observa un proceso periódico, en este caso se tiene un proceso de control.

Progreso

El **desarrollo o progreso** del concepto de número tiene un carácter marcadamente abstracto, lo cuál implica que su exposición estructurada sea un problema didáctico difícil. En los textos se procura contribuir a la solución de este problema por supuesto no de manera única, mediante diversos métodos de aprendizaje matemático. En el caso de un aprendizaje mediante la resolución de problemas, el estudiante debe ser orientado en el desarrollo de los sistemas numéricos, en principio mediante un enfoque intuitivo en función del nivel de un Curso Prefacultativo.

Por ejemplo el concepto de **número natural** se tenía por algo tan simple y transparente a la mente, que parecía imposible analizarlo o referirlo a otros conceptos más simples. Este estado de cosas se refleja en la afirmación de Kronecker (1823-1891): "***Dios creó los números naturales; lo demás es obra del hombre***". Para indagar el significado de los números naturales 0,1,2,3,… Es preciso considerar estos números tal como se presentan en la forma 0,1,2,3,… ,

ordenados en una sucesión, en la cuál podemos señalar de manera informal e intuitiva las siguientes características :

a. Se parte de un elemento especial, 0;
b. La sucesión no termina nunca ni se ramifica;
c. Tampoco se cierra sobre sí misma (como ocurre, por ejemplo, con los números de la esfera del reloj, en los cuales a 12 sigue el número 1 de partida);
d. La sucesión no tiene “puntos de confluencia”, es decir, ningún elemento sigue inmediatamente a dos distintos.
e. No hay números naturales “intercalados entre” los de la sucesión, ni excluidos de ella: partiendo de 0 y pasando reiteradamente al elemento siguiente, se obtienen **todos** los números naturales.

Precisamente estas características condujeron a Dedekind y Peano a fundamentar el concepto de número natural en cinco axiomas, a partir de los cuales se estudiaron propiedades, etc.

Supongamos definida la **adición** en $\mathbb{N}$, entonces se define la **diferencia** como operación inversa de la adición, es decir: $a-b=c$ significa $b+c=a$. Surge la pregunta: si $a<b$,

¿Cuál es el número natural c tal que $a-b=c$?

La respuesta es que no hay número natural c tal que $a-b=c$. Por ejemplo la diferencia 3-7 no puede efectuarse en $\mathbb{N}$. Entonces **la operación de diferencia no es siempre posible en el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales.**

La ampliación del sistema de los números naturales $\mathbb{N}$ (hecho que procede de la india) incrementó considerablemente el poder de las matemáticas. Es común usar los números para representar cantidades de dinero, en particular las que se deben. Quizá por que la condición normal de los hindúes era la de estar endeudados, se les ocurrió que sería útil disponer de números que representaron el monto de las

deudas. En consecuencia, se inventaron lo que ahora se conoce como números negativos; los antecesores de estos son los números positivos. Así cobraron existencia los números que expresamos como -1,-2,-3,…. El uso de números positivos y negativos no se limita a la representación de ingresos y egresos, ahorros y cargos, haberes y débitos. Se toman como negativos las temperaturas por debajo de 0 ºC y como positivos los que están por encima de esta cifra. Las alturas sobre y bajo el nivel del mar se pueden representar también con números positivos y negativos, respectivamente.

Lo anterior describe de manera breve el desarrollo o crecimiento del paso de los números naturales al conjunto de los números enteros . Con antecedentes históricos de la matemática, del mundo físico y de la cultura, han sido posibles ampliaciones similares a la anterior de los sistemas numéricos. El estudiante de un nivel preuniversitario debe desarrollar la actitud de sentimiento de progreso, tras desarrollar un ejemplo, un algoritmo para resolver un problema, un problema por demostrar, y así lo desconocido se pueda llegar a conocer.

4.7.6 SOCIOLOGÍA: APERTURA- MISTERIO

APERTURA

Examinemos ahora los valores asociados con el componente sociológico de White (1982). Esto se refiere a las relaciones existentes entre las personas y el interior de las instituciones sociales, desde la perspectiva del conocimiento matemático. En este caso, de nuevo podemos detectar dos conjuntos complementarios de valores. Al primero de ellos lo llamamos “apertura” y se refiere al hecho de que las verdades, las proposiciones y las ideas matemáticas en general están abiertas al examen de cualquier persona. Al segundo lo indicamos como “misterio”, y se refiere a la procedencia de las ideas matemáticas y quién las genera. El corolario más importante de ésta idea es que el conocimiento matemático está abierto a todos y “pertenece” a todos. Podemos convencernos nosotros mismos de que un principio

matemático es cierto, nadie tiene que persuadirnos, por que “los hechos hablan por si mismos”. Si realizamos los procedimientos correctos y seguimos las reglas, la lógica hará el resto. La misma lógica de las matemáticas nos persuadirá de que las conclusiones son ciertas. Por eso los buenos enseñantes insisten en que el alumno debe demostrar, resolver y explicar por que una verdad matemática lo es, en vez de limitarse a aceptar razones como “parece que sea correcta”.

MISTERIO

Al último valor importante asociado con las matemáticas se le da el nombre de “misterio” a causa de la siguiente paradoja: aunque la cultura matemática conlleva los valores de la “apertura” y la accesibilidad, muchas personas se sienten desconcertadas solo por que no comprenden que son las Matemáticas.

Además, no solo la gente corriente siente que las matemáticas son un misterio; el matemático también puede tener esta sensación. La profunda y a la vez frívola observación de Sir Bertrand Russel sigue siendo muy cierta:

“Las matemáticas son la materia en la que nunca sabemos de que estamos hablando y si lo que decimos es cierto”.

Sin duda, en los niveles más elevados de una cultura la fragilidad del conocimiento quizá se entienda mejor. Este aspecto es familiar para nuestros estudiantes por que el misterio de las matemáticas se relaciona con el hecho de que se ocupa de abstracciones. Cuanto más abstractas sean las ideas, menos contextualizadas estarán y en consecuencia también serán menos significativas.

Cuando en la resolución de problemas están presentes diferentes tipos de números: irracionales y los imaginarios (los nombres son muy reveladores), o con los infinitos,

las álgebras abstractas y la geometría no euclidiana, los estudiantes pueden tener dificultades. Aquí es donde las intuiciones empiezan a tener poco valor y a pesar de que podemos recibir formación para abordar estas entidades abstractas como si fueran objetos (es decir, la ideología del objetismo), esto no impide que tengan poco significado para la mayoría de las personas.

4.7.7 EJEMPLO: APERTURA – MISTERIO

Como ejemplo, para que el estudiante pueda ser guiado por la apertura de las matemáticas, podemos considerar lo siguiente:

Supongamos que planteamos a los estudiantes o a otras personas el problema de determinar la suma de los ángulos de un triángulo. Entonces podrían dibujar en un papel muchos triángulos diferentes, construirlos de madera o metal, y medirles los ángulos. En cada caso encontrarían que la suma se aproxima a 180º según la agudeza visual y su destreza manual que poseen estos estudiantes o personas. Por razonamiento inductivo, llegarían a la conclusión de que la suma de los ángulos de todo triángulo es de 180º. Ah, pero el matemático no acepta esta conclusión como teorema por que no está demostrada deductivamente a partir de premisas aceptables. Habrá entonces que demostrar deductivamente este resultado.

Con algo de geometría elemental, dibujemos sobre uno de los vértices del triángulo (ver figura)

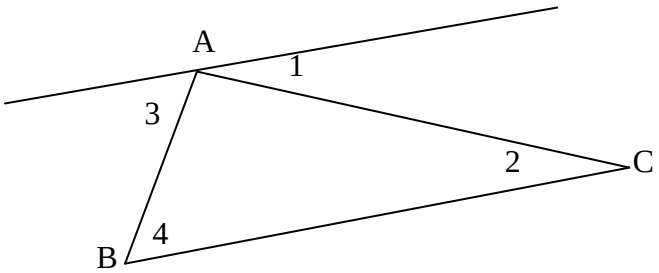


Figura 4.30 Suma de los ángulos de un triángulo

una paralela al lado opuesto. Como consecuencia de un teorema sobre paralelas, ya establecidos, resulta que los ángulos 1 y 2 son iguales, lo mismo que los ángulos 3 y 4. Los ángulos 1,3 y el ángulo A, este último del propio triángulo, suman 180. Esto

mismo por consiguiente, deberá ser cierto de los ángulos del triángulo. Con lo que concluye la demostración. Este teorema demostrado sobre un triángulo abstracto se aplica a una porción de tierra que ostente esta forma, a un instrumento musical de percusión, o al triángulo determinado por tres cuerpos celestes en un momento dado. Estas ideas matemáticas y las proposiciones que intervienen en su demostración están abiertas al examen de cualquier persona.

Las matemáticas también emplean para sus descripciones el razonamiento por analogía. Para ver esto, notemos primero que los centros del conjunto de cuerdas paralelas de un círculo están sobre la misma recta. Esta línea, por cierto es uno de los diámetros del círculo, ver la siguiente figura:

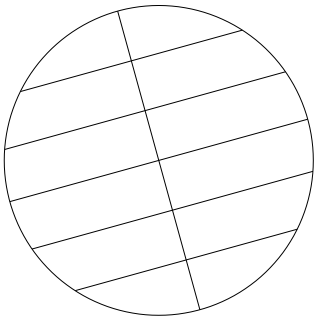


Figura 4.31 Cuerdas paralelas en un círculo (Kline 2000, p.53)

Una elipse se parece mucho a un círculo. Por tanto, podría sacarse la conclusión de que los centros del conjunto de cuerdas paralelas de una elipse se encuentran también en línea recta, ver la siguiente figura:

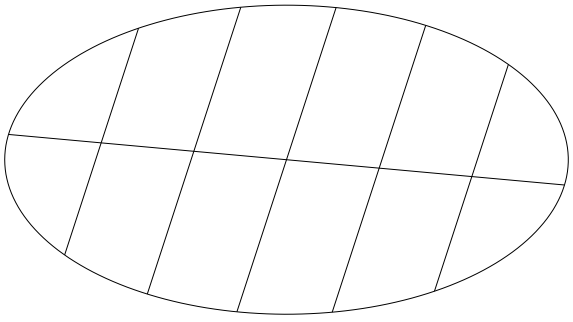


Figura 4.32 Cuerdas paralelas en una elipse (Kline 2000, p.53)

Pese a la utilidad y las ventajas de la inducción y la analogía, las matemáticas no están atendidas a estos métodos para establecer sus conclusiones. Todas las demostraciones matemáticas deben ser deducidas. Cada demostración es una cadena de inferencias deducidas y cada una de estas con sus correspondientes premisas y conclusiones.

Para contrastar más todavía el método de las matemáticas con el de las otras ciencias, examinemos un ejemplo famoso. Se encuentra que los primeros números pares (diferentes de 2) se pueden expresar como la suma de dos números primos; por ejemplo,

4 = 2+2
6 = 3+3
8 = 3+5
10= 3+7

Al intentar con números pares cada vez y más grandes se encuentra uno con que, sin excepción, cada par se puede expresar como la suma de dos números primos. Consiguientemente, por razonamiento inductivo, es sostenible la conclusión de que todo número par (diferente de 2) es la suma de dos números primos. Matemáticamente no se acepta esta conclusión como teorema por que no está demostrada deductivamente a partir de premisas aceptables. Como referencia histórica, el ejemplo anterior es conocido como la conjetura de Goldbach por haber sido Cristian Goldbach, matemático del siglo XVIII, el primero en sugerirla, es un problema matemático no resuelto. Nuevamente estas ideas matemáticas están abiertas al examen de cualquier persona.

5 EPISTEMOLOGÍA DE LAS MATEMÁTICAS Y DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

El propósito de la presente sección (Sierpinska, y Lerman, 1996) es clarificar lo que significa Epistemología en los distintos entornos en los que se usa dentro de la comunidad internacional de Educación Matemática, y reflexionar sobre nuestras prácticas como investigadores y educadores en relación con las teorías epistemológicas sobre las que nos apoyamos.

Se inicia con una visión global de las cuestiones básicas de la epistemología y de las muy diversas formas en que se puede interpretar. En la primera parte tratamos de epistemologías de las Matemáticas, que de manera particular mencionaremos distinciones históricas relacionadas con la distinción entre epistemología por una parte, y psicología sociológica e historia de la ciencia por otra. Esto implica hablar sobre epistemologías del **contexto de justificación** y epistemologías del **contexto del descubrimiento**.

En la segunda parte, se trata de la epistemología de la Educación Matemática, donde se realiza un examen del uso y papel de las epistemologías en la Educación Matemática. Argumentamos que las aproximaciones constructivista, socio-cultural, interaccionista están fundados sobre diferentes epistemologías del conocimiento.

5.1 EPISTEMOLOGÍA DE LAS MATEMÁTICAS

La epistemología, como una rama de la filosofía interesada por el conocimiento científico, se puede plantear cuestionamientos respecto a algún dominio particular de conocimiento científico, por ejemplo en este caso las matemáticas. Uno puede estar interesado en el conocimiento desde varias perspectivas. Se puede preguntar: ¿Cuáles son los orígenes de la validez de nuestras creencias? o bien, ¿cuáles son las fuentes del significado del conocimiento y como se constituye el significado?.

Estas son cuestiones diferentes por que el significado de la verdad son categorías diferentes. También se puede preguntar: ¿Cuál es la ontogénesis del conocimiento? Y hablar del desarrollo de estructuras cognitivas, por ejemplo. O la cuestión se puede plantear sobre la "filogénesis" de los sistemas discursivos de conocimiento tales como las matemáticas o alguna de sus partes.

Estas preguntas discriminan entre las actitudes hacia la epistemología de los interesados por los fundamentos de las matemáticas y los educadores matemáticos. Los educadores matemáticos están por lo general menos interesados en estudiar los fundamentos de la validez de las teorías de las matemáticas que en explicar los procesos de crecimiento del conocimiento matemático: Los educadores matemáticos están también interesados en observar y explicar los procesos de descubrimiento matemático realizados tanto por los expertos matemáticos como por los estudiantes. Finalmente, como prácticos, investigan modos de provocar todos los procesos en la enseñanza.

5.2 EPISTEMOLOGÍA DEL CONTEXTO DE JUSTIFICACIÓN Y FUNDACIONALISMO EN LA FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS.

Kart Popper (1972, 3) comprendió la epistemología de un modo anti – psicologista. Inre Lakatos, un discípulo y crítico en Popper, extendió el dominio de las reconstrucciones epistemológicas a aquellas partes del proceso de descubrimiento que presentía podrían ser racionalizadas. Sus **pruebas y refutaciones** (Lakatos 1976,3) proporcionaron una reconstrucción racional del proceso de descubrimiento y justificación de una cierta parte de la topología. Pero la epistemología de Lakatos siguen siendo programáticamente anti-psicologísta. Su noción, por ejemplo, de **concepto generado por la prueba** es una herramienta metodológica en las reconstrucciones racionales, no una generalización de hechos históricos o psicológicos.

Las respuestas a cuestiones de los orígenes del conocimiento se han clasificado tradicionalmente en dos categorías: apriorismo y empirismo. Una disciplina especial a partir de la cual todo el resto se debe construir, son necesariamente a-priorísticas. De otro modo afirma (Kitcher, 1988,3), no habría contenido en sus preocupaciones. Naturalmente, el apriorismo aparece como una solución aceptable, al empirismo, especialmente el empirismo ingenuo, se ve como la ciencia alternativa epistemológica. El empirismo es simplemente inaceptable como una epistemología de las matemáticas. (Richard, 1907 p.3) proporcionó un argumento contra el empirismo desde un punto de vista fundacionalista: Si la experiencia sola puede probar la verdad de los axiomas, ¿cómo podemos conocer que son verdaderos en cualquier sitio?.

- **Epistemología del contexto de descubrimiento: Poincaré y la tradición francesa en epistemología.**

La filosofía de la ciencia francesa se considera tradicionalmente como psicologista e historicista. Se intenta realizar presentaciones de procesos de hecho más bien que sus reconstrucciones racionales.

El psicologismo de las epistemologías de (Poincaré, 1899,3), Bachelar y Piaget es evidente. La formación del espíritu científico de (Bachelar 1938,3) fue una búsqueda de las condiciones psicológicas del proceso de la ciencia. Poincaré inició un artículo diciendo que el problema de la génesis de la invención matemática inspiraría el mayor interés de un psicólogo. Aunque psicologista la epistemología de Poincaré se preocupó, no obstante con los orígenes de la validez de nuestras creencias y no con psicogénesis o historia del conocimiento científico. Poincaré encontró estos orígenes en la intuición sintético a priori del matemático y en su experiencia o construcción efectiva que le permite verificar si un objeto postulado existe. Así pues, en la construcción de las leyes matemáticas, la intuición y la lógica interactúan: una en el proceso de invención y la otra en su verificación.

- **Psicologismo en la epistemología estructuralista de Dieudonné**

La estructura es el foco de la visión estructuralista de las matemáticas, la naturaleza de los elementos en cualquier situación dada rápidamente se desvanece en el trasfondo, y se realizan amplias generalizaciones. Las transformaciones de figuras particulares del plano se sustituyen por transformaciones del plano consideradas como una estructura de una clase particular: La noción general reemplaza a los diversos grupos particulares de transformaciones geométricas; la noción de aplicación suplanta la actividad de cambio de variables, etc.

Para (Dieudonné, 1992,4), el método de validación de los enunciados matemáticos es ciertamente la prueba deductiva. En este sentido, la base para la aceptación de un enunciado es la aceptación de los axiomas. Sin embargo, Dieudonné no dice que no hay ningún conocimiento matemático antes de la axiomatización. Los axiomas no son, genéticamente, primeros. Pueden desempeñar diversos papeles en la evolución de la matemática. Ayudan a reorganizar el conocimiento, y juegan una parte importante en la comprensión y el desarrollo de las intuiciones.

Poincaré como Dieudonné no se interesó por el contexto de justificación. De hecho, afirmó que la cuestión de validez del conocimiento matemático es simple: un enunciado verdadero es un enunciado probado, aunque las pruebas rigurosas son solo posibles en teorías axiomatizadas. Todos los teoremas matemáticos son verdaderos. Por tanto la evaluación de los resultados matemáticos no se puede basar en su verdad. Se deben usar otros criterios, tales como no trivialidad, profundidad. Pero lo que estos términos evaluativos significan cambia de una época a otra y depende de modas y caprichos. Por tanto los criterios para la evaluación de un trabajo matemático son según Diudonné (1992) “inevitablemente subjetivos, un hecho que lleva a algunas personas a decir que la matemática es más un arte que una ciencia.”

Al resolver un problema matemático se ve como es importante tener en cuenta todos los casos posibles, no solo los que son más probables de que aparezcan en las aplicaciones. Esta orientación hacia tener una imagen completa puede explicar ciertas definiciones generales como la independencia lineal de un conjunto de vectores que incluye el caso del conjunto compuesto de un solo vector. Los educadores matemáticos a veces piensan que tales definiciones son impertinentes y formalistas. Pero hay que reconocer que las matemáticas han crecido de esa manera llevada por la preocupación primordial de presentar la imagen completa, la estructura completa descrita con todo detalle.

Diudonné (1992,5) no ve evolución en matemáticas de un modo dramático, como podría inferirse de la teoría de las revoluciones de Kuhn, o las reconstrucciones Lakatosianas de la historia de las matemáticas. No hay una cuestión sobre discontinuidad en la historia de las matemáticas. Diudonné no es el único que sostiene este punto de vista. Muchos matemáticos ven el desarrollo de las matemáticas de una manera más o menos continua. Los cambios se producen en la meta-matemática y los modos de pensamiento, no en el componente técnico de las matemáticas. Los matemáticos tienden a enfatizar el componente técnico.

Los educadores matemáticos, por el contrario están más inclinados a ver la historia de las matemáticas de una manera más dramática por que están y deben estar más preocupados por el componente meta-matemático. Es ahí donde los aprendices tienen problemas. Los matemáticos, en su práctica diaria, no se preocupan por las cuestiones meta-matemáticas. Continúan con sus investigaciones esperando que “la fe les vendrá”. Pueden ser intuicionistas o constructivistas al nivel meta-matemático, pero esto no les impide comprender las matemáticas escritas por las personas con otros puntos de vista. Estos pueden ser diferentes para los estudiantes para quienes el nivel técnico de las matemáticas puede estar completamente interconectado con cuestiones de naturaleza filosófica.

- **Las aproximaciones genética e histórico-crítica a la epistemología en los trabajos de Piaget**

Mientras que Kuhn (1962,5) y Feyerabend (1978,5) se apoyaron en sus análisis en datos históricos y consideraciones sociológicas, Piaget fue el primero en coordinar la "lógica del descubrimiento científico con los datos psicológicos de una manera sistemática y metodológicamente clara. Para Piaget, los objetivos de la epistemología son los mecanismos implicados en los procesos de constitución del conocimiento en le marco de disciplinas científicas particulares (no los orígenes de la validez de las creencias o los métodos de justificación de las afirmaciones científicas). En la identificación y estudio de estos mecanismos se pueden usar dos métodos complementarios: uno de ellos mirándolos desde una perspectiva sincrónica, el otro desde una perspectiva diacrónica. En la perspectiva sincrónica, se usa un análisis lógico-matemático para definir la "significación epistemológica" de una herramienta conceptual dada. En la perspectiva diacrónica, se construye una génesis histórica y psicogenética de un área de pensamiento científico. Ambas perspectivas son necesarias para avanzar y explicar la "significación epistemológica" de un item de conocimiento, ya que, según Piaget el conocimiento no es independiente del proceso de su formación. Desde el punto de vista de los estadios de desarrollo, la secuencialidad justifica, según Piaget, la afirmación de que las construcciones más primitivas están "integradas" en las más avanzadas. Sin embargo, esta integración se refiere no tanto al contenido del conocimiento, ni a su estructura, como a los instrumentos y mecanismos de su constitución "los factores verdaderamente universales en cualquier tipo de desarrollo cognitivo… son funcionales en clase más que estructurales"

5.3 VISIONES SOCIOLÓGICAS DE LAS MATEMÁTICAS

- **Naturalismo**

Algunas epistemologías proponen una visión de las matemáticas que subrayan su semejanza con las ciencias naturales. (Kitcher, 1988,6) llamada epistemología "naturalista". Lakatos habla de Filosofía de las matemáticas "cuasi-empirisista".

El naturalismo de Kitcher tiene como uno de sus fines escaparse de las filosofías fundacionalistas (Kitcher, 1988, 294). El naturalismo no encuentra ninguna necesidad de regresar a los axiomas en la búsqueda de los orígenes del conocimiento matemático. De hecho, desde el punto de vista naturalista, los axiomas de una teoría no son sus comienzos. Mas bien son el resultado de una sistematización de un "cuerpo previo de afirmaciones" sobre los objetos de la teoría "que han sido empleados tásita o explícitamente en el razonamiento". El trabajo de axiomatización muestra que esas afirmaciones pueden "ser derivadas de (ciertos) principios… seleccionados como básicos". Kitcher afirmó que cuando Cauchy basó el análisis matemático sobre el concepto de límite, no fue por que de repente fue iluminado por algún tipo de intuición platónica o por que esta noción actuó sobre su intuición como una construcción necesaria más bien fue por que la encontró especialmente útil en su compromiso de estructurar el basto dominio de conocimiento llamado Cálculo.

El naturalismo aporta una dimensión histórica a las cuestiones de la génesis y justificación del conocimiento y la hace inseparable de la cuestión del crecimiento del conocimiento. El conocimiento matemático es un producto histórico.

La epistemología "naturalista" de las matemáticas, según la propone Kitcher, tiene algunas características importantes – en particular su carácter social e histórico y la importancia que le atribuye a la práctica – en concordancia con la presentación general de Vygotsky de los fundamentos del conocimiento (científico).

- **Wittgenstein y Lakatos, y otras visiones sociológicas sobre las matemáticas**

Ludwing Wittgenstein, cuyo primer trabajo *Tractatus Lógico-Philosophicus* (1974) había intentado proporcionar un fundamento para el conocimiento en la correspondencia entre el lenguaje y la realidad, y le había convertido en un héroe del Círculo de Viena, produjo más tarde una posición filosófica directamente crítica de la mayor parte del *Tractatus*. En este ultimo trabajo, Wittgenstein negó que los enunciados matemáticos se refirieran a objetos en absoluto. Al hacer matemáticas, argumentó, se transforman expresiones de una forma a otra y la corrección o no está determinada por cómo las personas usan estas expresiones y lo que se considera "correcto".

Es probable que Lakatos hubiera leído y estuvo influenciado por el trabajo de Wittgenstein. Lakatos elaboró su aproximación al desarrollo del conocimiento matemático en sus Pruebas y Refutaciones. En otros escritos sobre la naturaleza de las matemáticas Lakatos (1978) propuso que las posiciones clásicas llamadas Logicismo, Intuicionismo y Formalismo eran programas Euclideos, centrados en desarrollar las matemáticas como sistemas que aseguran la transmisión de la verdad desde axiomas indudables, por medio de ciertos procedimientos deductivos, hasta enunciados igualmente seguros. Argumentó que, por el contrario, la matemática procede de un modo similar a la ciencia, un cuasi-empiricismo, en la que la falsedad de los contraejemplos a las conjeturas se retransmite a los axiomas y definiciones. Si algo que se considera como un enunciado básico resulta ser falso en virtud de los axiomas y definiciones admitidas, en lugar de rechazar el enunciado, los axiomas y las definiciones se cambian para que se ajusten a dicho enunciado.

Aunque la "clase" en las Pruebas y Refutaciones de Lakatos (1976) quizás no pretendía sugerir que las matemáticas proceden mediante negociación, o que la heurística sea la esencia de las matemáticas, en lugar de los resultados, ha sido considerada de ese modo por lo educadores matemáticos.

Como hemos mencionado anteriormente, la mayoría de los matemáticos no apoyan una visión Lakatosiana ni Wittgensteiniana de actividad matemática. Hersh (1979) ha explicado esto en términos de la “seguridad” de los matemáticos profesionales, quienes creen en la existencia de los objetos matemáticos cuando trabajan con ellos, pero caen en el formalismo los fines de semana, cuando se les pide que justifiquen su creencia.

El movimiento hacia la heurística, los procesos de hacer matemáticas como la característica esencial del tema, en lugar de su contenido, ha llevado y apoyado el trabajo investigativo y de resolución de problemas como un foco principal de las matemáticas escolares desde la década de los 1970. El interés creciente en Popper, Lakatos, Kuhn, y otros fue paralelo al crecimiento del trabajo investigativo y de resolución de problemas en las escuelas por los profesores en grupos tales como la Asociación de Profesores de Matemáticas del Reino Unido. Como una aproximación a la enseñanza de las matemáticas se le dio un ímpetu por (Polya 1945) y después por muchos otros escritores, en particular (Mason, Burton y Stacey 1984) y (Schoenfeld, 1985).

5.4 EPISTEMOLOGÍAS DEL SIGNIFICADO

La epistemología del significado puede ser indistinguible de la epistemología de la validez por aquellos quienes, como (Frege, 1892/1952), igualan significado con condiciones de verdad – aunque Frege sugirió que “sentido” debería ser distinguido del significado, teniendo el primero orígenes sociales.

Pero, ¿es adecuado igualar significado con condiciones de verdad?. Claramente no es difícil encontrar sentencias que tienen significado pero a las que no se aplican cuestiones de verdad (como, por ejemplo, sentencias interrogativas, órdenes, etc). Además, hay sentencias cuyas condiciones de verdad son idénticas, aunque vehiculan diferentes significados. Por ejemplo, “Afortunadamente, Gauss está

muerto” y “Desafortunadamente, Gauss está muerto”, o “p y no q” y “p pero no q” (Strawson, 1975). Los teóricos de la comunicación- al menos algunos de ellos afirman, sin embargo, que en cada sentencia hay un núcleo de significado que se puede explicar bien por medio de condiciones de verdad o alguna noción relacionada (como, por ejemplo, “cumplimiento”, en el caso de un deseo).

La igualación del significado con condiciones de verdad es inaceptable para cualquiera que se interesa, no con la creación de una teoría coherente de la comunicación sino con la comunicación con éxito en la práctica de la enseñanza. Incluso si, en Educación Matemática, estamos interesados en construir teorías, nunca deberíamos perder de vista el fin último de estas teorías, que es la mejora de la práctica.

5.5 EPISTEMLOGÍA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

¿Epistemologías “en” o “de” la Educación Matemática?

Si la epistemología es la teoría del conocimiento, y la epistemología de las matemáticas es la teoría del conocimiento matemático, entonces la epistemología de la educación matemática debe referirse al mismo estudio, pero de las proposiciones de la educación matemática más bien que de las relativas a las matemáticas. Desearíamos examinar el cuerpo del conocimiento llamado de ese modo en ese dominio y preguntar cuáles son las fuentes de ése conocimiento, cómo se justifica y cómo se desarrolla. Podríamos esperar una simetría de respuestas entre la epistemología de las matemáticas y de la educación matemática. El estudio de los constructivistas radicales o de los post-estructuralistas como grupos sociales del conocimiento dentro de la comunidad de educación matemática será tan importante como el de los logicistas o formalistas dentro de la comunidad matemática.

Desde muchos puntos de vista la educación es actividad que depende de muchos otros dominios de conocimiento, incluyendo la psicología, sociología, antropología,

historia, filosofía y, en nuestro caso, de las matemáticas. Como una estructura institucional explícita, tiene ciertamente una historia variada a lo largo del mundo. Donde ha sido institucionalizada, la educación naturalmente ha servido siempre a propósitos específicos de grupos socio-culturales específicos y gobiernos y como tal ha estado necesariamente implicada con valores, expresados en términos de principios de enseñanza.

La educación matemática, que trata no solo con los mundos posibles de los contenidos matemáticos sino también con las mentes de los niños y los profesores, todo esto inmerso en un mundo socialmente complejo de instituciones educativas, no está necesitada de una epistemología genética, de una sociología y de una teoría de la cultura. Todas estas necesidades están reflejadas en las interpretaciones que los educadores matemáticos y los investigadores están haciendo de la epistemología constructivista piajetiana, de las teorías inspiradas por Vigotsky y Bruner, la "epistemología polémica" de Bachelard, y de otras visiones epistemológicas. En esta sección echaremos una mirada a estas interpretaciones, las avenidas que abren y sus limitaciones.

Constructivismo

Los constructivistas se han comprometido con desarrollar un fundamento para las actividades de un profesor que podría decirse que se adapta a los principios de la teoría constructivista del aprendizaje. Para los constructivistas, no hay conexiones directas entre enseñanza y aprendizaje, puesto que el conocimiento del profesor no puede ser transmitido a los estudiantes, la mente del profesor es inaccesible a los estudiantes y viceversa, y la noción de conocimiento de la comunidad de matemáticos tropieza con la imposibilidad de internalización por el individuo.

A un nivel más detallado, los educadores matemáticos constructivistas han intentado, por medio de experimentos de enseñanza, ilustrar como los investigadores pueden dar sentido a las conductas de los estudiantes en términos de sus posibles

estructuras conceptuales existentes, con el fin de predecir lo que podrían ser actividades convenientes para extender sus estructuras matemáticamente. En esto hay al menos tres cuestiones importantes implícitas:

a) que investigar en una situación de experimento de enseñanza no es lo mismo que enseñar en una clase ordinaria:
b) que el proceso de extender las estructuras conceptuales necesita ser analizado, particularmente en términos de asimilación y/o acomodación: y
c) es necesario realizar un análisis sobre"lo que significa una construcción más potente y efectiva", puesto que el fin del profesor de matemáticas es mejorar a sus estudiantes matemáticamente.

Visiones socio-culturales

La etiqueta "socio-cultural" se usa aquí para denotar epistemologías que ven al individuo como situado dentro de culturas y situaciones sociales de tal modo que no tiene sentido hablar del individuo o de conocimiento a menos que sea visto a través del contexto o de la actividad. Conocimiento es conocimiento cultural considerado como socialmente producido, siempre potencialmente cambiable, trabado con valores sociales y regulado socialmente.

Vigotsky (1978,13) y sus seguidores, por el contrario, estuvieron interesados centralmente con el aprendizaje (y la enseñanza). De hecho Vigotsky no trata con cuestiones sobre la naturaleza de las matemáticas o cualquier otra forma de conocimiento. Para Vigotsky cualquier conocimiento se considera que es lo que es en cualquier tiempo y lugar, y el propósito de la educación es pasar ese conocimiento cultural a la próxima generación.

Vigotsky (1978,13) se interesó por la naturaleza de la conciencia y en particular con su desarrollo. Para él, la comunicación conduce la conciencia y, por tanto, el proceso de aprendizaje era integral para la comunicación. Identificó dos tipos de pensamiento, ordinario o espontáneo y pensamiento científico o teórico. Este último

es el que pretende de modo conciente la enseñanza y aprendizaje mediante la apropiación por el niño del conocimiento cultural. El primero es el que se logra de manera informal por medio de las interacciones del niño con los compañeros y los adultos-aunque Vigotsky en su corta vida de trabajo como psicólogo dijo poco sobre este estadio.

Vigotsky (1978,13) identificó una región que llamó la “zona de desarrollo próximo”, que era la diferencia entre lo que un niño podía hacer por sí mismo y lo que podía hacer con la ayuda de un compañero o un adulto experimentado. Este concepto fundamental estableció que todo el aprendizaje tiene lugar con otros, y que el aprendizaje tira de cada persona, de modo que lo que ve hacer a otros hoy, lo hará con ellos mañana y solo después. El aprendizaje conduce al desarrollo, una aproximación que Vigotsky señaló en contraste directo con los escritos de Piajet para quien el desarrollo, en la forma de estadios de desarrollo del niño, conduce al aprendizaje. Vigotsky sugirió que este planteamiento deja al niño practicando su conocimiento de ayer.

Una característica importante de la aproximación de Vigotsky, y de considerable importancia para esta sección, es el sentido en que el mundo y los individuos dentro de él, son producto de su tiempo y lugar. En particular la psicología del individuo, expresada como conciencia se forma mediante la mediación de herramientas, que son expresiones de la situación social, histórica y cultural. Esto lleva al sujeto y al objeto juntos, superando la dualidad cartesiana. Esto implica que no hay fundamentos apara afirmar que existe un paralelismo entre los obstáculos epistemológicos en matemáticas, por ejemplo, y los obstáculos cognitivos en el aprendizaje. Los nuevos conocimientos y las estructuras de conocimiento llevan a un desplazamiento en el “mundo”, no es el lo mismo que fue antes.

Por ejemplo, según la historia de las matemáticas en occidente, el desarrollo del concepto de número negativo estuvo cargado de obstáculos epistemológicos; muchos matemáticos, incluso hasta el siglo 19, eran reacios a aceptar el concepto

(aunque parece claro que los autores Babilónicos de alguna de las tablillas de arcilla de alrededor de 1500 antes de Cristo encontraron más fácil de aceptar tales números). Ahora consideramos los negativos como parte de los enteros, y los niños pueden aprender su naturaleza sin tener que recrear esa historia (parcial); no hay ninguna razón excepto una hipótesis a priori, de por qué debería haber un paralelismo similar (Lehmann, 1995)

Las características finales de la aproximación de Vygostky que se describirán aquí fueron tomadas de Mar y desarrolladas posteriormente por Davydov. Estas son el ascenso a partir de lo abstracto a lo concreto en el desarrollo de los conceptos científicos en la zona de desarrollo próximo y la significación de la dialéctica al analizar las estructuras del pensamiento. En matemáticas, Davydov se apoyó en estas nociones y estudios experimentales para cuestionar la expectativa familiar de que los niños deben aprender actividades concretas antes de poder generalizarlas hacia lo abstracto. Informó de un número de experimentos que había realizado con niños en la escuela elemental trabajando con álgebra. Enfatizó las características generales del lenguaje de los niños incluso cuando parecían estar comprometidos con el nivel concreto, así como la naturaleza dialéctica de la relación concreto/abstracto como siendo distinta de una progresión lineal de uno a otro.

Perspectivas interaccionistas

El interaccionismo puede ser incluido como una de las aproximaciones a la teoría e investigación sobre el desarrollo que promueve una visión socio-cultural sobre las fuentes y el crecimiento del conocimiento. Lo que le distingue de otras aproximaciones, sin embargo, es que las interacciones (de diverso tipo) no son consideradas como meros auxiliares y factores útiles de desarrollo. El desarrollo y las interacciones se ven como inseparables. Se enfatiza que el foco del estudio no es el individuo sino las interacciones entre individuos dentro de una cultura (Bruner, 1985; Bruner y Bornstein, 1989).

Algunos de los primeros investigadores constructivistas comenzaron a inclinarse hacia el interaccionismo al intentar resolver, por sí mismos, el dilema entre la idea del conocimiento matemático como una construcción subjetiva de la mente y su concepción como una entidad objetivamente existente fuera de la mente. Por ejemplo, la reflexión de Cobb (1990) fue:

> *El modo más sugerente que yo veo es complementar el constructivismo cognitivo con una perspectiva antropológica que considere que el conocimiento cultural (incluyendo el lenguaje y las matemáticas) se regenera continuamente y modifica por las acciones coordinadas de los miembros de las comunidades. Esta caracterización del conocimiento matemático es, naturalmente, compatible con descubrimientos que indican que las prácticas matemáticas auto-evidentes difieren de una comunidad a otra… Además, tiene en cuenta la naturaleza evolutiva del conocimiento matemático puesta de manifiesta por el análisis histórico…*
>
> *(p.214.*

Para un educador matemático interaccionista, el aprendizaje no es precisamente un compromiso de la mente individual que intenta adaptarse a un entorno, no se puede reducir a un proceso de enculturación a una cultura pre-establecida. En la clase de matemáticas la construcción de los significados tiene lugar en interacción con la cultura de la clase mientras que al mismo tiempo contribuye a la constitución de esta cultura. Esta propiedad de la relación entre la actividad individual de los estudiantes y la cultura de la clase se llama reflexividad. La noción de reflexividad es bastante central para las aproximaciones interaccionistas. Una implicación importante de la hipótesis de la reflexividad es que lo que se aprende eventualmente por los estudiantes individuales en la clase depende del tipo de microcultura en cuya creación han participado.

La orientación interaccionista hacia el lenguaje lo distingue tanto del constructivismo como de la perspectiva Vygotskyana, aunque comparte con ellos el rechazo de una visión representacionista del lenguaje (el lenguaje como una representación del mundo). En el constructivismo, el lenguaje es una expresión del pensamiento (el lenguaje es moldeado sobre los hábitos de pensamiento) (Piaget, 1959). Vygotsky vio en el lenguaje un medio de transmisión cultural. El interaccionismo deja de ver el lenguaje como un objeto separado –un útil- que puede ser usado para un propósito u otro (y que en principio podría ser reemplazado por algo diferente: algún otro medio de comunicación).

Relacionado con esta actitud hacia el lenguaje esta el postulado del carácter discursivo del conocimiento. En particular las matemáticas son vistas como un tipo particular de discurso. “El discurso”, sin embargo, no es justamente “lenguaje”; es lenguaje-en-acción, o lenguaje como un medio para lograr fines cognitivos, sociales u otros. Es un “vehículo para hacer cosas con y para otros” (Bruner, 1985). Como un discurso, las matemáticas establecen un cierto universo: las matemáticas son un modo de ver el mundo, y pensar sobre él. Como este universo es establecido por medio de la comunicación y la construcción de convenciones y comprensiones compartidas de los contextos (Bruner, 1995), el tipo de conocimiento matemático que los estudiantes desarrollan depende de las características de las situaciones de comunicación en que ellos se desarrollan.

Algunos interaccionistas han visto complementariedad, sino compatibilidad, entre el constructivismo y el interaccionismo, o entre la teoría de Vygotsky y el interaccionismo. En relación al primer par de aproximaciones, Bauersfeld (1995), afirmó que aunque el individuo tiene que construir los significados por sí mismo, este proceso de construcción se basa en interpretaciones que tienen su fuente no en el individuo solo sino en sus interacciones con otros de una cultura. La atención del individuo está dirigida y orientada por lo que otras personas dicen y hacen. Una de las funciones principales del lenguaje es exactamente tal actividad orientada.

También se ha dicho que el constructivismo y el interaccionismo son complementarios en el sentido de que toman perspectivas diferentes sobre el conocer de las personas. El constructivismo es el punto de vista del individuo que trata de darle sentido al mundo. Interaccionismo es el punto de vista de un observador de la vida social; mira a las personas compartiendo significados y al funcionamiento del lenguaje como creador de significados. Sin embargo, hay profundas diferencias entre las dos aproximaciones, especialmente las que se refieren al modo en que ven el lenguaje, la comunicación y el conocimiento.

6. *MODELO METODOLÓGICO DE INVESTIGACIÓN UTILIZADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA MEDIANTE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS*

A continuación describo algunas características que señalan los expertos en Investigación Cualitativa y al mismo tiempo se remarcan los métodos a utilizar en el presente trabajo de investigación.

La adaptación de la propuesta de los autores J. Gimeno Sacristán A. I. Pérez Gómez (1999 p.116), se refieren respecto a la metodología de la investigación lo siguiente:

Los fenómenos sociales en general y los correspondientes a la Educación Matemática en particular mediante la resolución de problemas, manifiestan dos características que los diferencian claramente de los fenómenos naturales:

- El carácter radicalmente inacabado de los mismos, su dimensión creativa, autoformadora, abierta al cambio intencional.
- La dimensión semiótica de tales fenómenos. La relación en parte indeterminada y por tanto, polisémica entre el significante observable y el significado latente, de todo fenómeno social o educativo.

Se requiere, por tanto, un modelo metodológico de investigación que contemple las peculiaridades de los fenómenos objeto de estudio. La naturaleza de los problemas estudiados debe determinar las características de los planteamientos, procesos, técnicas e instrumentos metodológicos utilizados y no viceversa.

Por lo tanto necesito utilizar procedimientos que me permitan llegar a comprender el significado de tales indicadores situándolos en el contexto físico, psicosocial y pedagógico que los condiciona.

Como el objetivo del presente trabajo de investigación es: constatar, verificar y analizar los ***Contenidos Matemáticos****, lo que significan: desarrollar el conocimiento matemático; desarrollar métodos, técnicas y estrategias para la resolución de problemas matemáticos, es decir, desarrollar el "saber hacer" del estudiante, y finalmente desarrollar los valores de la educación matemática, que significan desarrollar las capacidades del "saber ser"*. Lo que implica *la formación integral de quienes participan en concreto en cada situación educativa.* En este sentido planteo la siguiente pregunta:

¿Qué supuestos, procedimientos, técnicas e instrumentos de investigación son los más adecuados para garantizar la utilidad práctica, y lograr el objetivo anteriormente propuesto?

Las deficiencias sentidas por las personas que investigan y por los profesores/as en la producción de conocimiento válido para la práctica educativa dentro del **modelo de investigación positivista** han provocado el surgimiento y desarrollo de un modelo alternativo, que bajo diferentes denominaciones: **cualitativo, naturalista, etnográfico, interpretativo** (**Guba 1983; Erickson 1989)** se preocupa fundamentalmente por indagar el significado de los fenómenos educativos en la complejidad de la realidad natural donde se producen. En tal sentido, el método de investigación cualitativa permitirá lograr los propósitos y objetivos anteriormente propuestos.

6.1 TECNICAS E INSTRUMENTOS DE INVESTIGACION

El modelo de investigación cualitativo, propone al investigador como el principal instrumento de investigación. Serán el juicio, la sensibilidad y la competencia profesional del investigador(a), los mejores e insustituibles instrumentos para captar la complejidad y polisemia de los fenómenos educativos, así como para adaptarse con flexibilidad a los cambios y a la aparición de acontecimientos imprevistos y anómalos.

Como investigador he podido sumergirme en un proceso permanente de indagación de reflexión y contraste para captar los significados latentes de los acontecimientos observables, para identificar las características del contexto físico y psicosocial del aula correspondiente al Curso Prefacultativo y establecer las relaciones conflictivas, difusas y cambiantes entre el contexto y los individuos. De modo similar a como se produce el análisis de un texto, relacionando las proposiciones aisladas con el texto en su conjunto y con el ambiente o contexto en que se han producido, de manera que no se distorsione el significado de las palabras o frases aisladamente consideradas, así los acontecimientos de aprendizaje o comportamiento deben desarrollarse con el contexto académico, físico y psicosocial al que responden y donde adquieren sentido.

Mis consideraciones anteriores son totalmente consistentes con la postura cualitativa. Al respecto Woods (1998), cuando se refiere a investigación etnográfica considera tres grandes temas:

- **La persona del etnógrafo**, que constituye el instrumento de investigación más importante de la etnografía.

- **La "educación"** como área importante de la actividad social, y que puede dar origen a principios generales susceptibles de ser aplicados en todas las áreas.
- **Atención especial a los maestros en calidad de investigadores**, sobre todo en una época en que está en auge el interés por el *"maestro-investigador"*, "*investigación-acción*", etc. (p. 10-12)

Para cumplir esta función, la investigación presente se convierte en un estudio de casos dentro del *enfoque interpretativo* porque solo se pueden interpretar completamente los acontecimientos dentro del caso que les confiere significación. Para poder comprender el caso en su integridad y complejidad, se proponen los siguientes procedimientos metodológicos que se presentan en el siguiente esquema y luego se describen las características de cada uno de ellos.

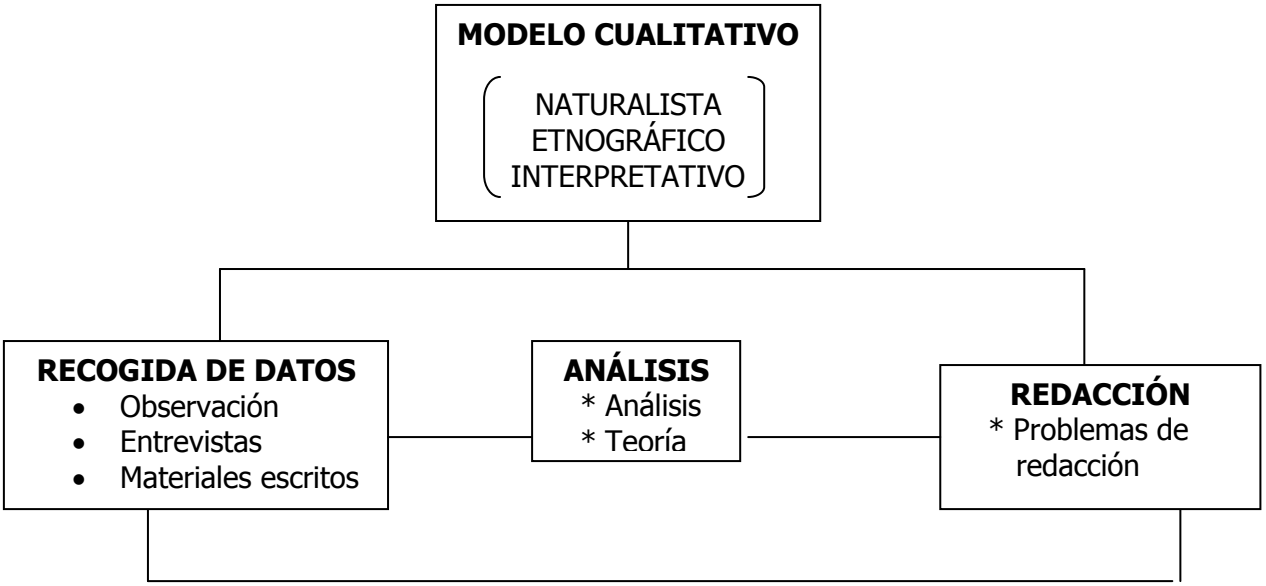


Figura 6.1 Modelo cualitativo

6.2 OBSERVACIÓN

***La Observación participante y la observación externa*.** Lo que supone estancias prolongadas de o de los investigadores en el medio natural, observando, participando, directamente o no, en la vida del aula, para registrar los acontecimientos, las redes de conductas, los esquemas de actuación comunes o singulares, habituales o insólitos. La observación en el campo parece imprescindible para ir más allá de las meras verbalizaciones sobre el pensamiento o la conducta y detectar el reflejo en la práctica en las representaciones subjetivas.

Observación no participante: En este caso la observación es desde el fondo del aula, para observar las cosas tal como suceden, naturalmente con la menor interferencia posible de parte del observador.

Con respecto al presente trabajo de investigación, se realizó tanto una observación participante como no participante, puesto que la función en este caso es la de observar las situaciones de interés, por ejemplo el planteo y/o resolución de problemas, los procedimientos que se utilizan para resolverlos, tanto de docentes

como de estudiantes, observar si en la descripción de los problemas están presentes las categorías de: Dimensión, Cantidad, Incertidumbre, Forma y Cambio, y finalmente observar características relacionadas con los valores de la Educación Matemática.

Respecto a las **técnicas de observación y notas de campo**, era necesario, en la medida de lo posible, “fundirme con el escenario” y perturbar lo menos posible la acción con mi presencia. Para poder ayudar a la vista, al oído fino y la memoria, utilicé: grabaciones y algunos registros de notas. Sin embargo físicamente es imposible observar y registrarlo todo, habrá decisiones que tomar sobre la base de “muestras” que previamente son consideradas en el proyecto. Hubo la necesidad de realizar algunas observaciones en diferentes situaciones antes de iniciar el análisis, esto lo logré mediante las notas de campo. Las notas de campo son en lo fundamental apuntes realizados durante el día para refrescar la memoria acerca de lo que se ha visto y se desea registrar, y notas más extensas con posterioridad, cuando se dispone de más tiempo para hacerlo.

Confiabilidad de los estudios cualitativos

Se resume el criterio de confianza en un estudio cualitativo, en la discusión de este criterio intervienen aspectos como credibilidad, transferencia, dependencia y confirmación del estudio. Estos aspectos pueden considerarse similares a los usados por el paradigma cuantitativo, es decir, validez interna, validez externa, confiabilidad y objetividad.

En el caso del presente proyecto, por ejemplo la exploración de los métodos, técnicas y estrategias para la resolución de problemas que docentes y estudiantes procesan, se realizó mediante: observaciones de clases, entrevistas a estudiantes y docentes, exámenes que desarrollan los alumnos y los cuadernos de apuntes. En realidad, este ejemplo da la posibilidad también de explorar las otras características de interés del proyecto, tales como los contenidos matemáticos y los valores de la Educación Matemática. Los resultados y la forma de obtener la información se presentan en las notas de campo. Además el área de estudio, que es la resolución

de problemas es casi de conocimiento general para docentes, estudiantes e instituciones educativas.

Lincoln y Guba (1985) al respecto de la confiabilidad de los métodos cualitativos afirman:

a) **Credibilidad.** Este aspecto se refiere al grado en que los resultados obtenidos en el estudio representan o revelan las ideas de los sujetos en estudio. Para alcanzar este criterio, cada categoría o resultado identificado en el análisis debe ser soportado y contextualizado con varios ejemplos tomados de la información (entrevistas, observaciones de clase, problemas). Una estrategia importante aquí, es el uso de la triangulación de la información. Es decir, una misma exploración puede plantearse a través de diversos acercamientos. Por ejemplo, un estudiante al resolver una seria de problemas y al diseñar otros él mismo, puede proporcionar información importante acerca del tipo de recursos matemáticos que para él son importantes. Aquí, un observador independiente debe estar de acuerdo con que los resultados provienen de los datos y representan las ideas de los sujetos en estudio. La consistencia interna del estudio debe mostrar bases para creer que los resultados o categorías fueron obtenidas vía el análisis de los datos desde diversos ángulos. Por ejemplo, el trabajo escrito de un estudiante se puede analizar con los resultados de alguna entrevista.

b) **Transferencia.** Este criterio se refiere a la aplicabilidad del estudio en otros contextos o lugares. Una forma de alcanzar este criterio es proveyendo una descripción comprensiva del estudio. Esta descripción puede guiar a otros investigadores a diseñar estudios similares y contrastar los posibles resultados. Así, si el estudio estuviese relacionado con identificar las estrategias usadas por los estudiantes de Álgebra al resolver ciertos tipos de problemas, el investigador debe presentar no sólo los resultados del estudio sino también la forma en que recabó y analizó la información.

c) **Dependencia.** La naturaleza de los datos y los procedimientos empleados en el estudio determinan la dependencia del mismo. Aquí los estudios similares desempeñan un papel importante en la selección de los instrumentos y sus usos. El papel de un estudio piloto es también importante para valorar el potencial de los instrumentos a utilizar.

Confirmación. Cualquier persona en el campo de la Educación Matemática con cierta familiaridad en el área de estudio debe estar de acuerdo con la naturaleza de los resultados. Si algún desacuerdo mayor surgiera, entonces el investigador debe clarificar y proveer suficientes bases para soportar tal resultado. (p. 66-67)

6.3 ENTREVISTA

Las principales características personales, que como investigador pude manejar en las entrevistas, son los mismos que en otros aspectos de la investigación; y giran siempre en torno a la confianza, la curiosidad y la naturalidad. Por ejemplo la confianza se manifiesta del siguiente modo: para los docentes se espera que el entrevistador fuera capaz de apreciar las dificultades con que los docentes se encuentran en su trabajo, para los estudiantes se espera del investigador: una recepción simpática, conciente, bien informado y que no cayera fácilmente en ninguna de las distorsiones sobre la verdad. La curiosidad como un deseo de saber, de conocer las opiniones y percepciones que los estudiantes y docentes tienen respecto a la resolución de problemas en matemáticas en el contexto de la Educación Matemática. Tal como en la observación el atributo de la naturalidad implica en procurar no interferir a fin de recoger testimonio de los acontecimientos tal como son, no afectados por la presencia ni las acciones de mi persona como observador y/o entrevistador. “Ser natural” o “ser espontáneo” significa que no se adopto ninguna postura especial en calidad de “investigador”, lo que hice fue relacionarme con las gentes sobre la base del vínculo de persona a persona.

Al respecto, según Woods (1988): la entrevista implica un proceso libre, abierto democrático, bidireccional e informal, y en el que los individuos pueden manifestarse tal como son, sin sentirse atados a papeles predeterminados.

Algunas técnicas utilizadas en las entrevistas son las siguientes:

- Iniciar amablemente y no formular preguntas íntimas ni intimidantes
- Es preciso enfatizar con el entrevistado, lo que significa hablar su lenguaje, valorar sus argumentos y aparentar ponerse de su lado.
- El entrevistado también necesitará cierta orientación acerca de qué hablar. Por tanto se debe tener a mano una "guía" o instrumento, que permita asegurar la inclusión de todos los aspectos que se relacionan tanto con el marco de la entrevista como con su contenido.
- Apoyar al entrevistado una vez iniciada la entrevista, tanto sobre el interés de la precisión y de la integridad. (p.82)

Para el registro de las entrevistas, me fue conveniente utilizar instrumentos mecánicos tales como un grabador, pero con la condición de que no provoque "interferencia". Sin embargo, consideré necesario utilizar recursos memotécnicos y taquigráficos personales, porque a veces los medios mecánicos no funcionan o no se los puede usar. Además existen informaciones claves que se producen cuando el grabador está apagado. Al investigar registre impresiones de la disposición del entrevistado, la actividad de éste respecto de la investigación La validez de los relatos, está motivada por las siguientes preguntas:

"¿Cómo sabemos que el informante dice la verdad?
¿Acaso este tipo de material no es impresionista, subjetivo, tendencioso o puramente personal?" (Dean y White, 1969).

Para responder a tal pregunta, me propuse indagar los pensamientos e ideas de los individuos y las considerables fatigas que implica, y tratar de asegurar que es precisamente esto lo que debemos llegar a representar. Podemos hacernos una

cierta idea de la confiabilidad del informante y podemos conocer algo de la estructura mental. Sin embargo por encima de todo, no nos conformamos con una versión, sino que procuraremos mantener otros encuentros con la misma persona para obtener una muestra completa de sus opiniones acerca de una cantidad de situaciones y en momentos diferentes, y también trataremos de reunirnos con otras personas, gracias a la cuál estaremos en condiciones de cotejar unas con otras distintas versiones. Con todo, los medios más importantes de confirmación de informes y de observación, reside en la "triangulación", que nos referimos posteriormente. En investigación en ciencias sociales, la utilización de tres métodos diferentes o más para explotar un problema aumenta enormemente las posibilidades de exactitud. A través de la "investigación interactiva" mediante la entrevista se trata de penetrar las experiencias de los demás, de empalizar con los demás, de volverse como ellos. Podríamos decir que las entrevistas son el instrumento más poderoso de la investigación cuando se las utiliza en conjunción con otros métodos, sobre todo con la observación. Consecuentemente, todas las características descritas anteriormente sobre la entrevista, favorecen su aplicación al siguiente trabajo de investigación.

6.4 MATERIALES ESCRITOS

La utilización ponderada de materiales escritos o impresos constituyó un apoyo útil a las observaciones de clase que realicé. Los consideré como instrumentos cuasi – observacionales, que reemplazaron mi presencia en los sitios o momentos en que para mi fue difícil o imposible estar presente en persona, y como parte del abanico de posibles métodos a emplear, como una consecuencia o como un precursor de otros, los materiales que más ampliamente se utilizaron son:

(i) **Los documentos oficiales:** Incluyen registros, horarios, planificaciones, planes y programas, notas de lecciones, manuales o tablas escolares, archivos y estadísticas, textos, libros de ejercicios, documentos de exámenes, trabajo en la pizarra,. Pocos estudios cualitativos podrían dejar de tomar en cuenta al menos algunos de estos documentos.

(ii) **Documentos personales:** Entre éstos se encuentran, el cuaderno "borrador" de los alumnos, y notas personales.

(iii) **Cuestionarios:** No son populares en la investigación cualitativa. Hay quienes excluyen totalmente su uso con la excusa de que pertenece a un estilo de investigación cuyos supuestos básicos son diametralmente opuestos a la investigación cualitativa. Uno de éstos es la creencia de que los hechos sociales pueden medirse de la misma manera que los hechos naturales, de donde el empleo de medidas objetivas y cuantificables tales como cuestionarios, escala de actitud y tests estadísticos de distribución, correlación y significación. Razón por la cuál no se utilizaron cuestionarios.

6.5 ANALISIS

En investigación cualitativa el análisis, algunas veces, se da simultáneamente con la recogida de datos. Cuando se observa, se entrevista, se toman notas de campo y se confecciona el diario de investigación, el trabajo del investigador no se limita a "registrar", también existe en ello reflexión. Teniendo esto en cuenta consideremos la siguiente secuencia creciente de los aspectos del análisis que más parecen destacarse en investigación cualitativa:

1) Análisis especulativo;
2) Clasificación y categorización;
3) Formación de conceptos
4) Modelos;
5) Tipologías; y
6) Teoría

No todos los trabajos de investigación pasan por estos momentos; pueden detenerse en cualquiera después del primero, según los recursos, el tiempo, la índole del estudio y los datos.

En el proyecto se realizo un **análisis especulativo,** es tal vez la reflexión tentativa, que tiene lugar a partir de la recogida de datos, lo que produce las aprehensiones más importantes. Contribuye a conectar la discusión con el análisis principal. La reflexión inicial y conveniente es más típicamente especulativa y menos bien formada.

Mediante la **clasificación y categorización**, llega un momento en que la masa de datos incorporada a las notas de campo, transcripciones, documentos, han sido ordenadas con cierta sistematicidad. En un nivel elemental, esto se aplica simplemente a los datos propios. En esta etapa, no se nota de manera implícita que haya formación de conceptos, importación y descubrimiento de teorías, creación de nuevos pensamientos. Mas bien el propósito es dar al material una forma que conduzca a tales fines, y esto significa ordenar los datos de una manera coherente, completa, lógica y sucinta.

La **formación de conceptos**; es otro aspecto del análisis cualitativo, que a veces adoptan la forma de "**símbolos culturales (normalmente codificados en términos nativos)**" (Spradley, 1979) que se descubren en el trabajo de campo y se decodifican en el análisis. A veces los formula el investigador allí donde diversos fragmentos de datos o de problemas parecen presentar ciertas propiedades estructurales en común, pero que jamás son realmente expresadas como tales.

Un **modelo** es una réplica de alguna cosa, que aunque en menor escala, se mantiene fiel a las proporciones, a las partes constitutivas y sus interconexiones y a las funciones de los que representa. Por tanto la utilidad de los modelos en los análisis cualitativos no debiera presentar ninguna duda: su finalidad es representar en una escala reducida los componentes esenciales de procesos muy complicados, susceptibles de una rápida captación por nuestros limitados intelectos. Tenemos que producirlos con base en nuestros datos. A veces los vínculos entre las partes son evidentes, pero a veces están muy ocultos. Es inevitable que los modelos físicos no

sean perfectos, y los de la vida social, con todas sus complicaciones, incoherencias, contradicciones, aún lo son menos.

Semejante a la de los “modelos” es la función de las **tipologías,** y en verdad a menudo ambos términos se usan de modo intercambiable. Pueden mejorar nuestra visión y modelar nuestro foco al reunir una masa de detalles en una sola estructura organizada cuyos tipos más importantes están explícitamente indicados. Pueden darnos una idea del alcance de estos tipos. Apuntan a relaciones e interconexiones y proporcionan una base de comparación y de construcción teórica.

El propósito primordial de las tipologías en el esfuerzo investigativo considerado en su totalidad es el de contribuir a explicar por qué las cosas son como son u ocurren como ocurren, o en otras palabras contribuir a proporcionar la **construcción teórica**. Por lo tanto el último objetivo es la **teoría** que será tratada a continuación.

6.6 TEORÍA

El énfasis principal se ha puesto en el descubrimiento antes que en la comprobación de teorías, pero esto no excluye que el análisis sea guiado tanto por la recogida de datos como oriente dicha recogida. Las categorías y sus propiedades se anotan y se “saturan”.

Los conceptos surgen del campo, son controlados y recontrolados a la luz de datos ulteriores, se los compara con otro material, se los refuerza o tal vez se los formula nuevamente de otra manera.

En el proceso de investigación se constituyen modelos de sistemas y poco a poco va tomando cuerpo una teoría, con sus características distintivas de explicación y de predicción que vinculan los conceptos revelados para formar un todo integrado; cuya operatividad ya se ha demostrado. Posteriormente la conversión de esta teoría se concreta en teoría “formal”, planteará el problema del nivel de abstracción a medida que se comparen y examinen estudios casuísticos de otras áreas concretas en busca de elementos comunes.

Sin embargo, aún cuando la teoría pudiera estar bien “fundada” en los datos, no “emerge” ni “cobra existencia” simplemente, ni es tampoco **revelada** de inmediato. Por detalladas y perspicaces que sean las observaciones en una etapa determinada ha de haber un “salto de la imaginación” (Ford, 1975), cuando el investigador conceptualiza a partir de las meras notas de campo. Esto, lo mismo que las etapas posteriores de teorización, exige ciertas actitudes y cualidades de creatividad.

Las **posibilidades teóricas**, a partir de la recogida de datos conduce a la reformulación de una teoría particular tal vez de un modo aproximativo, posteriormente la investigación arroja nueva luz y quizás inspire un modelo o una tipología en áreas previamente no bien cubiertas; esto podría desembocar en la modificación de la teoría.

La **producción de la teoría** consiste básicamente en comparar los propios datos, y la propia experiencia, con una teoría relativa a ellos y tratar de comparar cuáles la sostienen, y cuales se oponen a ella.

El **desarrollo de las teorías** es a partir de los datos, y con la ayuda de la formación de conceptos, modelos y tipologías. Sin embargo, existen estadios cualitativos suficientes en el campo de la educación como para hacernos pensar en términos de estadios de mayor orientación teórica desde el primer momento.

Otro tipo de estudio es el que consiste en trabajar a partir de alguna **teoría bien formulada ya existente,** quizá originada de otro campo. Esta teoría podría ayudarnos a comprender nuestra preocupación particular por la educación hasta un cierto punto y sólo hasta allí, de manera que debemos refinar o desarrollar la teoría.

Como parte integrante de una metodología se debe otorgar tanta atención al cultivo de los estados mentales que conducen a la producción teórica como a la recogida de datos. Los primeros requieren liberación, creatividad e imaginación; la segunda

disciplina, control, y método. En cierto sentido, tienden a oponerse, y si cargamos el énfasis en uno de estos factores, el otro sufrirá indefectiblemente.

6.7 REDACCIÓN

En mi opinión, “Redactar” el presente trabajo de investigación fue una actividad académica disciplinada, y para emprenderla era necesario una cierta preparación.

La **planificación** de la redacción consistió en la búsqueda de nuevas formulaciones y, casi por definición, no puede planificarse por anticipado, pues el proceso creativo continúa con la redacción misma. Los planes para el producto final suelen comenzar a tomar forma durante los primeros análisis, podemos considerar cuatro etapas principales de planificación:

1. Un esquema especulativo preliminar, en parte sistemático, en parte azaroso.
2. Un plan de trabajo provisional
3. Un plan reelaborado en estadio de primer borrador, que puede ser repetido en borradores posteriores, y
4. Un plan final, que establezca un orden.

Después del proceso de las tres primeras etapas, en el plan final se aplican las pruebas más severas, dando respuesta a preguntas tales como: ¿Qué falta aquí? ¿Qué falla en este argumento? ¿Qué hace falta para fortalecerlo? ¿De qué otra manera se podría interpretar este material? ¿Cómo se podría criticar esto? ¿Cuántos prejuicios me estoy dejando pasar? ¿Qué quiero decir en verdad con esto?

6.8 TRIANGULACIÓN

El contraste plural de fuentes, métodos, informaciones, recursos. Su objetivo es provocar el intercambio de pareceres o la contrastación de registros o informaciones. Comparar las diferentes perspectivas de los diversos agentes con las que se

interpretan los acontecimientos del aula es un procedimiento indispensable, tanto para clarificar las distorsiones y sesgos subjetivos que necesariamente se producen en la representación individual o grupal de la vida cotidiana del aula, como para comprender el origen y proceso de formación de tales representaciones subjetivas, ofreciendo la posibilidad a los/as alumnos/as, docentes y mi persona como investigador, de realizar propias concepciones, admitir la posibilidad de interpretaciones distintas e incluso extrañas, enriquecer y ampliar el ámbito de la representación subjetiva y construir más críticamente el pensamiento y la acción.

Conclusión final: La cuestión de la conjunción entre riqueza de datos, rigor del análisis y elevación de ideas con la disciplina férrea de la escritura constituye una de las áreas problemáticas de la investigación cualitativa. Y aunque esto es así para toda clase de investigación, su dificultad es mayor aún en el caso del enfoque cualitativo, debido a:

1. El énfasis que se pone en el investigador como instrumento fundamental de la investigación, lo que contribuye a que esos problemas parezcan más personales de los que son en realidad;
2. La naturaleza de la investigación como proceso: un dialogo abierto y continuado entre la recogida de datos y teoría, en que la búsqueda de ideas conspira contra toda conclusión anticipada; y
3. La necesidad, a la vista de esto, de considerar el proceso de “escritura” como un instrumento importante de la producción de ideas, y no sólo de su comunicación.

NOTAS DE CAMPO

OBSERVACIÓN:

DOCENTE – ESTUDIANTE

CURSO PRFECULTATIVO

FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES

UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRES

OBSERVACION DOCENTE – ESTUDIANTE (Parte 1)

INSTITUCION EDUCATIVA UMSA **GRADO** PREFACULTATIVO **HORAS DE OBSERVACION** 90 mín. **REGISTRO Nº** 1
FACULTAD FCPN **PARALELO** H **OBSERVADOR** LUIS TODOYA L. **FECHA** 21 – 10 - 03

CONTENIDO (Dimensión, Cantidad, Incertidumbre, Forma y Cambio) EXPOSICION DE EJEMPLOS TIPOS, EN EL CONSTEXTO DE LA RESOLUCION DE PROBLEMAS	**T**	**ACTIVIDAD (Métodos, Estrategias, Técnicas…)** RESOLUCION DE PROBLEMAS POR LOS ESTUDIANTES	**TIPO DE APRENDIZAJE** - Memorización - Algorítmico - De conceptos - Resolución de Problemas	**COMPORTAMIENTO EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS DOCENTE**
• **Radicación** - Def. $\sqrt[a]{n} = b \Leftrightarrow a = b^n, n \in N$ - Da explicación y aclaración de los elementos de la definición. - Describe algunos ejemplos - Raíz de índice par e impar - $\sqrt[2n+1]{numeroreal} = cantidadreal$	12:30 13:00	• Registran en sus cuadernos, las notas que explica el profesor. • Imitan la actividad del docente, en función de la exposición y explicación	• Mecánico • Algorítmico • De concepto	• Plantea y resuelve en pizarra, los siguientes ejemplos: a) $\sqrt{4} = 2$ para $4 = 2^2$ b) $\sqrt[3]{-1} = -1$ pues $-1 = (-1)^3$
• **Racionales** - $m, n \in N \Rightarrow a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ - Describe y explica propiedades de la anterior relación	13:00 13:30	• Registran en sus cuadernos, las notas que explica el profesor. • Imitan la actividad del docente, en función de la exposición y explicación	• Algorítmico • De concepto	• Plantea y resuelve en pizarra, los siguientes ejemplos: a) $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$ b) $2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$ c) $\sqrt[3]{a^4x^3y^6}$, el profesor resuelve
• **Radicales homogéneos** (que tienen el mismo índice) • **No homogéneos** • **Radicales semejantes** • **Operaciones con radicales**	13:30 14:00	• Registran en sus cuadernos, las notas que explica el profesor. • Imitan la actividad del docente, en función de la exposición y explicación	• Mecánico • Algorítmico • De concepto	• Plantea y resuelve en pizarra, los siguientes ejemplos: a) $\sqrt[5]{3x}, \sqrt[5]{x}, \sqrt[5]{x+y}$ b) $\sqrt{2x}, \sqrt[3]{2x}, \sqrt[4]{x-y}$ • Plantea y resuelve ejemplos sobre operaciones con radicales.

OBSERVACION DOCENTE – ESTUDIANTE (Parte 2)

INSTITUCION EDUCATIVA UMSA **GRADO** PREFACULTATIVO **HORAS DE OBSERVACION** 90 mín. **REGISTRO Nº** 1
FACULTAD FCPN **PARALELO** H **OBSERVADOR** LUIS TODOYA L. **FECHA** 21 – 10 - 03

COMPORTAMIENTO (Atención, concentración, observación, toma de notas) EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS ESTUDIANTE			**RELACION O DEPENDENCIA:** DOCENTE ESTUDIANTE HEURISTICA	COMENTARIO ADICIONAL DE LO QUE SE OBSERVA INMEDIATAMENTE DESPUES DE HABERLAS ESCRITO
1	**2**	**3**		
Conversa con su compañera, y la estudiante se nota distraída	Estudiante distraído, murmura: *"que se calle el profesor".* Mira a otros compañeros y se distrae.	Alumno de la primera fila, registra las notas con atención.	• Se dirige a los estudiante de las últimas filas del aula: *"Silencio por favor jóvenes"* • Pregunta el profesor: "*¿Hay algunas preguntas?*, los alumnos no responden. • Expresa el término *cantidad*, y a continuación solo escribe un **número** • El docente se molesta o se inquieta por los ruidos que provocan los estudiantes de las últimas filas	El docente identifica a un estudiante que esta distraído y hace ruido
Le toma la mano a la alumna, y se nota mayor distracción en ambos estudiantes	Estudiante distraído, murmura: *"Cuanto falta para la conclusión de la clase".*	Registra las notas de la pizarra con atención	• El docente pregunta: *Cuál es la respuesta a* $\sqrt[0]{a} = ?$. El docente responde que no existe una respuesta. Luego los alumnos se ríen … • El profesor se dirige a los alumnos: "*¿No hay algunas preguntas?* los alumnos no responden.	Los alumnos piden sus calificaciones al docente. Un alumno responde *¡no!* (es un estudiante de las últimas filas) El docente pregunta sobre un ejercicio matemático, y el mismo se responde. Reitera si hay alguna pregunta, los alumnos no responden
Continúan distraídos	Se le nota muy distraído y ansioso por abandonar la clase.	Registra las notas de la pizarra con atención	• Los alumnos piden calificaciones del examen anterior.	

OBSERVACION DOCENTE – ESTUDIANTE (Parte 1)

INSTITUCION EDUCATIVA UMSA **GRADO** PREFACULTATIVO **HORAS DE OBSERVACION** 90 mín. **REGISTRO Nº** 2
FACULTAD FCPN **PARALELO** H **OBSERVADOR** LUIS TODOYA L. **FECHA** 28 – 10 - 03

CONTENIDO (Dimensión, Cantidad, Incertidumbre, Forma y Cambio) EXPOSICION DE EJEMPLOS TIPOS, EN EL CONSTEXTO DE LA RESOLUCION DE PROBLEMAS	**T**	**ACTIVIDAD (Métodos, Estrategias, Técnicas…)** RESOLUCION DE PROBLEMAS POR LOS ESTUDIANTES	**TIPO DE APRENDIZAJE** - Memorización - Algorítmico - De conceptos - Resolución de Problemas	**COMPORTAMIENTO EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS DOCENTE**
• **Identidad de Legendre** • **Identidad de Lagrange** • **Identidad de Argand** • **Problema Nº 1 :** Simplificar la fracción $\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^4-\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^4}$ Para la solución aplicando C. V.	12:30 13:00	• Registran en sus cuadernos, las notas que explica el profesor. • Imitan la actividad del docente, en función de la exposición y explicación	• Mecánico • Algorítmico	• Copia las identidades • El profesor resuelve el problema Nº 1 planteado. Aplicando las identidades y haciendo cambio de variable
• **Problema Nº 2:** Demostrar: Si $x+y+z=0$, entonces $x^3+y^3+z^3=3xyz$	13:00 13:30	• Registran en sus cuadernos, las notas que explica el profesor. • Imitan la actividad del docente, en función de la exposición y explicación.	• Algorítmico • Mecánico	• El profesor resuelve el problema Nº 2 • *"Hemos demostrado como queríamos"*
• **Problema Nº 3** relacionado con el problema Nº 2 Factorizar: $(a-b)^3+(b-c)^3-(a-c)^3$ • **Problema Nº 4** • **Problema Nº 5 (similar al problema 2)**	13:30 14:00	• Registran en sus cuadernos, las notas que explica el profesor. • Imitan la actividad del docente, en función de la exposición y explicación.	• Mecánico • Algorítmico	• Resuelve el problema Nº 3 de manera análoga al ejemplo anterior. • Resuelve el problema Nº 4 • Se equivoca y luego reflexiona • En la solución hace cálculos simplificados

OBSERVACION DOCENTE – ESTUDIANTE (Parte 2)

INSTITUCION EDUCATIVA UMSA **GRADO** PREFACULTATIVO **HORAS DE OBSERVACION** 90 mín. **REGISTRO Nº** 2
FACULTAD FCPN **PARALELO** H **OBSERVADOR** LUIS TODOYA L. **FECHA** 21 – 10 - 03

COMPORTAMIENTO (Atención, concentración, observación, toma de notas) EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS ESTUDIANTE			**RELACION O DEPENDENCIA:** DOCENTE ESTUDIANTE HEURISTICA	COMENTARIO ADICIONAL DE LO QUE SE OBSERVA INMEDIATAMENTE DESPUES DE HABERLAS ESCRITO
1	**2**	**3**		
Registran notas en sus cuadernos de apuntes. Murmulla con sus compañeros	Murmulla con sus compañeros.	Registran notas en sus cuadernos de apuntes.	• Algunos estudiantes hacen callar a los que hacen bulla. • Algunos estudiantes de las últimas filas no alcanzan a registrar las notas de la pizarra. • El profesor pregunta: - *"Si hay errores lo corregimos"* - *"¿Alguna duda?".* Los alumnos no responden. • El profesor no pregunta, pero algunos alumnos participan	• No se nota el uso de libro guía respecto a los problemas planteados, sin embargo existe una bibliografía. • Se nota que el espacio es insuficiente en el aula para los estudiantes, 70 aproximadamente.
En silencio (baja voz) participa Murmura Copia Dice: *"un ratito, estamos copiando"* Quiere copiar	Estudiante murmura: *"Hay que hacer un cambio de variable nuevamente?".* Registra en sus apuntes la resolución del problema, que el docente desarrolla.	Murmulla con sus compañeros. Continua distraído	• El profesor se dirige a los alumnos: *Copien …* *Copien jóvenes …*	
Copia Murmuro Copia Ríe No se da cuenta	Dice *"un ratito"* Quiere copiar ¡muy rápido avanza! ¡que dicte otro docente! Pregunta : *"Hasta donde es el examen"*	Registra las notas de la pizarra con atención	• Llega un alumno atrasado, todos se distraen • El profesor pregunta respecto al problema Nº 3: *"¿Alguna pregunta?",* los alumnos no responden, pero algunos murmuran. • Al resolver el problema Nº 4 el profesor dice: *"Es parecido al problema 2"* • El profesor al reflexionar que se equivoca en la resolución del problema N 4 dice: *"¿Puedo equivocarme no?* Los alumnos se ríen • Rectifica dice:*"¿Esta bien no?"*	• Los estudiantes demoran un poco para identificar el error cometido por el docente • Casi al finalizar la clase el profesor dice: *¡pero yo voy a resolver un problema más¡* Un alumno de la última fila murmura: *No sea modesto*

OBSERVACION DOCENTE – ESTUDIANTE (Parte 1)

INSTITUCION EDUCATIVA UMSA **GRADO** PREFACULTATIVO **HORAS DE OBSERVACION** 90 mín. **REGISTRO Nº** 3
FACULTAD FCPN **PARALELO** H **OBSERVADOR** LUIS TODOYA L. **FECHA** 04 – 11 – 03

CONTENIDO (Dimensión, Cantidad, Incertidumbre, Forma y Cambio) EXPOSICION DE EJEMPLOS TIPOS, EN EL CONSTEXTO DE LA RESOLUCION DE PROBLEMAS	**T**	**ACTIVIDAD (Métodos, Estrategias, Técnicas…)** RESOLUCION DE PROBLEMAS POR LOS ESTUDIANTES	**TIPO DE APRENDIZAJE** - Memorización - Algorítmico - De conceptos - Resolución de Problemas	**COMPORTAMIENTO EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS DOCENTE**
• **Función** • **Ejemplo :** graficar $f(x)=[x]+x$, en $]-2,3[$ • **Grafica** $f(x)=[x]$ • **Grafica** $f(x)=[x]+x$	12:00 12:45	• Registran en sus cuadernos, las notas que explica el profesor. • Imitan la actividad del docente, en función de la exposición y explicación.	• Mecánico • Algorítmico • Operatorio	• Recuerda a los estudiantes la definición de parte entera, y representa la gráfica • Resuelve el ejemplo • Traza el gráfico mediante tabla de valores
• **Ejemplo:** Graficar: $g(x)=[2x]$, en $[-2,3[$ $[2x]=n$, si: $n \le 2x < n+1$ $\frac{n}{2} \le x < \frac{n+1}{2}$	12:45 13:10	• Toman registros de notas en sus cuadernos, • Imitan la actividad del docente, en función de la resolución del ejemplo.	• Mecánico • Algorítmico • De concepto	• Resuelve el ejemplo como problema planteado. • Realiza operaciones algebraicas para aplicar la función parte entera
• **Métodos, técnicas y reglas para graficar funciones** • **Simetrías** • **Asíntotas** - Horizontales - Verticales • **Ejemplo:** graficar la función de dos variables. $f(x,y)=\|x\|-\|y\|-1$ Aplica las reglas de intersección con los ejes. $f(x,y)=\|x\|-\|y\|-1=0$	13:10 13:30	• Atienden la explicación y registran notas en sus cuadernos. • Imitan la actividad de representación grafica, que el docente realiza en pizarra.	• Mecánico • Algorítmico • Operatorio • Concepto	• Explica lo que es asíntota • Explica sobre simetrías • Resuelve el ejemplo como problema planteado. • Realiza las operaciones con valor absoluto para diferentes casos y representa las intersecciones en los ejes.

OBSERVACION DOCENTE – ESTUDIANTE (Parte 2)

INSTITUCION EDUCATIVA UMSA **GRADO** PREFACULTATIVO **HORAS DE OBSERVACION** 90 mín. **REGISTRO Nº** 3
FACULTAD FCPN **PARALELO** H **OBSERVADOR** LUIS TODOYA L. **FECHA** 04 – 11 - 03

COMPORTAMIENTO (Atención, concentración, observación, toma de notas) EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS ESTUDIANTE			RELACION O DEPENDENCIA: DOCENTE ESTUDIANTE HEURISTICA	COMENTARIO ADICIONAL DE LO QUE SE OBSERVA INMEDIATAMENTE DESPUES DE HABERLAS ESCRITO
1	**2**	**3**		
Registran notas en sus cuadernos de apuntes	Murmulla con sus compañeros.	Copian	• Un alumno pregunta y el profesor le responde • El profesor pregunta: *"¿algo no se ha entendido?"* • Los alumnos no responden • El profesor dice: *"¿alguna pregunta?"* • Un alumno y una alumna formulan preguntas.	Utiliza el término de continuidad y discontinuidad para explicar la representación grafica de la función.
En silencio (baja voz) participa Murmura Copia Dice: *"un ratito"* Quieren copiar	Estudiante murmura: *"Hay que hacer un cambio de variable nuevamente?".*	Murmulla con sus compañeros.	• El profesor resuelve el problema, haciéndose preguntas que el mismo se responde.	El segundo ejemplo es algo parecido, y el profesor sigue los mismos pasos para desarrollar el ejemplo.
Copia Murmuro Copia Ríe No se da cuenta	Se le nota muy distraído y ansioso por abandonar la clase.	Registra las notas de la pizarra con atención	• El profesor resuelve el problema planteado y los alumnos registran el desarrollo del problema	Los alumnos copian en forma pasiva.

OBSERVACION DOCENTE – ESTUDIANTE (Parte 1)

INSTITUCION EDUCATIVA UMSA **GRADO** PREFACULTATIVO **HORAS DE OBSERVACION** 90 mín. **REGISTRO Nº** 4
FACULTAD FCPN **PARALELO** H **OBSERVADOR** LUIS TODOYA L. **FECHA** 11 – 11 - 03

CONTENIDO (Dimensión, Cantidad, Incertidumbre, Forma y Cambio) EXPOSICION DE EJEMPLOS TIPOS, EN EL CONSTEXTO DE LA RESOLUCION DE PROBLEMAS	**T**	**ACTIVIDAD (Métodos, Estrategias, Técnicas…)** RESOLUCION DE PROBLEMAS POR LOS ESTUDIANTES	**TIPO DE APRENDIZAJE** - Memorización - Algorítmico - De conceptos - Resolución de Problemas	**COMPORTAMIENTO EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS DOCENTE**
• **Función cuadrática** $f(x)=ax^2+bx+c$ • **Formas de la ecuación cuadrática, cuando:** $a=0$, $b=0$ y $c=0$ • **Dominio y Codominio de la función cuadrática**	12:10 12:35	• Registran en sus cuadernos, los métodos y técnicas que el profesor emplea en pizarra. • Imitan la actividad del docente, en función de la exposición y explicación	• Mecánico • Algorítmico • De concepto	• Explica la función cuadrática, describiendo los casos en función de los coeficientes. • Explica y describe sobre dominio y codominio.
• **Ejemplo 1** Graficar: $f(x)=x^2$ • **Ejemplo 2** Graficar: $f(x)=2x^2$	12:35 12:50	• Registran en sus cuadernos, las notas que explica el profesor. • Imitan la actividad del docente, en función de la exposición y explicación	• Algorítmico • De concepto	• Grafica el ejemplo 1 mediante tabla de valores. • Seguidamente traza la grafica del segundo ejemplo mediante comparación del factor 2.
• **Graficar** $f(x)=ax^2+bx$ • **Ejemplo 3** Graficar: $y=x^2+x$ $y=x(x+1)$	12:50 13:15	• Registran en sus cuadernos, las notas que explica el profesor. • Imitan el método y técnica que el profesor desarrolla en pizarra.	• Mecánico • Algorítmico	• Resuelve el problema $y=x^2+x$ • Pregunta: *"¿Es par o impar?"* • Factoriza: $y=x(x+1)$ y luego representa la grafica mediante tablas. Utiliza el grafico par explicar las raíces de $x(x+1)=0$
• **Ejercicio :** graficar $y=x^2+4$ **y h**allar dominio y codominio	13:15 13:30	• Intentan resolver el ejercicio planteado.	• Mecánico • Algorítmico • De concepto	

OBSERVACION DOCENTE – ESTUDIANTE (Parte 2)

INSTITUCION EDUCATIVA UMSA **GRADO** PREFACULTATIVO **HORAS DE OBSERVACION** 90 mín. **REGISTRO Nº** 4
FACULTAD FCPN **PARALELO** H **OBSERVADOR** LUIS TODOYA L. **FECHA** 11 – 11 - 03

COMPORTAMIENTO (Atención, concentración, observación, toma de notas) EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS ESTUDIANTE	**RELACION O DEPENDENCIA:** DOCENTE ESTUDIANTE	COMENTARIO ADICIONAL DE LO QUE SE OBSERVA INMEDIATAMENTE DESPUES DE

1	2	3	HEURISTICA	HABERLAS ESCRITO
Registra notas en sus cuadernos de apuntes	Murmulla con sus compañeros.	Se nota cansado y aburrido	• Entrega de calificaciones de un parcial • El profesor dice *"¿esta claro no?* • Los estudiantes no responden	El profesor formula una pregunta instantánea y se responde inmediatamente.
Murmura Copia Dice: *"un ratito"* Quieren copiar	Toma apuntes en su cuaderno	Murmulla con sus compañeros.		
Registra las notas de la pizarra con atención	Se le nota muy distraído y ansioso por abandonar la clase.	Copia Ríe	• Halla las raíces: $x=0$, $x=-1$ de $x(x+1)=0$ • El profesor pregunta: *La función es par? o impar?*	Se fija hacia los estudiantes preguntando si es par o impar, algunos alumnos que se sientan adelante tratan de responder El profesor instruye y pregunta: *Vamos a recuperar una clase ¿Qué día no tienen clases?* Los alumnos responden: *El domingo* El profesor formula una pregunta… y los alumnos no responden. Agrega el profesor: *"Se han olvidado"* El docente conversa con los alumnos muy amigablemente
Trata de resolver	Consulta con sus compañeros	No se preocupa por resolver	• Los estudiantes están preocupados en resolver el ejercicio, por que el profesor estimula en aumentar la calificación por la resolución del ejercicio	

OBSERVACION DOCENTE – ESTUDIANTE (Parte 1)

INSTITUCION EDUCATIVA UMSA **GRADO** PREFACULTATIVO **HORAS DE OBSERVACION** 90 mín. **REGISTRO Nº** 5
FACULTAD FCPN **PARALELO** H **OBSERVADOR** LUIS TODOYA L. **FECHA** 21 – 10 - 03

CONTENIDO (Dimensión, Cantidad,	T	ACTIVIDAD (Métodos, Estrategias,	TIPO DE APRENDIZAJE	COMPORTAMIENTO EN LA

Incertidumbre, Forma y Cambio) EXPOSICION DE EJEMPLOS TIPOS, EN EL CONSTEXTO DE LA RESOLUCION DE PROBLEMAS		**Técnicas…)** RESOLUCION DE PROBLEMAS POR LOS ESTUDIANTES	- Memorización - Algorítmico - De conceptos - Resolución de Problemas	**RESOLUCION DE PROBLEMAS DOCENTE**
• **Recta y Parábola** • **Graficas de funciones** • **Parábola** $f(x)=x^2$ $f(x)=f(-x)$ $\therefore$ función par • **Desplaza el valor absoluto** • **Ejemplo 1:** $f(x)=3x^4-2x^2+6$ • **Ejemplo 2:** $f(x)=x^3$ • **Ejercicio 1:** $f(x)=-\lvert x-3\rvert$	12:30 13:00	• Registran en sus cuadernos, las notas que explica el profesor. • Imitan el método y técnica que el profesor desarrolla en pizarra.	• Mecánico • Algorítmico • De concepto	• El resuelve el problema en la pizarra. • Representa puntos en el plano, y grafica el valor absoluto de algunos números, pero no recuerda o no define el valor absoluto. • Pregunta • *¿Cuál es el dominio?* • *¿Cual es el codominio?* • Da una explicación muy intuitiva, parece que no se da la definición. • Plantea un ejercicio para que los alumnos resuelvan
• **Operaciones con funciones** - **Suma y diferencia** $(f+g)_{(x)}=f_{(x)}+g_{(x)}$ - **Producto** $(fg)_{(x)}=f_{(x)}\ g_{(x)}$ $\left(\frac{f}{g}\right)_{(x)}=\frac{f_{(x)}}{g_{(x)}}\ ;\ g_{(x)}\neq 0$ - **Dominio** $D_{f+g}=D_f\cap D_g$		• Registran en sus cuadernos, las notas que explica el profesor.	• Mecánico • Algorítmico • De concepto	• Explica lo siguiente: $\frac{1}{1}=1\ ;\ \frac{3}{3}=1\ ;\ \frac{0}{0}$ no es 1 ! • Pregunta como es el dominio del cociente, luego el profesor se responde con un ejemplo • Cuando se da un polinomio es de hecho su dominio todo R ….. verdad • El profesor resuelve las operaciones $f+g\ ;\ f-g\ ; fg$…
• **Composición de funciones** Hallar el dominio de a) $(f\circ g)_{(x)}$ b) $(g\circ f)_{(x)}$ $f(x)=x^2-3x\ ;\ g(x)=\sqrt{x+2}$ • **Gráfica de funciones**		• Registran en sus cuadernos, las notas que explica el profesor. • Imitan la actividad del docente, en función de la exposición y explicación	• Mecánico • Algorítmico • De concepto	

OBSERVACION DOCENTE – ESTUDIANTE (Parte 2)

INSTITUCION EDUCATIVA UMSA **GRADO** PREFACULTATIVO **HORAS DE OBSERVACION** 90 mín. **REGISTRO Nº** 5
FACULTAD FCPN **PARALELO** H **OBSERVADOR** LUIS TODOYA L. **FECHA** 21 – 10 - 03

COMPORTAMIENTO (Atención, concentración, observación, toma de notas) EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS ESTUDIANTE	**RELACION O DEPENDENCIA:** DOCENTE ESTUDIANTE	COMENTARIO ADICIONAL DE LO QUE SE OBSERVA INMEDIATAMENTE DESPUES DE

1	2	3	HEURISTICA	HABERLAS ESCRITO
Conversa con su compañero (2) sobre otros temas. 8va fila (ultimas filas) Continua conversando Copia en su cuaderno y hablando con su compañero (2) de su lado. Lo que no observa del pizarrón copia del cuaderno de su compañero. Copia, conversa y ríe	Copia y trata de observar lo que esta escrito en el pizarrón. Trata de concentrarse pero el alumno (1), lo distrae.	Alumno de la primera fila, registra las notas con atención. Pasa su cuaderno al profesor con la solución del ejercicio que plantea el profesor	• No define o no recuerda sobre la definición de función par o impar. • Pregunta o se dirige a los alumnos que están cerca de él • Estudiantes que se sientan adelante pasan sus cuadernos al, los de atrás ignoran que pasa • El profesor no da espacio ni tiempo para recibir mas cuadernos (solo recibe a un alumno) • Un alumno pregunta sobre aclaración de dominio • El dicente explica con valores de que se puede dar un millón, dos millones de números grandes • El alumno asienta con la cabeza en forma afirmativa.	El docente escribe con letra pequeña, no se alcanza a observar el ejemplo 1 La voz del docente es débil Plantea un ejemplo de función y el mismo docente indica: *"Esta es una función par"* (el docente plantea y el mismo responde) Dice: *"¿Están de acuerdo no?"* En una parte del desarrollo el docente dice: *"Factorizamos el signo"* Deja por un momento de hablar Se dirige solo a los alumnos de la primera fila Grafica el valor absoluto indicando que la grafica no se extiende hacia abajo del eje X , esto indica que probablemente no ha definido el valor absoluto
				Cual es el dominio de F, todos los reales verdad (se responde el mismo)
Alumno distraído con la alumna 2 Alumno 1 y 2 son amigos especiales conversan mientras el profesor se toman mirando sus apuntes Se toman de la mano	La alumna pregunta a su compañero *¿Qué dijo el profe?* La alumna lee otro documento, no parece ser estudiante del Pre-Fac		• Profesor dice *"Les he dado una tarea no…?* • Profesor dice *"Saben como se grafica no…?* • Los alumnos responden : "*Mas o menos"* • *"Se les va a permitir usar calculadora para hallar los valores, cuidado que copien la grafica de la calculadora"* • El docente les dice: *"Les daré un problema par graficar y si no lo pueden hacer yo lo haré, no se preocupen"*	Primero pide $(f \circ g)_{(2)}$ luego borra el 2 y escribe $(f \circ g)_{(x)}$ No se oye la voz del profesor El docente dice: *"Su dominio… que valores son…?"* *Su dominio seria a derecha o a izquierda*, los alumnos responde afirmativamente Docente dice *"2+2=?"* los alumnos responden *4* Dice: *Así deben resolver el examen, no copiar … ¡no!* Un buen tiempo (2 min. o mas) el profesor mira sus apuntes y los alumnos suspiran Luego dice: *"Tan fácil es no…hallar el dominio?"* Docente dice: *"En ayudantía van a hacer muchos ejercicios"* y los alumnos dicen *"OH… ¡no!"* El docente se dirige a su alumnos: *"hay un libro bueno, me dijeron se llama Moskowski pero cuesta caro…"*

OBSERVACION DOCENTE – ESTUDIANTE (Parte 1)

INSTITUCION EDUCATIVA UMSA **GRADO** PREFACULTATIVO **HORAS DE OBSERVACION** 90 mín. **REGISTRO Nº** 6
FACULTAD FCPN **PARALELO** H **OBSERVADOR** LUIS TODOYA L. **FECHA** 21 – 10 - 03

CONTENIDO (Dimensión, Cantidad,	**T**	**ACTIVIDAD (Métodos, Estrategias,**	**TIPO DE APRENDIZAJE**	**COMPORTAMIENTO EN LA**

Incertidumbre, Forma y Cambio) EXPOSICION DE EJEMPLOS TIPOS, EN EL CONSTEXTO DE LA RESOLUCION DE PROBLEMAS		**Técnicas…)** RESOLUCION DE PROBLEMAS POR LOS ESTUDIANTES	- Memorización - Algorítmico - De conceptos - Resolución de Problemas	**RESOLUCION DE PROBLEMAS DOCENTE**
• **Ecuación de 2do grado** Define la ecuación de 2do grado $ax^2+bx+c=0$ • **Métodos de resolución** - Factorización - Aplicando la formula general • **Resolución** • **Teorema 1** $mn=0 \Leftrightarrow m=0 \vee n=0$ (teorema del factor cero) • **Teorema 2** Si $m,n \in Z$ $m^2=n \Rightarrow m=\pm\sqrt{n}$ • **Da un ejemplo:** Resolver: $x^2+11x=-24$	12:30 13:00	• Registran en sus cuadernos, las notas que explica el profesor. • Imitan la actividad del docente, en función de la exposición y explicación	• Mecánico • Algorítmico • De concepto	• Primero describe escribiendo el método utilizando diferentes marcadores de color. • Analiza la ecuación $ax^2+bx+c=0$ considerando los casos de a, b, c y luego resuelve el problema en la pizarra.
• **Resolver la siguiente ecuación** • **Otro método** Completando un cuadrado perfecto Describe el método *"Consiste en formar un trinomio cuadrado perfecto sumando y restando una **cantidad** distinta de cero"*		• Registran en sus cuadernos, las notas que explica el profesor. • Imitan la actividad del docente, en función de la exposición y explicación	• Mecánico • Algorítmico • De concepto	• Plantea un ejercicio para los estudiantes $3x^2+8x=-5$ • El profesor resuelve el ejercicio que plantea

OBSERVACION DOCENTE – ESTUDIANTE (Parte 2)

INSTITUCION EDUCATIVA UMSA **GRADO** PREFACULTATIVO **HORAS DE OBSERVACION** 90 mín. **REGISTRO Nº** 6
FACULTAD FCPN **PARALELO** H **OBSERVADOR** LUIS TODOYA L. **FECHA** 21 – 10 - 03

COMPORTAMIENTO (Atención, concentración, observación, toma de notas) EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS ESTUDIANTE	**RELACION O DEPENDENCIA:** DOCENTE ESTUDIANTE	COMENTARIO ADICIONAL DE LO QUE SE OBSERVA INMEDIATAMENTE DESPUES DE

1	2	3	HEURISTICA	HABERLAS ESCRITO
Alumno de la primera fila, registra las notas con atención. Copia	Demuestra atención en la exposición Registra lo desarrollado por el profesor en su cuaderno de apuntes	Alumno distraído, mirando atrás y el compañero de su lado también se distrae	• Profesor pregunta: "*Por que* $a \neq 0$ *? En la ecuación* • Luego explica que se convierte en ecuación lineal • Los alumnos responden a las preguntas del profesor • Pregunta: *¿Cuántos métodos de factorización existe?* • Los alumnos responden en grupo • El docente pregunta: *Para el ejemplo* $x^2+11x=-24$ *¿que método?* • *¿El aspa?* Los alumnos responden dudando. • Buena relación con los alumnos. • Profesor dice: *"Felizmente hemos encontrado la solución correcta…."* • Dibuja una caricatura al final de la respuesta (carita sonriente) • Profesor dice: "Alguna consulta …" "no hay consultas …"	Su voz se escucha en toda el aula. Su escritura es clara y ordenada Existe un buen ambiente de clases La exposición es clara y se mantiene con alta voz Debería recalcar más la parte del conectivo "$\vee$ " No hace ninguna reflexión sobre $x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ Pone mucho interés en usar sus marcadores de color
Alumno de las últimas filas responde	Los alumnos se sienten cansados, han trabajado horario continuo	Estudiante juega con su banco golpeándolo	• El profesor pregunta y los alumnos responde en grupo • El profesor hace un chiste y los alumnos comparten • Se dirige al teorema y dice: *"Esto es lo que estamos aplicando"* • El profesor pregunta: *"¿Están cansados?"* • Los alumnos responde *"Si"* • El profesor responde *"Pero si están sentados"*	El profesor pasea por el aula y dice : *"Que hacemos ahora?"*. Va a la pizarra a resolver el problema que plantea a los alumnos. Dice: *"Todo llevamos al primer miembro…"* Los estudiantes tienen calculadoras en sus bancos pero no las usan Un buen rato el profesor busca sus apuntes y los alumnos se distraen. A los números llama una cantidad …? Muy interesado en cambiar de color incluso para algunos símbolos El docente utiliza la palabra cantidad para significar los números o símbolos

7 ANÁLISIS DE RESULTADOS

Las Técnicas e instrumentos utilizados en el presente trabajo de investigación, se concentran esencialmente en: Observación no participante, es decir una observación desde el fondo del aula, con el objeto de no interferir directamente en los procesos del trabajo docente, ni en los procesos y actividades de aprendizaje de los estudiantes. Esta forma de observación es también debido a ciertas características particulares como: los ambientes o pabellones donde se desarrollan las clases, que por lo general son bastante amplios, la distribución fija de pupitres en forma de filas para 10 o 15 estudiantes, que por lo general concentran un promedio de 150 estudiantes. En el análisis, también se consideran las entrevistas realizadas tanto a estudiantes como a docentes y que posteriormente se muestran como una trascripción de un grabador electrónico, en lo posible, las grabaciones no provocaron interferencia en el proceso de la entrevista. Para apoyar al contraste en el análisis de resultados, se consideran además los materiales escritos por los estudiantes que se presentan en el anexo del presente trabajo de investigación.

7.1 CARACTERISTICAS DE LA OBSERVACION NO PARTICIPANTE

Con el objeto de determinar y analizar las características y unidades de análisis más identificables como consecuencia de una observación no participante, y que figuran en las **notas de campo**, nos referimos a los siguientes aspectos:

A. El docente escribe en la pizarra $\sqrt[2n+1]{número\ \ real} = cantidad\ \ real$, también se observa que expresa el término cantidad y a continuación, solo escribe un número. En este caso el mensaje no ayuda al alumno a lograr una mejor comprensión de las matemáticas. Según Hiebert y Carpenter (1992) para entender las matemáticas los alumnos necesitan formar representaciones internas, mentales de los conceptos matemáticos y necesitan formar conexiones entre estas representaciones internas y las representaciones

externas, tales como materiales concretos que incorporan los conceptos matemáticos abstractos. Asimismo los alumnos necesitan formar conexiones entre las representaciones y los símbolos usados para denotar los conceptos.

B. Se observa que el docente plantea en pizarra ejemplos como problemas, y luego con destreza y habilidad en el manejo de símbolos y representaciones resuelve el problema, trasmitiendo conocimientos a los estudiantes, mayormente en forma monóloga. En las notas de campo, por ejemplo, se registran mensajes tales como:

> *"¿Hay algunas preguntas?"* los alumnos no responden.
>
> *"¿Cuál es la respuesta a* $\sqrt[0]{a} = ?$
>
> El docente responde que no existe una respuesta, los alumnos se ríen.
>
> *"Demostrar: si* $x + y + z = 0$, *entonces* $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$*",* después de que el docente demuestra tal propiedad, él plantea otro ejemplo, indicando: factorizar $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (a-c)^3$, luego, nuevamente lo resuelve.
>
> El profesor pregunta: *"La función* $y = x^2 + x$ *¿es par o impar?"*

C. Se observa una "comunicación" del docente con los estudiantes, en las notas de campo se registran:

- Respecto a la función $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 6x$. *¿Cuál es el domino?, ¿Cuál es el codominio?* Algunos estudiantes responden *"los reales"*
- Respecto a la función $f(x) = x^2$ el profesor afirma: *"esta función es par" "¿Están de acuerdo no?"*
- Respecto al ejemplo de hallar el dominio de las funciones, $f(x) = x^2 - 3x$; $g(x) = \sqrt{x+2}$, el profesor se dirige a los alumnos refiriéndose a $g(x)$ y preguntando: *"¿Cuánto es 2+2 = ?"* los alumnos

responden 4, luego replica el docente: *"Así deben resolver el examen y no copiar"*

- El profesor dice: *"¿Tan fácil es no... hallar el dominio?" "En ayudantía van a hacer muchos ejercicios",* los alumnos responden *"OH... ¡no!"*

D. En las notas de campo se registran observaciones sobre el uso de calculadoras en la resolución de problemas.

- El profesor plantea en la pizarra el problema de graficar la siguiente función, $y = f(x) = x^2 - 3x$ y se dirige hacia los alumnos:

  - *"¿Saben cómo se grafica no...?"*

  algunos alumnos responden:

  - *más o menos*

  continúa el profesor...

  - *"Se les va a permitir usar calculadora para hallar los valores, cuidado que copien la gráfica de la calculadora"*

E. Por lo general se observa en las hojas de campo, que un "problema matemático" se reduce a: resolver ecuaciones, representar gráficas de ecuaciones, calcular valores numéricos, algunos problemas de aplicación, realizar operaciones algebraicas,... donde se nota además, que generalmente el docente plantea el "problema" y que él mismo lo resuelve.

"Problemas" por ejemplo del siguiente tipo:

- Graficar la siguiente función $y = f(x) = x^2 - 3x$
- "Demostrar": si $x + y + z = 0$, entonces $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$", y luego aplicar la anterior propiedad para factorizar: $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (a-c)^3$

El profesor plantea un problema sobre graficación de funciones para que los alumnos resuelvan. Luego se dirige a ellos...

- *"Les daré un problema para graficar, y si no lo pueden hacer, yo lo haré, no se preocupen"*

El caso de otro profesor, casi al finalizar la clase, después de que el docente con bastante habilidad en el manejo de los símbolos matemáticos resuelve varios "problemas", luego se dirige hacia los alumnos...

- *"Pero yo, voy a resolver un problemas más"*

un alumno de las filas de atrás del aula, en baja voz dice:

- *"No sea modesto"*

Se observa que hay una marcada preferencia en el docente por resolver él mismo los problemas que plantea en pizarra, y naturalmente, es motivo de reflexión la reacción del estudiante.

En general, como producto de la observación, hay una marcada preferencia por el trabajo monólogo de exposición en clases por parte del profesor, los contenidos y actividades desarrolladas en el trabajo docente, se concentran en un modelo tradicional característico, y en cuanto a las actividades y comportamiento de los estudiantes en el aula, se limitan a, registrar las notas que explica el profesor e imitan la actividad del docente en función de la exposición

7.2 NOTAS DE CAMPO SOBRE LA ENTREVISTA

Con el objetivo de describir los pensamientos de los individuos vinculados con los propósitos del presente trabajo de investigación, se realizaron entrevistas a

estudiantes (tres) como a docentes (dos) del Curso Prefacultativo de la Facultad de Ciencias Puras y Naturales. En realidad el entrevistado, de manera natural y con la confianza necesaria, pueda informar, emitir criterios, expresar opiniones y percepciones respecto a temas relacionados con Educación Matemática mediante la Resolución de Problemas. Para el registro de las entrevistas se ha utilizado como instrumento mecánico (un grabador) y una guía o instrumento en forma de preguntas que permita asegurar la inclusión de aspectos relacionados con los objetivos propuestos por el presente trabajo.

A continuación se describen paralelamente las preguntas formuladas a estudiantes y docentes, y las respuestas son analizadas a partir del grabador electrónico.

7.2.1 ENTREVISTA A ESTUDIANTES

ESTUDIANTE (A)

Pregunta

Cuando estás en clases de matemáticas, te encuentras desarrollando tu examen, o resolviendo los problemas de la práctica que te dan,... te plantean una serie de preguntas. Por ejemplo, resolver una ecuación, resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, demostrar una propiedad de los números, resolver un problema de construcción geométrica, o un problema, de aplicación... Casi en todas las sentencias anteriores está presente el término problema, en este sentido:
¿Qué significa para ti un problema matemático?

Respuesta

- Una oportunidad para poner en práctica mi razonamiento. Para resolverlo hay que aplicar todo lo que conocemos, no solamente con las reglas que nos han enseñado en ese momento, tiene que ver con todos nuestro conocimientos.

- Seria un pregunta a mis conocimientos, saber hasta donde llegan mis conocimientos y mi capacidad de razonamiento.

Pregunta

¿Qué significa para ti resolver un problema matemático?

Respuesta

- Alcanzar un nuevo conocimiento y estar un poco más preparado.
- Si no puedo resolver es por que tengo poco conocimiento y poco razonamiento. Resolver un problema es alcanzar a superarse un poco más.

Pregunta

¿Te interesa resolver problemas matemáticos? ¿Por qué si? o ¿Por qué no?

¿Cuándo resuelves un problema, ¿que cambios notas en tu persona? ¿y cuando no lo resuelves...?

Respuesta

- No me gusta resolver problemas que tengan simplemente números
- Me gusta resolver problemas de aplicación, de esos números: ecuaciones y sus aplicaciones, geometría analítica y sus aplicaciones, funciones y sus aplicaciones,
- Cuando resuelvo el problema siento satisfacción, y si no lo resuelvo busco el conocimiento o la manera de hacerlo.
- Cuando no resuelvo un problema, por ejemplo en un examen y el tiempo se esta cumpliendo, siento un poco de resignación.

Pregunta

¿Cómo describes la relación que existe entre la complejidad del problema mismo y los conocimientos matemáticos que tienes?

Respuesta

- La relación depende de la forma de resolverlo, en problemas geométricos se utiliza mas razonamiento, en los de álgebra es más mecánico.

- Para resolver problemas de demostración se necesita más teoría y teoremas. Conforme voy estudiando, me voy relacionando más a esta clase de problemas.
- Los problemas cuya resolución es mecánica, no me llaman la atención. En cambio los problemas que tienen que ver con demostrar, me parecen más interesantes.

Pregunta

¿Cuándo resuelves un problema observas algunos pasos o fases en la resolución del problema? Puedes mencionar, indicando cuáles son esos pasos?

Respuesta

- Observo que existen reglas o pasos bien generales: analizarlo, entender de lo que se trata, cuál es su objetivo y con qué se relaciona, luego plantearse posibles soluciones o posibles procedimientos para hacerlo. Primero hago una gráfica y luego planteo lo que puedo hacer.

Pregunta

¿Qué métodos o estrategias, modelos o categorías, etc., utilizas para resolver problemas matemáticos?

Respuesta

- Utilizo los más básicos que me enseñaron, de personas que no tengan dudas de su método. Tengo más confianza en los métodos que mi docente me ha enseñado, si este método es seguro, y no le ha fallado a él. Entonces yo confío en ese método y realizo mis procedimientos, reduciendo o extendiendo el método que me enseñaron.
- Si hay algún docente que esta resolviendo con dudas, sencillamente este método no lo pongo en práctica.

ESTUDIANTE (B)

Pregunta.

¿Que entiendes por problema matemático?

Respuesta

- Llegar a una solución o a más soluciones. Un problema se extiende. Depende del tipo de problemas. Por ejemplo, en el caso de un sistema de ecuaciones, siempre se llega a una incógnita que es un resultado y ese resultado va a otra, y así sucesivamente, para mí ese sería un problema matemático. Se necesita analizar mucho.

Pregunta.

Tenemos los siguientes problemas:

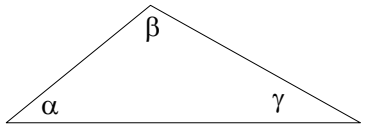
a) **Sean** a, b **dos números reales, la pregunta es: Demostrar la siguiente propiedad:**

$$ab = 0 \text{ si y solo si } a = 0 \text{ o } b = 0$$

b) **Resolver el siguiente sistema de ecuaciones**

$$x + y = 1$$
$$x - 2y = 3$$

c) **Demostrar que la suma de los ángulos de un triángulo es 180: Es decir, dada la gráfica, demostrar que** $\alpha + \beta + \gamma = 180$



d) **"Problema del terreno" supongamos que compras un terreno de forma rectangular, cuyo largo mide 20 m y el ancho mide 5 m, por cada metro cuadrado pagas Bs. 200 ¿Cuánto dinero necesitas para comprar dicho terreno?**

Desde tu punto de vista:

¿Cuáles de los anteriores problemas, tienen mayor dificultad para que puedas resolverlos?

Respuesta

- Los cuatro me parecen fáciles de resolver, solo hay que saber las condiciones que cada uno tiene. El b) es un sistema de ecuaciones y hay que resolver las dos incógnitas, yo que sepa hay seis formas de resolver, de las cuales la gráfica es la más accesible. Para hacer el gráfico no tengo muchos conocimientos, lo mismo opinan algunos de mis compañeros. El b) podría tener dificultad. El c) igualmente cumple condiciones, para la suma de los ángulos deberían saberse ciertas reglas como seno, coseno, tangente, todas estas reglas. Solamente tendríamos que analizar el ejercicio nada más. El d), sería más accesible porque entra matemáticas, pero no tan avanzado, o sea suma, resta, multiplicación...

Pregunta

De los cuatro problemas ¿Cuál te parece más simple o más complicado?

Respuesta

- El b) más simple y el c) más complicado

Pregunta

Respecto al a) ¿Qué métodos, técnicas o estrategias utilizarías para resolverlo?

Respuesta

Daría valores en este ejercicio, por ejemplo 0 x 1 = 0, ese podría ser un valor, da exacto. Entonces esto sería una demostración para mí.

Pregunta **Respecto al problema b) ¿Cuáles son los métodos o técnicas para resolver ese problema?**

Respuesta

Si conozco algunas reglas. Reducción, igualación, método gráfico y determinantes.

Pregunta

¿Qué define o representa la ecuación $x+y=1$, del sistema en el inciso b)?

Respuesta

Tendría que sumar dos números, y que me de igual a 1. Tendría que "despejar"... por ejemplo y, luego $y=-x+1$. Tendría que dar ahora un valor a *x*, puedo dar cualquier valor a *x* .

Pregunta

De los cuatro problemas ¿Qué tipo de problemas te gustaría resolver?

Respuesta

El c) es más atrayente para mí, no es tan conflictivo, solamente se necesita tener algunas funciones o condiciones.

Pregunta

Respecto al problema d) ¿Qué opinión te merece el problema del "terreno"?

Respuesta

Con la matemática se hace más fácil. Antes se tenía que medir o calcular, hacer infinidad de cosas para llegar a un resultado.

Pregunta

En el problema del terreno ¿Cuál es la diferencia entre 20 y 20 metros?

Respuesta

20 metros es un dato específico o sea en metros, es en un sistema de medida. En cambio 20, puede significar 20 Bs., 20 m, para mi 20 es

un dato no definido. Cuando me dicen 20 metros, interpreto como una distancia.

Pregunta

¿Qué idea tienes sobre el término dimensión?

Respuesta

Bien, bien, definido... no lo tendría. Dimensión significa un campo cerrado, o sea un lugar a parte de este lugar. Pondría un ejemplo de dos cajas, la primera es una dimensión, y la segunda es otra dimensión.

ESTUDIANTE (C)

Pregunta

¿Qué entiendes por problema matemático?

Respuesta

- Algo relacionado con números, que va acorde con ciertas situaciones. A partir de esos números llegar más o menos a otra idea ...

Pregunta

Supongamos los siguientes problemas:

a) Demostrar la siguiente propiedad de los números reales

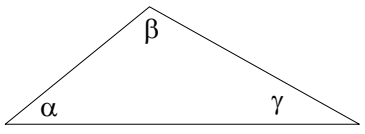
$$ab = 0 \text{ si y solo si } a = 0 \text{ o } b = 0$$

b) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$x + y = 1$$

$$x - 2y = 3$$

c) Demostrar que la suma de los ángulos de un triangulo es 180: Es decir, dada la grafica, demos que $\alpha + \beta + \gamma = 180$



d) Calcular la altura en metros del edificio del Monoblok de la UMSA, bajo ciertas condiciones.

e) Problema de ingresos o egresos de dinero.

Pregunta

¿Cuál de los siguientes problemas es de tu interés?

Respuesta

- Me interesan los problemas c), d) y e)
- Mi interés por el c) es que utilizamos: formas, triángulos, áreas, superficies ...
- Mi interés por el d), es que puedo construir una casa, tomando medidas, y el cinco se trata de un problema de economía.
- Me interesan los últimos tres, por que quizá me permiten hacer ciertas cosas en mi casa o poder trabajar o ser ingeniero.

Pregunta

Respecto al problema a) puedes argumentar algo más sobre tu interés?

Respuesta

- Son ejercicios simples. Otros también son complicados. No habría mucho problema.

Pregunta

¿Respecto al problema b)?

Respuesta

- A veces cuando tengo que demostrar ciertas cosas, tengo que razonar mucho y me cuesta razonar.
- Me gustaría demostrarlos y entenderlos.

Pregunta

En el Curso Prefacultativo, qué tipo de problemas predominan mas?

Respuesta

- Con mayor frecuencia se presentan del tipo a), y utilizando ecuaciones se pueden resolver problemas de los tipos d) y e).

Pregunta

Los problemas d) y e) podrían contener términos como 20 metros, 5 Bs. ¿Qué diferencias existen entre los términos 20 metros, 5 Bs. 5 y 20?

Respuesta

- 5 puede ser expresado en diferentes unidades o sistemas, como ser metros o Bs.
- 20 metros ya está definido, es lo que tenemos que calcular o medir.

Pregunta

Considerando los términos 20 metros o 5 Bs. ¿Qué significa para ti medida o cantidad?

Respuesta

- No responde lo que es medida

Pregunta

¿Tienes alguna idea de lo que significa dimensión?

Respuesta

- En física he visto unas ecuaciones dimensionales, se relaciona con longitudes, metros ...

Pregunta

Qué relación tiene la recta numérica, el plano cartesiano y el espacio, con el concepto de dimensión?

Respuesta

- La recta es una dimensión (solo se ve un lado)
- En el plano, se ven dos ejes y puedo determinar la posición de un punto con estos dos ejes en el plano, y en el espacio puedo determinar el objeto en sí, con sus tres dimensiones.

Pregunta

La siguiente pregunta está relacionada con la categoría *forma.* Tenemos varios ejemplos de formas; formas de cuerpos, formas geométricas, nosotros mismos representamos una forma, los bancos, los edificios, las casas,... , representan formas.

¿Qué interés tienen para estudiar estas representaciones de formas, mediante la matemática? ¿tienes alguna experiencia en resolución de problemas relacionado con la forma de los objetos?

Respuesta

- En cierto sentido he construido algunas formas con cartulina, representar un cilindro, un cono. También construir una casa. Todo esto lo hice en mi colegio, aquí en la universidad ya no hice ese tipo de construcciones.
- Me interesa resolver problemas que tienen que ver con las formas, para aprender algo más, y cómo construirlas.

Pregunta

Cuando resuelves problemas ¿identificas algunos métodos, estrategias, o fases o pasos?

Respuesta

- Primero investigo de qué se trata el ejercicio, veo si tengo el material necesario para resolverlo, cuando encuentro el material necesario, trato de resolver el problema, en cierta forma.

Pregunta

Supongamos el problema $ab = 0$ **si y solo si** $a = 0$ **o** $b = 0$**. ¿Tienes algunos métodos, procedimientos... para resolver el problema?**

Respuesta

- Un método lógico.
- Es la doble implicación, donde hay hipótesis y tesis, tendría que utilizar la forma lógica.

Pregunta

Supongamos en el caso del problema:

$$x + y = 1$$

$$x - 2y = 3$$

¿Qué métodos, estrategias, utilizas para resolver el problema?

Respuesta

- En esta situación hay ciertos métodos para resolver sistemas de ecuaciones. Por ejemplo, igualación, despejo una variable de una ecuación, y despejo la misma variable de una segunda ecuación, y luego igualo las ecuaciones resultantes.

Pregunta

Supongamos que tú, eres considerado como sujeto que resuelve el problema, y por otro lado el problema mismo. El problema puede tener diferentes niveles de dificultad y por supuesto debemos considerar todas las capacidades, conocimientos, destrezas que tú posees como sujeto.

¿Podrías describir, qué relaciones y características intervienen entre tu persona como sujeto que resuelve el problema y el problema según la pregunta planteada?

Respuesta

- Trataría de entender el problema en sí, para hallar una solución.
- Cuando no puedo resolver un problema, me pongo un poco histérico, por que no puedo resolverlo. Cuando lo resuelvo, me encuentro un poco más contento.

7.2.2 ENTREVISTA A DOCENTES

DOCENTE (A)

Pregunta

En el Curso Prefacultativo, a los estudiantes se les plantea problemas, ejercicios, también los estudiantes deben resolver exámenes, realizar prácticas, es más, los estudiantes se encuentran frente a problemas que están descritos en los libros que figuran en la bibliografía que usted les proporciona. Desde este punto de vista, según su perspectiva:

¿Cómo entiende, el significado de problema matemático?

Respuesta

- Justamente el objetivo es resolver problemas, hay que traducir el problema a ecuaciones. Para resolver se deben tomar varios pasos:
    - Entender el problema
    - Elaborar un plan
    - Llevar a cabo ese plan, luego
    - Encontrar la respuesta, finalmente
    - Verificar

Pregunta

Podemos clasificar los problemas:

- **Problemas por resolver**
- **Problemas por demostrar**
- **Problemas de construcción geométrica, y**
- **Problemas de aplicación**

Según su experiencia, como docente del Curso Prefacultativo ¿Dónde se concentra más el trabajo docente y el trabajo del **estudiante, en que tipo de problemas hay mayor dedicación?**

Respuesta

- Depende de la situación, o sea depende del problema, por ejemplo hay problemas rigurosos que realizan los estudiantes de matemáticas.
- En los Cursos Prefacultativos, es necesario realizar previamente una serie de ejercicios antes de resolver cualquier problema, por que para demostrar un teorema se necesita una base y esa base es justamente la aritmética, el álgebra ...

Pregunta

En las prácticas que se dan como ejercicios y en los exámenes que deben realizar los estudiantes.

¿Hay más problemas por resolver o más problemas por demostrar? ¿Cuál es la mayor tendencia? ¿Por qué?

Respuesta

- Generalmente las practicas, son problemas por resolver, no por demostrar.
- Para el alumno es más complicado, cuando se le dice demostrar ya se asusta, cuando se le dice resolver, creo que los estudiantes están en mejores condiciones.

Pregunta

Profesor, ese término de "asustarse" cómo podríamos interpretar? ¿Por qué cree que esta ocurriendo este hecho sentimental?

Respuesta

- En el colegio generalmente con la matemática juegan, es decir el profesor trata de hacer la clase amena seguramente, en cambio en la universidad es más severa, y justamente el miedo lo traen desde el colegio.

Pregunta

Usted sabe que hay problemas vinculados con la vida real del estudiante, con la realidad y con sus intereses
¿Hay ese tipo de problemas que se plantean en clases?

Respuesta

- Depende de la situación, los problemas que se dan aquí son ya escogidos, tenemos una guía de trabajos prácticos en la cual el estudiante debe resolverlos. La mayoría de los problemas de la guía son extractos de los problemas propuestos en los libros que figuran en la bibliografía.

Pregunta

¿Cuáles son los contenidos matemáticos del programa de estudios del Curso Prefacultativo? ¿Podría describirlos brevemente?

Respuesta

- Son los temas siguientes:
  - Sistemas Numéricos
  - Operaciones Algebraicas
  - Ecuaciones
  - Funciones Exponenciales y logarítmicas
  - Progresiones

Se esta dando el enfoque funcional

Pregunta

Es interesante saber que tiene un enfoque funcional.

¿Cómo es el enfoque funcional?

¿Utiliza la tecnología, en este caso la computadora para trabajar funciones?

¿Utilizan problemas de la vida real para anexar con el tema de funciones?

¿Cómo es ese enfoque funcional que realizan?

Respuesta

- Hacemos manualmente los gráficos de la funciones
- En realidad no utilizamos computadora ni calculadora
- No dejamos que usen la calculadora
- El estudiante es muy diestro para manejar la calculadora, desde el colegio están tan acostumbrados. Para ellos es fácil ver el gráfico en la calculadora, pero cuando se les pide hacer un gráfico y ellos no tienen la calculadora, es ahí cuando tienen problemas.

Pregunta (valores)

En su trabajo docente, existen muchos parámetros importantes, para trabajar en resolución de problemas. Vamos a referirnos al siguiente par complementario de ellos. El razonamiento y el objeto.

¿En los problemas planteados para su resolución, usted, vincula los parámetros del razonamiento y del objeto?

Respuesta

- En general estos parámetros están vinculados
- Se da más importancia al razonamiento que al objeto

Pregunta

¿Usted cree que las matemáticas, las ideas matemáticas están abiertas a la consideración, reflexión y a la crítica de toda persona?

Respuesta

- Hay persona que sin saber lo que es la matemática y la aritmética, hacen sus cálculos directamente. Por ejemplo, personas que venden sus productos en los mercados. Esto es muy importante.

Pregunta

¿De dónde se supone que provienen las ideas matemáticas? Por ejemplo el teorema de Pitágoras, que $\sqrt{2}$ es un número irracional ...

Respuesta

- Desde la antigüedad, desde tiempos remotos. Por ejemplo, para comer supongamos que hay 100 melones, el hombre no va a comer los 100, porque hay 100 melones. El hombre va a tratar de contar cuántos va a poder comer. Justamente de ahí nace la idea de poder racionalizar el número de melones que se puede comer.
- Aristóteles dijo: La matemática es la ciencia de la cantidad, por ejemplo, para construir una casa, necesito saber medida.

Pregunta

¿En clases de matemáticas, se tratan los temas de cantidad o medida?

Respuesta

- Si

Pregunta

Hablando siempre sobre medida. ¿Cómo explica a sus estudiantes la diferencia entre 30 metros y el número 30?

Respuesta

- Si hablamos de números, el 30 significa sólo un número, por decir 30 objetos, 30 personas. Con respecto a los metros, 30 metros estamos hablando de una longitud que mide 30 unidades.

Pregunta

La siguiente pregunta se refiere al crecimiento de las matemáticas. Por ejemplo, el crecimiento de los sistemas numéricos: Naturales, enteros, etc.

Comparte usted en su labor docente con sus estudiantes, la idea del crecimiento de las matemáticas? Si comparte, como lo hace?, ¿puede dar algún ejemplo?

Respuesta

- La matemática no es limitada, si no ilimitada.
- La matemática está creciendo enormemente.
- Como ejemplo, los naturales, y los naturales están incluidos en los enteros.
- Como ejemplo: Pregunte a todo el curso:

¿Qué número le sigue al 3.4?

me respondieron: 3.41 , lo cuál no es cierto, luego les hice comprender, que no se puede decir cuál es el número que le sigue.

DOCENTE (B)

Pregunta

En el curso Prefacultativo a los estudiantes se les plantea problemas, se les plantea ejercicios, también los estudiantes deben resolver exámenes, realizar practicas, es mas, los estudiantes se encuentran frente a problemas que están escritos

en los libros que figuran en la bibliografía, que usted les proporciona. Desde este punto de vista según su perspectiva.
¿Cómo entiende, el significado de problema matemático?

Respuesta

- Un problema matemático, lo que hace es traducir lo que se ha aprendido en la parte teórica. Además el alumno sin el conocimiento, sin la práctica o el ejercicio podría aprender mucho menos matemática.

Pregunta

A los problemas matemáticos, podríamos clasificarlos como: problemas por resolver, aquellos que generalmente tienen que ver con procesos algebraicos: resolver una ecuación, resolver un sistema, hallar el valor numérico, resolver una ecuación trigonométrica...
y problemas por demostrar relacionados por ejemplo con la demostración de ciertas propiedades matemáticas, por ejemplo $ab = 0$ **si y solo si** $a = 0$ **o** $b = 0$**,**
¿Con mayor tendencia que tipo de problemas se plantea a los alumnos, que tipo de problemas hacen en las aulas tanto el profesor como el alumno?

Respuesta

- Mayormente, los problemas por resolver, el alumno tiene más destreza para resolver esta clase de problemas.
- Los problemas por demostrar también se hace en el curso o se les pregunta en los exámenes. Para este tipo de problemas se requiere razonar y la mayoría de los alumnos no tienen el hábito de razonar.

Pregunta

¿Plantea problemas a sus estudiantes, para que ellos resuelvan en las misma clase? Si da ¿Cuánto tiempo dedica a esta actividad?. Si no los da ¿Por qué no los da?

Respuesta

- Una razón por la que no se dan, es el factor tiempo, pues si se dieran muchos o pocos problemas, no podríamos cumplir con el programa, pues nos asignan una hora y media de clases.
- Sin embargo, algunas veces se les da ejercicios relativamente sencillos. El tiempo que se les da depende de la complejidad del problema.

Pregunta

¿Qué porcentaje de estudiantes, entregan la resolución de los problemas que se plantean en la misma clase?

Respuesta

- Depende ...
- Si se les dice que se les asignara una nota por la resolución, entregan aproximadamente un 60 %

Pregunta

Plantea problemas matemáticos:
¿relacionados con la realidad?
¿relacionados con los intereses de los alumnos?
si plantea ¿Qué tipo de problemas plantea?

Respuesta

- Depende del tema que se esta desarrollando
- Según mi experiencia, muy pocas veces se ha podido plantear problemas de la realidad
- Hay algunos autores de libros, que pueden proporcionarnos problemas de la vida y esos problemas se los plantea a los alumnos, y noto en este caso que los alumnos están muy satisfechos

Pregunta

¿Cuáles son los contenidos matemáticos del programa de estudios del Curso Prefacultativo? ¿podría describirlos brevemente?

Respuesta

- Parte del álgebra elemental
- Ecuaciones, sistemas de ecuaciones
- Logaritmos
- Algo de trigonometría
- Poco sobre funciones

- No he visto explícitamente un programa de geometría, pero para resolver problemas se recurre al conocimiento de geometría elemental.

Pregunta

¿Qué tipo de métodos, técnicas y estrategias utiliza en su trabajo docente, para la resolución de problemas?

Respuesta

- Se ha tratado de utilizar lo que sugiere Polya, cuatro pasos para resolver problemas.
- Se ha utilizado algunas veces métodos de demostración directa, y la forma contrarecíproca.

Pregunta

En su trabajo docente, existen muchos parámetros importantes, para trabajar en resolución de problemas. Vamos a referirnos al siguiente par complementario de ellos. El razonamiento y el objeto.

¿En los problemas planteados para su resolución, usted, vincula los parámetros del razonamiento y del objeto?

Respuesta

- En matemática, el razonamiento prepondera más que el objeto. Sin embargo, cuando hablamos de matemáticas o enseñamos no esta separado el objeto.

Pregunta

¿Los conocimientos matemáticos, ideas matemáticas, ideas básicas, están abiertas, a la consideración, reflexión y a la critica de toda persona?

Respuesta

- La matemática como tal, siempre están abiertas a cualquier persona. Las matemáticas se han utilizado inclusive en los pueblos primitivos, tal vez no con la intensidad que hoy se hace
- Por ejemplo, las personas que trabajan en los “minibases” que por lo general son niños, están haciendo matemática. En el mercado, las señoras que hacen ventas, están haciendo matemáticas. Posiblemente esto se llame etnomatemática.

Pregunta

¿De donde se supone que provienen las ideas matemáticas? Por ejemplo el teorema de Pitágoras y que $\sqrt{2}$ es un número racional?

Respuesta

- Algunas veces viene de la naturaleza y otra vienen de las ideas, también las matemáticas
- Explícitamente estos aspectos no se imparten en clases, tampoco están es los programas. Pero algunas veces estamos impartiendo mientras enseñamos.

Las entrevistas muestran en un cierto sentido, que son congruentes con los procesos de observación realizados en aula, vale decir que el tipo de problemas que se trabajan son los clásicos que figuran en los programas y libros de texto, con una marcada preferencia en problemas por resolver. Tanto docentes como estudiantes no caracterizan con precisión los términos: *problema matemático, estrategias, técnicas y métodos de resolución.* Los estudiantes por lo general no diferencian claramente la tipología de problemas. En docentes y estudiantes no están explícitas

las conceptualizaciones que caracterizan a los valores de la matemática. Finalmente no están presentes de manera explicita en el planteamiento de problemas las actividades de forma, dimensión e incertidumbre.

7.3 MATERIALES ESCRITOS

Con el objeto de apoyar al análisis de las observaciones y a las entrevistas realizadas, se consideran los siguientes **materiales escritos**:

- Planes y programas, del Curso Prefacultativo.
- Notas de lecciones de los alumnos.
- Documentos de exámenes realizados por los estudiantes.

Respecto a los materiales escritos, podemos notar que en ellos se representa casi de manera congruente la forma cómo se desarrollan las actividades tanto del trabajo docente como de las actividades que el estudiante realiza, en el contexto de la resolución de problemas. Es decir, a manera de puntualizar, se notan reflejados los contenidos que desarrollan, las técnicas, métodos y estrategias utilizadas por los estudiantes en el aprendizaje de la matemática mediante la resolución de problemas, se observa una marcada tendencia hacia los métodos mecánicos, algorítmicos y de imitación. Los materiales escritos, se adjuntan en el anexo del presente trabajo.

8. CONCLUSIONES

A continuación se complementan algunas conclusiones generales, como consecuencia de las observaciones realizadas, las entrevistas efectuadas y el registro de materiales escritos.

En general en estas condiciones, se observa que el trabajo docente se concentra en exposiciones magistrales, utilizando como únicos medios didácticos, la pizarra, marcadores o tiza, apuntes o ayuda memoria del docente y en algunos casos la presencia de un libro o texto guía. En cuanto a los procesos y acciones que los estudiantes realizan como actividad de aprendizaje, se observa que estos se reducen a registrar notas en sus cuadernos, imitando; las técnicas, métodos y tipos de estrategias que el docente realiza en pizarra, con una marcada preferencia por los procesos mecánicos, algorítmicos y en pocos casos el aprendizaje de conceptos.

Respecto al tipo de aprendizaje matemático mediante la resolución de problemas, por lo general se observa que el docente se plantea en pizarra, algunos ejemplos como problemas, y preferentemente del tipo de problemas por resolver y de representación gráfica, cuya exposición de resolución de dichos ejemplos generalmente tiene un sentido monólogo, es decir, un discurso que se dirige así mismo. En pocos casos se observa una cierta motivación por la resolución de problemas por los estudiantes de forma independiente.

Acerca de los métodos, técnicas y estrategias utilizados por los docentes y estudiantes en la resolución de problemas, se observa una marcada preferencia por los algorítmicos y mecánicos, pues los mismos ejemplos propuestos como problemas se describen iniciando con las palabras: resolver la ecuación…, factorizar la expresión.., hallar el valor numérico de..., calcular, graficar tal función…etc. Se observa que hay muy poca o casi nada oportunidad de plantear problemas por demostrar, es decir aquellos problemas donde se requieren el desarrollo de ciertas

operaciones del pensamiento como son: análisis, síntesis, abstracción, generalización… etc. y donde se pueda tener la oportunidad de utilizar diferentes tipos de razonamiento. No se observa la presencia de modelos de resolución tales como: analogía, regresivo o marcha hacia atrás, contradicción, reducción etc. Tampoco se observa la presencia de procedimientos heurísticos; es decir, procedimientos que permitan al estudiante descubrir, inventar…, enfrentarse a problemas donde no se dispone de ningún algoritmo de solución y que el estudiante de manera independiente pueda determinar una vía de solución. Se observa que los contenidos que se exponen en clases, son clásicos, vale decir: Sistemas numéricos, Expresiones Algebraicas, Operaciones con expresiones algebraicas, ecuaciones, funciones, etc.

No se observa una relación crítica sobre: crecimiento y desarrollo de las matemáticas a través de la historia, cuestionamientos sobre el origen de las ideas y proposiciones matemáticas, planteamiento de problemas que vinculen el razonamiento y los objetos de la realidad, etc.

De acuerdo con Hiebert y Carpenter (1992) para que los estudiantes construyan representaciones mentales de los conceptos matemáticos como ser: función, ecuación, función par e impar, factorizar, ... no es suficiente la exposición magistral del docente ni el manejo de símbolos que el realiza en pizarra, tampoco basta la imitación al profesor o a otro alumno, es necesario que el alumno actué de manera independiente en la resolución de problemas, manipulando símbolos, trasformando, abstrayendo, generalizando, etc. ...

Mientras el docente tiene destreza y habilidad en el manejo de los símbolos y representaciones en la resolución de problemas, para el alumno posiblemente no sea fácil manejar ni interpretar los símbolos y representaciones, por que no ha formado las representaciones internas de los conceptos matemáticos. Con respecto a esto Skemp (1982) afirma:

“Cuando los objetos mentales están ausentes los alumnos actúan sobre símbolos vacíos ... etiquetas sin contenido”

(p,202)

El docente puede interpretar las representaciones que ha formado el alumno a través de lo que dice, modela, dibuja, escribe, o representa simbólicamente. El docente debe por lo tanto evaluar la comprensión del alumno utilizando todos los medios y no solamente por medio de sus respuestas numéricas o simbólicas. La comunicación de ideas matemáticas es esencial para que los alumnos reporten que han aprendido. Igualmente esencial es el papel de la comunicación de ideas matemáticas por parte del alumno en la formación y aprendizaje de conceptos matemáticos.

Es importante que la comunicación no solo sea entre alumnos y maestros, sino también entre los mismos alumnos. El trabajo en grupos pequeños de cooperación estimula la comunicación de ideas matemáticas entre los alumnos de todos los niveles (Mora, 1990).

- La calculadora no es solo una herramienta que nos permita calcular rápida y eficazmente, sino que también puede servir a los alumnos para mejorar su comprensión de conceptos matemáticos y descubrir resultados por si mismos.

- En el nivel medio, la calculadora gráfica, permite al alumno trabajar con representaciones alternas del mismo concepto. Por ejemplo, una función puede ser representada en forma gráfica, tabular o mediante una ecuación algebraica. Los alumnos también pueden utilizar las calculadoras graficadoras para resolver en forma alterna problemas tales como encontrar el mínimo de una función, ceros de polinomios y otras funciones y resolver ecuaciones simultaneas.

- El desarrollo tecnológico hace que la diferenciación entre una calculadora y una computadora es cada vez menos importante, por tanto podemos señalar que muchas características de las computadoras son aplicables a estas calculadoras avanzadas en su proceso tecnológico:

    - Es una necesidad esencial el uso de la computadora con el objeto de que efectivamente contribuya a la comprensión de las matemáticas.
    - La computadora se debe usar en todos los niveles para desarrollar conceptos matemáticos importantes desde niveles básicos hasta cursos universitarios.

Al respecto de la significación de problema muchos investigadores consideran:

Según Mayer (1986), cualquier definición de “problema” debería consistir en tres ideas:

- El problema está actualmente en un estado, pero
- se desea que este en otro estado, y
- no hay una vía directa obvia para realizar el cambio

Según Lester (1983), un problema es una tarea para la cual:

- El individuo o grupo que se enfrenta a ella quiere o necesita encontrar una solución.
- No hay un procedimiento fácilmente accesible que garantice o determine completamente la solución.
- Y el individuo o grupo debe hacer un intento para encontrar la solución.

Mayer (1986), distingue el hecho de la intención, al exponer ideas que permitan llegar al concepto de problema:

- Datos. El problema tienen en un primer momento determinadas condiciones, objetos, trozos de información, etc. Que están presentes al comienzo del trabajo en el problema.
- Objetivos. El estado deseado o terminal del problema es el estado de alcanzar el objetivo, y el pensamiento deberá transformar el problema desde el estado inicial dado al estado terminal.
- Obstáculos. El que piensa tiene a su disposición algunas vías para modificar el estado dado o el estado terminal del problema. Sin embargo, todavía no sabe la respuesta correcta, es decir, la secuencia correcta de comportamientos que resolverán el problema no es necesariamente obvia

- Respecto al interés por la resolución de problemas, Sanchez & Fernández (2003) señalan:

    - Encontrar la solución de un problema matemático no es el final de la empresa matemática, sino el punto inicial para encontrar otras soluciones, extensiones y generalizaciones del problema.
    - Aprender matemáticas es un proceso activo que requiere de discusiones sobre conjeturas y pruebas.
    - Actuar como moderador mientras los estudiantes discuten problemas.
    - Discutir con los estudiantes problemas que involucren el uso de varios métodos de solución o que incluyan varias soluciones.

Es importante que los estudiantes participen en el proceso de formular o rediseñar problemas. Estos se identifican como un componente esencial en el hacer matemático.

BIBLIOGRAFÍA

- Azcárate, G.C. & Deulofeu, P.J. (1996) **"Funciones y Gráficas"** Ed. SINTESIS. Madrid-España.

- Aebli, H. 1973. **"Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget".** Ed. Kapelusz, Buenos Aires En: Steen, L.A (1998) "La Enseñanza Agradable de las MATEMÁTICAS" Ed. Limusa. México. Mathematical Sciences Education Board National Research Council. LIMUSA, NORIEGA Ed MÉXICO.

- Almeida, B. 1992. **"Tratamiento de los procedimientos de solución"** En: Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Tomo I. Editorial Pueblo y Educación. Varios Autores.

- Ammerman, R. 1965. **"Classics of Analytic Philosophy"**. New York, McGraw Hill En: "Metodología de la Enseñanza de la Matemática". Tomo I. Editorial Pueblo y Educación. Varios Autores. P 156

- Bachelard, G. 1938. **"Le Formation del Espirit Scientifique"**. Presses Universitaires de France, Paris.

- Bruner, J.S. 1985. **"The Role of Interaction Formats in Language Acquisition"** en JP. Forgas (Ed.). Language and Social Situations. Springer – Verlag. New York.

- Bruner, J.S. & Bornstein, M.H. 1989. **"On Interaction"**, in J.S. Bruner & M.H. Bornstein (eds.) "Interaction in Human Development". Erlbaum, L. Associates Publishers Hllsdale, NJ.

- Bishop, A.J. 1999. **"Enculturación Matemática. La Educación Matemática desde una perspectiva cultural"** Ed. PAIDOS Barcelona - Buenos Aires-México

- Blanco Nieto, L. 1994. **"Los problemas de sumar y restar".** Badajoz: Universidad de Extremadura En: "Enseñanza de la Matemática, Fundamentos Teóricos y Bases Psicopedagógicas" Sánchez H.J.C. & Bravo, F.J.A Ed. CCS.

- Blanco, L. 1996. **"La Resolución de problemas. Una Revisión Teórica".** Revista Suma (21).11-20 En: "Enseñanza de la Matemática, Fundamentos Teóricos y Bases Psicopedagógicas" Sánchez H.J.C. & Bravo, F.J.A Ed. CCS.
- Bauersfeld, H. 1995. **"Language Games in the Mathematics Classroom: Their Function and their Effects"**, in P. Cobb and H. Bauersfeld (eds.), The Emergence of Mathematical Learning: Interaction in Classroom Culture, Lawrence Erlbaum Associates, Publisher, Hilldale, NJ.

- Callejo, M.L 1996. **"Evaluación de procesos y progresos del alumnado en la resolución de problemas"** Revista UNO, (8), 53-63 En: "Enseñanza de la Matemática, Fundamentos Teóricos y Bases Psicopedagógicas" Sánchez H.J.C. & Bravo, F.J.A 2003 Ed. CCS. Corregido

- Cobb, P & Bauersfeld, U. (Eds.) 1995. **"The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures"**, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Hillsdale, NJ.

- De la Torre, S. 1984. **"Creatividad Plural"**. Barcelona: PPU En: "Enseñanza de la Matemática, Fundamentos Teóricos y Bases Psicopedagógicas" Sánchez H.J.C. & Bravo, F.J.A 2003. Ed. CCS.

- Dieudonné, J. 1992. **"Mathematics. The Music of Reason"**, Springer – Vearlag, Berlin/Heslin/Heidelberg/ New York.

- Dean, J.P. y White, W.F. 1969. **"How do you know if the informant is telling the truth?"** En: Woods, P. 1998 "La escuela por dentro. La etnografía en la investigación educativa"Ed. Paidós M.E.C. España

- Dienes Z.P. 1970. "**Enseñanza de la Matemática. Barcelona: Teide"** En: "Enseñanza de la Matemática, Fundamentos Teóricos y Bases Psicopedagógicas" Sánchez H.J.C. & Bravo, F.J.A Ed. CCS.

- Fasheh, M. 1982 **"Mathematics, Cultura and Authority, for the learning of mathematics"**, En: Alan J. Bishop 1999. "Enculturación Matemática. La Educación Matemática desde una perspectiva cultural " Ed. Paidos. España.

- Fredericksen, N 1984. **"Implications of cognitive theory for instruction in problem solving"**. Review of Educational Research*, (54) 363-407* En: "Enseñanza de la Matemática, Fundamentos Teóricos y Bases Psicopedagógicas" Sánchez H.J.C. & Bravo, F.J.A 2003. Ed. CCS.

- Frege, G. 1981. **"Escritos lógico-Semánticos"**. Madrid: Tecnos En: Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Tomo I. Editorial Pueblo y Educación. Varios Autores.

- Fingermann, G. 1972 **"Lógica y Teoría del conocimiento"**. Buenos Aires. El Ateneo de Filosofía y de Didáctica de la filosofía, III, 3 En: Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Tomo I. Editorial Pueblo y Educación. Varios Autores.

- Freudenthal, H. 1973. "**Mathematics as an educational task"**. Dordrecht. Reidel En: Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Tomo I. Editorial Pueblo y Educación. Varios Autores.

- Freudenthal, H 1978. **"Weeding and Sowing"**. Dordrecht. Reidel En: Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Tomo I. Editorial Pueblo y Educación. Varios Autores.

- Feyerabend, P. 1978. **"In Defense of Aristotle: Comments on the Conditions of Content Increase"** in G. Radnitzky and G. Andersson (eds.) Progress and Rationality in Science. D. Reídel Publishing Company. Dordretch

- Ford, J. 1975. **"Paradigms and Fairy Tales"** En: Woods, P. 1998. "La escuela por dentro. La etnografía en la investigación educativa"Ed. Paidós M.E.C. España

- Gergen, K. J. 1995 **'Social Construction and the Educational Process'** in L.P. Steffe and J.

- Guba, E. G. 1983. **"Criterios de credibilidad en la investigación naturalista"** En: Gimeno, J. & Perez, A.I. **"Comprender y Transformar la Enseñanza"** Ed. Morata. Madrid

- Erickson, F. 1989. **"Métodos cualitativos de la Investigación sobre la enseñanza"**. En: GIMENO, J. y PEREZ GOMEZ A. I: "Comprender y Transformar la Enseñanza" Ed. Morata. Madrid p. 118

- Guétmanova, A. 1989. "**Lógica".** Moscú: Progreso. Trad. Victor Mednikov/ Lógica en forma simple sobre los complejo. Moscú: Progreso. En:"Enseñanza de la Matemática, Fundamentos Teóricos y Bases Psicopedagógicas" Sánchez H.J.C. & Bravo, F.J.A 2003 Ed. CCS.

- Gimeno Sacristán, J. & Pérez Gómez, A.I. 1999. **"Comprender y Transformar la Enseñanza"** Ed. Morata. Madrid

- Guzmán, M. 1997_a. **"Aventuras Matemáticas. Una ventana hacia el caos y otros episodios" Pirámide. Madrid – España**

- Guzmán, M. 1997_b. **"Cuentos con Cuentas"** Ed. Red Olímpica. Buenos Aires-Argentina.

- Guzmán, M. 1997. **"Para pensar mejor"**. Ed PIRAMIDE. Madrid-España. En:"Enseñanza de la Matemática, Fundamentos Teóricos y Bases Psicopedagógicas" Sánchez H.J.C. & Bravo, F.J.A Ed. CCS.2003

- Hammersley, M. 1977. **"Teacher pespectives"** En: Woods, P. 1998. "La escuela por dentro. La etnografía en la investigación educativa"Ed. Paidós M.E.C. España

- Halmos, P.R. 1980. **"The heart of Mathematics"**. American mathematical Montbly en: Sanchez, J & Fernadez, J. 2003 "Enseñanza de la Matemática, Fundamentos Teóricos y Bases Psicopedagógicas". Editorial CCS.

- Horton, R. 1967. "African Tradicional Thought and Western Science", Africa, nº XXXVII, Collier – Macmillan, Londres.

- Hardy, G.H. 1992. **"A Mathematician's Apology".** Cambrige University Pres. Cambrige. Cuarta Edición.

- Hargittai, I. y Magdolna H. 1998 **"Symmetry Through the Eyes of Chemist"** Weinheim, Alemania VCH Publishers. En: Steen, L.A "La Enseñanza Agradable de las MATEMÁTICAS" Ed. Limusa. Mexico. s. Mathematical Sciences Education Board National Research Council. LIMUSA, NORIEGA Ed MÉXICO.

- Hierbert, J. y Carpenter, T.P. 1992. Learning and teaching with understanding. In D.A. Ground (Ed.) Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York.

- Hembree, R. & Dessart, D. (1998) **"Effects of hand-held calculators in precollege mathematics education: A meta-analysis".** Journal for Research in Mathematics Education.17,83-89 Steen, L.A "La Enseñanza Agradable de las MATEMÁTICAS" Ed. Limusa. Mexico. s. Mathematical Sciences Education Board National Research Council. LIMUSA. NORIEGA Ed MÉXICO.

- Kasner, E. & Newman, J. 1959. **"Matemáticas e imaginación"** Compañía Editorial Continental, S.A. México.

- Kamil D.V. 1983. "**El conocimiento físico de la educación preescolar"**. Siglo XXI Madrid. En: Chamorro, C.L.& Belmonte J.M. 1994 "El Problema de la Medida". Ed. Matemáticas: Cultura y Aprendizaje España.

- Kleiner, I. 1986. **"Famous problems in mathematics: and outline of a course"** For the learning of mathematics, 6(1),31-38. En: " Enseñanza de la Matemática, Fundamentos Teóricos y Bases Psicopedagógicas " Sanchez H.J.C. & Bravo, F.J.A Ed. CCS.2003

- Kneller, G. 1969. **"La lógica y el lenguaje en la Educación"**. Buenos Aires: El Ateneo En: Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Tomo I. Editorial Pueblo y Educación. Varios Autores.

- Kitchter, P. 1988. **"Mathematical Naturalism"**, in W. Aspray and P. Kitcher (eds.), History and Philosophy of Modern Mathematics. Minnesota Studies in the Philosophy of Science. Volume XI. University of Minnesota Press. Minneapolis.

- Kilpatrick, J. 1985. **"A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problem solving": multiple research perspectives**, 1-15 Hillsdale, N. j., Lawrence Erlbaum Associates En: " Enseñanza de la Matemática, Fundamentos Teóricos y Bases Psicopedagógicas " Sanchez H.J.C. & Bravo, F.J.A Ed. CCS.2003

- Kroeber, A.L. & Kluckhohn, D. 1952. **"Culture – A Critical Review of Concepts and Definitions"**, Vintage Books Nueva York, 1952 En: Alan J. Bishop. 1999 "Enculturación Matemática. La Educación Matemática desde una perspectiva cultural" Ed. Paidos. España.

- Kerlinger, F.M. 1981 **"Investigación del Comportamiento".** México Interamericana En: " Enseñanza de la Matemática, Fundamentos Teóricos y Bases Psicopedagógicas " Sanchez H.J.C. & Bravo, F.J.A Ed. CCS.2003

- Kline, M. 1972. **"Mathematics in Western Culture"**, Pelican Londres Trad. Cast: Matematicas en el mundo moderno, Madrid-Hermann Blume, En: Alan J. Bishop 1999. "Enculturación Matemática. La Educación Matemática desde una perspectiva cultural " Ed. Paidos. España.

- Kline, M. 2000. **"Matemáticas para los estudiantes de humanidades",** Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología. Fondo de Cultura Económica. México.

- Kitcher, P. 1988. **"Mathematical Naturalism"**, in W. Aspray and P: Kitchers

- Kuhn, 1962. **"The Structure of Scientic Revolutions"**, in the International Enciclopedia of Unifield Science. 11(2). The University of Chicago Press, Chicago

- Knuth, D. E. **"Algorithmic thinking and mathematical thinking"** American Mathematical Monthly, 92, 170-181 En: Steen, L.A 1998 "La Enseñanza agradable de las MATEMÁTICAS" Ed. Limusa. Mexico. s. Mathematical Sciences Education Board National Research Council. LIMUSA, NORIEGA Ed MÉXICO.

- Lipman, M. 1987. **"La Utilidad de la Filosofía en la Educación de la Juventud"**. Revista de Filosofía y de Didáctica de la Filosofía III,3. En: "Enseñanza de la Matemática, Fundamentos Teóricos y Bases Psicopedagógicas" Sánchez H.J.C. & Bravo,F.J.A Ed. CCS.

- Lancy D. 1983. **"Cross – Cultural Studies in lognition and Mathematics".** Academic Press.Nueva York, 1983 En: Alan J. Bishop 1999 "Enculturación Matemática. La Educación Matemática desde una perspectiva cultural " Ed. Paidos. España.

- Lehmann.Ch.H. 1968. **"Álgebra"** Editorial Limusa. Mexico

- Lester, F. 1983. **"Trends and issues in mathematical problem solving research".** En R. Lesh y M. Landau (Eds.), Acquisition of mathematics concepts and Processes Academic Press. En "Enseñanza de la Matemática, Fundamentos Teóricos y Bases Psicopedagógicas" Sánchez H.J.C. & Bravo, F.J.A Ed. CCS.

- Lakatos, I. 1976. **"Proofs and Refutations"**. Cambridge University Press, Cambridge

- Largeanet, J. 1994. **"Compte Rendu du livre de Janet Folina".** Poincaré and the Philosophy of Mathemátics, Maccmillan, London.

- Lincoln, Y. S. & Guba, E. G 1985. **"Naturalistic inquiry"** En: Santo, L.M & Sanchez, E. (1996) «Perspectivas en Educación Matemática » Grupo Editorial Iberoamericana, S.A. de C.V. México.

- Largeault, J. 1994. **"Compte Rendu du livre de Janet Folina, Poincaré and the Philosophy of Mathematics"**, Macmillan, London. Archives de Philosophie 57 (4).

- NCTM .1991 "**Estándares curriculares y para la evaluación**. Sevilla SAEM Thales. En: "Enseñanza de la Matemática, Fundamentos Teóricos y Bases Psicopedagógicas" Sánchez H.J.C. & Bravo,F.J.A Ed. CCS.

- NCTM. 1989 **"New directions for elementary school mathematics"**. Yearbook. Virginia En:"Enseñanza de la Matemática, Fundamentos Teóricos y Bases Psicopedagógicas" Sánchez H.J.C. & Bravo,F.J.A Ed. CCS.

- Marin, R. 1984. **"La Creatividad"**. Barcelona: CEAC En:"Enseñanza de la Matemática, Fundamentos Teóricos y Bases Psicopedagógicas" Sánchez H.J.C. & Bravo,F.J.A Ed. CCS.

- Mcleod, D. B. 1985 **"Affective issues in research on teaching mathematical problem solving**". New Jersey: Lawrence Earlbaum. En:"Enseñanza de la Matemática, Fundamentos Teóricos y Bases Psicopedagógicas" Sánchez H.J.C. & Bravo,F.J.A Ed. CCS.

- De Guzmán, M. 1991.**"Para pensar mejor"** Barcelona Labor En: En:"Enseñanza de la Matemática, Fundamentos Teóricos y Bases Psicopedagógicas" Sánchez H.J.C. & Bravo,F.J.A Ed. CCS.

- De Guzmán, M. 1997. "**Aventuras Matemáticas**" Ed. PIRÁMIDE. Madrid-España.

- Mandelbrot. B. 1997. **The Fractal Geometry of Nature**. San Francisco CA: WH. Metatemas. España.

- Mayer, R. 1986. "**Pensamiento, Resolución de Problemas y Cognición** Barcelona: PAIDOS En: "Enseñanza de la Matemática, Fundamentos Teóricos y Bases Psicopedagógicas" Sánchez H.J.C. & Bravo,F.J.A Ed. CCS.

- Morris, K. 2000. **"Matemáticas para Estudiantes de Humanidades"**. Ed. Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología. Fondo de Cultura Económica México

- Newman, M.H.A. 1959 **"¿What is Mathematics? New Answers to and Old Question"** En: Alan J. Bishop 1999. "Enculturación Matemática. La Educación temática desde una perspectiva cultural " Ed. Paidos. España.

- Nesher, P. 1986. **"Learning mathematics. A cognitive Perspective".** American Psychologist 41 (10), 114-122 En: "Enseñanza de la Matemática, Fundamentos Teóricos y Bases Psicopedagógicas" Sánchez H.J.C. & Bravo,F.J.A 2003 Ed. CCS.

- N. Antonov, M. Vigodsky V. Nikitin, A. Sankin 1985. **"1000 Problemas de Aritmética, Álgebra, Geometría y Trigonometría"** Paraninfo Madrid.

- Nesher, P. 1986 **"Learning mathematics. A Cognitive Perspective"** American Psychologist 41(10), 114-122 En:"Enseñanza de la Matemática, Fundamentos Teóricos y Bases Psicopedagógicas" Sánchez H.J.C. & Bravo,F.J.A Ed. CCS.

- Polya, G.1992. **"Cómo plantear y resolver problemas"** Ed. TRILLAS Mexico D.F. "Enseñanza de la Matemática, Fundamentos Teóricos y Bases Psicopedagógicas" Sánchez H.J.C. & Bravo,F.J.A Ed. CCS.

- Perelman, Y. 1968. **"Matemáticas recreativas".** Barcelona: Martínez Roca En:"Enseñanza de la Matemática, Fundamentos Teóricos y Bases Psicopedagógicas" Sánchez H.J.C. & Bravo,F.J.A Ed. CCS.

- Poston. Tim y Stewart Ian, **Catastrophe Theory and Its Aplicactions**. Boston MA Pitman. En: Steen, L.A 1998 "La Enseñanza agradable de las MATEMÁTICAS" Ed. Limusa. Mexico. s. Mathematical Sciences Education Board National Research Council. LIMUSA, NORIEGA Ed MÉXICO.

- Popper, K.R. 1972. **" La Connaissance Objetive "**. Editions Complexe, Bruxellers.

- Poincaré, H. 1899. « **La logique et l` Intuition dans la Science Mathemátique »**, Enseignement Mathèmatique 1, 157-162

- Piaget J. and García R. 1989. **"Psychogénesis and the History of Science"**. Columbia University Press. New York,

- Piaget, J. y Beth, E.W. 1968. **"Relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real"**. Madrid: Alianza Editorial En:"Enseñanza de la Matemática, Fundamentos Teóricos y Bases Psicopedagógicas" Sánchez H.J.C. & Bravo,F.J.A Ed. CCS.

- Puig, L. y Cerdán, F. 1996. **"Un curso de Heurística matemática para la formación del profesorado"**. Revista UNO, (8) 83-90 En:"Enseñanza de la Matemática, Fundamentos Teóricos y Bases Psicopedagógicas" Sánchez H.J.C. & Bravo,F.J.A Ed. CCS.

- Rico, L; Castro, E. y Castro, E. 1995. **"Estructuras Aritméticas Elementales y si Modelización"**. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica en: Sanchez, J & Fernadez, J. "Enseñanza de la Matemática, Fundamentos Teóricos y Bases Psicopedagógicas". Editorial CCS.2003

- Rees, P.K; Sparks, F.W & Ch.S. Rees. 1993 **"Álgebra"** Editorial Mc. Graw – Hill. México.

- Romberg, T. & Carpenter, T. 1986. **"Research on teaching and learnig mathematics. Two disciplines of scientific inquiry"** M.C. Witrock, hanbook of research on teaching. New York Macmillan Pub. Co 850 -873 "Enseñanza de la Matemática, Fundamentos Teóricos y Bases Psicopedagógicas" Sánchez H.J.C. & Bravo,F.J.A Ed. CCS.

- Richard, J. 1907. **"Sur la Nature des Axiomes en Geométrie », L' Enseignement Mathematique 9,** 463-473**.**

- Ribot, T. 1901. **"Ensayo sobre la imaginación creadora"**. Madrid Victoriano Suarez. En:"Enseñanza de la Matemática, Fundamentos Teóricos y Bases Psicopedagógicas" Sánchez H.J.C. & Bravo,F.J.A Ed. CCS.

- Rios, S. 1995. **"Modelización":** Alianza Editorial. Madrid.

- Rossman, J. 1931. **"The Psycholigy of the invent"**. Washington En:"Enseñanza de la Matemática, Fundamentos Teóricos y Bases Psicopedagógicas" Sánchez H.J.C. & Bravo,F.J.A Ed. CCS.

- Riley, M.; Greeno,J. y Séller,J. 1983 **"Development of Children's Problem Solving Ability in Aritmetic"**. En:"Enseñanza de la Matemática, Fundamentos Teóricos y Bases Psicopedagógicas" Sánchez H.J.C. & Bravo,F.J.A Ed. CCS.

- Starico de Accomo, M.N. 1996. **"Los Proyectos en el Aula. Hacia un Aprendizaje Significativo en la EGB "** . Colección Respuestas Educativas. Serie Aula EGB. Ed. Magisterios el Río de la Plata

- Steen, L.A 1998. **"La Enseñanza Agradable de las MATEMÁTICAS"** Ed. Limusa. Mexico. s. Mathematical Sciences Education Board National Research Council. LIMUSA,NORIEGA Ed MÉXICO.

- Sarduy, A.F. 1987. **Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos** en la escuela primaria. La Habana: Editorial Pueblo y Educación En: Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Tomo I. Editorial Pueblo y Educación. Varios Autores. P 156

- Sanz, I. 1990. **"Comunicación, lenguaje y matemáticas"** En: "Enseñanza de la Matemática, Fundamentos Teóricos y Bases Psicopedagógicas" Sánchez H.J.C. & Bravo,F.J.A Ed. CCS.

- Sierpinska, A. y Lerman, S. 1996. **"Epistemologíies of mathematics ando f mathematics education".** En: A.J. Bishop et al (eds.), International Handbook of Mathematic Education (pp.827-876). Dordrecht, HL: Kluwer, A.P.

- Swokowski, C. 1992. **"Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica"** Editorial: Grupo Editorial Iberoamericana. Colombia

- Schwartz, J.L. 1986. **"Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations".** Cambridge. MIT (manuscrito)

- Sanchez H. J.C.& Fernandez B.J.A. 2003 **"La enseñanza de la Matemática"** Ed. CCS Madrid – España.

- Stewart, I. **"The nature of stability"** Speculations in Science and Tecnology 10, 310 - 324. En: Steen, L.A 1998 "La Enseñanza agradable de las MATEMÁTICAS" Ed. Limusa. Mexico. s. Mathematical Sciences Education Board National Research Council. LIMUSA, NORIEGA Ed MÉXICO.

- Stewart. I. **The Problems of Mathematies**. Oxford. Inglaterra: Oxford University Press. En: Steen, L.A 1998 "La Enseñanza agradable de las MATEMÁTICAS" Ed. Limusa. Mexico. s. Mathematical Sciences Education Board National Research Council. LIMUSA, NORIEGA Ed MÉXICO.

- Steinbring, H. 1991. **"Mathematics in teaching processes. The disparity between teacher and Student Knowledge"**, Recherches en Didactique des Mathèmatics 11(1), 65-108.

- Schoenfeld, A. 1985. **"Ideas y Tendencias en la Resolución de problemas"** En: Steen, L.A 1998. En:"Enseñanza de la Matemática, Fundamentos Teóricos y Bases Psicopedagógicas" Sánchez H.J.C. & Bravo, F.J.A Ed. CCS.

- Semadeni, Z. 1984. **A principle of concretization permanence for the formation of aritmethical concepts**. Educational studies in Mathematics. Vol. 15,379-395 En: "Enseñanza de la Matemática, Fundamentos Teóricos y Bases Psicopedagógicas" Sánchez H.J.C. & Bravo, F.J.A Ed. CCS.

- Santos Trigo, L.M. 1996. **"Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas"**. México: Grupo Editorial Iberoamericana En:"Enseñanza de la Matemática, Fundamentos Teóricos y Bases Psicopedagógicas" Sánchez H.J.C. & Bravo,F.J.A Ed. CCS.

- Santo, L. M. & Sanchez, E. 1996. **"Perspectivas en Educación Matemática"** Grupo Editorial Iberoamericana, S.A. de C.V. México.

- Schwart, J.L. 1986. **"Intensive quantity and referent transforming aritmetic operations"**. Cambridge. MIT (manuscrito) En:"Enseñanza de la Matemática, Fundamentos Teóricos y Bases Psicopedagógicas" Sánchez H.J.C. & Bravo, F.J.A Ed. CCS.

- Spradley, J.P. 1980. **"The etnographic Interview"**, Nueva York, Holt, Rinehart & Winston « En: Woods, P. (1998) "La escuela por dentro. La etnografía en la investigación educativa"Ed. Paidós M.E.C. España

- Strawson, P.F.1971 **"Meaning and Truth"**, in P.F. Strawson (cd.), Logico – Linguistic papers, Mathuen, London.

- Thompson. D'Arcy, W. **"On Growth and Form"**. Volumes 1 y 2. Cambridge, MA: Cambridge University Press En: Steen, L.A 1998 "La Enseñanza agradable de las MATEMÁTICAS" Ed. Limusa. Mexico. s. Mathematical Sciences Education Board National Research Council. LIMUSA, NORIEGA Ed MÉXICO.

- Usisking, Zal & Max Bell, **Applying Artihmetic**: A Handbook of aplications of Aritmétic, Chicago: Departament of Education, University of Chicago. En: Steen, L.A 1998 "La Enseñanza agradable de las MATEMÁTICAS" Ed. Limusa. Mexico. s. Mathematical Sciences Education Board National Research Council. LIMUSA, NORIEGA Ed MÉXICO.

- Vergnaud, G. 1983. **"Acquisition of mathematical concepts and processes"**. Orlando Academic Prees. En:"Enseñanza de la Matemática, Fundamentos Teóricos y Bases Psicopedagógicas" Sánchez H.J.C. & Bravo,F.J.A Ed. CCS.

- Vergnaud, G. 1991. **El niño, las matemáticas y la realidad**. México: Trillas Riley, M; Greeno, J. y Séller, J. Development of Children´s Problem Solving ability in arithmetic. En: Sanchez H. J.C.& Fernandez B.J.A. 2003 **"La enseñanza de la Matemática"** Ed. CCS Madrid – España.

- Vigotsky, L. 1978 **"Mmd ma Societv"**. Harvard University Press: Cambridge,|MA. R

- Voigt, J. 1995. **"Thematic Patterns of Interaction and Sociomathematical Norms"**, in P.Cobb and H. Bauersfeld (eds.), The emergence of mathematical Meaning. Interaction in Classroom Cuktures. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Hillsdale

- Wisdon, J **"Chaotic behaviour in the solar System"** En Berry M.V. I.C .Percibal: N.O. Weiss(Eds.) : Dynamical Chaos. Londres Inglaterra: The Royal Society, 109 – 129. En: Steen, L.A 1998 "La Enseñanza agradable de las MATEMÁTICAS" Ed. Limusa. Mexico. s. Mathematical Sciences Education Board National Research Council. LIMUSA, NORIEGA Ed MÉXICO.

- Woods, P. 1998. **"La escuela por dentro. La etnografía en la investigación educativa"** Ed. Paidós M.E.C. España

- White, L.A. 1982. "**The Evolution of Culture**" McGraw-Hill, Nueva York, 1959 (trad. Cast,: La ciencia de la cultura, Barcelona, Paidos. En: A.J. Bishop et al (eds.), International Handbook of Mathematic Education (pp.827-876). Dordrecht, HL: Kluwer, A.P. (Traducción de Juan D. Godino)

- Watson, James y Crack, Francis 1998. **"Structure of small viruses"** Nature, 177, 473-475 En: Steen, L.A **"La Enseñanza Agradable de las MATEMÁTICAS"** Ed. Limusa. Mexico. s. Mathematical Sciences Education Board National Research Council. LIMUSA,NORIEGA Ed MÉXICO.

ANEXO

MATERIALES ESCRITOS

- **Programas de estudios Curso Prefacultativo**
- **Modelos de exámenes**
- **Modelo de resolución de problemas, por el docente**
- **Cómo resuelve un estudiante un examen**
- **Cómo y qué registra el estudiante (cuaderno borrador)**