

UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS
FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES
CARRERA DE MATEMÁTICA



Proyecto de Grado para obtener el grado de Licenciado en Matemática

**SUPERFICIES DE TIPO TIEMPO CASI
UMBÍLICAS**

POR: JAVIER COYO GUARACHI
TUTOR: DR. VICTOR HUGO PATTY YUJRA

LA PAZ - BOLIVIA
2022

Dedicatoria

Dedico este trabajo a mis padres: Teodoro Coyo Asistire, me hubiera gustado que aún este conmigo y Flora Guarachi Lopez, quienes siempre me apoyaron con su amor, paciencia y con sus ánimos, gracias por todos los esfuerzos que hicieron por mi, que me permitieron llegar a cumplir este objetivo, siempre estaré eternamente agradecido. A mi hermana Elsa por su apoyo incondicional, por sus consejos, por estar conmigo en todo momento gracias.

Finalmente quiero dedicar este proyecto a Laura, Paola, Jorge, Mireya, Marianela y tantos otros que me sería imposible citarlos aquí, que me brindaron su apoyo siempre que los necesite, gracias.

Agradecimientos

Quiero agradecer al Dr. Victor Hugo Patty Yujra, mi tutor por toda la motivación que siempre me brindo, por la paciencia y el apoyo durante la elaboración de este trabajo.

Agradecer al Proyecto Dinámicas de Control por permitirme ser participe de los seminarios donde siempre me guiaron y aconsejaron para mejorar.

Y obviamente agradecer a los docentes de la carrera de Matemática UMSA, por haberme brindado su conocimiento en especial a los profesores Efrain Cruz, Jimmy Santamaria, Fernando Vera, Miguel Yucra, Willy Condori, Roberto Huaranca, Raul Borda, Zenon Condori, Victor Patty, Vladimir Lara.

“Una ecuación para mi no tiene ningún significado a menos que exprese un pensamiento de DIOS ”–SRINIVASA RAMANUJAN

Índice general

Dedicatoria	II
Agradecimientos	III
Introducción	1
1. Geometría del Espacio de Minkowski	2
1.1. El espacio de Minkowski	2
1.1.1. Causalidad de vectores en $\mathbb{R}^{2,1}$	3
1.2. Vectores de tipo tiempo	12
1.3. Producto Cruz	15
2. Superficies	17
2.1. El operador de forma	21
2.1.1. Aplicaciones lineales sobre $\mathbb{R}^{1,1} \rightarrow \mathbb{R}^{1,1}$	21
3. Marcos nulos y formas de Maurer-Cartan	25
3.1. Formas de Maurer-Cartan	25
3.2. Caso 1:	34
3.3. Caso 2	35
4. Parametrizaciones explícitas	38
4.1. Caso 1	38
4.2. Caso 2	40
5. Ejemplos	42
5.1. Caso 1: $H(u) \equiv 0$	42
5.2. Caso 2: $H(u) \neq 0$	43
Bibliografía	49

Índice de figuras

1.1. Carácter causal de vectores	4
1.2. Plano tipo espacio	5
1.3. Plano tipo tiempo	5
1.4. Plano tipo luz	6
1.5. Dos vectores son ortogonales si y sólo si se obtiene una de la otra por reflexión a lo largo de una diagonal	9
1.6. Producto cruz	15
2.1. Curvas en $\mathbb{R}^{2,1}$	17
2.2. Carácter causal de α	18
2.3. Superficie en $\mathbb{R}^{2,1}$	19
2.4. Plano tipo tiempo	19
2.5. Espacio de De Sitter	20
2.6. El plano de Lorentz	21
3.1. Coordenadas locales nulas en M	31
5.1. La superficie del ejemplo 5.1	43
5.2. La superficie del ejemplo 5.2	46

Introducción

Para una superficie regular M en el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 , es bien conocido que el operador de forma en cualquier punto $p \in M$ es un operador lineal autoadjunto $S_p : T_pM \rightarrow T_pM$ y por tanto es diagonalizable sobre \mathbb{R} . Pero para superficies tipo tiempo en el espacio tridimensional de Minkowski $\mathbb{R}^{2,1}$ esto ya no es necesariamente cierto; el operador de forma sigue siendo autoadjunto, pero como el producto interior en T_pM es ahora indefinida, puede tener cualquiera de los tres tipos de valores algebraicos: diagonalizable sobre \mathbb{R} , diagonalizable sobre \mathbb{C} pero no sobre \mathbb{R} o no diagonalizable sobre \mathbb{C} . En una superficie regular de tipo tiempo en $\mathbb{R}^{2,1}$ un punto p se llamará casi umbílico si el operador de forma $S_p : T_pM \rightarrow T_pM$ es no diagonalizable sobre \mathbb{C} .

Para una superficie regular en el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 , los puntos umbílicos son precisamente los puntos en donde las curvaturas de Gauss y media K y H satisfacen $H^2 - K = 0$; además, es bien sabido que las únicas superficies totalmente umbílicas en \mathbb{R}^3 están contenidas en planos o esferas. Pero en las superficies tipo tiempo en el espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{2,1}$, es posible tener $H^2 - K = 0$ en un punto no umbílico; llamamos a estos puntos casi umbílicos.

El objetivo de este trabajo es dar una clasificación de las superficies totalmente casi umbílicas en $\mathbb{R}^{2,1}$.

En este trabajo nos guiamos principalmente en el artículo presentado por Jeanne N. Clelland, titulado *Totally quasi-umbilic timelike surfaces in $\mathbb{R}^{1,2}$* .

El presente trabajo está organizado de la siguiente manera: en el Capítulo 1 hacemos una descripción de la Geometría del espacio de Minkowski. En el Capítulo 2 repasamos las nociones de superficies de tipo tiempo en $\mathbb{R}^{2,1}$, en el Capítulo 3 utilizamos el método de los marcos móviles de Cartan para derivar y resolver un sistema de EDP, cuyas soluciones dan una descripción de las formas de Maurer-Cartan para superficies de tipo tiempo totalmente casi umbílicas, en el Capítulo 4 resolvemos las ecuaciones de Maurer-Cartan para encontrar parametrizaciones explícitas para esas superficies y por tanto demostramos el Teorema principal de este trabajo. En el Capítulo 5 damos algunos ejemplos de superficies tipo tiempo casi umbílicas.

Capítulo 1

Geometría del Espacio de Minkowski

1.1. El espacio de Minkowski

Definición 1.1. Una forma bilineal simétrica no degenerada es una función

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

definida sobre V , un espacio vectorial real de dimensión finita, tal que, para cualesquiera u, v, w en V , y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene

- Bilineal: $\langle u, v + \lambda w \rangle = \langle u, v \rangle + \lambda \langle u, w \rangle$ y $\langle u + \lambda v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \lambda \langle v, w \rangle$,
- Simétrica: $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
- No degenerada: si u es un vector tal que $\langle u, v \rangle = 0$, para todo $v \in V$, entonces $u = 0$; en caso contrario diremos que la forma bilineal es degenerada.

Consideremos el espacio Euclidiano \mathbb{R}^3 . Denotaremos por $B = \{e_0, e_1, e_2\}$ la base canónica de \mathbb{R}^3 , dados por:

$$e_0 = (1, 0, 0), \quad e_1 = (0, 1, 0), \quad e_2 = (0, 0, 1)$$

Las coordenadas de un vector, de acuerdo a la base canónica B de \mathbb{R}^3 , será denotado por (x, y, z) o por (x_0, x_1, x_2) .

Si $\{v_0, v_1, \dots, v_m\}$ es un conjunto finito de vectores, el subespacio vectorial generado por todas las combinaciones lineales de estos vectores será denotado por

$$\text{span} \{v_0, v_1, \dots, v_m\} = \left\{ \sum_{i=1}^m a_i e_i : a_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Definición 1.2. El *espacio de Minkowski* de dimensión tres, denotado por $\mathbb{R}^{2,1}$, se define como el espacio \mathbb{R}^3 equipado con la forma bilineal simétrica y no degenerada definida por

$$\langle u, v \rangle = u_0 v_0 + u_1 v_1 - u_2 v_2$$

para cualesquiera $u = (u_0, u_1, u_2)$ y $v = (v_0, v_1, v_2)$ en \mathbb{R}^3 .

1.1.1. Causalidad de vectores en $\mathbb{R}^{2,1}$

Dado $x = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{2,1}$. Diremos que x_0, x_1 son las coordenadas espaciales de x y que x_2 es la coordenada temporal de x . Esta terminología será justificada más adelante.

Consideremos por ejemplo los vectores de las base canónica $\{e_0, e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^{2,1}$. Tenemos lo siguiente

- $\langle e_0, e_0 \rangle = \langle (1, 0, 0), (1, 0, 0) \rangle = 1 + 0 - 0 = 1,$
- $\langle e_1, e_1 \rangle = \langle (0, 1, 0), (0, 1, 0) \rangle = 0 + 1 - 0 = 1,$
- $\langle e_0 + e_2, e_0 + e_2 \rangle = \langle (1, 0, 1), (1, 0, 1) \rangle = 1 + 0 - 1 = 0,$
- $\langle e_2, e_2 \rangle = \langle (0, 0, 1), (0, 0, 1) \rangle = 0 + 0 - 1 = -1.$

Como vimos en el caso del vector $e_0 + e_2$, que es no nulo, su evaluación por el producto interior es cero; en general, tendremos diferentes vectores, no nulos, tales que su producto interior consigo mismo puede incluso ser negativo o cero.

Esto nos lleva a clasificar a los vectores en $\mathbb{R}^{2,1}$ por el signo de la evaluación de su producto interior consigo mismo, a esta clasificación le llamaremos *causalidad*.

Definición 1.3. Un vector $u \in \mathbb{R}^{2,1}$ es llamado:

- *vector de tipo espacio* si $u = 0$ o si $\langle u, u \rangle > 0$;
- *vector de tipo tiempo* si $\langle u, u \rangle < 0$;
- *vector tipo luz* si $u \neq 0$ y si $\langle u, u \rangle = 0$

Con respecto al ejemplo anterior, e_0 y e_1 son vectores de tipo espacio y e_2 es vector tipo tiempo; además, $e_0 + e_2$ es un vector tipo luz.

El *cono de luz* de $\mathbb{R}^{2,1}$ es el conjunto de todos los vectores tipo luz de $\mathbb{R}^{2,1}$, *i.e.*,

$$\mathcal{C} = \{u \in \mathbb{R}^{2,1} : \langle u, u \rangle = 0\},$$

en coordenadas, podemos escribir

$$\mathcal{C} = \{(u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{R}^{2,1} : u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 = 0\}$$

vea figura 1.1

El conjunto de vectores tipo tiempo se describe como

$$\mathcal{T} = \{u \in \mathbb{R}^{2,1} : \langle u, u \rangle < 0\},$$

que en coordenadas queda como

$$\mathcal{T} = \{(u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{R}^{2,1} : u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 < 0\}.$$

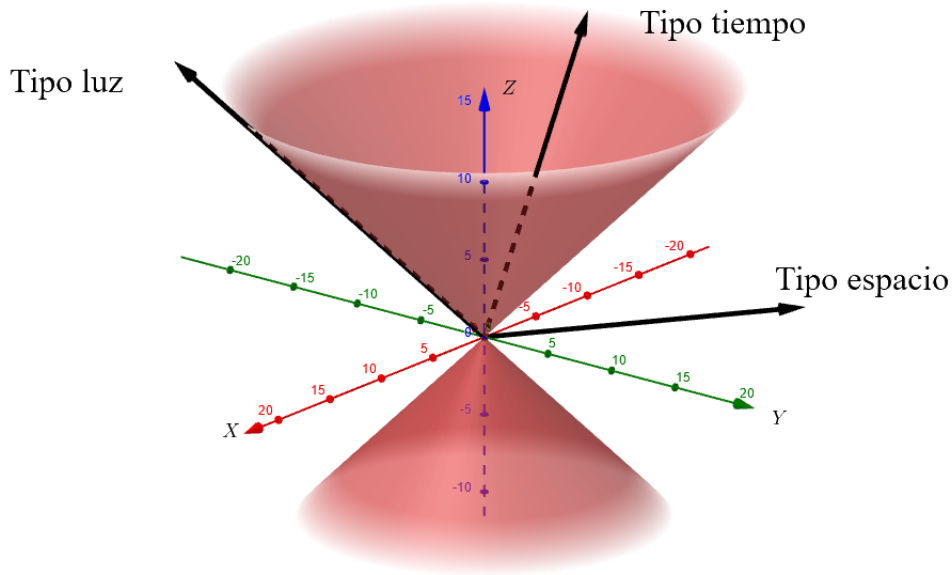


Figura 1.1: Carácter causal de vectores

Observamos que tanto \mathcal{T} como \mathcal{C} tienen dos componentes conexas, cada una en un semi espacio abierto en el complemento del plano XY .

Definición 1.4. El índice ν de una forma bilineal simétrica es el mayor número entero no negativo correspondiente a la dimensión de un subespacio $V \subset \mathbb{R}^{2,1}$ en el que $\langle \cdot, \cdot \rangle|_V$ es definida negativa.[7]

El concepto de carácter causal de un vector se puede extender a subespacios vectoriales.

Definición 1.5. Dado un subespacio vectorial $V \subset \mathbb{R}^{2,1}$, el producto interior se puede restringir a V como:

$$\langle u, v \rangle|_V = \langle u, v \rangle, \quad u, v \in V,$$

y será llamada producto interior inducido; note que, esta restricción es bilineal y simétrica.[6]

Un subespacio vectorial V se dice no degenerado si el producto interior inducido es no degenerado. El producto interior inducido en V se clasifica en uno de los siguientes tipos.

1. el producto interior inducido es definido positivo: V es llamado tipo espacio;
2. el producto interior inducido es no degenerado de índice 1: V es llamado tipo tiempo;
3. El producto interior inducido es degenerado y $V \neq 0$: V es llamado tipo luz.

El carácter causal de un vector o de un subespacio vectorial es la propiedad de ser de tipo espacio, de tipo tiempo o de tipo luz. Cualquier subespacio vectorial pertenece a uno de los tres anteriores tipos.

- Ejemplo 1.1.**
1. Los vectores e_0 y e_1 son de tipo espacio, el vector e_2 es de tipo tiempo, el vector $e_0 + e_2$ es de tipo luz.
 2. El plano $\text{span}\{e_0, e_1\}$ es de tipo espacio, los planos $\text{span}\{e_0, e_2\}$ y $\text{span}\{e_1, e_2\}$ son de tipo tiempo, el plano $\text{span}\{e_0, e_1 + e_2\}$ es de tipo luz.
 3. El vector $e_0 + e_1 + e_2$ es de tipo espacio; el plano $\text{span}\{e_0, e_0 + e_1 + e_2\}$ es de tipo luz.
 4. El vector $e_1 + e_2$ es de tipo luz; el plano $\text{span}\{e_1 + e_2, e_2\}$ es de tipo tiempo.

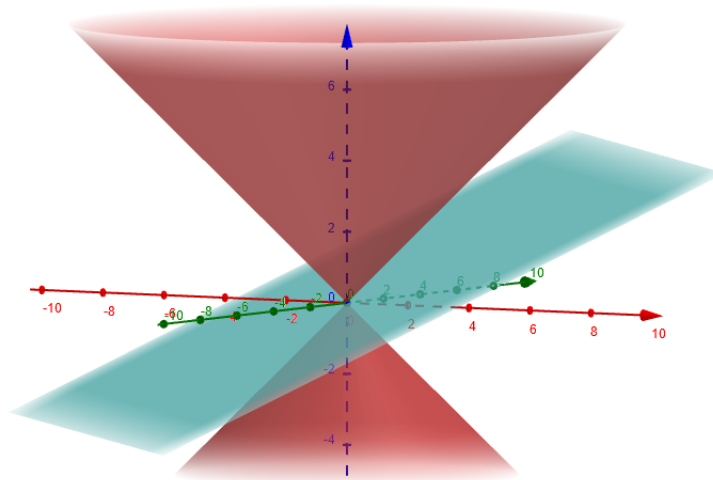


Figura 1.2: Plano tipo espacio

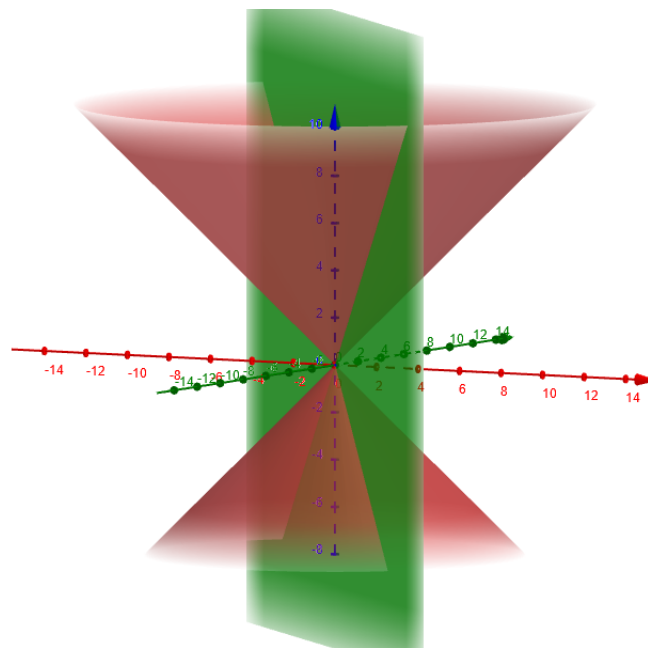


Figura 1.3: Plano tipo tiempo

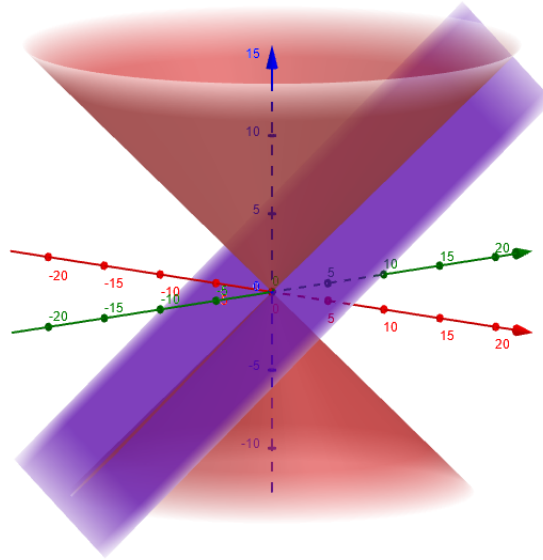


Figura 1.4: Plano tipo luz

Definición 1.6. Diremos que dos vectores u y v en $\mathbb{R}^{2,1}$ son ortogonales si $\langle u, v \rangle = 0$; diremos también que un subconjunto de $\mathbb{R}^{2,1}$ es ortogonal si todos los vectores del subconjunto son ortogonales entre sí.

A continuación damos algunas caracterizaciones y propiedades de la causalidad de un subespacio vectorial en $\mathbb{R}^{2,1}$.

Definición 1.7. Sea $V \subset \mathbb{R}^{2,1}$ un subespacio vectorial. El complemento ortogonal V^\perp de V es el subespacio $V^\perp = \{u \in \mathbb{R}^{2,1} : \langle u, v \rangle = 0, \forall v \in V\}$.

Proposición 1.1. Sea $V \subset \mathbb{R}^{2,1}$ un subespacio vectorial:

- (1) $\dim(V) + \dim(V^\perp) = \dim(\mathbb{R}^{2,1})$
- (2) $(V^\perp)^\perp = V$
- (3) Si V es no degenerado, entonces V^\perp es no degenerado.
- (4) Si v es de tipo tiempo o tipo espacio, entonces $\mathbb{R}^{2,1} = \text{Span}\{v\} \oplus \text{Span}\{v\}^\perp$
- (5) V es de tipo tiempo (resp. tipo espacio, tipo luz) si y solo si V^\perp es de tipo espacio (resp. tipo tiempo, tipo luz).

Demostración. (1) Si $\dim V = 0$, entonces $V = \{0\}$ y por tanto $V^\perp = \mathbb{R}^{2,1}$.

Si $\dim V = 3$, entonces $V = \mathbb{R}^{2,1}$ y como el producto interior es no degenerado $V^\perp = \{0\}$.

Ahora, sea $v_1 = (a_1, b_1, c_1), \dots, v_k = (a_k, b_k, c_k)$ una base de V con $k = 1, 2$, definimos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^{2,1} \rightarrow \mathbb{R}^k$, dada por :

$$T(x, y, z) = (a_1x + b_1y + c_1z, \dots, a_kx + b_ky + c_kz)$$

Notemos que el núcleo de T , $Ker(T) = V^\perp$ y que la dimensión de la imagen $T(\mathbb{R}^{2,1})$ de T es igual a la dimensión de V . Por el Teorema del Núcleo e Imagen, tenemos:

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{R}^{2,1}) &= \dim(Ker(T)) + \dim(Im(T)) \\ &= \dim(V^\perp) + \dim(V) \end{aligned}$$

(2) Aplicamos la primera parte a V y V^\perp respectivamente.

$$\begin{cases} \dim(\mathbb{R}^{2,1}) = \dim(V) + \dim(V^\perp) \\ \dim(\mathbb{R}^{2,1}) = \dim(V^\perp) + \dim((V^\perp)^\perp) \end{cases} \Rightarrow \dim(V) = \dim((V^\perp)^\perp)$$

Dado que, $\forall u \in (V^\perp)^\perp$ se cumple que $\langle u, v \rangle = 0$, así $v \in V^\perp$, entonces $u \in V$, lo que implica que $(V^\perp)^\perp \subset V$. Así, por la primera parte tenemos que estos conjuntos son iguales, pues tienen la misma dimensión.

(3) Queremos demostrar que si en V^\perp hay un vector w que es ortogonal a todos los vectores de V^\perp , entonces $w = 0$.

Sea $w \in V^\perp$, tal que $\forall u \in V^\perp$ tenemos que $\langle w, u \rangle = 0$, esto implica que $w \in (V^\perp)^\perp$, pero como $(V^\perp)^\perp = V$ deducimos que $w \in V$, esto implica que $w \in V \cap V^\perp$, pero $V \cap V^\perp = \{0\}$, lo que implica que $w = 0$, entonces V^\perp es no degenerado.

Para que la demostración este completa debemos aclarar que $V \cap V^\perp = \{0\}$, en efecto, sea $w \in V \cap V^\perp$, como $w \in V^\perp$, $\langle v, w \rangle = 0$ para todo $v \in V$, pero también $w \in V$, es decir que en V hay un vector que es ortogonal a todos los vectores en V , pero como V es no degenerado, entonces $w = 0$, así V y V^\perp solo comparten al vector cero.

(4) Sea $Span\{v\} = V$, por un teorema de álgebra lineal (Lima, Álgebra Linear p.87) tenemos:

$$\dim(V + V^\perp) + \dim(V \cap V^\perp) = \dim(V) + \dim(V^\perp)$$

aplicando (1)

$$\dim(V + V^\perp) + \dim(V \cap V^\perp) = \dim(\mathbb{R}^{2,1})$$

luego como ya vimos, para V no degenerado $V \cap V^\perp = \{0\}$, entonces $\dim(V + V^\perp) = \dim(\mathbb{R}^{2,1})$, lo que implica que $V + V^\perp = \mathbb{R}^{2,1}$ y así $Span\{v\} \oplus Span\{v\}^\perp = \mathbb{R}^{2,1}$.

(5) ■ Supongamos que V^\perp no es tipo espacio, es decir que no hay vectores tipo espacio en V^\perp , entonces para algún $w \in V^\perp$ se tiene que $\langle w, w \rangle \leq 0$, entonces para $u \in \mathbb{R}^{2,1}$, se tiene que $u = v + w$ donde $v \in V$ y $w \in V^\perp$, así:

$$\begin{aligned} \langle u, u \rangle &= \langle v + w, v + w \rangle = \langle v, v \rangle + 2\langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle \leq 0 \end{aligned}$$

esto implica que no hay ningún vector tipo espacio en $\mathbb{R}^{2,1}$, contradicción.

Así, V^\perp es tipo espacio siempre que V es tipo tiempo.

■ Ahora supongamos que V no es tipo tiempo, es decir que no hay vectores tipo tiempo en V , entonces para algún $v \in V$ se tiene que $\langle v, v \rangle \geq 0$, como $u \in \mathbb{R}^{2,1}$ se puede expresar como $u = v + w$, donde $v \in V$ y $w \in V^\perp$ (w es tipo espacio), así:

$$\begin{aligned} \langle u, u \rangle &= \langle v + w, v + w \rangle = \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle \geq 0 \end{aligned}$$

Esto significa que no hay ningún vector de tipo tiempo en $\mathbb{R}^{2,1}$, contradicción. Así, V es tipo tiempo siempre que V^\perp sea de tipo espacio.

- V es tipo espacio si y solo si V^\perp es tipo tiempo, análogo a lo anterior con el hecho de $(V^\perp)^\perp = V$.
- V es tipo luz si y solo si V^\perp es tipo luz, consecuencia de lo anterior.

□

Proposición 1.2. Dos vectores de tipo tiempo no pueden ser ortogonales.

Demostración. Sean $u = (u_0, u_1, u_2)$ y $v = (v_0, v_1, v_2)$ vectores de tipo tiempo. Supongamos que $\langle u, v \rangle = 0$, entonces

$$u_0v_0 + u_1v_1 = u_2v_2$$

por otro lado, ya que $u_0^2 + u_1^2 < u_2^2$ y $v_0^2 + v_1^2 < v_2^2$, consideremos ahora la proyección sobre las dos primeras coordenadas

$$\pi u = (u_0, u_1), \quad \pi v = (v_0, v_1)$$

ahora

$$\langle \pi u, \pi v \rangle = u_0v_0 + u_1v_1 = u_2v_2$$

elevando al cuadrado y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} (\langle \pi u, \pi v \rangle)^2 &= u_2^2v_2^2 \\ &\leq |\pi u|^2|\pi v|^2 \\ &= (u_0^2 + u_1^2)(v_0^2 + v_1^2) \\ &< u_2^2v_2^2, \end{aligned}$$

una contradicción.

□

Proposición 1.3. Un vector tipo tiempo no puede ser ortogonal a un vector de tipo luz.

Demostración. Sean $u = (u_0, u_1, u_2)$ vector de tipo tiempo y $v = (v_0, v_1, v_2)$ un vector de tipo luz. Supongamos que $\langle u, v \rangle = 0$, entonces

$$u_0v_0 + u_1v_1 = u_2v_2$$

por otro lado $u_0^2 + u_1^2 < u_2^2$ y $v_0^2 + v_1^2 = v_2^2$, consideremos ahora la proyección sobre las dos primeras coordenadas

$$\pi u = (u_0, u_1), \quad \pi v = (v_0, v_1)$$

ahora

$$\langle \pi u, \pi v \rangle = u_0v_0 + u_1v_1 = u_2v_2$$

elevando al cuadrado y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} (\langle \pi u, \pi v \rangle)^2 &= u_2^2v_2^2 \\ &\leq |\pi u|^2|\pi v|^2 \\ &= (u_0^2 + u_1^2)(v_0^2 + v_1^2) \\ &< u_2^2v_2^2, \text{ contradicción} \end{aligned}$$

□

NOTA: Cuando el producto interior es indefinido ya no podemos imaginar a los vectores ortogonales formando ángulos rectos entre si. En la Figura 1.5, se muestra como un vector de tipo luz, un vector distinto de cero, es ortogonal a si mismo.[7]

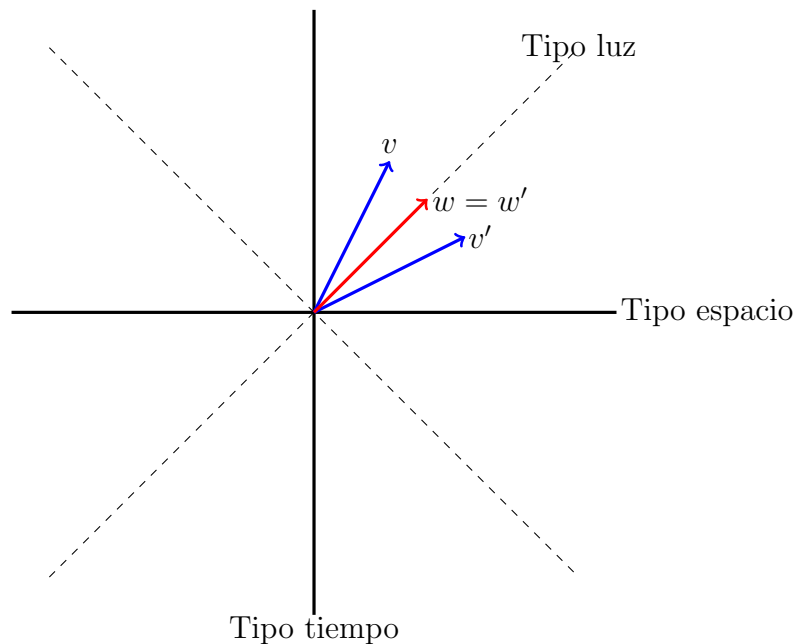


Figura 1.5: Dos vectores son ortogonales si y sólo si se obtiene una de la otra por reflexión a lo largo de una diagonal

Comparando con el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 , la existencia de vectores tipo tiempo y tipo luz generan algunas propiedades extrañas, como las siguientes.

- Proposición 1.4.** (1) Dos vectores de tipo luz $u, v \in \mathbb{R}^{2,1}$ son linealmente dependientes si y solo si $\langle u, v \rangle = 0$.
- (2) Si u y v son dos vectores de tipo tiempo, entonces $\langle u, v \rangle \neq 0$.
- (3) Si u y v son dos vectores de tipo tiempo o de tipo luz con $\langle u, v \rangle = 0$, entonces ellos son vectores de tipo luz.
- (4) Si V es un subespacio vectorial de tipo luz, entonces $\dim(V \cap V^\perp) = 1$.

Demostración. (1) Sean $u = (u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{R}^{2,1}$ y $v = (\lambda u_0, \lambda u_1, \lambda u_2) \in \mathbb{R}^{2,1}$ vectores linealmente dependientes tipo luz y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\langle u, v \rangle = \lambda u_0^2 + \lambda u_1^2 - \lambda u_2^2 = \lambda(u_0^2 + u_1^2 - u_2^2) = \lambda \cdot 0 = 0$$

Recíprocamente, si $\langle u, v \rangle = 0$ entonces:

$$u_0 v_0 + u_1 v_1 - u_2 v_2 = 0 \Rightarrow u_0 v_0 + u_1 v_1 = u_2 v_2$$

Elevando al cuadrado tendremos:

$$u_0^2 v_0^2 + u_1^2 v_1^2 + 2u_0 v_0 u_1 v_1 = u_2^2 v_2^2 \cdots (*)$$

Además como u y v son vectores tipo luz:

$$\begin{aligned}\langle u, u \rangle &= u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 = 0 \Rightarrow u_0^2 + u_1^2 = u_2^2 \\ \langle v, v \rangle &= v_0^2 + v_1^2 - v_2^2 = 0 \Rightarrow v_0^2 + v_1^2 = v_2^2\end{aligned}$$

Multiplicando tendremos $(u_0^2 + u_1^2)(v_0^2 + v_1^2) = u_2^2 v_2^2$

$$u_0^2 v_0^2 + u_0^2 v_1^2 + u_1^2 v_0^2 + u_1^2 v_1^2 = u_2^2 v_2^2 \quad \dots (**)$$

Igualando (*) con (**):

$$u_0^2 v_0^2 + u_1^2 v_1^2 + 2u_0 v_0 u_1 v_1 = u_0^2 v_0^2 + u_0^2 v_1^2 + u_1^2 v_0^2 + u_1^2 v_1^2$$

de donde $(u_0 v_2 - u_1 v_1)^2 = 0$, entonces $u_0 v_1 = u_1 v_0$, así $\frac{u_0}{v_0} = \frac{u_1}{v_1} = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, así $u_0 = \lambda v_0$, $u_1 = \lambda v_1$.

Reemplazando en $u_0 v_0 + u_1 v_1 = u_2 v_2$, tendremos $\lambda v_0^2 + \lambda v_1^2 = u_2 v_2$, entonces $\lambda(v_0^2 + v_1^2) = u_2 v_2$ así tenemos que $\lambda v_2^2 = u_2 v_2$, así $\lambda v_2 = u_2$, lo que implica que $u = \lambda v$.

- (2) Sean u y v vectores tipo tiempo, ahora como $\mathbb{R}^{2,1} = \text{Span}\{v\} \oplus \text{Span}\{v\}^\perp$, donde el $\text{Span}\{v\}^\perp$ es de tipo espacio, luego podemos escribir $u = x + \lambda v$ con x tipo espacio y λv tipo tiempo, entonces:

$$\langle u, v \rangle = \langle x + \lambda v, v \rangle = \langle x, v \rangle + \lambda \langle v, v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle$$

pero $\langle v, v \rangle \neq 0$. Ahora $\lambda \neq 0$ pues, si $\lambda = 0$ entonces $u = x$ lo que implica que u sería tipo espacio, lo cual es una contradicción. Así $\langle u, v \rangle \neq 0$.

- (3) De la parte (2) tenemos que si u y v son vectores de tipo tiempo, entonces $\langle v, v \rangle \neq 0$, de esa manera si $\langle v, v \rangle = 0$, entonces u y v son vectores de tipo luz.
- (4) Como V es un subespacio tipo luz, entonces V^\perp también es un subespacio tipo luz esto por la Proposición 1.1, ahora si $u, v \in V \cap V^\perp$, entonces son linealmente dependientes, esto prueba que $\dim(V \cap V^\perp) \leq 1$, ahora si $\dim(V \cap V^\perp) = 0$, entonces tendríamos $\mathbb{R}^{2,1} = V \oplus V^\perp$ por lo que todo vector de $\mathbb{R}^{2,1}$ sería tipo luz. □

Ahora estudiaremos los subespacios vectoriales tipo tiempo.

Proposición 1.5. Sea $P \subset \mathbb{R}^{2,1}$ un plano, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1) P es un subespacio tipo tiempo.
- (2) P contiene dos vectores linealmente independientes tipo luz.
- (3) P contiene un vector tipo tiempo.

Demostración. **(1 \Rightarrow 2)** Sea $P \subset \mathbb{R}^{2,1}$ de de tipo tiempo, por definición $\langle \cdot, \cdot \rangle \Big|_P$ tiene índice 1, es decir, existe $W \subset P$ (una recta) tal que $\langle \cdot, \cdot \rangle \Big|_W$ es definido negativo. Ahora tome $u \in W$ tal que $\langle u, u \rangle = -1$, tome $v_1 \notin W$, por Gram-Schmidt, existe $v \in P$ tal que $\langle u, v \rangle = 0$, $\{u, v\}$ base ortonormal de P , con u tipo espacio y v tipo tiempo, de esa manera $u+v$ y $u-v$ son vectores linealmente independientes tipo luz.

(2 \Rightarrow 3) Si u y v son dos vectores linealmente independientes tipo luz de P , entonces $u+v$ o $u-v$ es un vector tipo tiempo, pues:

$$\langle u+v, u+v \rangle = \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle = 2\langle u, v \rangle$$

$$\langle u-v, u-v \rangle = \langle u, u \rangle - 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle = -2\langle u, v \rangle$$

note que $\langle u, v \rangle \neq 0$ por la Proposición 1.4 .

(3 \Rightarrow 1) Sea v un vector tipo tiempo de P , entonces $P^\perp \subset \text{Span}\{v\}^\perp$ y $\text{Span}\{v\}^\perp$ es un subespacio de tipo espacio, así P^\perp es tipo espacio, lo que implica que P es tipo tiempo. □

Caracterizamos ahora los subespacios vectoriales tipo luz.

Proposición 1.6. *Sea V un subespacio de $\mathbb{R}^{2,1}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(1) V es subespacio de tipo luz.

(2) V contiene un vector de tipo luz, pero no un vector de tipo tiempo.

(3) $V \cap \mathcal{C} = L - \{0\}$, y $\dim(L) = 1$.

Demostración. **(1 \Rightarrow 2)** Como V es un subespacio tipo luz, el producto interior inducido es degenerado, así existe un vector tipo luz. Por la Proposición 1.5 no hay vectores tipo luz.

(2 \Rightarrow 3) Como existen vectores tipo luz $V \cap \mathcal{C}$ es un conjunto no vacío, usando la Proposición 1.5, si hay vectores tipo luz linealmente independientes entonces hay un vector tipo tiempo.

(3 \Rightarrow 1) Por la Proposición 1.5 V no es un subespacio ni tipo tiempo, ni tipo espacio. □

Proposición 1.7. *Sea P un plano de $\mathbb{R}^{2,1}$. Denotamos por \vec{n}_e al vector ortogonal con el producto interior euclidiano. Entonces P es tipo espacio (resp. tipo tiempo, tipo luz) si y solo si \vec{n} es tipo tiempo (resp. tipo espacio, tipo luz).*

Demostración. Si escribimos a $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\}$, entonces \vec{n}_e es proporcional a (a, b, c) .

Luego podemos escribir a P como:

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by - (-c)z = 0\} = \text{span}\{(a, b, -c)\}^\perp$$

Así el carácter causal de $(a, b, -c)$ es el mismo que el de \vec{n}_e , y por la Proposición 1.1 se prueba el resultado. \square

Definimos ahora la norma de un vector.

Definición 1.8. Sea $u \in \mathbb{R}^{2,1}$, la norma de u es $|u| = \sqrt{|\langle u, u \rangle|}$. El vector u es llamado unitario si $|u| = 1$.

Proposición 1.8. Si $P = \text{span}\{v\}^\perp$ es un plano tipo espacio, entonces

$$|v|_e \geq |v|$$

donde el subíndice e representa los cálculos hechos con el producto interior euclidiano.

Demostración. Es suficiente si $|v| = 1$.

Asumimos $\vec{n}_e = (a, b, c)$, con $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, entonces $P = \text{span}\{v\}^\perp$ donde

$$v = \frac{(a, b, -c)}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}}$$

que satisface $\langle v, v \rangle = -1$, luego la norma euclidiana $|v|_e$ es

$$|v|_e^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{c^2 - a^2 - b^2} = \frac{1}{c^2 - a^2 - b^2} \geq 1$$

pues $c^2 - a^2 - b^2 = 1 - a^2 - b^2 - a^2 - b^2 = 1 - 2(a^2 + b^2) \leq 1$ \square

Este resultado dice que cuando se dibuja el vector ortogonal a un plano tipo espacio, el tamaño (euclidiano) es mayor que el vector ortogonal unitario euclidiano.

1.2. Vectores de tipo tiempo

Recordemos que \mathcal{T} es el conjunto de vectores de tipo tiempo de $\mathbb{R}^{2,1}$. Para cada $u \in \mathcal{T}$, definimos el cono temporal de u , como el conjunto dado por

$$C(u) = \{v \in \mathcal{T} : \langle u, v \rangle < 0\}$$

Este conjunto es no vacío pues, $u \in C(u)$.

Además, si v es otro vector tipo tiempo, y como $\langle u, v \rangle \neq 0$ (Proposición ?? entonces $\langle u, v \rangle < 0$, $\langle u, v \rangle > 0$). Esto significa que \mathcal{T} es unión disjunta $\mathcal{T} = C(u) \cup C(-u)$, con $C(u) \cap C(-u) = \emptyset$, algunas de las propiedades de los conos temporales son:

Proposición 1.9. (1) Dos vectores de tipo tiempo u y v se encuentran en el mismo cono temporal si y solo si $\langle u, v \rangle < 0$.

(2) $u \in C(v)$ si y solo si $C(u) = C(v)$.

(3) Los conos temporales son conjuntos convexos.

Demostración. (1) Si $\langle u, v \rangle < 0$, entonces $u \in C(v)$. Supongamos que $u, v \in C(w)$, y como $C(w/|w|) = C(w)$, podemos suponer $\langle w, w \rangle = -1$, así escribimos

$$\begin{aligned} u &= x + aw \\ v &= y + bw \end{aligned}$$

con $x, y \in \text{span}\{w\}^\perp$, y como $\text{span}\{w\}^\perp$ es un subespacio tipo espacio, entonces se cumple que $|\langle x, y \rangle| \leq |x||y|$ y

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \langle x + aw, y + bw \rangle \\ &= \langle x, y \rangle - ab \\ &\leq -ab + |x||y| \end{aligned}$$

pero como $\langle x, x \rangle < a^2$ y $\langle y, y \rangle < b^2$, se tiene que:

$$\langle u, v \rangle < 0$$

(2) Si $u \in C(v)$ entonces $\langle u, v \rangle < 0$, entonces $v \in C(u)$.

(3) Asumimos que $u, v \in C(w)$ y sea $t \in [0, 1]$, entonces

$$\langle tu + (1-t)v, w \rangle = t\langle u, w \rangle + (1-t)\langle v, w \rangle < 0$$

esto significa que $tu + (1-t)v \in C(w)$

□

Una diferencia que encontramos entre \mathbb{R}^3 y $\mathbb{R}^{2,1}$ se refiere a la desigualdad de Cauchy-Schwarz, recordemos que si $u, v \in \mathbb{R}^3$ la desigualdad de Cauchy-Schwarz afirma que $|\langle u, v \rangle| \leq |u||v|$ y la igualdad se cumple si y solo si u y v son proporcionales.

En el espacio de Minkowski para vectores tipo tiempo, existe la desigualdad invertida de Cauchy-Schwarz.

Teorema 1.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz invertida). Sean $u, v \in \mathbb{R}^{2,1}$ vectores de tipo tiempo, entonces

$$|\langle u, v \rangle| \geq |u||v|;$$

la igualdad se da cuando u y v son proporcionales, en caso que los vectores se encuentren en el mismo cono temporal, existe un único número $\varphi \geq 0$ tal que

$$\langle u, v \rangle = -|u||v| \cosh \varphi$$

el número φ es llamado el ángulo hiperbólico entre u y v .

Demostración. Sean $a \in \mathbb{R}$ y $\bar{u} \in \mathbb{R}^{2,1}$ tales que $u = av + \bar{u}$ con $v \perp \bar{u}$, esta descomposición siempre es posible Proposición 1.1. Entonces

$$\begin{aligned} \langle u, u \rangle &= \langle av + \bar{u}, av + \bar{u} \rangle \\ &= a^2 \langle v, v \rangle + 2a \langle v, \bar{u} \rangle + \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle \\ &= a^2 \langle v, v \rangle + \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle \end{aligned}$$

entonces $a^2 \langle v, v \rangle = \langle u, u \rangle - \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle \cdots (*)$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle^2 &= \langle av + \bar{u}, v \rangle^2 \\ &= (a \langle v, v \rangle + \langle v, \bar{u} \rangle)^2 \\ &= a^2 \langle v, v \rangle^2 \\ &= \langle v, v \rangle \cdot a^2 \langle v, v \rangle, \text{ aplicando } (*) \\ &= \langle v, v \rangle (\langle u, u \rangle - \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle) > \langle v, v \rangle \langle u, u \rangle \\ &= |v|^2 |u|^2 \end{aligned}$$

así, tendremos

$$|\langle u, v \rangle| > |u||v|$$

La igualdad se dará si y solo si $\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle = 0$ es decir si y solo si u, v son colineales.

Para la segunda parte, si u, v están en el mismo cono es decir $\langle u, v \rangle < 0$, entonces

$$\frac{-\langle u, v \rangle}{|u||v|} \geq 1$$

Como la función coseno hiperbólico $\cosh : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ es inyectiva, existe un único número $\varphi \in [0, \infty)$ tal que

$$\cosh \varphi = \frac{-\langle u, v \rangle}{|u||v|}$$

por tanto

$$\langle u, v \rangle = -|u||v| \cosh \varphi$$

□

Corolario 1.1 (Desigualdad triangular invertida). *Si u, v son vectores tipo tiempo que están en el mismo cono temporal, entonces*

$$|u| + |v| \leq |u + v|$$

y la igualdad se da si y sólo si u, v son colineales.

Demostración. Como u, v están en el mismo cono temporal, entonces $u + v$ es tipo tiempo y $\langle u, v \rangle < 0$, entonces

$$\begin{aligned} |u + v|^2 &= -\langle u + v, u + v \rangle \\ &= |u|^2 + 2|\langle u, v \rangle| + |v|^2, \text{ por el Teorema 1.1} \\ &\geq |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2 \\ &= (|u| + |v|)^2 \end{aligned}$$

además la igualdad se da si y sólo si $|\langle u, v \rangle| = |u||v|$, es decir si y sólo si u, v son colineales. Por lo tanto

$$|u + v| \geq |u| + |v|$$

□

1.3. Producto Cruz

Dados dos vectores en $\mathbb{R}^{2,1}$ linealmente independientes, existe un única recta que pasa por el origen ortogonal a ambos. A continuación se muestra como construir la dirección de tal recta.

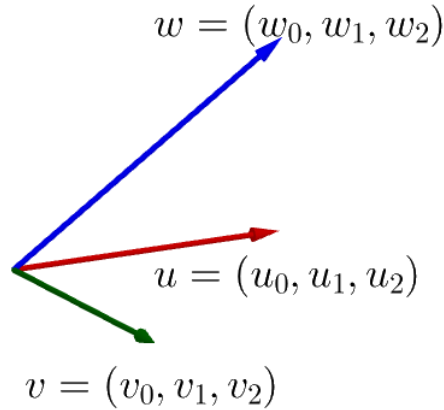


Figura 1.6: Producto cruz

Tenemos que: $\langle u, w \rangle = 0$ y $\langle v, w \rangle = 0$, luego

$$\begin{aligned} u_0 w_0 + u_1 w_1 - u_2 w_2 = 0 &\Rightarrow u_0 v_0 w_0 + u_1 v_0 w_1 - u_2 v_0 w_2 = 0 \\ v_0 w_0 + v_1 w_1 - v_2 w_2 = 0 &\Rightarrow u_0 v_0 w_0 + u_0 v_1 w_1 - u_0 v_2 w_2 = 0, \end{aligned}$$

sumando

$$(u_1 v_0 - u_0 v_1) w_1 + (u_0 v_2 - u_2 v_0) w_2 = 0$$

Una solución particular es: $w_2 = u_1 v_0 - u_0 v_1$, entonces $w_1 = u_2 v_0 - u_0 v_2$. Así,

$$\begin{aligned} u_0 w_0 + u_1 (u_2 v_0 - u_0 v_2) - u_2 (u_1 v_0 - u_0 v_1) &= 0 \\ u_0 w_1 + u_1 u_2 v_0 - u_0 u_1 v_2 - u_1 u_2 v_0 - u_0 u_2 v_1 &= 0 \parallel \div u_0 \\ w_0 + u_2 v_1 - u_1 v_2 &= 0 \Rightarrow w_0 = u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{aligned}$$

Por tanto

$$w = (u_1 v_2 - u_2 v_1, u_2 v_0 - u_0 v_2, u_1 v_0 - u_0 v_1)$$

Definición 1.9. Sean $u = (u_0, u_1, u_2)$, $v = (v_0, v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{2,1}$. Definimos el producto cruz en el espacio de Minkowski como:

$$u \times v = \begin{vmatrix} e_0 & e_1 & -e_2 \\ u_0 & u_1 & u_2 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{vmatrix} = (u_1 v_2 - u_2 v_1, u_2 v_0 - u_0 v_2, u_1 v_0 - u_0 v_1)$$

Proposición 1.10. El producto cruz satisface las siguientes propiedades.

1. $u \times v$ es ortogonal a u y a v .
2. $(u + v) \times w = u \times w + v \times w$, $w \times (u + v) = w \times u + w \times v$
3. $(\alpha u) \times v = \alpha(u \times v) = u \times (\alpha v)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

4. $u \times v = -v \times u$

5. $u \times v = 0$ si y sólo si u y v son linealmente independientes

6. $|u \times v|^2 + |u|^2|v|^2 = \langle u, v \rangle^2$ (Identidad de Lagrange)

7. $|u \times v| = |u||v| \sinh \theta$

Demostración. (6) Sean $u = (u_0, u_1, u_2)$ y $v = (v_0, v_1, v_2)$

$$\begin{aligned}
 |u \times v|^2 - \langle u, v \rangle^2 &= \langle u \times v, u \times v \rangle - \langle u, v \rangle^2 \\
 &= \langle (u_1v_2 - u_2v_1, u_2v_0 - u_0v_2, u_1v_0 - u_0v_1), \\
 &\quad (u_1v_2 - u_2v_1, u_2v_0 - u_0v_2, u_1v_0 - u_0v_1) \rangle - (u_0v_0 + u_1v_1 + u_2v_2)^2 \\
 &= u_1^2v_2^2 - 2u_1u_2v_1v_2 + u_2^2v_1^2 + u_2^2v_0^2 - 2u_0u_2v_0v_2 + u_0^2v_2^2 \\
 &\quad - u_1^2v_0^2 + 2u_0u_1v_0v_1 - u_0^2v_1^2 - u_0^2v_0^2 - u_1^2v_1^2 - u_2^2v_2^2 - 2u_0u_1v_0v_1 \\
 &\quad + 2u_0u_2v_0v_2 + 2u_1u_2v_1v_2 \\
 &= -v_0^2(u_0^2 + u_1^2 - u_2^2) - v_1^2(u_0^2 + u_1^2 - u_2^2) + v_2^2(u_0^2 + u_1^2 - u_2^2) \\
 &= -(u_0^2 + u_1^2 - u_2^2)(v_0^2 + v_1^2 - v_2^2) \\
 &= -|u|^2|v|^2
 \end{aligned}$$

(7) De la Identidad de Lagrange: $|u \times v|^2 + |u|^2|v|^2 = \langle u, v \rangle^2$ y como $\langle u, v \rangle = -|u||v| \cosh \theta$, entonces:

$$\begin{aligned}
 |u \times v|^2 &= -|u|^2|v|^2 + |u|^2|v|^2 \cosh^2 \theta \\
 &= |u|^2|v|^2(-1 + \cosh^2 \theta) \\
 &= |u|^2|v|^2 \sinh^2 \theta
 \end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Superficies

Antes de entrar a la definición de superficies, daremos una breve definición a concepto de curva.

Definición 2.1. Una curva diferenciable o de clase C^k , α , en el espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{2,1}$ es una aplicación $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ de clase C^k con dominio I un abierto conexo (un intervalo) de \mathbb{R} . Vamos a trabajar con curvas diferenciables. Una curva diferenciable se dice regular, si $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Decimos que la curva es lisa o C^∞ si α es C^∞ .

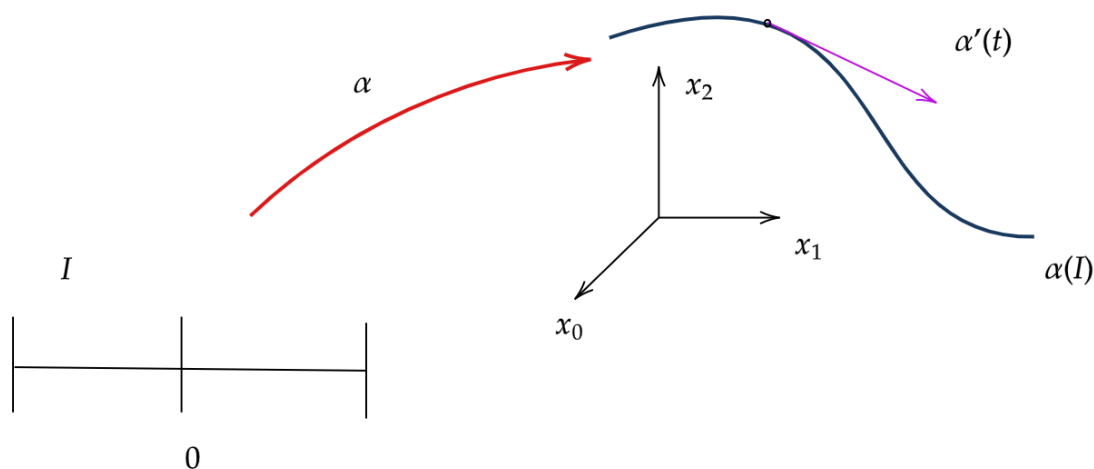


Figura 2.1: Curvas en $\mathbb{R}^{2,1}$

En general el carácter causal del vector tangente a una curva en el espacio de Minkowski depende del punto de la curva. Pero hay curvas especiales donde dicho carácter causal es constante a lo largo de esa curva.

Definición 2.2. Decimos que una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ es de tipo:[6]

- Tiempo si $\alpha'(t)$ es de tipo tiempo para todo $t \in I$
- Espacio si $\alpha'(t)$ es de tipo espacio para todo $t \in I$
- Luz si $\alpha'(t)$ es de tipo luz para todo $t \in I$

Ejemplo 2.1. Sea la curva $\alpha(t) = \left(\cosh t, \frac{t^2}{2}, \sinh t \right)$, que tiene derivada:

$$\alpha'(t) = (\sinh t, t, \cosh t)$$

calculando su producto interior:

$$\begin{aligned} \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle &= \langle (\sinh t, t, \cosh t), (\sinh t, t, \cosh t) \rangle \\ &= \sinh^2 t + t^2 - \cosh^2 t \\ &= t^2 - 1 \end{aligned}$$

Así, tendremos que:

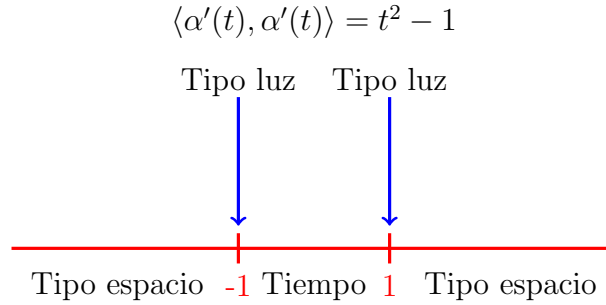


Figura 2.2: Carácter causal de α

La definición de superficie en $\mathbb{R}^{2,1}$ es idéntica a la definición para \mathbb{R}^3 [3], puesto que la definición sólo depende de la estructura diferenciable del espacio ambiente y no de su métrica (producto interior).

Definición 2.3. Una superficie regular en $\mathbb{R}^{2,1}$ es un conjunto $M \subset \mathbb{R}^{2,1}$ tal que para cada punto $p \in M$ existe una vecindad V de p en M (con la topología inducida por $\mathbb{R}^{2,1}$) y una aplicación $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap M$, de un conjunto abierto U de \mathbb{R}^2 sobre $V \cap M \subset \mathbb{R}^{2,1}$, que satisface lo siguiente:

- i. $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ es diferenciable.
- ii. $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap M \subset \mathbb{R}^{2,1}$ es un homeomorfismo.
- iii. Para cada $q \in U \subset \mathbb{R}^2$ la diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ es inyectiva.

X es una parametrización.

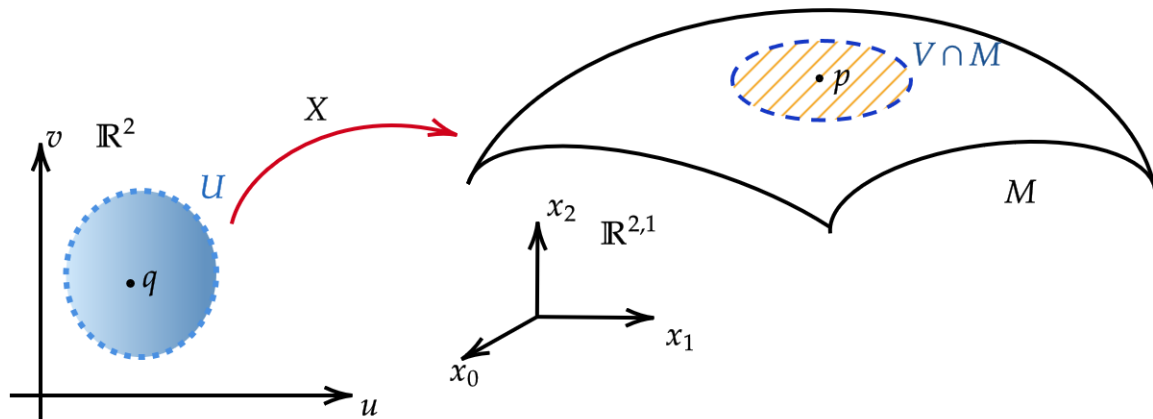


Figura 2.3: Superficie en $\mathbb{R}^{2,1}$

El siguiente resultado es una consecuencia del teorema de la función inversa.

Proposición 2.1 (Imagen inversa de un valor regular). *Sea $f : V \subset \mathbb{R}^{2,1} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y $a \in f(V) \subset \mathbb{R}$ un valor regular de f , entonces $f^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^{2,1} : f(x, y, z) = a\}$ es una superficie regular.*

Definición 2.4 (Clasificación causal de las superficies). *Sea M una superficie en $\mathbb{R}^{2,1}$. Decimos que:*

- M es tipo espacio si para todo $p \in M$, el plano tangente $T_p M$ es tipo espacio.
- M es tipo tiempo si para todo $p \in M$, el plano tangente $T_p M$ es tipo tiempo.
- M es tipo luz si para todo $p \in M$, el plano tangente $T_p M$ es tipo luz.

Ejemplo 2.2 (Plano tipo tiempo). El plano cuya normal (con el producto interior euclidiano) es tipo espacio es un plano tipo tiempo. Un plano de ecuación escalar $P : ax + by + cz = d$ con normal euclidiana $n_e = (a, b, c)$, será tipo tiempo si (a, b, c) es tipo espacio. En particular el plano $P : 3x + 2y - 2z = 2$, con normal $n_e = (3, 2, -2)$ de tipo espacio, es un plano de tipo tiempo.

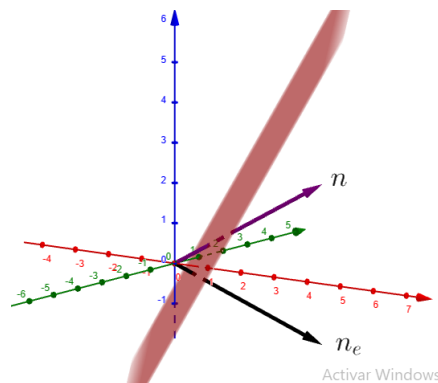


Figura 2.4: Plano tipo tiempo

Ejemplo 2.3 (El espacio de De Sitter). Un mejor análogo a la esfera unitaria, consideremos $\mathbb{S}^{1,1}$, el conjunto de puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^{2,1}$ tales que $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Podemos usar la Proposición 2.1, puesto que $\mathbb{S}^{1,1} = f^{-1}(1)$, donde $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. El número 1 es un valor regular de f y por tanto $f^{-1}(1)$ es una superficie regular.

Sea $\mathbb{S}^{1,1} : \langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle = 1$, entonces $\mathbb{S}^{1,1} : x^2 + y^2 - z^2 = 1$, donde $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{S}^2$ es una curva regular con $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, ahora si derivamos $x(t)^2 + y(t)^2 - z(t)^2 = 1$ respecto de t , tendremos

$$\begin{aligned} 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) - 2z(t)z'(t) &= 0 \\ x(t)x'(t) + y(t)y'(t) - z(t)z'(t) &= 0 \\ \langle (x(t), y(t), z(t)), (x'(t), y'(t), z'(t)) \rangle &= 0 \\ \langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle &= 0 \end{aligned}$$

lo que implica que $\alpha(t) \perp \alpha'(t)$, así podemos escoger a $\alpha(t) = N(\alpha(t))$ como la normal de tipo espacio y de esa forma $T_p\mathbb{S}^{1,1}$ es tipo tiempo, entonces $\mathbb{S}^{1,1}$ es una superficie de tipo tiempo.

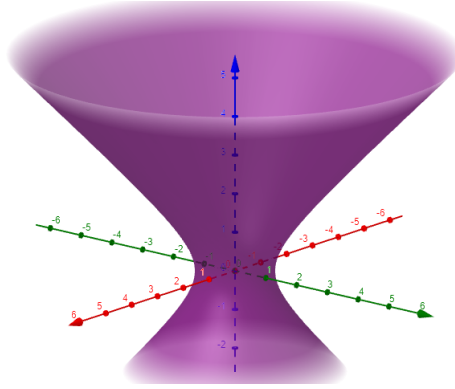


Figura 2.5: Espacio de De Sitter

Ejemplo 2.4 (Gráfica de una función diferenciable). Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces definimos la gráfica de f como el conjunto

$$M = \text{Graf}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^{2,1} : z = f(x, y), (x, y) \in U\}$$

Ahora, podemos parametrizar M con una sola aplicación.

$$\begin{aligned} X : U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^{2,1} \\ (u, v) &\mapsto (u, v, f(u, v)) \end{aligned}$$

Tomando las derivadas parciales

$$X_u = (1, 0, f_u), \quad X_v = (0, 1, f_v)$$

La normal sera $N(u, v) = X_u \times X_v = (f_u, f_v, 1)$ (normal no unitaria), luego

$$\begin{aligned} \langle N, N \rangle &= f_u^2 + f_v^2 - 1 \\ &= |\nabla f|^2 - 1 \end{aligned}$$

así, para que N sea tipo espacio $|\nabla f|^2 - 1 > 0 \Rightarrow |\nabla f|^2 > 1$.

Por tanto, M será tipo tiempo si y solo si $|\nabla f| > 1$.

Definición 2.5 (Superficie reglada). Una superficie reglada es una superficie que genera una recta L que se mueve sobre una curva β . Las diversas posiciones de la recta generatriz L se llaman reglas de la superficie. Una superficie así tiene siempre una parametrización en la forma

$$X(u, v) = \beta(u) + v\delta(u)$$

donde decimos que β es la curva base, y δ la curva directriz. De manera alterna δ suele representarse como un campo vectorial en β que apunta a lo largo de la recta L . [8]

2.1. El operador de forma

2.1.1. Aplicaciones lineales sobre $\mathbb{R}^{1,1} \rightarrow \mathbb{R}^{1,1}$

$$S_p = -dN_p = T_pM \rightarrow T_pM, \quad M \text{ Superficie de tipo tiempo}$$

Notación: El plano de Lorentz $\mathbb{R}^{1,1} = (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle = x_0^2 - x_1^2)$

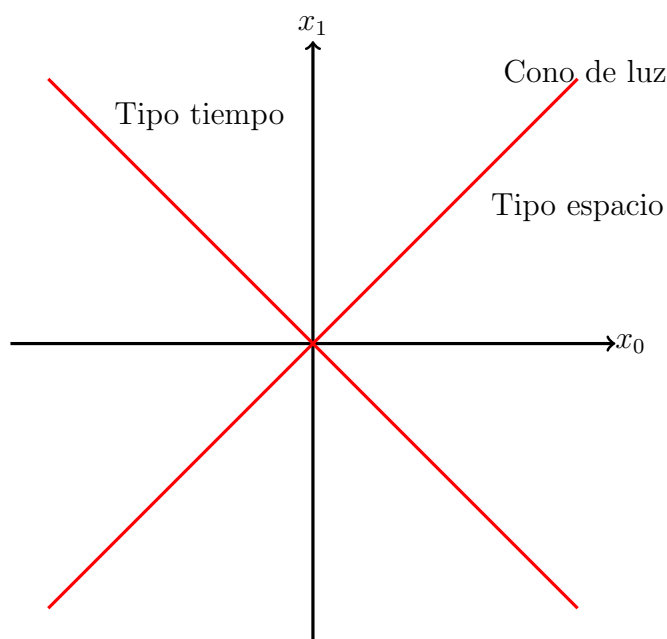


Figura 2.6: El plano de Lorentz

$S : \mathbb{R}^{1,1} \rightarrow \mathbb{R}^{1,1}$, es una aplicación lineal autoadjunta, es decir:

$$\langle Sw_1, w_2 \rangle = \langle w_1, Sw_2 \rangle, \quad w_1, w_2 \in \mathbb{R}^{1,1}$$

La matriz de S en la base ortonormal $\{e_0 = (1, 0), e_1 = (0, 1)\}$

$$S = \begin{bmatrix} Se_0 & : & Se_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
Se_0 &= \alpha e_0 + \beta e_1 & Se_1 &= \gamma e_0 + \rho e_1 \\
\langle Se_0, e_0 \rangle &= \alpha \underbrace{\langle e_0, e_0 \rangle}_1 = \alpha & \langle Se_1, e_0 \rangle &= \gamma \underbrace{\langle e_0, e_0 \rangle}_1 = \gamma \\
\langle Se_0, e_1 \rangle &= \beta \underbrace{\langle e_1, e_1 \rangle}_{-1} = -\beta & \langle Se_1, e_1 \rangle &= \rho \underbrace{\langle e_1, e_1 \rangle}_{-1} = -\rho
\end{aligned}$$

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle Se_0, e_0 \rangle & \langle Se_1, e_0 \rangle \\ -\langle Se_0, e_1 \rangle & -\langle Se_1, e_1 \rangle \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \nearrow \lambda_{e_1, Se_0} \\ \\ \end{matrix}$$

Así, la matriz de una transformación lineal autoadjunta en $\mathbb{R}^{1,1}$ en la base canónica es:

$$S = \begin{pmatrix} a & c \\ -c & b \end{pmatrix}$$

Para determinar los autovalores, la ecuación característica es: $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & c \\ -c & b - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Así,

$$\begin{aligned}
(a - \lambda)(b - \lambda) + c^2 &= 0 \\
\lambda^2 - (a + b)\lambda + (ab + c^2) &= 0
\end{aligned}$$

Analizamos el discriminante:

$$\begin{aligned}
\Delta &= (a + b)^2 - 4(ab + c^2) \\
&= a^2 + 2ab + b^2 - 4ab - 4c^2 \\
&= (a - b)^2 - 4c^2
\end{aligned}$$

Así, vemos que el discriminante puede tomar tres posibles valores, mayor a cero, igual a cero o menor a cero.

- i.** $\Delta > 0$, esto implica que se tendrá dos autovalores reales diferentes $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, lo que implica que la matriz de S es diagonalizable sobre \mathbb{R} .

$$PSP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

- ii.** $\Delta = 0$, esto implica que se tendrá autovalores reales repetidos, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$PSP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Caso particular de **i.**

$$PSP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

No es diagonalizable sobre \mathbb{C}

- iii.** $\Delta < 0$, esto implica que se tendrá dos autovalores complejos conjugados, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = m + in$, entonces la matriz de S es diagonalizable sobre \mathbb{C} pero no sobre \mathbb{R} .

$$PSP^{-1} = \begin{pmatrix} m & -n \\ n & m \end{pmatrix}$$

En resumen lo que tenemos en el Espacio de Minkowski es:

Curvatura de Gauss: $K = \det(S_p)$

Curvatura Media: $H = \frac{1}{2}tr(S_p)$

$$\det(S_p - \lambda I) = 0$$

$$\lambda^2 - 2H + K = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2H \pm \sqrt{4(H^2 - K)}}{2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}$$

a) $H^2 - K > 0$

b) $H^2 - K = 0$

c) $H^2 - K < 0$

$$S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} m & -n \\ n & m \end{pmatrix}$$

De aquí nos interesa el caso **(b)**, una superficie será una superficie casi umbílica si el operador de forma es no diagonalizable sobre \mathbb{C} .

A continuación presentamos algunas definiciones que resumen el análisis hecho anteriormente.

Para una superficie regular M en el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 , es bien conocido, que el operador de forma en cualquier punto $p \in M$ es un operador lineal autoadjunto $S_p : T_pM \rightarrow T_pM$ y por tanto, es diagonalizable sobre \mathbb{R} . Pero para una superficie tipo tiempo M en el espacio tridimensional de Minkowski $\mathbb{R}^{2,1}$, esto ya no es necesariamente cierto; el operador de forma sigue siendo autoadjunto, pero como el producto interior en T_pM es indefinido, puede tener cualquiera de los tres tipos algebraicos; diagonalizable sobre \mathbb{R} , diagonalizable sobre \mathbb{C} pero no sobre \mathbb{R} , o no diagonalizable sobre \mathbb{C} con un único vector propio nulo.

Un punto umbílico de una superficie regular M en el espacio euclidiano o en el de Minkowski es un punto $p \in M$ para el que la segunda forma fundamental II_p de M es un múltiplo escalar de la primera forma fundamental I_p . En el caso euclidiano, la curvatura de Gauss K y la curvatura media H de M satisfacen $H^2 - K \geq 0$, y los puntos umbilicales son precisamente los puntos en los que $H^2 - K = 0$. Pero para una superficie tipo tiempo en el espacio de Minkowski, la cantidad $H^2 - K$ puede tomar cualquier valor real, en concreto:

1. Si el operador de forma es diagonalizable sobre \mathbb{R} , entonces $H^2 - K \geq 0$ con $H^2 - K = 0$ precisamente en los puntos umbilicales.
2. Si el operador de forma es diagonalizable sobre \mathbb{C} pero no sobre \mathbb{R} entonces $H^2 - K < 0$.
3. Si el operador de forma es no diagonalizable sobre \mathbb{C} , entonces $H^2 - K = 0$.

Debido a esta relación entre H y K en el caso (3), hacemos la siguiente definición:

Definición 2.6. Sea M una superficie regular tipo tiempo en $\mathbb{R}^{2,1}$, un punto p se llamará casi umbílico si el operador de forma $S_p : T_pM \rightarrow T_pM$ es no diagonalizable sobre \mathbb{C} . [1]

Definición 2.7. Una superficie regular de tipo tiempo M en $\mathbb{R}^{2,1}$, se llamará totalmente casi umbílica si cada punto $p \in M$ es casi umbílico. [1]

La **primera y segunda formas fundamentales** $I_p, II_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ están definidas por:

$$\begin{aligned} I_p(v) &= \langle v, v \rangle \\ II_p(v) &= \langle S_p(v), v \rangle \end{aligned}$$

Y la **curvatura de Gauss** \mathbf{K} y la **curvatura media** \mathbf{H} en p se definen como:

$$K(p) = \det(S_p) \quad ; \quad H(p) = \frac{1}{2} \text{tr}(S_p)$$

Es bien sabido que las superficies totalmente umbílicas en el espacio \mathbb{R}^3 están necesariamente contenidas en planos o esferas. Un resultado análogo para superficies de tipo tiempo en $\mathbb{R}^{2,1}$ es:

Proposición 2.2. *Supongamos que una superficie regular tipo tiempo $M \subset \mathbb{R}^{2,1}$ es totalmente umbílica. Entonces M esta contenida en un plano o en un hiperboloide de una hoja (es decir en una esfera de Minkowski).*

En lo que queda de este trabajo, consideraremos el problema de clasificación de las superficies de tipo tiempo casi umbílicas. (ver la definición 2.6)

Capítulo 3

Marcos nulos y formas de Maurer-Cartan

Notación:

$$\mathbb{R}^{2,1} = (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle = dx_0^2 + dx_1^2 - dx_2^2)$$
$$x = (x_0, x_1, x_2), \langle x, x \rangle = x_0^2 + x_1^2 - x_2^2$$

Abordaremos el problema de la clasificación de las superficies tipo tiempo totalmente casi umbílicas mediante el método de los marcos móviles. Resulta mas conveniente utilizar marcos nulos en lugar de marcos ortonormales. Sea $\{e_0, e_1, e_2\}$ un marco ortonormal adaptado a $M \subset \mathbb{R}^{2,1}$.

Definición 3.1. *Un campo de marco nulo adaptado a lo largo de una superficie de tipo tiempo $M \subset \mathbb{R}^{2,1}$ consiste en campos vectoriales suaves linealmente independientes $\{\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ a lo largo de M , tales que para cada punto $p \in M$,*

- $\mathbf{f}_1(p), \mathbf{f}_2(p)$ son vectores tipo luz tangentes a M en cada punto $p \in M$.
- $\langle \mathbf{f}_1(p), \mathbf{f}_2(p) \rangle = -1$.
- $\mathbf{f}_0(p)$ es unitario de tipo espacio ortogonal a $T_p M$ en cada punto $p \in M$, con $\langle \mathbf{f}_0(p), \mathbf{f}_0(p) \rangle = 1$

Por ejemplo, si $\{e_0, e_1, e_2\}$ es un marco ortonormal adaptado a lo largo de M , entonces los campos vectoriales:

$$\mathbf{f}_0 = e_0 ; \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2) ; \mathbf{f}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2)$$

forman un campo de marco nulo adaptado a lo largo de M .

3.1. Formas de Maurer-Cartan

Sea $X : \mathbb{R}^{2,1} \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ (identidad)

Su diferencial: $v = dX_p(v) = a\mathbf{f}_0(p) + b\mathbf{f}_1(p) + c\mathbf{f}_2(p)$

$$\langle v, \mathbf{f}_0(p) \rangle = a$$

$$\langle v, \mathbf{f}_1(p) \rangle = -c$$

$$\langle v, \mathbf{f}_2(p) \rangle = -b$$

entonces

$$dX_p(v) = \langle v, \mathbf{f}_0(p) \rangle \mathbf{f}_0(p) - \langle v, \mathbf{f}_2(p) \rangle \mathbf{f}_1(p) - \langle v, \mathbf{f}_1(p) \rangle \mathbf{f}_2(p)$$

Sean

$$\begin{cases} \eta^0(v) = \langle v, \mathbf{f}_0(p) \rangle \\ \eta^1(v) = -\langle v, \mathbf{f}_2(p) \rangle \\ \eta^2(v) = -\langle v, \mathbf{f}_1(p) \rangle \end{cases} \quad \text{las formas duales al marco nulo}$$

entonces

$$dX_p(v) = \eta^0(v)\mathbf{f}_0(p) + \eta^1(v)\mathbf{f}_1(p) + \eta^2(v)\mathbf{f}_2(p)$$

$$dX_p = \eta^0\mathbf{f}_0(p) + \eta^1\mathbf{f}_1(p) + \eta^2\mathbf{f}_2(p)$$

$$dX = \eta^0\mathbf{f}_0 + \eta^1\mathbf{f}_1 + \eta^2\mathbf{f}_2$$

todo vector esta determinado por η^0, η^1, η^2

Nota:

Todos los índices van de 0 a 2 y utilizamos la convención de suma de Einstein.

$$dX = \sum_{i=0}^2 \mathbf{f}_i \eta^i = \mathbf{f}_i \eta^i$$

Ahora $d\mathbf{f}_i(v) = a\mathbf{f}_0 + b\mathbf{f}_1 + c\mathbf{f}_2$

$$\langle d\mathbf{f}_i(v), \mathbf{f}_0 \rangle = a$$

$$\langle d\mathbf{f}_i(v), \mathbf{f}_1 \rangle = -c$$

$$\langle d\mathbf{f}_i(v), \mathbf{f}_2 \rangle = -b$$

entonces

$$d\mathbf{f}_i(v) = \langle d\mathbf{f}_i(v), \mathbf{f}_0 \rangle \mathbf{f}_0 - \langle d\mathbf{f}_i(v), \mathbf{f}_2 \rangle \mathbf{f}_1 - \langle d\mathbf{f}_i(v), \mathbf{f}_1 \rangle \mathbf{f}_2$$

Sean De entonces

$$d\mathbf{f}_i(v) = \eta_i^0(v)\mathbf{f}_0 + \eta_i^1(v)\mathbf{f}_1 + \eta_i^2(v)\mathbf{f}_2$$

$$d\mathbf{f}_i = \eta_i^0\mathbf{f}_0 + \eta_i^1\mathbf{f}_1 + \eta_i^2\mathbf{f}_2$$

Asi

$$d\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_j \eta_i^j$$

Sean $\eta^i, \eta_j^i, 0 \leq i, j \leq 2$ las **formas de Maurer-Cartan** sobre M asociadas a un campo de marco nulo adaptado a lo largo de M . Estas formas estan definidas por las ecuaciones

$$dX = \mathbf{f}_i \eta^i \tag{3.1}$$

$$d\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_j \eta_i^j$$

Notemos que

$$\langle \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_0 \rangle = 1, \quad \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1 \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2 \rangle = 0$$

$$\langle \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1 \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2 \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \rangle = -1$$

De acuerdo con esto tenemos que:

$$\langle \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_0 \rangle = 1 \Rightarrow d \langle \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_0 \rangle = 0 \Rightarrow 2 \langle d\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_0 \rangle = 0 \Rightarrow \langle d\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_0 \rangle = \eta_0^0 = 0$$

$$\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_0 \rangle = 0 \Rightarrow d \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_0 \rangle = 0 \Rightarrow \langle d\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_0 \rangle + \langle d\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1 \rangle \Rightarrow \langle d\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_0 \rangle = - \langle d\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1 \rangle \Rightarrow \eta_1^0 = \eta_0^2$$

$$\langle \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_0 \rangle = 0 \Rightarrow d \langle \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_0 \rangle = 0 \Rightarrow \langle d\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_0 \rangle + \langle d\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2 \rangle \Rightarrow \langle d\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_0 \rangle = - \langle d\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2 \rangle \Rightarrow \eta_2^0 = \eta_0^1$$

$$\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \rangle = 1 \Rightarrow d \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \rangle = 0 \Rightarrow \langle d\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \rangle + \langle d\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_1 \rangle \Rightarrow - \langle d\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \rangle = \langle d\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_1 \rangle \Rightarrow \eta_1^1 = -\eta_2^2$$

$$\langle \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2 \rangle = 0 \Rightarrow d \langle \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2 \rangle = 0 \Rightarrow 2 \langle d\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2 \rangle = 0 \Rightarrow \langle d\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2 \rangle = \eta_2^1 = 0$$

$$\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1 \rangle = 0 \Rightarrow d \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1 \rangle = 0 \Rightarrow 2 \langle d\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1 \rangle = 0 \Rightarrow \langle d\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1 \rangle = \eta_1^2 = 0$$

En resumen tenemos

$$\eta_0^0 = \eta_2^1 = \eta_1^2 = 0 \tag{3.2}$$

$$\eta_1^0 = \eta_0^2, \quad \eta_2^0 = \eta_0^1, \quad \eta_1^1 = -\eta_2^2$$

Ahora, como: $dX = \eta^0 \mathbf{f}_0 + \eta^1 \mathbf{f}_1 + \eta^2 \mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_i \eta^i$, diferenciando

$$0 = d^2 X = d(dX) = d\mathbf{f}_i \wedge \eta^i + \mathbf{f}_i d\eta^i \Rightarrow \mathbf{f}_i d\eta^i = -d\mathbf{f}_i \wedge \eta^i$$

pero como $d\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_j \eta_i^j$, entonces

$$\mathbf{f}_i d\eta^i = -\mathbf{f}_j \eta_i^j \wedge \eta^i \Rightarrow \mathbf{f}_i d\eta^i = -\mathbf{f}_i \eta_j^i \wedge \eta^j$$

asi tenemos

$$d\eta^i = -\eta_j^i \wedge \eta^j$$

Luego de $d\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_j \eta_i^j$, diferenciando

$$0 = d^2 \mathbf{f}_i = d(d\mathbf{f}_i) = d(\mathbf{f}_j \eta_i^j) = d\mathbf{f}_j \wedge \eta_i^j + \mathbf{f}_j d\eta_i^j$$

$$\mathbf{f}_j d\eta_i^j = -d\mathbf{f}_j \wedge \eta_i^j = -\mathbf{f}_k \eta_j^k \wedge \eta_i^j$$

$$\mathbf{f}_k d\eta_i^k = -\mathbf{f}_k \eta_j^k \wedge \eta_i^j \Rightarrow d\eta_i^k = -\eta_j^k \wedge \eta_i^j$$

Así tenemos

$$d\eta^i = -\eta_j^i \wedge \eta^j \tag{3.3}$$

$$d\eta_j^i = -\eta_k^i \wedge \eta_j^k$$

que son llamadas las **ecuaciones de estructura de Maurer-Cartan**.

A partir de la ecuación

$$\begin{aligned} dX : T_p M &\rightarrow \mathbb{R}^{2,1} \\ v &\mapsto \mathbf{f}_0 \eta^0(v) + \mathbf{f}_1 \eta^1(v) + \mathbf{f}_2 \eta^2(v) \end{aligned}$$

y el hecho que dX toma valores en T_pM se deduce que $\eta^0(v) = 0$. Además $\eta^1(v)$ y $\eta^2(v)$ son 1-formas linealmente independientes.

El diferencial de $\eta^0 = 0$ a partir de (3.3) es

$$\begin{aligned} d\eta^0 &= -\eta_0^0 \wedge \eta^0 - \eta_1^0 \wedge \eta^1 - \eta_2^0 \wedge \eta^2 \\ 0 &= d\eta^0 = -\eta_1^0 \wedge \eta^1 - \eta_2^0 \wedge \eta^2 \end{aligned}$$

Por el Lema de Cartan [4], existen funciones $k_{ij} = k_{ji}$ sobre M tales que

$$\begin{aligned} \eta_1^0 &= -k_{11}\eta^1 - k_{12}\eta^2 \\ \eta_2^0 &= -k_{12}\eta^1 - k_{22}\eta^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

(el signo menos es por conveniencia, para mas adelante).

Comparando ahora (3.4) con el operador de forma en cualquier punto $p \in M$ y usando (3.1), (3.2), (3.4) tenemos

$$\begin{aligned} S_p &= -de_0 = -d\mathbf{f}_0 \\ &= -\mathbf{f}_1\eta_0^1 - \mathbf{f}_2\eta_0^2 \\ &= -\mathbf{f}_1(\eta_2^0) - \mathbf{f}_2(\eta_1^0) \\ &= -\mathbf{f}_1\eta_2^0 - \mathbf{f}_2\eta_1^0 \\ &= -\mathbf{f}_1(-k_{12}\eta^1 - k_{22}\eta^2) - \mathbf{f}_2(-k_{11}\eta^1 - k_{12}\eta^2) \\ &= (k_{12}\mathbf{f}_1 + k_{11}\mathbf{f}_2)\eta^1 + (k_{22}\mathbf{f}_1 + k_{12}\mathbf{f}_2)\eta^2 \end{aligned}$$

Esto significa que

$$S_p(\mathbf{f}_1) = k_{12}\mathbf{f}_1 + k_{11}\mathbf{f}_2, \quad S_p(\mathbf{f}_2) = k_{22}\mathbf{f}_1 + k_{12}\mathbf{f}_2$$

y la matriz de S_p con respecto a las bases $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ de T_pM es:

$$\begin{bmatrix} k_{12} & k_{22} \\ k_{11} & k_{12} \end{bmatrix}$$

asi tenemos

$$\begin{aligned} H &= k_{12} \\ K &= k_{12}^2 - k_{11}k_{22} \\ H^2 - K &= k_{11}k_{22} \end{aligned}$$

De aquí se tiene que que M es totalmente casi-umbilica si y solo si $k_{11}k_{22} \equiv 0$ en M y que k_{11}, k_{22} no son ambos ceros en ningún punto $p \in M$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $k_{22} = 0$ y $k_{11} \neq 0$.

Ahora examinaremos como se transforman las las funciones k_{ij} si hacemos una rotación Lorentziana a nuestro campo de marco nulo adaptado. La **Rotación Lorentziana** aplicada a vectores x e y esta dada por:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \cosh \varphi \cdot x + \sinh \varphi \cdot y \\ \tilde{y} &= \sinh \varphi \cdot x + \cosh \varphi \cdot y \end{aligned}$$

Aplicamos la Rotación Lorentziana a $\{e_0, e_1, e_2\}$:

$$\begin{aligned}\tilde{e}_1 &= \cosh \theta \cdot e_1 + \sinh \theta \cdot e_2 \Rightarrow \langle \tilde{e}_1, \tilde{e}_1 \rangle = 1 \\ \tilde{e}_2 &= \sinh \theta \cdot e_1 + \cosh \theta \cdot e_2 \Rightarrow \langle \tilde{e}_2, \tilde{e}_2 \rangle = -1\end{aligned}$$

Así, \tilde{e}_1 es de tipo espacio y \tilde{e}_2 es tipo tiempo, con $\langle \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \rangle = 0$.

Recordemos que el marco nulo adaptado que teníamos era $\{\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$, con $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ de tipo luz, donde:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2) \\ \mathbf{f}_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2)\end{aligned}$$

Ahora calculamos:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{f}}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{e}_1 + \tilde{e}_2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cosh \theta \cdot e_1 + \sinh \theta \cdot e_2 + \sinh \theta \cdot e_1 + \cosh \theta \cdot e_2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(\cosh \theta + \sinh \theta)(e_1 + e_2)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} + \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}\right)(e_1 + e_2) \\ &= e^\theta \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2) \\ &= e^\theta \mathbf{f}_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{f}}_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{e}_1 - \tilde{e}_2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cosh \theta \cdot e_1 + \sinh \theta \cdot e_2 - \sinh \theta \cdot e_1 - \cosh \theta \cdot e_2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(\cosh \theta - \sinh \theta)(e_1 - e_2)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} - \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}\right)(e_1 - e_2) \\ &= e^{-\theta} \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2) \\ &= e^{-\theta} \mathbf{f}_2\end{aligned}$$

Bajo tal transformación, las formas de Maurer-Cartan $\tilde{\eta}^i, \tilde{\eta}_j^i$ asociadas al campo de marco $\{\tilde{\mathbf{f}}_0, \tilde{\mathbf{f}}_1, \tilde{\mathbf{f}}_2\}$ satisfacen las condiciones:

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}^1 &= e^{-\theta} \eta^1 \\ \tilde{\eta}^2 &= e^\theta \eta^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}_0^1 &= e^{-\theta} \eta_0^1 \\ \tilde{\eta}_0^2 &= e^{\theta} \eta_0^2 \\ \tilde{\eta}_1^0 &= e^{\theta} \eta_1^0 \\ \tilde{\eta}_2^0 &= e^{-\theta} \eta_2^0\end{aligned}$$

De donde tendremos que las ecuaciones de estructura están dadas por:

$$\begin{cases} d\tilde{\eta}^i = -\tilde{\eta}_j^i \wedge \tilde{\eta}^j \\ d\tilde{\eta}_j^i = -\tilde{\eta}_k^i \wedge \tilde{\eta}_j^k \end{cases}$$

Como

$$\tilde{\eta}^0 = 0 \Rightarrow \underbrace{d\tilde{\eta}^0}_0 = -\tilde{\eta}_1^0 \wedge \tilde{\eta}^1 - \tilde{\eta}_2^0 \wedge \tilde{\eta}^2$$

Nuevamente por el **Lema de Cartan** [4] existen \tilde{k}_{ij} , asociadas al campo de marco $\{\tilde{\mathbf{f}}_0, \tilde{\mathbf{f}}_1, \tilde{\mathbf{f}}_2\}$ vienen dadas por:

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}_1^0 &= -\tilde{k}_{11} \tilde{\eta}^1 - \tilde{k}_{12} \tilde{\eta}^2 = e^{\theta} \eta_1^0 \\ \tilde{\eta}_2^0 &= -\tilde{k}_{12} \tilde{\eta}^1 - \tilde{k}_{22} \tilde{\eta}^2 = e^{-\theta} \eta_2^0\end{aligned}$$

De donde:

$$\begin{aligned}e^{\theta}(-k_{11} \eta^1 - k_{12} \eta^2) &= -\tilde{k}_{11} \tilde{\eta}^1 - \tilde{k}_{12} \tilde{\eta}^2 \\ -e^{\theta} k_{11} \eta^1 - e^{\theta} k_{12} \eta^2 &= -\tilde{k}_{11} e^{-\theta} \eta^1 - \tilde{k}_{12} e^{\theta} \eta^2\end{aligned}$$

Comparando η^1 :

$$-e^{\theta} k_{11} = -\tilde{k}_{11} e^{-\theta} \Rightarrow \tilde{k}_{11} = e^{2\theta} k_{11}$$

Así, y como $k_{11} \neq 0$

$$\tilde{k}_{11} = e^{2\theta} k_{11} = 1 \Rightarrow \theta = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{k_{11}} \right)$$

es decir para dicho valor de θ , tendremos $\tilde{k}_{11} = 1$

Para el marco nulo adaptado, la primera y segunda forma fundamental de M son:

$$\begin{aligned}\langle dX(v), dX(w) \rangle &= \langle \mathbf{f}_1 \eta^1(v) + \mathbf{f}_2 \eta^2(v), \mathbf{f}_1 \eta^1(w) + \mathbf{f}_2 \eta^2(w) \rangle \\ &= -\eta^1(v) \eta^2(w) - \eta^2(v) \eta^1(w)\end{aligned}$$

y como

$$I = \langle dX(v), dX(v) \rangle = -2\eta^1(v) \eta^2(v)$$

Luego

$$\begin{aligned}II &= -\langle d\mathbf{f}_0(v), dX(v) \rangle = -\langle \mathbf{f}_0 \eta_0^0 + \mathbf{f}_1 \eta_0^1 + \mathbf{f}_2 \eta_0^2, \mathbf{f}_0 \eta^0(v) + \mathbf{f}_1 \eta^1(v) + \mathbf{f}_2 \eta^2(v) \rangle \\ &= \eta_0^1 \eta^2(v) + \eta_0^2 \eta^1(v) = (\eta_2^0) \eta^2(v) + (\eta_1^0) \eta^1(v) \\ &= \eta_2^0 \eta^2(v) + \eta_1^0 \eta^1(v) \\ &= (-k_{12} \eta^1 - k_{22} \eta^2) \eta^2(v) + (-k_{11} \eta^1 - k_{12} \eta^2) \eta^1(v) \\ &= -2H \eta^1 \eta^2 - k_{11} (\eta^1)^2 = -2H \eta^1 \eta^2 - (\eta^1)^2, \text{ con } k_{11} = 1\end{aligned}$$

así tenemos

$$\begin{aligned} \text{I} &= -2\eta^1\eta^2 \\ \text{II} &= -2H\eta^1\eta^2 - (\eta^1)^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

(recodemos que $H = k_{12}$)

Ahora sean u, v coordenadas tipo luz en M , así tenemos:
Para $\{X_u, X_v\}$ tenemos sus formas duales $\{du, dv\}$, de tal manera que:

$$\begin{aligned} du(X_u) &= \langle X_u, X_u \rangle = 0 & ; & & du(X_v) &= \langle X_u, X_v \rangle = -1 \\ dv(X_u) &= \langle X_v, X_u \rangle = -1 & ; & & dv(X_v) &= \langle X_v, X_v \rangle = 0 \end{aligned}$$

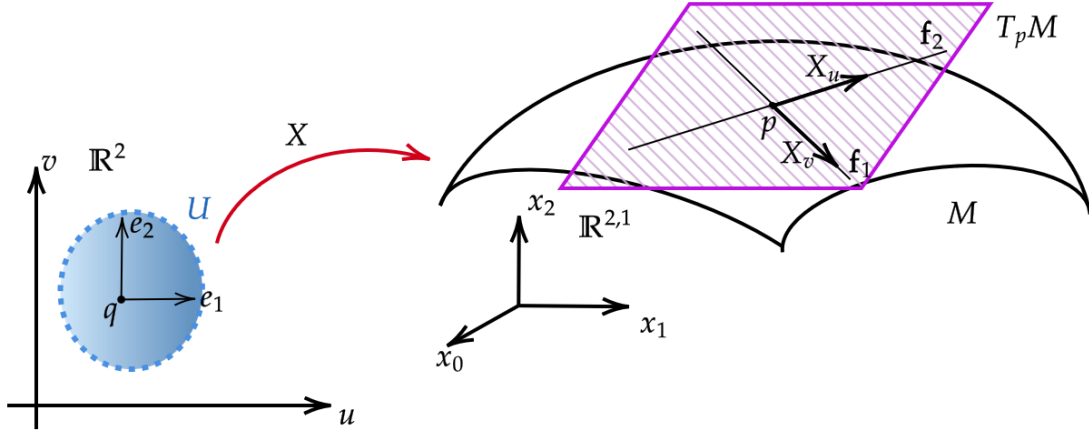


Figura 3.1: Coordenadas locales nulas en M

Como X_u es proporcional a \mathbf{f}_2 , y X_v es proporcional a \mathbf{f}_1 , existen funciones $f(u, v)$ y $g(u, v)$ en M tales que:

$$\begin{cases} X_u = -e^{-f}\mathbf{f}_2 \\ X_v = -e^{-g}\mathbf{f}_1 \end{cases}$$

ahora

$$\begin{aligned} du(w) &= \langle X_u, w \rangle = \langle -e^{-f}\mathbf{f}_2, w \rangle = e^{-f} [-\langle \mathbf{f}_2, w \rangle] = e^{-f}\eta^1 \\ dv(w) &= \langle X_v, w \rangle = \langle -e^{-g}\mathbf{f}_1, w \rangle = e^{-g} [-\langle \mathbf{f}_1, w \rangle] = e^{-g}\eta^2 \end{aligned}$$

de esta manera tendremos

$$\begin{aligned} X_u = -e^{-f}\mathbf{f}_2 &\Rightarrow du = e^{-f}\eta^1 \Rightarrow \eta^1 = e^f du \\ X_v = -e^{-g}\mathbf{f}_1 &\Rightarrow dv = e^{-g}\eta^2 \Rightarrow \eta^2 = e^g dv \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \text{I} &= -2\eta^1\eta^2 = -2e^{f+g}dudv \\ \text{II} &= -2H\eta^1\eta^2 - (\eta^1)^2 = -2He^{f+g}dudv - e^{2f}(du)^2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

De (3.4) y (3.6) también tenemos

$$\begin{aligned}\eta_1^0 &= \eta_0^2 = -e^f du - He^g dv \\ \eta_2^0 &= \eta_0^1 = -He^f du\end{aligned}\tag{3.8}$$

De las ecuaciones de estructura en (3.3), (3.6) y (3.2) tenemos:

De $\eta^1 = e^f du$, diferenciando

$$\begin{aligned}d\eta^1 &= d(e^f) \wedge du = e^f df \wedge du = (f_u du + f_v dv) \wedge e^f du \\ &= f_v dv \wedge e^f du = f_v dv \wedge \eta^1\end{aligned}$$

Por otro lado

$$d\eta^1 = -\eta_0^1 \wedge \eta^0 - \eta_1^1 \wedge \eta^1 - \eta_2^1 \wedge \eta^2 = -\eta_1^1 \wedge \eta^1$$

De donde tendremos

$$-\eta_1^1 = f_v dv + \beta du$$

De $\eta^2 = e^g dv$, diferenciando

$$\begin{aligned}d\eta^2 &= d(e^g) \wedge dv = e^g dg \wedge dv = (g_u du + g_v dv) \wedge e^g dv \\ &= g_u du \wedge e^g dv = g_u du \wedge \eta^2\end{aligned}$$

Por otro lado

$$d\eta^2 = -\eta_0^2 \wedge \eta^0 - \eta_1^2 \wedge \eta^1 - \eta_2^2 \wedge \eta^2 = -\eta_2^2 \wedge \eta^2$$

De donde tendremos

$$-\eta_2^2 = g_u du + \alpha dv$$

Ahora como

$$\eta_1^1 = -\eta_2^2 \Rightarrow -f_v dv - \beta du = g_u du + \alpha dv \Rightarrow \begin{cases} \beta = -g_u \\ \alpha = -f_v \end{cases}$$

Así tendremos

$$\eta_1^1 = -\eta_2^2 = g_u du - f_v dv\tag{3.9}$$

Y de (3.2) las restantes formas de Maurer-Cartan son ceros.

De (3.8) tenemos:

$$\begin{aligned}\eta_2^0 &= -He^f du, \text{ diferenciando} \\ d\eta_2^0 &= d(-He^f) \wedge du = [(-He^f)_u du + (-He^f)_v dv] \wedge du \\ &= (-He^f)_v dv \wedge du = (-H_v e^f - He^f f_v) dv \wedge du \\ &= -H_v e^f dv \wedge du - He^f f_v dv \wedge du \\ &= -H_v e^f dv \wedge du + f_v dv \wedge (-He^f du) \\ &= -H_v e^f dv \wedge du + f_v dv \wedge \eta_2^0 \\ &= -H_v e^f dv \wedge du - \eta_2^0 \wedge f_v dv\end{aligned}$$

Por otro lado de (3.3) tenemos

$$d\eta_2^0 = -\eta_0^0 \wedge \eta_2^0 - \eta_\lambda^0 \eta_2^1 - \eta_2^0 \wedge \eta_2^2 = -\eta_2^0 \wedge \eta_2^2$$

igualando

$$-\eta_2^0 \wedge \eta_2^2 = -H_v e^f dv \wedge du - \eta_2^0 \wedge f_v dv$$

entonces

$$-H_v e^f = 0 \Rightarrow H_v = 0$$

Ahora de (3.8) $\eta_1^0 = -e^f du - He^g dv$, diferenciando

$$\begin{aligned} d\eta_1^0 &= -d(e^f) \wedge du - d(He^g) \wedge dv \\ &= -e^f df \wedge du - (He^g)_u du \wedge dv \\ &= -e^f (f_u du + f_v dv) \wedge du - (H_u e^g + He^g g_u) du \wedge dv \\ &= -e^f f_v dv \wedge du - H_u e^g du \wedge dv - He^g g_u du \wedge dv \\ &= e^f f_v du \wedge dv - H_u e^g du \wedge dv - He^g g_u du \wedge dv \end{aligned}$$

Por otro lado de (3.3)

$$\begin{aligned} d\eta_1^0 &= -\eta_0^0 \wedge \eta_1^0 - \eta_1^0 \wedge \eta_1^1 - \eta_2^0 \wedge \eta_1^2 \\ &= -\eta_1^0 \wedge \eta_1^1, \text{ aplicando (3.8) y (3.9)} \\ &= -(-e^f du - He^g dv) \wedge (g_u du - f_v dv) \\ &= -e^f f_v du \wedge dv + He^g g_u dv \wedge du \\ &= -e^f f_v du \wedge dv - He^g g_u du \wedge dv \end{aligned}$$

igualando

$$\begin{aligned} e^f f_v du \wedge dv - H_u e^g du \wedge dv - He^g g_u du \wedge dv &= -e^f f_v du \wedge dv - He^g g_u du \wedge dv \\ 2e^f f_v du \wedge dv &= H_u e^g du \wedge dv \end{aligned}$$

entonces

$$2e^f f_v = H_u e^g \Rightarrow H_u = 2e^{f+g} f_v$$

Continuando, de $\eta_1^1 = g_u du - f_v dv$, diferenciando, tendremos

$$\begin{aligned} d\eta_1^1 &= d(g_u) \wedge du - d(f_v) \wedge dv \\ &= (g_{uu} du + g_{uv} dv) \wedge du - (f_{vu} du + f_{vv} dv) \wedge dv \\ &= g_{uv} dv \wedge du - f_{vu} du \wedge dv \\ &= -g_{uv} du \wedge dv - f_{vu} du \wedge dv \\ &= -(f + g)_{uv} du \wedge dv \end{aligned}$$

Por otro lado de (3.3)

$$\begin{aligned} d\eta_1^1 &= -\eta_0^1 \wedge \eta_1^0 - \eta_\lambda^1 \eta_1^1 - \eta_2^1 \wedge \eta_1^2 = -\eta_0^1 \wedge \eta_1^0 \\ &= -(-He^f du) \wedge (-e^f du - He^g dv) \\ &= -H^2 e^{f+g} du \wedge dv \end{aligned}$$

igualando

$$\begin{aligned} -(f+g)_{uv} du \wedge dv &= -H^2 e^{f+g} du \wedge dv \\ \Rightarrow (f+g)_{uv} &= H^2 e^{f+g} \end{aligned}$$

En resumen, las restantes ecuaciones de estructura en (3.3) -que pueden interpretarse como las ecuaciones de Gauss y Codazzi para superficies de tipo tiempo en $\mathbb{R}^{2,1}$ - implican de lo anterior que las funciones f, g, H satisfacen el siguiente sistema de EDP.

$$H_v = 0 \tag{3.10}$$

$$H_u = 2e^{f+g} f_v \tag{3.11}$$

$$(f+g)_{uv} = H^2 e^{f+g} \tag{3.12}$$

Por el contrario, cualquier solución de este sistema da lugar (al menos localmente) a las formas de Maurer-Cartan (3.6), (3.8), (3.9) de una superficie tipo tiempo totalmente casi umbílica.

La ecuación (3.10) implica que H es función solo de u , es decir $H = H(u)$. Para resolver las ecuaciones restantes, dividiremos en casos en función de si $H(u)$ es cero o distinta de cero.

3.2. Caso 1:

$H(u) \equiv 0$, entonces las ecuaciones (3.11) y (3.12) se reducen a:

$$f_v = 0 \Rightarrow f = f(u)$$

$$(f+g)_{uv} = 0 \Rightarrow f+g = \phi(u) + \psi(v)$$

para algunas funciones $\phi(u), \psi(v)$, ver [5].

Así, la primera y segunda forma fundamental de M toman la forma:

$$I = -2e^{f+g} dudv = -2e^{\phi(u)} e^{\psi(v)} dudv$$

$$II = -2He^{f+g} dudv - e^{2f}(du)^2 = -e^{2\phi(u)}(du)^2$$

Realizando un cambio de coordenadas $(u, v) \rightarrow (\tilde{u}, \tilde{v})$ mediante:

$$\varphi(\tilde{u}, \tilde{v}) = \left(\int e^{\phi(u)} du, \int e^{\psi(v)} dv \right)$$

$$d\tilde{u} = e^{\phi(u)} du, \quad d\tilde{v} = e^{\psi(v)} dv$$

Entonces

$$I = -2d\tilde{u}d\tilde{v} \tag{3.13}$$

$$II = -e^{2\phi(\tilde{u})}(d\tilde{u})^2$$

así,

$$\begin{aligned} \text{I} &= -2dudv \\ \text{II} &= -e^{2f(u)}(du)^2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ahora de (3.14)

$$\begin{aligned} \text{I} &= -2dudv = -2e^{f(u)}du \cdot e^{-f(u)}dv = -2\eta^1 e^{-f(u)}dv \\ \text{II} &= -e^{2f(u)}(du)^2 = -e^{f(u)}du \cdot e^{f(u)}du = -(\eta^1)^2 \end{aligned}$$

combinado las ecuaciones de arriba con (3.5), tenemos

$$\begin{aligned} \eta^2 &= e^{-f(u)}dv \\ \eta^1 &= e^{f(u)}du \end{aligned} \quad (3.15)$$

Luego de (3.8) y (3.9) obtenemos

$$\eta_1^0 = \eta_0^2 = -e^{f(u)}du \quad (3.16)$$

$$\eta_2^0 = \eta_0^1 = 0 \quad (3.17)$$

Ahora asumiendo que $\phi(u) = \psi(v) = 0$, luego de $-\eta_2^0 = \eta_1^1 = g_u du = -f_u du$, pues $f + g = 0 \Rightarrow g = -f$, así, tenemos

$$-\eta_2^0 = \eta_1^1 = -f'(u)du \quad (3.18)$$

Las soluciones del sistema de EDP (3.10), (3.11), (3.12), con $H(u) = 0$ dependen de una función arbitraria de una variable, es decir la función $f(u)$.

3.3. Caso 2

$H(u) \neq 0 \Rightarrow H(u) = e^{h(u)}$, entonces (3.12) toma la forma:

$$(f + g)_{uv} = (e^{h(u)})^2 \cdot e^{f+g} = e^{2h(u)+f+g}$$

luego podemos escribir la ecuación de arriba de la siguiente manera

$$(f + g + 2h(u))_{uv} = e^{f+g+2h(u)}$$

así, haciendo $z(u, v) = f + g + 2h(u)$, que es la solución de la ecuación de Liouville

$$z_{uv} = e^z \quad (3.19)$$

La solución general de (3.19) es

$$z(u, v) = \ln \left(\frac{2\phi'(u)\psi'(v)}{(\phi(u) + \psi(v))^2} \right) \quad (3.20)$$

donde $\phi(u)$ y $\psi(v)$ son funciones arbitrarias, con $\phi'(u), \psi'(v) \neq 0$, así

$$f(u, v) + g(u, v) + 2h(u) = \ln \left(\frac{2\phi'(u)\psi'(v)}{(\phi(u) + \psi(v))^2} \right) \quad (3.21)$$

para algunas funciones $\phi(u)$ y $\psi(v)$, con $\phi'(u), \psi'(v) \neq 0$

Observación 3.1. La expresión (3.20) para la solución de (3.19), puede derivarse de la transformación de Bläckund.

$$\begin{aligned} z_u - w_u &= 2e^{\frac{z+w}{2}} \\ z_v + w_v &= e^{\frac{z-w}{2}} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Que relaciona $z(u, v)$ de (3.19) con las soluciones de $w(u, v)$ de la ecuación de onda $w_{uv} = 0$ (ver [2]). Sustituyendo la solución general

$$w(u, v) = \rho(u) + \sigma(v)$$

para algunas funciones $\rho(u)$ y $\sigma(v)$.

De la ecuación de onda (3.22) y resolviendo el sistema de EDP para $z(u, v)$ da lugar a (3.20), donde

$$\phi(u) = \int e^{\rho(u)} du \quad ; \quad \psi(v) = \int \frac{1}{2} e^{-\sigma(v)} dv$$

Realizando un cambio de variable $\tilde{u} = \phi(u)$, $\tilde{v} = \psi(v)$, podemos escribir (3.21) como

$$f(u, v) + g(u, v) + 2h(u) = \ln \left(\frac{2}{(u+v)^2} \right)$$

Así, tenemos

$$f(u, v) + g(u, v) = \ln \left(\frac{2}{(u+v)^2} \right) - 2h(u)$$

pero como $h(u) = \ln|H(u)|$

$$f(u, v) + g(u, v) = \ln \left(\frac{2}{(H(u))^2 (u+v)^2} \right) \quad (3.23)$$

$$\frac{(H(u))^2 (u+v)^2}{2} = e^{-(f+g)} \quad (3.24)$$

Ahora, podemos escribir (3.11) como:

$$\begin{aligned} H'(u) &= 2f_v e^{f+g} \\ &= 2f_v e^{2f} \cdot e^{-(f+g)}, \text{ aplicando (3.24)} \\ &= (e^{2f})_v \cdot \frac{(H(u))^2 (u+v)^2}{2} \\ &= \frac{(e^{2f})_v (H(u))^2}{(f+g)_{uv}}, \text{ de la ecuación (3.23)} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{H'(u)}{H^2(u)} \cdot (f+g)_{uv} = (e^{2f})_v$$

integrando respecto a v tenemos

$$\frac{H'(u)}{H^2(u)} \cdot (f+g)_u = e^{2f} + k(u) \dots (*)$$

para alguna función $k(u)$.

Ahora, derivando la ecuación (3.23) respecto a u , tenemos

$$\begin{aligned} (f+g)_u &= [2 \ln 2 - 2 \ln(H(u)) - 2 \ln(u+v)]_u \\ &= -2 \frac{H'(u)}{H(u)} - \frac{2}{u+v} \\ &= -2 \left(\frac{H'(u)}{H(u)} + \frac{1}{u+v} \right) \end{aligned}$$

Reemplazando en (*)

$$\frac{H'(u)}{H^2(u)} \cdot \left[-2 \left(\frac{H'(u)}{H(u)} + \frac{1}{u+v} \right) \right] = e^{2f} + k(u)$$

$$\begin{aligned} e^{2f} &= -\frac{2H'(u)}{H^2(u)} \left(\frac{H'(u)}{H(u)} + \frac{1}{u+v} \right) - k(u) \\ &= -\frac{2H'(u)}{H^2(u) \cdot (u+v)} - \tilde{k}(u) \end{aligned}$$

donde

$$\tilde{k}(u) = k(u) + \frac{2(H'(u))^2}{H^3(u)}$$

despejando f , tenemos

$$f = \frac{1}{2} \ln \left(-\frac{2H'(u)}{H^2(u) \cdot (u+v)} - \tilde{k}(u) \right)$$

reemplazando en (3.23), y despejando g obtenemos:

$$g = \ln \left(\frac{2}{(H(u))^2 (u+v)^2} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(-\frac{2H'(u)}{H^2(u) \cdot (u+v)} - \tilde{k}(u) \right)$$

Por lo tanto las formas de Maurer-Cartan que vienen dadas por (3.6), (3.8) y (3.9), donde

$$H = H(u) \neq 0$$

$$f = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{-2H'(u)}{(H(u))^2 (u+v)} - \tilde{k}(u) \right) \quad (3.25)$$

$$g = \ln \left(\frac{2}{(H(u))^2 (u+v)^2} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(-\frac{2H'(u)}{H^2(u) \cdot (u+v)} - \tilde{k}(u) \right)$$

y $k(u)$ es un función arbitraria de u . Por tanto, las soluciones del sistema de EDP (3.10)-(3.12) con $H(u) \neq 0$ dependen de dos funciones arbitrarias de una variable, es decir, las funciones $h(u)$ y $\tilde{k}(u)$.

Capítulo 4

Parametrizaciones explícitas

En esta sección utilizaremos las formas de Maurer-Cartan ya obtenidas para derivar parametrizaciones locales explícitas de todas las superficies casi umbílicas de tipo tiempo. Las ecuaciones de Maurer-Cartan (3.1) pueden escribirse en forma matricial como:

$$[dX \quad d\mathbf{f}_0 \quad d\mathbf{f}_1 \quad d\mathbf{f}_2] = [X \quad \mathbf{f}_0 \quad \mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \eta^0 & \eta_1^0 & \eta_2^0 & \eta_3^0 \\ \eta^1 & \eta_1^1 & \eta_2^1 & \eta_3^1 \\ \eta^2 & \eta_1^2 & \eta_2^2 & \eta_3^2 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

4.1. Caso 1

$H(u) \equiv 0$ en este caso, la ecuación (4.1) tiene la forma:

$$[dX \quad d\mathbf{f}_0 \quad d\mathbf{f}_1 \quad d\mathbf{f}_2] = [X \quad \mathbf{f}_0 \quad \mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{f(u)}du & 0 \\ e^{f(u)}du & 0 & -f'(u)du & 0 \\ e^{-f(u)}dv & -e^{f(u)}du & 0 & f'(u)du \end{bmatrix}$$

Esto es equivalente al sistema de EDP

$$[X \quad \mathbf{f}_0 \quad \mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2]_u = [X \quad \mathbf{f}_0 \quad \mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{f(u)} & 0 \\ e^{f(u)} & 0 & -f'(u) & 0 \\ 0 & -e^{f(u)} & 0 & f'(u) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$[X \quad \mathbf{f}_0 \quad \mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2]_v = [X \quad \mathbf{f}_0 \quad \mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{-f(u)} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Note que las funciones $X, \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ son funciones vectoriales en M . Estas ecuaciones

pueden integrarse explícitamente, y las solución general para $X(u, v)$ es:

$$X(u, v) = X^0 - \left[\int_0^u \left(\int_0^\sigma e^{2f(\tau)} d\tau \right) d\sigma \right] \mathbf{f}_0^0 + ue^{f(0)} \mathbf{f}_1^0 \\ + \left[v + \frac{1}{2} \int_0^u \left(\int_0^\sigma e^{2f(\tau)} d\tau \right)^2 d\sigma \right] e^{-f(0)} \mathbf{f}_2^0$$

Donde $X^0, \mathbf{f}_0^0, \mathbf{f}_1^0, \mathbf{f}_2^0$ representan las condiciones iniciales.

Así, M es una superficie cilíndrica de la forma

$$X(u, v) = \alpha(u) + v\mathbf{f}_2^0 \quad (4.4)$$

Recíprocamente, si consideramos una parametrización de la forma

$$X(u, v) = \alpha(u) + v\mathbf{f}_2^0$$

donde $\alpha(u)$ una curva de tipo luz y \mathbf{f}_2^0 un vector de tipo luz, con $\langle \alpha'(u), \mathbf{f}_2^0 \rangle \neq 0$.

Recordemos que la curvatura media viene dada por la fórmula:[3]

$$H = \frac{eG + gE - 2fF}{2(EG - F^2)}$$

donde E, F, G son coeficientes de la primera forma fundamental, y e, f, g son los coeficientes de la segunda forma fundamental, que vienen dados por

$$E = \langle X_u, X_u \rangle \\ F = \langle X_u, X_v \rangle \\ G = \langle X_v, X_v \rangle \\ e = \langle N, X_{uu} \rangle \\ f = \langle N, X_{uv} \rangle \\ g = \langle N, X_{vv} \rangle$$

Calculemos los vectores de la base canónica del plano tangente a M :

$$X_u = \alpha'(u) \\ X_v = \mathbf{f}_2^0$$

Por otro lado las derivadas segundas vienen dadas por:

$$X_{uu} = \alpha''(u) \\ X_{vv} = 0 \\ X_{uv} = 0$$

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = \langle \alpha'(u), \alpha'(u) \rangle = 0 \\ F = \langle X_u, X_v \rangle = \langle \alpha'(u), \mathbf{f}_2^0 \rangle \neq 0 \\ G = \langle X_v, X_v \rangle = \langle \mathbf{f}_2^0, \mathbf{f}_2^0 \rangle = 0 \\ e = \langle N, X_{uu} \rangle = \langle N, \alpha''(u) \rangle \\ f = \langle N, X_{uv} \rangle = \langle N, 0 \rangle = 0 \\ g = \langle N, X_{vv} \rangle = \langle N, 0 \rangle = 0$$

De esta manera, como $G = g = f = 0$, entonces $H = 0$.

Así, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 4.1. *Sea M una superficie tipo tiempo regular casi umbílica en $\mathbb{R}^{2,1}$ con curvatura media $H \equiv 0$. Entonces M es un cilindro y está parametrizado por*

$$X(u, v) = \alpha(u) + v\mathbf{f}_2^0$$

donde $\alpha(u)$ es una curva de tipo luz y \mathbf{f}_2^0 es un vector de tipo luz, tal que $\langle \alpha'(u), \mathbf{f}_2^0 \rangle \neq 0$. A la inversa, cualquier cilindro de este tipo es totalmente casi umbílica con curvatura media $H \equiv 0$.

4.2. Caso 2

$H(u) \neq 0$. En este caso, el sistema de EDP representado por la ecuación (4.1) es considerablemente más complicado, y por lo general no puede resolverse completamente, para dar una descripción geométrica de las superficies de solución. La componente v del sistema de EDP correspondiente es:

$$\left[\begin{array}{cccc} X & \mathbf{f}_0 & \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{array} \right]_v = \left[\begin{array}{cccc} X & \mathbf{f}_0 & \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -He^g & 0 \\ 0 & 0 & -f_v & 0 \\ e^g & -He^g & 0 & f_v \end{array} \right] \quad (4.5)$$

Donde f, g, H vienen dadas por (3.25).

En particular tenemos

$$(\mathbf{f}_2)_v = f_v \mathbf{f}_2$$

Ahora definimos la función

$$\bar{\mathbf{f}}_2(u, v) := e^{-f} \mathbf{f}_2(u, v)$$

que es de tipo luz.

Derivando respecto de v

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{f}}_2)_v &= -e^{-f} f_v \mathbf{f}_2(u, v) + e^{-f} (\mathbf{f}_2)_v, \text{ pero } (\mathbf{f}_2)_v = f_v \mathbf{f}_2 \\ &= -e^{-f} f_v \mathbf{f}_2(u, v) + e^{-f} f_v \mathbf{f}_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Esto quiere decir que $\bar{\mathbf{f}}_2$ solo depende de u , es decir $\bar{\mathbf{f}}_2 = \bar{\mathbf{f}}_2(u)$, así tendremos que:

$$\mathbf{f}_2(u, v) = e^f \bar{\mathbf{f}}_2(u)$$

para algún vector nulo $\bar{\mathbf{f}}_2(u)$ a lo largo de M que es función solo de u , esto significa que a lo largo de cualquier curva de coordenada v $X(u_0, v)$ en M , los vectores $\bar{\mathbf{f}}_2(u_0, v)$ son todos paralelos, además de (4.5) tenemos que:

$$X_v = e^g \mathbf{f}_2(u, v) = e^g \cdot e^f \bar{\mathbf{f}}_2(u) = e^{f+g} \bar{\mathbf{f}}_2(u)$$

esto es que la curva de coordenada v $X(u_0, v)$ es una recta nula paralela a $\bar{\mathbf{f}}_2(u_0)$. Por lo tanto si dejamos que α sea la curva nula, así definimos

$$\alpha(u) := x(u, 0)$$

y definimos $\bar{\mathbf{f}}_2(u)$ como el campo vectorial nulo

$$\bar{\mathbf{f}}_2(u) := \mathbf{f}_2(u, 0)$$

a lo largo de α , entonces podemos parametrizar M como

$$X(u, v) = \alpha(u) + v\bar{\mathbf{f}}_2(u)$$

En efecto, como

$$X_v = e^{f+g}\bar{\mathbf{f}}_2(u)$$

Por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos

$$\int_0^v X_v(u, r) dr = X(u, v) - X(u, 0)$$

entonces

$$\begin{aligned} X(u, v) &= X(u, 0) + \int_0^v X_v(u, r) dr \\ &= X(u, 0) + \int_0^v e^{f+g}\bar{\mathbf{f}}_2(u) dr \\ &= X(u, 0) + \bar{\mathbf{f}}_2(u) \int_0^v e^{f+g} dr \end{aligned}$$

Realizando un cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= u \quad ; \quad \tilde{v} = \int_0^v e^{f+g} dr \\ h(\tilde{u}, \tilde{v}) &= \left(u, \int_0^v e^{f+g} dr \right) \end{aligned}$$

Así

$$X(u, v) = X(u, 0) + v\bar{\mathbf{f}}_2(u)$$

Por lo tanto

$$X(u, v) = \alpha(u) + v\bar{\mathbf{f}}_2(u)$$

Junto con la Proposición (4.1), esto demuestra el siguiente teorema de clasificación:
Teorema 4.1. *Sea M una superficie tipo tiempo regular casi umbílica en $\mathbb{R}^{2,1}$. Entonces M es una superficie reglada cuyas reglas son todas las líneas nulas, con la propiedad adicional de que cualquier curva nula α en M que sea transversal a las reglas es no degenerada. A la inversa, dado cualquier curva nula no degenerada $\alpha(u)$ en $\mathbb{R}^{2,1}$ y cualquier campo vectorial nulo $\bar{\mathbf{f}}_2(u)$ a lo largo de α que sea linealmente independiente de $\alpha'(u)$ para todo u , la superficie reglada inmersa*

$$X(u, v) = \alpha(u) + v\bar{\mathbf{f}}_2(u)$$

es totalmente casi umbílica.

Capítulo 5

Ejemplos

Por el Teorema 4.1 cualquier superficie totalmente casi umbilíca M tiene parametrización de la forma

$$X(u, v) = \alpha(u) + v\bar{\mathbf{f}}_2(u)$$

donde α es una curva nula no degenerada cuyo vector tangente $\alpha'(u) = \bar{\mathbf{f}}_1(u)$ es un vector nulo linealmente independiente del vector nulo $\bar{\mathbf{f}}_2(u)$. La no degeneración de α implica que $\bar{\mathbf{f}}_1'(u)$ debe ser linealmente independiente de $\bar{\mathbf{f}}_1(u)$.

Por comodidad podemos asumir que

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{f}}_1(u) &= (\cos \theta_1(u), \sin \theta_1(u), 1) \\ \bar{\mathbf{f}}_2(u) &= (\cos \theta_2(u), \sin \theta_2(u), 1)\end{aligned}$$

Para algunas funciones $\theta_1(u), \theta_2(u)$, entonces las condiciones de independencia lineal del párrafo anterior son simplemente que $\theta_1'(u) \neq 0$ y $\theta_1(u) \neq \theta_2(u)$ para todo u . Además M tiene curvatura de Gauss y Media $K \equiv H \equiv 0$ si y solo si $\theta_2'(u) \equiv 0$.

5.1. Caso 1: $H(u) \equiv 0$

En este caso $\theta_2(u)$ debe ser constante, mientras que $\theta_1(u)$ debe ser estrictamente creciente o estrictamente decreciente y nunca igual a $\theta_2(u)$.

Ejemplo 5.1. Sean $\theta_1(u) = 2 \arctan u$ y $\theta_2(u) = \pi$.

Entonces tenemos que $\theta_1'(u) = \frac{2}{1+u^2} > 0$ para todo u , y como $-\pi < \theta_1(u) < \pi$ se satisfacen los requisitos de independencia lineal.

Los correspondientes campos vectoriales nulos vienen dados por:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{f}}_1(u) &= (\cos(2 \arctan u), \sin(2 \arctan u), 1) \\ &= \left(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2}, 1 \right)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{f}}_2(u) &= (\cos(\pi), \sin(\pi), 1) \\ &= (-1, 0, 1)\end{aligned}$$

así, tenemos:

$$\begin{aligned}\alpha(u) &= \int \bar{\mathbf{f}}_1(u) du = \int \left(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2}, 1 \right) du \\ &= (2 \arctan u - u, \ln(1+u^2), u)\end{aligned}$$

y la superficie correspondiente M viene dada por:

$$\begin{aligned}X(u, v) &= \alpha(u) + v\bar{\mathbf{f}}_2(u) \\ &= (2 \arctan u - u, \ln(1+u^2), u) + v(-1, 0, 1) \\ &= (2 \arctan u - u - v, \ln(1+u^2), u + v)\end{aligned}$$

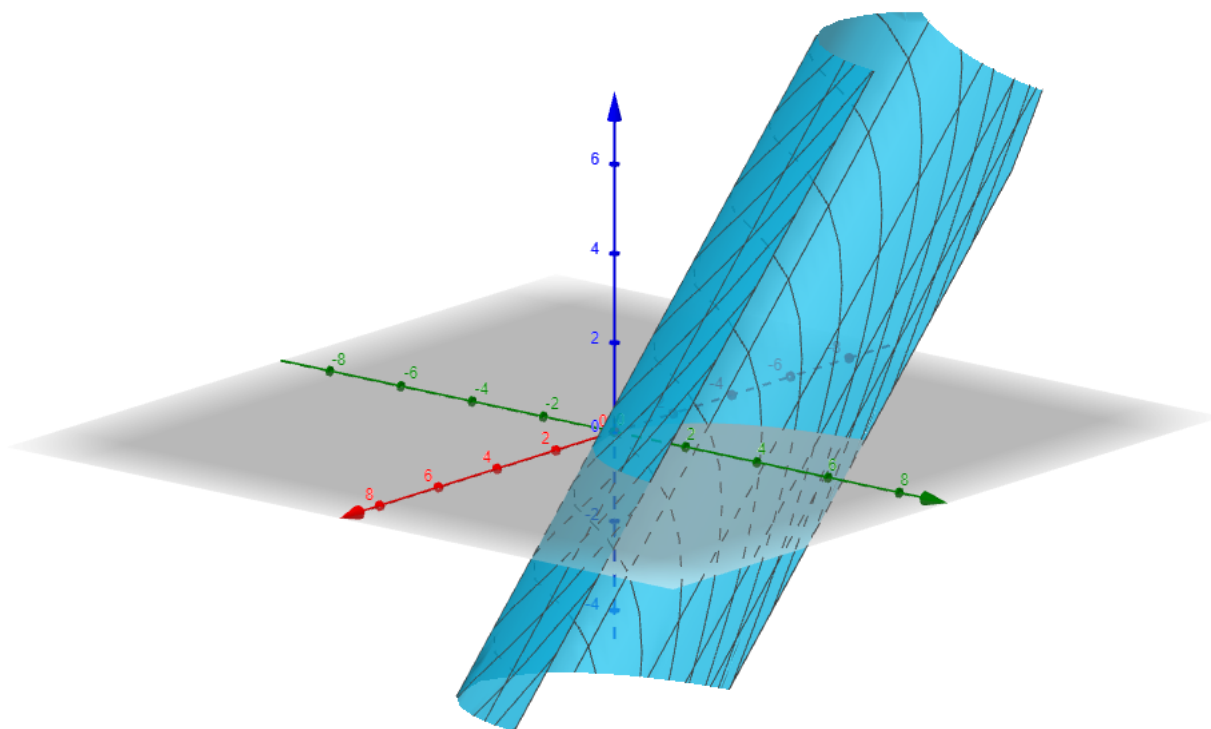


Figura 5.1: La superficie del ejemplo 5.1

5.2. Caso 2: $H(u) \neq 0$

En este caso $\theta_1(u)$ y $\theta_2(u)$ deben ser ambos estrictamente crecientes o estrictamente decrecientes, y debemos tener $\theta_1(u) \neq \theta_2(u)$ para todo u .

Ejemplo 5.2. Sean $\theta_1(u) = u$ y $\theta_2(u) = u + \pi$.

Así, los campos vectoriales nulos correspondientes serán:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{f}}_1(u) &= (\cos \theta_1(u), \sin \theta_1(u), 1) \\ &= (\cos u, \sin u, 1)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{f}}_2(u) &= (\cos \theta_2(u), \sin \theta_2(u), 1) \\ &= (\cos(u + \pi), \sin(u + \pi), 1) \\ &= (-\cos u, -\sin u, 1)\end{aligned}$$

Luego tendremos:

$$\begin{aligned}\alpha(u) &= \int \bar{\mathbf{f}}_1(u) du = \int (\cos u, \sin u, 1) du \\ &= (\sin u, -\cos u, u)\end{aligned}$$

Y la correspondiente superficie M esta dada por:

$$\begin{aligned}X(u, v) &= \alpha(u) + v\bar{\mathbf{f}}_2(u) \\ &= (\sin u, -\cos u, u) + v(-\cos u, -\sin u, 1) \\ &= (\sin u - v \cos u, -\cos u - v \sin u, u + v)\end{aligned}$$

Para calcular el operador de forma S_p , primero calculemos:

$$\begin{aligned}X_u &= (\cos u + v \sin u, \sin u - v \cos u, 1) \\ X_v &= (-\cos u, -\sin u, 1)\end{aligned}$$

El vector normal unitario de M viene dado por:

$$\mathbf{f}_0(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{\sqrt{\langle X_u \times X_v, X_u \times X_v \rangle}}$$

Note que el producto cruz es el de Minkowski (Definición 1.9)

Primero calculamos

$$\begin{aligned}X_u \times X_v &= \begin{vmatrix} e_0 & e_1 & -e_2 \\ \cos u + v \sin u & \sin u - v \cos u & 1 \\ -\cos u & -\sin u & 1 \end{vmatrix} \\ &= (2 \sin u - v \cos u, -2 \cos u - v \sin u, v)\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}\langle X_u \times X_v \rangle &= (2 \sin u - v \cos u)^2 + (-2 \cos u - v \sin u)^2 - v^2 \\ &= 4\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_0(u, v) &= \frac{(2 \sin u - v \cos u, -2 \cos u - v \sin u, v)}{\sqrt{4}} \\ &= \left(\sin u - \frac{v}{2} \cos u, -\cos u - \frac{v}{2} \sin u, \frac{v}{2} \right)\end{aligned}$$

Ahora el operador de forma en la base $\{X_u, X_v\}$ para el plano tangente T_pM esta dado por:

$$\begin{aligned}
 S_p(X_u) &= -(f_0)_u \\
 &= -\left(\cos u + \frac{v}{2} \sin u, \sin u - \frac{v}{2} \cos u, 0\right) \\
 &= -\frac{1}{2}(\cos u + v \sin u, \sin u - v \cos u, 1) + \frac{1}{2}(-\cos u, -\sin u, 1) \\
 &= -\frac{1}{2}X_u + \frac{1}{2}X_v \\
 S_p(X_v) &= -(f_0)_v \\
 &= -\left(-\frac{1}{2} \cos u, -\sin u, \frac{1}{2}\right) \\
 &= -\frac{1}{2}(-\cos u, -\sin u, 1) \\
 &= -\frac{1}{2}X_v
 \end{aligned}$$

Así, el operador de forma respecto a la base $\{X_u, X_v\}$ para el T_pM es:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

La curvatura de Gauss: $K = \det(S_p) = \frac{1}{4}$

La curvatura Media : $H = \frac{1}{2} \text{tr}(S_p) = -\frac{1}{2}$

$$H^2 - K = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$$

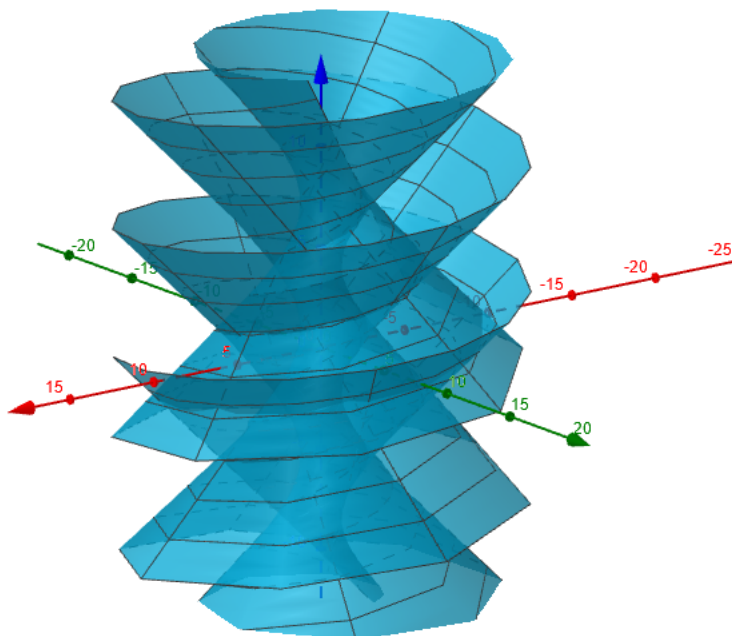


Figura 5.2: La superficie del ejemplo 5.2

Ejemplo 5.3. Sean $\theta_1(u) = u^3 + u$ y $\theta_2(u) = u^3 + u + \pi$ Los correspondientes campos vectoriales son:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{f}}_1(u) &= (\cos \theta_1(u), \sin \theta_1(u), 1) \\ &= (\cos(u^3 + u), \sin(u^3 + u), 1) \\ \bar{\mathbf{f}}_2(u) &= (\cos \theta_2(u), \sin \theta_2(u), 1) \\ &= (\cos(u^3 + u + \pi), \sin(u^3 + u + \pi), 1) \\ &= (-\cos(u^3 + u), -\sin(u^3 + u), 1)\end{aligned}$$

Luego tenemos:

$$\begin{aligned}\alpha(u) &= \int_0^u \bar{\mathbf{f}}_1(s) ds = \int_0^u (\cos(s^3 + s), \sin(s^3 + s), 1) ds \\ &= \left(\int_0^u \cos(s^3 + s) ds, \int_0^u \sin(s^3 + s) ds, u \right)\end{aligned}$$

La correspondiente superficie M esta dada por:

$$\begin{aligned}X(u, v) &= \alpha(u) + v\bar{\mathbf{f}}_2(u) \\ &= \left(\int_0^u \cos(s^3 + s) ds, \int_0^u \sin(s^3 + s) ds, u \right) + v (-\cos(u^3 + u), -\sin(u^3 + u), 1) \\ &= \left(\int_0^u \cos(s^3 + s) ds - v \cos(u^3 + u), \int_0^u \sin(s^3 + s) ds - v \sin(u^3 + u), u + v \right)\end{aligned}$$

Para calcular el operador de forma S_p , primero calculamos:

$$\begin{aligned} X_u &= (\cos(u^3 + u) + v(3u^2 + 1) \sin(u^3 + u), \sin(u^3 + u) - v(3u^2 + 1) \cos(u^3 + u), 1) \\ X_v &= (-\cos(u^3 + u), -\sin(u^3 + u), 1) \end{aligned}$$

calculamos

$$\begin{aligned} X_u \times X_v &= \begin{vmatrix} e_0 & e_1 & -e_2 \\ \cos(u^3 + u) + v(3u^2 + 1) \sin(u^3 + u) & \sin(u^3 + u) - v(3u^2 + 1) \cos(u^3 + u) & 1 \\ -\cos(u^3 + u) & -\sin(u^3 + u) & 1 \end{vmatrix} \\ &= (2 \sin(u^3 + u) - v(3u^2 + 1) \cos(u^3 + u), -2 \cos(u^3 + u) \\ &\quad - v(3u^2 + 1) \sin(u^3 + u), v(3u^2 + 1)) \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \langle X_u \times X_v, X_u \times X_v \rangle &= (2 \sin(u^3 + u) - v(3u^2 + 1) \cos(u^3 + u))^2 \\ &\quad + (-2 \cos(u^3 + u) - v(3u^2 + 1) \sin(u^3 + u))^2 \\ &\quad - (v(3u^2 + 1))^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Luego el vector normal unitario a M es:

$$\mathbf{f}_0(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{\sqrt{\langle X_u \times X_v, X_u \times X_v \rangle}}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_0(u, v) &= \frac{(2 \sin(u^3 + u) - v(3u^2 + 1) \cos(u^3 + u), -2 \cos(u^3 + u) - v(3u^2 + 1) \sin(u^3 + u), v(3u^2 + 1))}{\sqrt{4}} \\ &= \left(\sin(u^3 + u) - \frac{v}{2}(3u^2 + 1) \cos(u^3 + u), -\cos(u^3 + u) - \frac{v}{2}(3u^2 + 1) \sin(u^3 + u), \frac{v}{2}(3u^2 + 1) \right) \end{aligned}$$

Realizando los cálculos para el operador de forma en las bases $\{X_u, X_v\}$ para $T_p M$:

$$\begin{aligned} S_p(X_u) &= -(\mathbf{f}_0)_u \\ &= - \left((3u^2 + 1) \cos(u^3 + u) - \frac{v}{2}(6u) \cos(u^3 + u) + \frac{v}{2}(3u^2 + 1)^2 \sin(u^3 + u), \right. \\ &\quad \left. (3u^2 + 1) \sin(u^3 + u) - \frac{v}{2}(6u) \sin(u^3 + u) - \frac{v}{2}(3u^2 + 1)^2 \cos(u^3 + u), \right. \\ &\quad \left. \frac{v}{2}(6u) \right) \\ &= -\frac{1}{2}(3u^2 + 1)X_u + \left(\frac{1}{2}(3u^2 + 1) - 3uv \right) X_v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_p(X_v) &= -(\mathbf{f}_0)_v \\ &= - \left(-\frac{1}{2}(3u^2 + 1) \cos(u^3 + u), -\frac{1}{2}(3u^2 + 1) \sin(u^3 + u), \frac{1}{2}(3u^2 + 1) \right) \\ &= -\frac{1}{2}(3u^2 + 1) (-\cos(u^3 + u), -\sin(u^3 + u), 1) \\ &= -\frac{1}{2}(3u^2 + 1)X_v \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz del operador de forma S_p con respecto a la base $\{X_u, X_v\}$ es:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(3u^2 + 1) & 0 \\ \frac{1}{2}(3u^2 + 1) - 3uv & -\frac{1}{2}(3u^2 + 1) \end{bmatrix}$$

Así para la superficie M se tiene las curvaturas de **Gauss y media**.

$$K = \frac{1}{4}(3u^2 + 1)^2 \quad ; \quad H = \frac{1}{2}(3u^2 + 1)$$

De donde

$$H^2 - K = \left(\frac{1}{2}(3u^2 + 1)\right)^2 - \frac{1}{4}(3u^2 + 1)^2 = 0$$

Bibliografía

- [1] J. CLELLAND, *Totally quasi-umbilic timelike surfaces in $\mathbb{R}^{1,2}$* , Asian Journal of Mathematics, 16 (2012), pp. 189–208.
- [2] J. N. CLELLAND AND T. A. IVEY, *Backlund transformations and darboux integrability for nonlinear wave equations*, Asian Journal of Mathematics, 13 (2009), pp. 15–64.
- [3] M. P. DO CARMO, *Differential geometry of curves and surfaces: revised and updated second edition*, Courier Dover Publications, 2016.
- [4] T. A. IVEY AND J. M. LANDSBERG, *Cartan for beginners: differential geometry via moving frames and exterior differential systems*, vol. 61, American Mathematical Society Providence, 2003.
- [5] E. L. LIMA, *Análise real, funcoes de n variáveis, volume ii*, Rio de Janeiro: IMPA, Colecao Matemática Universitária, Terceira Ediccao, (2007).
- [6] R. LOPEZ, *Differential geometry of curves and surfaces in lorentz-minkowski space*, International electronic journal of geometry, 7 (2014), pp. 44–107.
- [7] B. O’NEILL, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic press, 1983.
- [8] —, *Elementary differential geometry*, Elsevier, 2006.