UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRES

Facultad De Ciencias Puras y Naturales
Carrera de Matemática

Tesis de Maestría

Estructuras Algebraicas Arquimedianas

Postulante
Lic. Zenón Condori Gonzales

Tutor
Dr. Ramiro H. Lafuente Rodriguez

La Paz - Bolivia

2021

Dedicatoria

Con mucho cariño y nostalgia a mi padre..
Fidel Condori Calle Q.E.P.D.
y mi querida madre, Justina Gonzales.
Gracias por su cariño y confianza.

Agradecimientos

Mis agradecimientos y cariño a mi esposa e hijos por su constante apoyo y familia en general, hermanos y padres políticos.
Al Dr. Ramiro Lafuente por ser guía en mi trabajo y apoyo constante.
A mis tribunles Msc. Ernesto E. Cupe y Msc. Marcelo Machicao R. por su tiempo, sugerencias y orientación en el desarrollo de mi trabajo.

Zenón Condori Gonzales

Índice general

Parte I:

Introducción a las Estructuras Algebraicas Ordenadas

Tal vez la mejor manera de describir mi experiencia al hacer matemáticas sea la de entrar a una oscura mansión. Uno entra a la primera habitación y está oscura, muy oscura. Uno avanza a tientas, tropezando con los muebles, y gradualmente aprende dónde está cada mueble... y finalmente, al cabo de seis meses o así, encuentras el interruptor de luz, lo enciendes y de repente todo se ilumina, puedes ver exactamente dónde estabas.

Andrew Wiles

Introducción

El estudio de la propiedad Arquimediana en diferentes estructuras algebraicas ordenadas constituye una rama importante e influyente de las Estructuras Algebraicas Ordenadas, en particular de las estructuras algebraicas y topológicas inherentes a la recta real o a productos cartesianos de los reales. La propiedad Arquimediana de los números reales es un hito no solo en la Matemática sino en la historia de la Matemática, y trae consigo generalizaciones y abstracciones en los diferentes contextos de la Matemática, en particular en las estructuras algebraicas en las que se impone un orden que es compatible con las operaciones.

La propiedad arquimediana de los números reales fue introducida por Arquímedes aproximadamente 200 años antes de Cristo durante la época de oro del desarrollo antiguo de la matemática en la antigua Grecia. Esta propiedad arquimediana es naturalmente inherente al concepto de orden. Durante la primera parte del siglo XX, es cuando se formalizan las estructuras algebraicas ordenadas, es natural la introducción de la propiedad arquimediana en cada una de las estructuras en las que el orden juega un rol primordial.

La propiedad arquimediana en un grupo totalmente ordenado sucede cuando el conjunto de números naturales es cofinal. Similarmente se define la propiedad arquimediana en los números reales de la forma usual, es decir cuando se toman dos números, uno mayor que el otro, entonces existe un entero que multiplicado por el número menor excede al mayor. Dada una estructura algebraica ordenada, se plantea investigar las condiciones bajo las cuales la propiedad arquimediana se verifica y establecer sus consecuencias, su clasificación y su generalización.

El objetivo general de este trabajo es investigar la propiedad arquimediana en las estructuras algebraicas ordenadas más conocidas e investigar sus consecuencias, su clasificación y generalización.

En el presente trabajo desarrollaremos la teoría básica necesaria para establecer un concepto formal de la propiedad arquimediana y luego enmarcarlo en las diferentes estructuras algebraicas ordenadas específicas, tales como los grupos reticularmente ordenados, los anillos reticularmente ordenados y los espacios vectoriales reticularmente ordenados. Las definiciones de propiedad arquimediana para las diferentes estructuras algebraicas ordenadas serán coherentes de manera natural, de tal forma que el concepto inicial de propiedad arquimediana se preserve.

Capítulo 1

Grupos Reticularmente Ordenados

A mediados del siglo XX, Garret Birkhof desarrolló la teoría de retículos e introdujo algunas nociones de grupos reticularmente ordenados.

En estas dos primeras secciones establecemos los hechos necesarios para desarrollar la teoría de grupos reticularmente-ordenados.

Empezaremos con la definición y algunos ejemplos además de las propiedades elementales, principalmente aquellas propiedades que tienen que ver con la manipulación y cálculo algebraico de los elementos.

El concepto de Retículo puede realizarse de dos maneras, algebraica y geométrica, las cuales por supuesto son equivalentes.

- La primera: considerarlos (algebraicamente) como grupos o anillos
- La segunda: basada en la noción de orden, el cual ofrece además una visión geométrica.

Definición 1.1. *(1ra. Definición de reticulos) Un conjunto no vacío L con dos operaciones binarias internas $\wedge$ y $\vee$ (llamamos "met" y "join" respectivamente) sobre L es llamado un retículo si satisface las siguientes identidades.*

$L1:$	(a)	$x \vee y = y \vee x$	$(conmutatividad)$
	(b)	$x \wedge y = y \wedge x$	
$L2:$	(a)	$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	$(asociatividad)$
	(b)	$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$	
$L3:$	(a)	$x = x \vee x$	$(idempotencia)$
	(b)	$x = x \wedge x$	
$L4:$	(a)	$x = x \vee (x \wedge y)$	(absorción)
	(b)	$x = x \wedge (x \vee y)$	

Ejemplos

1. Sea L un conjunto de proposiciones, $\wedge$ el conectivo " conjunción " y $\vee$ el conectivo de "disyunción". Entonces $L1$ hasta $L4$ son las propiedades de la lógica proposicional

2. Sea $L = \mathbb{N}$
   $\bigwedge$ denota el máximo común divisor
   $\bigvee$ denota el mínimo común múltiplo
   Las identidades $L1$ a $L4$ se verifican claramente.

Definición 1.2. *(Orden parcial) Una relación binaria $\leqslant$ definida sobre un conjunto A define un orden parcial sobre el conjunto A si se satisface lo siguiente :*

(i) $\forall x, x \leqslant x$ *(reflexividad)*

(ii) $x \leqslant y$ *y* $y \leqslant x$ *implica* $x = y$ *(antisimetria)*

(iii) $x \leqslant y$ *y* $y \leqslant z$ *implica* $x \leqslant z$ *(transitividad)*

si además, para cada x, y en A, se cumple

(iv) $x \leqslant y$ *o* $y \leqslant x$

entonces decimos que $\leqslant$ es un orden total en A

Un conjunto no vacío con un orden parcial es llamado un conjunto parcialmente ordenado, lo que denotamos por *cpo*, y si la relacíon es un orden total entonces decimos que el conjunto es totalmente ordenado (o una cadena).
En un conjunto parcialmente ordenado A usamos la expresión $a < b$, que significa $a \leqslant b$ y $a \neq b$
Denotamos además $(A, \leqslant)$ como un cpo.

Ejemplos

1. Sea B un conjunto
   $(P(B), \subseteq)$ es cpo, donde $P(B)$ es el conjunto de partes de B y $\subseteq$ es la relación de inclución.

2. $(\mathbf{N}, |)$ es cpo, donde " $|$ " es la relación "divide".

3. $(\mathbb{R}, \leqslant)$ es una cadena, donde $\leqslant$ es el orden usual en $\mathbb{R}$.

Definición 1.3. *Un* grupo parcialmente ordenado *es una terna* $(G, \cdot, \leq)$ *donde*

(a) $(G, \cdot)$ *es un grupo,*

(b) $(G, \leq)$ *es un conjunto parcialmente ordenado, y*

(c) $a \leq b$ *implica* $ac \leq bc$ *y* $ca \leq cb$, $\forall a, b, c \in G$. *(compatibilidad)*

Diremos en este caso que G un po-grupo.

Si $(G, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado, diremos que G es un grupo totalmente ordenado, o simplemente un *grupo ordenado*, lo cual abreviaremos por o-grupo.

Definición 1.4. *(Segunda Definición de Retículos) Un conjunto parcialmente ordenado L es un retículo si para cada $x, y \in L$ existe $sup\{x, y\}$ e $inf\{x, y\}$ en L.*

Notación: $sup\{x, y\} = x \vee y$; $inf\{x, y\} = x \wedge y$

Si $(G, \leq)$ es un conjunto reticularmente ordenado, diremos que G es un *grupo reticularmente ordenado*, lo cual abreviaremos por ℓ-grupo.

Ejemplos

1. $(P(B), \subseteq)$ es retículo, aqui para $C, D \in P(B)$ se tiene:

$$C \vee D = C \cup D$$

$$C \wedge D = C \cap D$$

2. Cualquier cadena es trivialmente un retículo.

La relación de orden de cualquier po-grupo G esta completamente determinado por el conjunto $G^+ = \{g \in G | e \leq g\}$ de elementos positivos. G^+ es llamado en algunos casos cono positivo de G y es un semigrupo normal de G que no contiene elementos inversos de G excepto e. Recíprocamente, cualquiera de estos semigrupos de G sirve como el conjunto de elementos positivos para algún orden parcial el cual hace a G un po-grupo.

Podemos ver a un ℓ-grupo como un álgebra bajo las operaciones de grupo y operaciones de retículo $\vee$ y $\wedge$. Así, la multiplicación por la derecha (o izquierda) para cualquier elemento fijo de G induce un automorfismo reticular de G, y también la operación distributiva de grupo bajo las operaciones de retículo. A lo largo de este capítulo denotaremos con e para el elemento identidad de un ℓ-grupo (o 0 en el caso de ℓ-grupos abelianos donde escribiremos al grupo con la operación aditiva).

Si un grupo G es también un conjunto parcialmente ordenado y requeriremos que preserve el orden bajo la multiplicación por la derecha ($ad \leq bd$ siempre que $a \leq b$) lo llamaremos grupo parcialmente ordenado por la derecha; en este caso si el orden parcial es lineal, diremos que el grupo es un grupo ordenado derecho.

Ejemplos

1. Los siguientes conjuntos: $\mathbf{Z}$ el conjunto de los números enteros; $\mathbb{Q}$, de los racionales; $\mathbb{R}$ de los reales; todos bajo la adición y orden usual son o-grupos abelianos.

2. Si $\{G_\lambda|\lambda \in \Lambda\}$ es una colección de ℓ-grupos, entonces $\prod\{G_\lambda|\lambda \in \Lambda\}$, el producto cartesiano de la familia de ℓ-grupos $\{G_\lambda|\lambda \in \Lambda\}$ ordenados por: $f \leq h$ si y solo si $f_\lambda \leq h_\lambda$ en G_λ para todo $\lambda \in \Lambda$, es también un ℓ-grupo llamado *producto cardinal* de la familia $\{G_\lambda|\lambda \in \Lambda\}$. Este orden en $\prod\{G_\lambda|\lambda \in \Lambda\}$ es llamado *orden cardinal*. La suma directa $\{f \in \prod G_\lambda|F_\lambda = e_\lambda$ para todos, excepto un número finito de $\lambda \in \Lambda\}$ es además un subretículo y por lo tanto es un ℓ-grupo. A este ℓ-grupo lo denotaremos con $\Sigma\{G_\lambda|\lambda \in \Lambda\}$ o $G_1 \boxplus \cdots \boxplus G_n$ si $\Lambda = \{1, ..., n\}$. Otros subgrupos subreticulares se dan en el caso de $\Lambda = \{1, 2, \ldots\}$ y todo $G_\lambda \subseteq \mathbb{R}$ son conjuntos de sucesiones eventualmente constantes y sucesiones acotadas.

3. Sea G un ℓ-grupo y A un o-grupo. El producto lexicográfico de A y G, denotado por $A\overrightarrow{\otimes}G$, es el producto directo de grupos A y G ordenado por: $(a_1, g_1) \leq (a_2, g_2)$ si $a_1 < a_2$ o bien $a_1 = a_2$ y $g_1 \leq g_2$. Este es un ℓ-grupo. El ℓ-grupo $G\overleftarrow{\otimes}G$ se define de forma similar, además si $\{G_\lambda|\lambda \in \Lambda\}$ es la suma directa de los grupos $\{G_\lambda\}$ ordenado por $f < g$ y se tiene un $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $f_{\lambda_0} < g_{\lambda_0}$ y $f_\lambda = g_\lambda$ para todo $\lambda\ in \Lambda$ con $\lambda > \lambda_0$. Nótese que $\overleftarrow{\Sigma}\{G_\lambda|\lambda \in \Lambda\}$ es un o-grupo. Sin embargo, se debe considerar la siguiente precaución: Si $G \neq \{e\}$ y A es un ℓ-grupo, entonces $G\overleftarrow{\otimes}G$ es un ℓ-grupo si y solo si A es un o-grupo. Veamos: sea

$a_1, a_2 \in A$ tal que $a_1 \nleq a_2$ y $a_2 \nleq a_1$. Ahora $a_1(a_1 \wedge a_2)^{-1} \wedge a_2(a_1 \wedge a_2)^{-1} = e$ y $b_j = a_j(a_1 \wedge a_2)^{-1} \neq e (j = 1, 2)$. *Entonces* $(g, e) \leq (e, b_1), (e, b_2)$ para todo $g \in G$ también (e, b_1) y (e, b_2) no tiene la mayor cota inferior en $G \overleftarrow{\otimes} G$ es fácil ver que el ℓ-grupo no trivial G no tiene el elemento mayor.

4. En los ejemplos 2 y 3 nos dan 2 ordenes distintos en el grupo $\mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z}$. Otra familia separada de orden lineal (y con orden reticular) esta dado por: elijamos un número racional arbitrario ξ. Definamos $(m_1, n_1) \leq (m_2, n_2)$ si y solo si $m_1 + \xi n_1 \leq m_2 + \xi n_2$ en $\mathbf{R}$.

5. Cualquier ℓ-grupo es libre de torsión. Si G si es cualquier grupo abeliano libre de torsión, entonces G puede ser encajado (inmerso) en un grupo divisible abeliano libre de torsión V, el cual es, un espacio vectorial racional. Si Λ es una base para V, podemos ordenar a Λ totalmente. Ya que V es suma directa de grupos $\{G_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ con cada G_λ isomorfo a $\mathbf{Q}$, podemos ordenar totalmente a V como $\overleftarrow{\sum}\{G_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ como en el ejemplo 3. Entonces G se convierte en un ℓ-grupo con el orden cardinal del ejemplo 2. Sin embargo, G no podría necesariamente ser un subretículo de si mismo.

   Nuevamente, si G es un ℓ-grupo abeliano (escrito de forma aditiva), entonces se comporta como grupo abeliano libre de torsión, G esta contenido en la cubierta divisible de V cuyos elementos pueden ser descritos como $V = \{\frac{m}{n} g | g \in G, m, n \in \mathbf{Z}^+, n \neq 0\}$, el orden de G puede ser extendido a V dejando $\frac{m}{n} g \geq 0$ si y solamente si $g \geq 0$. Esto hace a V dentro de un ℓ-grupo que contiene a G como un subgrupo subreticular, esto es como un $\ell - subgrupo$.

6. Sintetizaremos los ejemplos 2 y 3 en un ejemplo mas general. Sea Λ un *sistema de raíces*, es decir un conjunto parcialmente ordenado tal que los limites inferiores de cada elemento forman un subconjunto parcialmente ordenado. Sea $\{G_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ una familia de o-grupos. Para cada $g : \Lambda \to \cup G_\lambda$ con $g(\lambda) \in G_\lambda$, sea $\text{supp}(g) = \{\lambda \in \Lambda | g(\lambda) \neq e\}$. $V(\Lambda, G_\lambda)$ es el grupo de todos los g para el cual cada subconjunto ordenado lineal no vació de $\text{supp}(g)$ tiene el elemento mas grande. Ordenaremos $V(\Lambda, G_\lambda)$ por: $e < g$ si y solo si $e_\lambda < g(\lambda)$ para cada λ este es el elemento maximal de $\text{supp}(g)$. Usualmente, cada G_λ puede ser un subgrupo de $\mathbf{R}$. En este caso, $V(\Lambda, G_\lambda)$ es llamado un *grupo de Hahn* sobre Λ.

7. $C(X, \mathbf{R})$, el grupo aditivo de funciones continuas de un espacio topológico X en

$\mathbf{R}$, equipado con el orden puntual: $f \leq g$ si y solo si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$. Entonces $C(X, \mathbf{R})$ es un ℓ-grupo.

8. Sea $(\Omega, \leq)$ un conjunto ordenado lineal infinito y $A(\Omega) = Aut(\Omega, \leq)$. Ahora $A(\Omega)$ es un grupo (bajo la composición) de todas las aplicaciones que preservan el orden de permutaciones de Ω. El orden puntual hace que $A(\Omega)$ sea un ℓ-grupo. Posteriormente estudiaremos a estos ℓ-grupos. Si $g \in A(\Omega)$, sea $supp(g) = \{\alpha \in \Omega | \alpha g \neq \alpha\}$. Sea $B(\Omega) = \{g \in A(\Omega) | \exists \alpha, \beta \in \Omega$ tal que $\alpha < supp(g) < \beta\}$, un ℓ-subgrupo de $A(\Omega)$. Si cada vez que $\alpha_1 < \alpha_2$ y $\beta_1 < \beta_2$ en Ω, existe $g \in A(\Omega)$ tal que $\alpha_i g = \beta_i (i = 1, 2)$, diremos que Ω es *doblemente homogéneo*. Estos conjuntos ordenados lineales son n-homogéneos para todo $0 < n \in \mathbf{Z}$ y por lo tanto Ω, $B(\Omega)$ es un grupo simple. Otro ejemplo de un grupo simple es debido a Chehata; Sea $C = \{g \in B(\mathbf{R}) | \exists \alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ tal que $g|[\alpha_j, \alpha_{j+1}]$ es lineal $(1 \leq j < n)$ y $supp(g) \subseteq (\alpha_1, \alpha_n)\}$. Entonces C es un grupo simple y este puede ser reordenado para hacer de este un o-grupo.

Capítulo 2

Propiedades Elementales de ℓ-grupos

En esta sección haremos una lista de importantes pero sencillas propiedades acerca de elementos e identidades en ℓ-grupos. Estos serón utilizados respectivamente a lo largo de esta tesis. En la siguiente sección se establecerán algunos hechos mas que elementales.

Lema 2.1. *En cualquier ℓ-grupo se cumple lo siguiente.*

(a) $a \vee b = (a^{-1} \wedge b^{-1})^{-1}$ *y* $a \wedge b = (a^{-1} \vee b^{-1})^{-1}$.

(b) $(a \vee b)^n = a^n \vee a^{n-1}b \vee \cdots \vee ab^{n-1} \vee b^n$ *si a y b conmutan.*

(c) $(a \wedge b)^n = a^n \wedge a^{n-1}b \wedge \cdots \wedge ab^{n-1} \wedge b^n$ *si a y b conmutan.*

Demostración. (a) $(a \vee b)^{-1} \leq a^{-1}, b^{-1}$ ya que $a, b \leq a \vee b$. Si $c \leq a^{-1}, b^{-1}$, entonces $c^{-1} \geq a, b$; también $c^{-1} \geq a \vee b$. Por lo tanto $c \leq (a \vee b)^{-1}$, probando Así que $(a \vee b)^{-1} = a^{-1} \wedge b^{-1}$. El otro lado de (a) es similar.

(b) y (c) son similares haciendo inducción sobre n. ■

Este Lema muestra inmediatamente que existen restricciones considerables en la clase de grupos que contienen en sí a ℓ-grupos.

Corolario 2.1. *En cualquier ℓ-grupo, si $a^n \geq e$ para algún entero positivo n, entonces $a \geq e$. Por lo tanto cualquier ℓ-grupo es libre de torsión.*

Demostración. Por (c), si $a^n \geq e$, entonces $(a \wedge e)^n = a^n \wedge a^{n-1} \wedge \cdots \wedge a \wedge e = a^{n-1} \wedge \cdots \wedge a \wedge e = (a \wedge e)^{n-1}$. Así $a \wedge e = e$; Así $a \geq e$. Si $a^n \geq e$ y $(a^{-1})^n \geq e$. Por lo tanto $a \geq e$ y $a^{-1} \geq e$; y de esto concluimos que $a = e$. ■

Corolario 2.2. *En cualquier ℓ-grupo G, si $n \neq 0$ y $a^n = b^n$, entonces*

$b = c^{-1}ac$ para algún $c \in G$

Demostración. Sea $c = a^{n-1} \vee a^{n-2}b \vee \cdots \vee ab^{n-2} \vee b^{n-1}$. Entonces $ac = a^n \vee a^{n-1}b \vee \cdots \vee ab^{n-1} = b^n \vee a^{n-1}b \vee \cdots \vee ab^{n-1} = cb$. ■

En general, $a^n = b^n$ no implica que $a = b$ en un ℓ-grupo : Consideremos el ℓ-grupo $a(\mathbf{R})$. Sea a una traslación por $+1$ (Así $\alpha a = \alpha + 1$ si $\alpha \in \mathbf{R}$), y sea b definida por:

$$\alpha b = \begin{cases} \sqrt{\alpha - 2n} + 2n + 1, & \text{, si } \alpha \in [2n, 2n+1] (n \in \mathbf{Z}), \\ (\alpha - 2n - 1)^2 + 2n + 2 & \text{, si } \alpha \in [2n+1, 2n+2] (n \in \mathbf{Z}). \end{cases}$$

Entonces $a, d \in A(\mathbf{R})$ y $b^2 = a^2$, que es una traslación de $+2$, pero $a \neq b$. Ciertamente, $ab \neq ba$.

Sin Embargo, si $[c, d] = c^{-1}d^{-1}cd$ denota el conmutador, entonces tenemos el siguiente

Lema 2.2. *Si G es un o-grupo, entonces*

(a) *Si $a^n = b^n$ para algún entero positivo n, entonces $a = b$;*

(b) *Si $[a^n, b] = e$, para algún entero positivo n, entonces $[a, b] = e$.*

Demostración. (a) Si $a \neq b$, entonces sin perder generalidad, podemos suponer que $a < b$. Por lo tanto $a^n < a^{n-1}b < a^{n-2}b^2 < \cdots < b^n$; Así $a^n \neq b^n$.

(b) Si $[a^n, b] = e$, entonces $(b^{-1}a^n b)^n = b^{-1}a^n b = a^n$; Así $b^{-1}ab = a$ se sigue la parte (a). ■

Otra consecuencia del Lema 2.2 es:

Lema 2.3. *El retículo de un ℓ-grupo es distributivo; es decir*

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \text{ y } a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Demostración. Cualquier retículo que satisface ($a \wedge b = a \wedge c$ y $a \vee b = a \vee c \Rightarrow b = c$) es distributivo.

Ahora utilizamos el hecho que $a \wedge b = a \wedge c$ y $a \vee b = a \vee c$. Entonces, usando el Lema 2.2 (a), $b = (a \wedge b)aa^{-1}(a \wedge b)^{-1}b = (a \wedge b)aa^{-1}(a^{-1} \vee b^{-1})b = (a \wedge b)a^{-1}(b \vee a) = (a \wedge c)a^{-1}(c \vee a) = (a \wedge c)a^{-1}a(a^{-1} \vee c^{-1})c = c$. ■

Lema 2.4. *En cualquier ℓ-grupo, si $\bigvee\{a_\lambda|\lambda \in \Lambda\}$ existe, entonces también existen $\bigvee\{a_\lambda \wedge b|\lambda \in \Lambda\}$ y $\bigvee\{a_\lambda \wedge b|\lambda \in \Lambda\} = (\bigvee\{a_\lambda|\lambda \in \Lambda\}) \wedge b$.*

Una consecuencia directa del Lema 2.4 es:

Corolario 2.3. *En cualquier ℓ-grupo G, el subgrupo subretículo generado por $g_1, \ldots, g_n$ comprende todos los elementos de la forma $\bigvee_i \bigwedge_j w_{ij}$, donde los elementos w_{ij} todos pertenecen al subgrupo de G generado por $g_1, \cdots, g_n$ oscilan sobre un conjunto finito.*

Definición 2.1. *Definimos, $g \in G$*

$$\begin{array}{lcl} \textit{parte positiva} \quad g_+ & = & g \vee e \\ \textit{parte negativa} \quad g_- & = & g^{-1} \vee e \\ \textit{valor absoluto} \quad |g| & = & g_+ \cdot g_- \end{array}$$

Un resultado inmediato es $| g |= g_+ \vee g = g \vee g^{-1}$

Lema 2.5. *En cualquier ℓ-grupo*

(a) *Si $a \wedge b = e$, entonces $ab = a \vee b = ba$ y $a \wedge bc = a \wedge c$ si $c \geq e$.*

(b) $|a| = a^+a^- \geq e$. *Además, $|a| = e$ si y sólo si $a = e$.*

(c) $a^+ \wedge a^- = e$.

(d) $a = a^+(a^-)^{-1}$.

(e) $(ab)^+ \leq a^+b^+$.

(f) $(a^+)^n = (a^n)^+, (a^-)^n = (a^n)^-$ *y* $|a|^n = |a^n|$.

(g) $|a \vee b| \leq |a| \vee |b| \leq |a||b|$.

Demostración. (a) Si $a \wedge b = e$, entonces $ab = a(a \wedge b)^{-1}b = a(a^{-1} \vee b^{-1})b = b \vee a = a \vee b = ba$ usando el Lema 2.1(a). además

$$a \wedge b \leq a \wedge bc \leq (a^2 \wedge ba \wedge ac) \wedge bc = (a \wedge b)(a \wedge c) = a \wedge c.$$

(b) Si $b \geq a, a^{-1}$, entonces $b^2 \geq e$. Por el corolario anterior, $b \geq e$. Así $|a| = a \vee a^{-1} \geq e$ y

$$a^+a^- = (a \vee e)(a^{-1} \vee e) = e \vee a \vee a^{-1} \vee e = a \vee a^{-1} = |a|.$$

Si $|a| = e$, entonces $a \vee a^{-1} = e$; $a, a^{-1} \leq e$. Por lo tanto $a = e$.

(c) $a^+ \wedge a^- = (a \vee e) \wedge (a^{-1} \vee e) = (a \wedge a^{-1}) \vee e = (a^{-1} \vee a)^{-1} \vee e$ usando (b), Lema 2.1(a) y el Lema 3.

(d) $aa^- = a(a^{-1} \vee e) = e \vee a = a^+$, también $a = a^+(a^-)^{-1}$.

(e) $ab \vee e \leq ab \vee a \vee b \vee e = (a \vee e)(b \vee e)$.

(f) Si $0 \leq k \leq n$, entonces $(a^{n-k} \vee a^{-k})^n = \bigvee_{j=0}^{n} a^{(n-k)h} a^{-k(n-j)} \geq a^{(n-k)k} a^{-k(n-k)} = e$, usando el Lema 2.1(b). Por el Corolario anterior, $a^{n-k} \vee a^{-k} \geq e$. Así $a^n \vee e \geq a^k$. Por lo tanto

$$(a^+)^n = a^n \vee a^{n-1} \vee \cdots \vee a \vee e = a^n \vee e = (a^n)^+.$$

De manera similar, $(a^-)^n = (a^n)^-$. Por (a),(b), y (c), $|a|^n = (a^+a^-)^n = (a^n)^+(a^n)^- = |a^n|$.

(g) $a, a^{-1} \leq |a|$ y $b, b^{-1} \leq |b|$, también $a \vee b$, $a^{-1} \wedge b^{-1} \leq |a| \vee |b|$. Así $|a \vee b| = (a \vee b) \vee (a \vee b)^{-1} \leq |a| \vee |b| \leq |a||b| \vee |a||b| = |a||b|$ ya que $|x| \geq e$ para todo x.

■

Corolario 2.4. *Cada ℓ-grupo es generado como un grupo por el conjunto de elementos positivos y este conjunto es semi-aislado.*

Teorema 2.5. *(Desigualdad triangular) Sea G un ℓ-grupo. $\forall g, h \in G, \mid gh \mid \leqslant \mid g \mid\mid h \mid\mid g \mid$*

Demostración. Se sigue del siguiente hecho:

i) $gh \leq |g|\,|h|\,|h|$

ii) $gh \geq |g|^{-1}\,|h|^{-1}\,|g|^{-1}$

■

Lema 2.6. *Si $gh = hg \Rightarrow \mid gh \mid \leqslant \mid g \mid\mid h \mid$*

Demostración. Recordemos que $\mid g \mid = g_+ \vee g = g \vee g^{-1}$

$$\begin{aligned}\mid g \mid\mid h \mid &= (g \vee g^{-1})(h \vee h^{-1}) \\ &= g(h \vee h^{-1}) \vee g^{-1}(h \vee h^{-1}) \\ &= gh \vee gh^{-1} \vee g^{-1}h \vee g^{-1}h^{-1} \\ &= gh \vee g^{-1}h^{-1} = \mid gh \mid\end{aligned}$$

$$\therefore \mid gh \mid \leqslant \mid g \mid\mid h \mid$$

■

Teorema 2.6. *Un ℓ-grupo G es abeliano si y solamente si para cada par de elementos g y h, $\mid gh \mid \leqslant \mid g \mid\mid h \mid$*

Demostración. ($\Rightarrow$) Si G es abeliano entonces por el lema 2.6 se tiene lo deseado.

($\Leftarrow$) Suponga que $g, h \geqslant e$. Entonces $\mid gh \mid = gh = \mid h^{-1}g^{-1} \mid$ y $\mid h^{-1}g^{-1} \mid \leqslant \mid h^{-1} \mid\mid g^{-1} \mid = \mid h \mid\mid g \mid = hg$ implica que $gh \leqslant hg$ y por simetría $gh \geqslant hg$.
Por lo que G^+ es un semigrupo abeliano.

$$\begin{aligned}\text{Ahora, para cualquier } x, y \in G : xy &= x_+x_-^{-1}y_+y_-^{-1} \\ &= x_+y_+x_-^{-1}y_-^{-1} \\ &= y_+x_+y_-^{-1}x_-^{-1} \\ &= y_+y_-^{-1}x_+x_-^{-1} \\ &= yx\end{aligned}$$

■

El siguiente hecho acerca de G^+ será útil:

Lema 2.7. *(Propiedad de interpolación de Reisz) Si $g_1, \ldots, g_n \in G^+$ y $e \leq f \leq g_1g_2\cdots g_n$, entonces $f = f_1f_2\cdots f_n$ para algunos $f_j \in G^+$ con $f_j \leq g_j (1 \leq j \leq n)$.*

Demostración. Hacemos inducción sobre n. Si $n = 1$, es claro y si $f \leq g_1 \cdots g_{n+a}$ entonces $fg_{n+1}^{-1} \vee e \leq g_1 \cdots g_n$. Por inducción $fg_{n+1}^{-1} \vee e = f_1 \cdots f_n$ para algunos $f_j \in G^+$, $f_j \leq g_j$. Pero $f(f \wedge g_{n+1})^{-1} = e \vee fg_{n+1}^{-1}$ por el Lema 2.1(a), se tiene $f = f_1 \cdots f_n(f \wedge g_{n+1})$.

■

Lema 2.8. *Si G es un ℓ-grupo, entonces para cualquier entero n y $g \in G$,*

(a) $(g \wedge e)^n = g^n \wedge g^{n-1} \wedge ... \wedge g \wedge e$

(b) $(g \vee e)^n = g^n \vee g^{n-1} \vee ... \vee g \vee e$

Demostración. (a) Por inducción:

Claramente es cierto para $n = 1$. Asumamos que es verdad para $n - 1$, entonces

$$\begin{aligned}
(g \wedge e)^n &= (g \wedge e)^{n-1} \cdot (g \wedge e) \\
&= [(g \wedge e)^{n-1} \cdot g] \wedge [(g \wedge e)^{n-1} \cdot e] \\
&= [(g^{n-1} \wedge g^{n-2} \wedge ... \wedge g \wedge e).g] \wedge [g^{n-1} \wedge (g^{n-2} \wedge ... \wedge g \wedge e).e] \text{ hip.} \\
&= g^n \wedge g^{n-1} \wedge ... \wedge g \wedge g^{n-1} \wedge g^{n-2} \wedge ... \wedge g \wedge e \\
&= g^n \wedge g^{n-1} \wedge ... \wedge g \wedge e
\end{aligned}$$

■

Notemos que $\wedge$ es conmutativa, asociativa, idempotente y cumple la ley de la absorción.

De manera similar para (b)

Teorema 2.7. *Un ℓ-grupo G es de torsión libre*

Demostración. Supongamos $g^n = e$; $g \in G$, n un entero positivo debemos mostrar que $g = e$

Por el lema 2.8

$$\begin{aligned}
(g \wedge e)^n &= g^n \wedge g^{n-1} \wedge ... \wedge g \wedge e; \\
&= g^{n-1} \wedge g^{n-2} \wedge ... \wedge g \wedge e; pues \quad g^n = e \\
&= (g \wedge e)^{n-1} \\
Asi \quad (g \wedge e)^n &= (g \wedge e)^{n-1}
\end{aligned}$$

de donde $g \wedge e = e$, pues $\cdot$ es regular.

Puesto que $\inf\{g, e\} = e \Rightarrow g \geqslant e$
Similarmente se muestra $g \leqslant e$ empleando el lema 2.8 en su inciso (b). Por lo tanto se tiene que $g = e$

■

Definición 2.2. *Si G es un po-grupo. El orden en G es semicerrado (semiclosed) si $g^n \geqslant e$ implica $g \geqslant e$. $n \in \mathbb{N}$*

Teorema 2.8. *El orden de un ℓ-grupo es semicerrado*

Demostración. Si $g^n \geq e$ entonces

$$\begin{aligned}(g \wedge e)^n &= g^n \wedge g^{n-1} \wedge \cdots \wedge g \wedge e \\ &= g^{n-1} \wedge g^{n-2} \wedge \cdots \wedge g \wedge e \\ &= (g \wedge e)^{n-1}\end{aligned}$$

Donde se aplicó el teorema 2.7 ■

Teorema 2.9. *Cualquier orden parcial de un grupo abeliano de Torsión Libre puede ser extendido a un orden total*

Corolario 2.10. *Cualquier grupo abeliano de torsión puede ser totalmente ordenado y de aqui un retículo ordenado*

Capítulo 3

Homomorfismos y Subgrupos Primos

En esta sección estudiaremos a los homomorfismos básicos y a las subálgebras,que estarán naturalmente definidas en el contexto de las estructuras algebraicas ordenadas.

De manera natural es deseable que los homomorfismos no solo preserven la operación de grupo sino también las operaciones de retículo. Por lo tanto, la siguiente definición debe satisfacer nuestra motivación natural.

Definición 3.1. *Se dice que una función φ de un ℓ-grupo G en un ℓ-grupo H es un* homomorfismo de ℓ-grupos*, si satisface lo siguiente.*

(a) $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$,

(b) $\varphi(f \vee g) = \varphi(f) \vee \varphi(g)$,

(c) $\varphi(f \wedge g) = \varphi(f) \wedge \varphi(g)$.

Vimos en el Lema 2.1(a), que un homomorfismo de grupos que satisface $\varphi(f \vee e) = \varphi(f) \vee e$ es un homomorfismo para ℓ-grupos, Así (c) se sigue de (a) y (b). Adoptaremos la categoría teórica usada en términos de homomorfismo como hemos definido anteriormente.

Uno podría esperar que los núcleos de homomorfismos sean subgrupos de subretículos normales. Sin embargo, si $\varphi(f_1) = e = \varphi(f_2)$ y $f_1 \leq g \leq f_2$ entonces $\varphi(g) = e$. esto lleva a las siguientes definiciones:

Definición 3.2. *Un subconjunto C de un ℓ-grupo es llamado* convexo *si* $c_1, c_2 \in C$

y $c_1 \leq g \leq c_2$ *implica que* $g \in C$. *Un subgrupo de un subretículo es llamado un* ℓ-*subgrupo. Un* ℓ-*subgrupo convexo normal es llamado* ℓ-ideal *o* ideal *para abreviar, si no hay confusión.*

Lema 3.1. *Sea* C *un subgrupo de un* ℓ-*grupo* G. *Entonces* C *es un* ℓ-*subgrupo convexo si y sólo si*

$$C = \{g \in G \mid |g| \leq |c| \textit{ para algún } c \in C\}$$

Por el Lema 2.2, si C y D son ℓ-subgrupos y $C^+ = D^+$, entonces $C = D$. Podemos probar también el siguiente resultado fundamental.

Teorema 3.1. *Sea* $\varphi : G \to H$ *un homomorfismo entre* ℓ-*grupos. Entonces el núcleo de* φ *es un ideal de* G *y* $\varphi(G)$ *es un* ℓ-*subgrupo de* H. *Para cualquier ideal* N *de* G, *el grupo cociente* G/N *hace un* ℓ-*grupo con* $Nx \vee Ny = N(x \vee y)$ *y dualmente, y la aplicación natural* $\nu : G \to G/N$ *dado por* $\nu(g) = Ng$ *es un homomorfismo. Si* $\varphi : G \to H$ *es un homomorfismo con núcleo* N, *entonces la aplicación* $Ng \mapsto \varphi(g)$ *es un encaje (inmersión) de* G/N *en* H.

Denotemos por $C(G)$ a la colección de todos los ℓ-subgrupos convexos de un ℓ-grupo G. Claramente $C(G)$ es cerrado bajo la intersección arbitraria y también forma un retículo completo considerando a la operación de intersección como ínfimo. La operación unión, lo denotamos por $\bigvee$, esta dado por: $\bigvee\{A_j \mid j \in J\} = \bigcap\{C \in C(G) \mid c \supseteq A_j$ para todo $j \in J\}$. En general, $\bigvee\{A_j \mid j \in J\} \neq \bigcup\{A_j \mid j \in J\}$ incluso cuando J es finito.

Teorema 3.2. *Para cualquier* ℓ-*grupo* G, $C(G)$ *es un retículo distributivo y un subretículo completo del retículo de todos los subgrupos de* G. *Por otra parte,* $A \cap \bigvee\{C_j \mid j \in J\} = \bigvee\{A \cap C_j \mid j \in J\}$ *en* $C(G)$.

Demostración. Si $\{C_j | j \in J\} \subseteq C(G)$ y C es el subgrupo de G generado por $\{C_j | j \in J\}$, sea $|g| \leq |c|$ con $c \in C$. Entonces $c = \prod_{k=1}^{n} c_k$ con $c_k \in C_{jk}$. Por los Lemas anteriores, g^+ y g^- pueden ser escritos como un producto provenientes de $\bigcup\{C_j^+ | j \in J\}$. Por lo tanto $g \in C$; pero $C \in C(G)$, por el Lema 2.2. Claramente $A \cap \bigvee\{C_j | j \in J\} \supseteq \bigvee \bigvee\{A \cap C_j | j \in J\}$ y si $g \in A^+ \cap \bigvee\{\bigvee\{C_j | j \in J\}$, entonces $g \leq \prod_{k=1}^{n} c_k$ con $e \leq g_k \leq c_k (1 \leq k \leq n)$. Ya que cada $g_k \leq g \in A$, cada $g_k \in A \cap C_{jk}$. ■

Corolario 3.3. *El conjunto de ideales de un* ℓ-*grupo es un retículo distributivo bajo la inclusión.*

Dado un ℓ-subgrupo convexo C de un ℓ-grupo G. el conjunto de clases laterales derechos $R(C)$ de C es un retículo bajo el orden: $C_g \leq C_f$ si $cg \leq f$ para algún $c \in C$. Ciertamente, $Cg \vee Cf = C(g \vee f)$ y dualmente. En el caso especial que $R(C)$ se convierte en orden lineal con este ordenamiento, llamaremos a C *subgrupo primo* de G. Mas formalmente

Definición 3.3. *Sea G un ℓ-grupo y P un subgrupo de G. P es un subgrupo primo de G si:*

(i) P es un ℓ-subgrupo convexo de G.

(ii) $\forall x, z \in G$ tales que $e \leq x$, $e \leq z$ y $x \wedge z \in P$ implica que $x \in P$ o $z \in P$.

Proposición 3.1. *Sea G un ℓ-grupo y C un ℓ-subgrupo de G. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(a) C es un subgrupo primo;

(b) Si D_1 y D_2 son ℓ-subgrupos convexos de G que contienen a C, entonces $D_1 \subseteq D_2$ o $D_2 \subseteq D_1$;

(c) Si D_1 y D_2 son ℓ-subgrupos convexos de G y $D_1 \cap D_2 = C$, entonces también $D_1 = C$ o $D_2 = C$;

(d) Si $f \wedge g = e$, entonces $f \in C$ o $g \in C$.

Para probar la proposición, asumiremos el siguiente Lema.

Para $g \in G$, sea $G(g)$ el ℓ-subgrupo convexo generado por g.

Lema 3.2. *$G(g) = \{f \in G | |f| \leq |g|^n$ para algún entero positivo $n\}$. Por lo tanto, si $f, g > e$, $G(f) \cap G(g) = G(f \vee g)$ y $G(f \vee g) = G(f) \vee G(g)$.*

Si $G(g) = G$ y $g \in G^+$, entonces g es llamado *unidad de orden fuerte.*

Demostración. (Proposición 7)

(a) $\Rightarrow$ (b) Si $e < d_1 \in D_1 \backslash D_2$ y $e < d_2 \in D_2 \backslash D_1$, entonces sin perder generalidad $Cd_1 \leq Cd_2$.

Por lo tanto $cd_1 \leq d_2$ para algún $c \in C \subseteq D_2$. Luego, $e \leq d_1 \leq c^{-1}d_2 \in D_2$, una contradicción.

(b) $\Rightarrow$ (c) es inmediato.

(c) $\Rightarrow$ (d) Por el Teorema $3 \cdot 2$ y el Lema 7, $[C \vee G(f)] \cap [C \vee G(g)] = C \vee [G(f) \cap G(g)] = C \vee G(f \wedge g) = C$. Así $C \vee G(f) = C$ o $C \vee G(g) = C$, es decir, $f \in C$ o $g \in C$.

(d) $\Rightarrow$ (a) $f(f \wedge g)^{-1} \wedge g(f \wedge g)^{-1} = e$ para todo $f, g \in G$. Así, sin perder generalidad, $f(f \wedge g)^{-1} \in C$. Por lo tanto $C(f) = C(f \wedge g) \leq C(g)$. De donde se tiene que C es primo. ■

Corolario 3.4. *El conjunto de ℓ-subgrupos convexos de un ℓ-grupo G tiene orden total por la inclusión si y solo si G es un o-grupo.*

Hay una manera para obtener subgrupos primos, lo cual puede ser de mucha ayuda. Sea C un ℓ-subgrupo convexo de un ℓ-grupo G y $g \in G \backslash C$. Por el Lema de Zorn, existe un ℓ-subgrupo convexo V de G que contiene a C, maximal con respecto a la propiedad $g \notin V$.

Entonces V es denominado una *valuación* de g y un *subgrupo regular* de G. Cada $g \in G \setminus \{e\}$. Si V^* es la intersección de todos los ℓ-subgrupos convexos de G con la propiedad que contienen a V, entonces $g \in V^* \setminus V$. Claramente se puede evidenciar que no existe un ℓ-subgrupo convexo B de G tal que $V \subset B \subset V^*$; es decir V^* cubre V en $C(G)$. Por la Proposición 7, los subgrupos regulares son primos. Así subgrupos regulares son precisamente el ínfimo de elementos irreducibles del retículo $C(G)$ y el conjunto de subgrupos primos es el conjunto de la unión finita de elementos irreducibles del retículo $C(G)$.

Las valuaciones son muy útiles para identificar las relaciones de orden definidas en G.

Lema 3.3. *Si G es un ℓ-grupo, entonces $f \leq g$ si y solo si $Pf \leq Pg$ para todo subgrupo regular P de G.*

Demostración. Si $f \leq g$, entonces $P(f) \leq P(f \vee g) = P(g)$ para todo $P \in C(G)$. Recíprocamente, si $f \nleq g$, entonces $fg^{-1} \vee e \neq e$ Así existe un valor P de $fg^{-1} \vee e$. Ahora $e \leq fg^{-1} \vee e \notin P$; por lo tanto $P < P(fg^{-1} \vee e) = P(f \vee g)g^{-1}$. Por lo tanto $P(g) < P(f \vee g) = max\{P(f), P(g)\}$ por lo tanto P es primo.

Consecuentemente, $P(f) \nleq P(g)$. ■

Si cada valor en un ℓ-grupo G es normal en su cubrimiento (o cobertura), entonces G es llamado *valuación normal.* Este concepto sera muy importante para los resultados posteriores. En virtud del Corolario anterior tenemos el siguiente resultado:

Corolario 3.5. *Cada o-grupo es una valuación normal.*

Precaución: es posible que para cada elemento que no sea la identidad de un ℓ-grupo éste tenga una valuación normal sin que el ℓ-grupo en sí sea un valuación normal; C del ejemplo 8 de la primera sección nos brinda un ejemplo de esta afirmación.

Denotaremos por $\Gamma(G)$ el conjunto de subgrupos regulares de un ℓ-grupo G, y $\Pi(G)$ para el conjunto de subgrupos primos de G. Nótese que $\Gamma(G)$ y $\Pi(G)$ son sistemas de raíces bajo la inclusión.

Recordemos que un sistema de raíces es un retículo en el cual si a es un elemento del retículo, entonces el conjunto de todos los elementos mayores o iguales que a es un conjunto totalmente ordenado (cadena).

Llamaremos $C \in C(G)$ *ℓ-subgrupo convexo cerrado* siempre que cualquier conjunto de elementos de C que teniendo un supremo en G tiene un supremo en C; es decir si $\{c_j \mid j \in J\} \subseteq C$ y $g = \vee_G\{c_j \mid j \in J\}$, entonces $g \in C$. Sea $\mathcal{K}(G) = \{C \in \Pi(G) \mid C$ es cerrado $\}$, el conjunto de primos cerrados de G.

Se define el *radical distributivo*, escrito $D(G)$ de un ℓ-subgrupo G como la intersección de todos los subgrupos cerrados primos de G. Recordemos la definición de completamente distributiva de la primera sección.

Teorema 3.6. *Un ℓ-grupo G es completamente distributivo si y solo si $D(G) = \{e\}$.*

Deseamos examinar la relación natural entre $C(G)$ y $C(C)$ cuando C es un ℓ-subgrupo convexo de G. Este es no trivial cuando $C(G)$ está restringido a cierto subconjunto de $\Pi(G)$, $\Gamma(G)$ y $\mathcal{K}(G)$ como lo demostraremos ahora.

Sea L un retículo *Brouweriano*; es decir L satisface la identidad $a \wedge \bigvee\{b_j \mid j \in J\} = \bigvee\{a \wedge b_j \mid j \in J\}$ siempre que $\bigvee\{b_j \mid j \in J\}$ exista. Claramente, para cualquier $a, b \in L$ existe un elemento "más grande" $c \in L$ tal que $a \wedge c \leq b$, denotaremos a este elemento por $b : a$. Vimos en el Teorema anterior que $C(G)$ es Brouweriano. Por lo tanto para cualquier $A.B \in C(G)$, existe un elemento "más grande" $B : A \in C(G)$ tal que $A \cap (B : A) \subseteq B$. Sea $b \in B^+$. Entonces $(G(b) \vee (B : A)) \cap A = (G(b) \cap A) \vee ((B : A) \cap A) \subseteq (B \cap A) \vee B = B$. Por lo tanto $G(b) \vee (B : A) = B : A$ y, consecuentemente, $A \cap (B : A) = B$.

Si $C \in C(G)$, sea $C_C(G) = \{B \in C(G) \mid B \not\supseteq C\}$, $\Pi_C(G) = \Pi(G) \cap C_C(G)$,

$$\begin{aligned} \Gamma_C(G) &= \Gamma(G) \cap C_C(G) \\ &= \mathcal{K}(G) \\ &= \mathcal{K}(G) \cap C_C(G). \end{aligned}$$

Teorema 3.7. *Si $C \in C(G)$, entonces $A \mapsto A \cap C$ aplica $C_C(G)$ sobre $C(C) \setminus \{C\}$. La restricción a $\Pi_C(G)$, $\Gamma_C(G)$, y $\mathcal{K}_C(G)$ aplica inyectivamente sobre $\Pi(C) \setminus \{C\}$, $\Gamma(C) \setminus \{C\}$, y $\mathcal{K}(C) \setminus \{C\}$ respectivamente, con inversa $B : C$. Si $V \in \Gamma_C(G)$, entonces $V \lhd V^*$ si y solamente si $V \cap C \lhd V^* \cap C = (V \cap C)^*$, y en este caso $V^*/V \cong (V \cap C)^*/V \cap C$.*

Demostración. Si $B \in C(C)$, entonces $C \cap (B : C) = B$ por lo anterior. Por lo tanto $B : C \in C_C(G)$ si $B \neq C$. si $B \in \Pi(C)$, sea $f, g \in G$ con $f \wedge g = e$. Ahora $(G(f) \vee (B : C)) \cap C$ y $(G(g) \vee (B : C)) \cap C$ ambos pertenecen a $C(G)$ y contienen $(B : C) \cap C = B \in \Pi(C)$. Por la proposición anterior sin perder generalidad $(G(f) \vee (B : C)) \cap C \subseteq (G(g) \vee (B : C)) \cap C$. Pero

$$\begin{aligned}(G(f) \vee (B : C)) \cap C &= (G(f) \vee (B : C)) \cap C \cap (G(g) \vee (B : C)) \cap C \\ &= ((G(f) \cap G(g)) \vee (B : C)) \cap C \\ &= (B : C) \cap C = B.\end{aligned}$$

usando el Lema 2.4 y el Teorema 3.6. Se tiene $B : C \in \Pi(G)$. Claramente, si $A \in \Pi_C(G)$, entonces $(A \cap C) : C \supseteq A$. Si $g \in (a \cap C : C)^+$, sea $c \in C^+ \setminus A$. Ahora $g \wedge c \in ((A \cap C) : C) \cap C = A \cap C \subseteq A$ y también $c(g \wedge c)^{-1} \notin A$. Pero A es primo y $g(g \wedge c)^{-1} \wedge c(g \wedge c)^{-1} = e$; Por consiguiente $g \in A$.

Consecuentemente, $A \cap C : C = A$, por lo que estas aplicaciones son una inversa de la otra. El resto del Teorema se sigue del segundo Teorema Fundamental de isomorfismos.

■

Capítulo 4

Anillos y Campos Parcialmente Ordenados

Un *anillo parcialmente ordenado* es una cuaterna $(R, +, \cdot, \leq)$ que satisface lo siguiente.

(a) $(R, +, \cdot)$ es un anillo, $(R, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado;

(b) $a \leq b$ implica $a + c \leq b + c$, $\forall a, b, c \in R$;

(c) $a \leq b$ y $c > 0$ implica $ac \leq bc$ y $ca \leq cb$.

A tal anillo lo denotaremos, para abreviar, por po-anillo. Si $(R, \leq)$ es totalmente ordenado, entonces se dice que R es un *anillo totalmente ordenado*, abreviado o-anillo. Si $(R, \leq)$ es un retículo, entonces se dice que R es un *anillo reticularmente ordenado*, y en tal caso se lo abrevia por ℓ-anillo. Al subconjunto de elementos $\{a \in R \mid a \geq 0\}$ de un anillo parcialmente ordenado R, se lo denomina cono positivo de R. Como hemos visto en la sección correspondiente a ℓ-grupos, el cono positivo define un orden.

Teorema 4.1. *Un subconjunto P de un po-anillo R es el cono positivo de algún orden de R,si y solo si, las siguientes condiciones se cumplen.*

(a) $P \cap -P = \{0\}$,

(b) $P + P \subseteq P$, *y*

(c) $PP \subseteq P$.

además, P define un orden total en R exactamente cuando $P \cap -P = R$.

Las condiciones (b) y (c) implican que P es un subanillo, mientras que (a) nos dice que el único elemento de P que satisface que su negativo también esta en P es 0.

Equivalentemente, una suma de elementos de P nunca es 0, a no ser que todos los sumandos sean cero. A un subanillo con estas características lo denominaremos subanillo cónico.

De las sección de ℓ-grupos, podemos concluir que el grupo aditivo subyacente de un po-anillo es un ℓ-grupo abeliano. Entonces todos los resultados obtenidos anteriormente son válidos para este ℓ-grupo aditivo abeliano subyacente.

Teorema 4.2. *Un semigrupo P que contiene al 0 es un cono positivo po-anillo si, y solo si,*

(a) *el semigrupo aditivo de P es conmutativo y cancelativo, y*

(b) *P es un subanillo cónico.*

Demostración. La necesidad se verifica automáticamente por la definición.

Para probar la suficiencia, se tiene por (a) que el semigrupo aditivo P_+ de P puede ser encajado en un grupo abeliano minimal R_+.Los elementos de R_+ son de la forma $a-b$ con $a, b \in P_+$. De manera rutinaria se puede probar que si la multiplicación definida por la ley distributiva $(a-b)(c-d) = (ac+bd)-(ad+bc)$, entonces R_+ se convierte en un anillo R que contiene a P como subanillo. En virtud de (b), P define de hecho un orden parcial sobre R. ■

Los anillos sin divisores de cero tienen una característica importante cuando se les incorpora un orden.

La condición siguiente en la definición de po-anillo:

- $a \leq b$ y $c > 0$ implica $ac \leq bc$ y $ca \leq cb$

debe ser sustituida por

- $a < b$ y $c > 0$ implica $ac < bc$ y $ca < cb$.

En tal caso se dirá que el orden es un *orden estricto.*

Lema 4.1. *Una condición necesaria y suficiente para un orden parcial P de un anillo para que sea estricto es que P sea un semianillo sin divisores de cero.*

Ejemplos

1. Los anillos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, y $\mathbb{R}$ con las operaciones y orden usuales son anillos totalmente ordenados.

2. Un po-grupo conmutativo aditivo bajo la multiplicación trivial es un po-anillo.

3. El anillo de polinomios $R[x]$ definido sobre un anillo asociado R sin divisores de cero se convierte en un po-anillo definiendo $f > 0$ si y solo si el coeficiente líder (si $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ y $a_n \neq 0$, el coeficiente líder es a_n) de f es mayor que cero. Este es un orden lexicográfico de $R[x]$.

Parte II:

Cuñas y Conos

Capítulo 5

Cuñas y Conos

En este capítulo presentaremos algunas propiedades básicas de cuñas y conos en espacios vectoriales. Comenzamos recordando que un subconjunto C de un espacio vectorial se llama *convexo* si $x, y \in C$ y $0 \leq \lambda \leq 1$ implica $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$.

Definición 5.1. *Un subconjunto no vacío $\mathcal{W}$ de un espacio vectorial se dice que es una cuña si satisface las dos propiedades siguientes:*

(a) $\mathcal{W} + \mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}$.

(b) $\alpha\mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}$ *para todo* $\alpha \geq 0$.

Claramente, cada cuña es un conjunto convexo. Por otra parte, Si $\mathcal{W}$ es una cuña, entonces, no es difícil ver que el conjunto $\mathcal{W} \cap (-\mathcal{W})$ es un subespacio vectorial. Cuando este subespacio vectorial es trivial, la cuña se llama un cono. Precisamente, tenemos la siguiente definición.

Definición 5.2. *Un subespacio vectorial $\mathcal{K}$ de un espacio vectorial se dice que es un cono si se satisface la siguientes tres propiedades:*

(a) $\mathcal{K} + \mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$,

(b) $\alpha\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$ *para todo* $\alpha \geq 0$,

(c) $\mathcal{K} \cap (-\mathcal{K}) = \{0\}$.

Un cono con vértice x es cualquier conjunto de la forma $x + \mathcal{K}$, donde $\mathcal{K}$ es un cono.

Obviamente, cada cono es una cuña, pero una cuña no tiene que ser un cono. Para esto, cada subespacio vectorial es una cuña, pero sólo el subespacio vectorial trivial es un cono. Claramente, cada cono (siendo una cuña) es automáticamente un conjunto convexo.

Recordemos que una relación binaria $\geq$ en un conjunto X se dice que es una relación de orden en el conjunto X (y X equipadas con $\geq$ es llamado un conjunto parcialmente ordenado) si satisface las tres propiedades siguientes:

(a) reflexividad: $x \geq x$ para todo $x \in X$,

(b) antisimetría: $x \geq y$ y $y \geq x$ implica $x = y$,

(c) transitividad: $x \geq y$ y $y \geq z$ implican $x \geq z$.

Si una relación binaria $\geq$ en un conjunto X satisface las propiedades (a) y (c), es decir, si $\geq$ es reflexiva y transitiva pero no necesariamente antisimétrica , entonces $\leq$ es llamado una *relación de preorden* en el conjunto X (y X equipado con $\geq$ recibe el nombre de conjunto *preparcialmente ordenado*).

Definición 5.3. *En un conjunto pre-ordenado , la notación $x > y$ significa que $x > y$ y $x \neq y$. Vamos a expresar también $x \geq y$ diciendo que x domina a y, y cuando $x > y$ es verdad, diremos que x domina estrictamente y.*

Alternativamente , el símbolo $x \geq y$ se denota por $y \leq x$, y $x > y$ será denotado por $y < x$. Un subconjunto A de un conjunto preordenado se dice que *mayoriza* otro conjunto B si para cada $b \in B$ existe algún $a \in A$ tal que $a \geq b$.

Las cuñas se asocian con vector preordenados y conos con vectores ordenados. Una relación de orden (respectivamente una relación de preorden) y en un espacio vectorial L se dice que es un ordenamiento vectorial (respectivamente un vector preordenado) si, en adición de ser reflexiva , antisimétrica y transitiva (respectivamente reflexiva y transitiva), $\geq$ y también compatible con la estructura algebraica de L en el sentido de que si $x \geq y$, entonces

(a) $x + z \geq y + z$ para todo $z \in L$ y

(b) $\alpha x \geq \alpha$ para todo $\alpha \geq 0$.

Un espacio vectorial L equipado con un orden vectorial $\geq$ se denomina *espacio vectorial ordenado* o un *espacio vectorial parcialmente ordenado*, denotado por $(L, \geq)$ o simplemente L si $\geq$ es bien definido. En un espacio vectorial ordenado $(L, \geq)$ cualquier vector que satisface $x \geq 0$ se conoce como un *vector positivo* y la colección de todos los vectores positivos $L_+ = \{x \in L : x \geq 0\}$ se conoce como el *cono positivo* o simplemente como el *cono* de L. Nótese que L_+ es de hecho un cono en L. Definiciones similares se puede dar para un vector de preorden. El cono L_+ también se denota por L^+.

Un cono arbitrario $\mathcal{K}$ de un espacio vectorial X define un orden vectorial $\geq$ en X como $x \geq y$ siempre que $x - y \in \mathcal{K}$. De manera equivalente, $x \geq y$ siempre que $x \in y + \mathcal{K}$ o $y \in x - \mathcal{K}$; .Es fácil comprobar que $\geq$ es de hecho un orden vectorial cuya cono positivo coincide con $\mathcal{K}$, es decir, $X_+ = \mathcal{K}$. En consecuencia, los vectores ordenados y conos están en correspondencia uno-a-uno. Eso es, cada cono $\mathcal{K}$ de un espacio vectorial X induce un orden vectorial $\geq$ en X cuyos vectores positivos son, precisamente, los vectores en $\mathcal{K}$. Si queremos poner énfasis en que el orden vectorial en X es generado por el cono $\mathcal{K}$, entonces vamos a denotarlo por $\geq_{\mathcal{K}}$.

Del mismo modo, si $\geq$ es un preorden vectorial en un espacio vectorial X, entonces el conjunto de vectores positivos $X_+ = \{x \in X : x \geq 0\}$ es una cuña. Por el contrario, cada cuña $\mathcal{W}$ de X da lugar a un preorden vectorial $\geq$ en X (dejando $x \geq y$ si $x - y \in \mathcal{W}$) que satisface $X_+ = \mathcal{W}$. De nuevo, si hay una necesidad de hacer hincapié que el preorden vectorial en X se genera por la cuña $\mathcal{W}$, entonces denotaremos por $\geq_{\mathcal{W}}$. En resumen, conos dan lugar a ordenamientos vectoriales y cuñas para preordenes vectoriales.

Resulta que las cuñas son simplemente sumas de subespacios vectoriales con conos.

Lema 5.1. *Un subconjunto convexo no vacío $\mathcal{W}$ de un espacio vectorial es una cuña si y sólo si es la suma de un subespacio vectorial y un cono, es decir, si y sólo si existe un subespacio vectorial V y un cono $\mathcal{K}$ tal que $\mathcal{W} = V + \mathcal{K}$.*

además, siempre que $\mathcal{W}$ es una cuña, tenemos lo siguiente.

1. Si tenemos que $V = \mathcal{W} \cap (-\mathcal{W})$ y $\mathcal{K} = \{0\} \cup (\mathcal{W} \backslash V)$, entonces V es un subespacio vectorial y K es un cono que satisface $\mathcal{W} = V + \mathcal{K}$.

2. Si $\mathcal{W} = V + \mathcal{K}$, donde V es un subespacio vectorial y $\mathcal{K}$ es un cono tal que $V \cap \mathcal{K} = \{0\}$, entonces $V = \mathcal{W} \cap (-\mathcal{W})$.

3. La cuña $\mathcal{W} = V + \mathcal{K}$ es un cono , es decir, $V = \{0\}$, si y sólo si $\mathcal{W}$ no contiene ninguna línea recta que pasa por el origen.

Ahora sea $\mathcal{W}$ una cuña de un espacio vectorial X, y sea x cualquier vector en el subespacio vectorial generado por $\mathcal{W}$. Elijamos vectores $x_1, \cdots, x_n \in \mathcal{W}$ y números reales $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ tales que $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$. Si sea $I_1 = \{i \mid \alpha_i \geq 0\}$ y $I_2 = \{i \mid \alpha_i < 0\}$, entonces tenemos

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \sum_{i \in I_1} \alpha_i x_i - \sum_{i \in I_2} (-\alpha_i) x_i \in \mathcal{W} - \mathcal{W}.$$

De esto, fácilmente se deduce que el subespacio vectorial generado por $\mathcal{W}$ es precisamente $\mathcal{W} - \mathcal{W}$.

Definición 5.4. *Una cuña $\mathcal{W}$ de un espacio vectorial X se dice que está generado si $X = \mathcal{W} - \mathcal{W}$, es decir, si el subespacio vectorial generado por $\mathcal{W}$ coincide con X.*

Debe quedar claro que una cuña esta generando si y sólo si mayoriza el espacio. Es decir, tenemos el siguiente resultado sencillo.

Lema 5.2. *Una cuña $\mathcal{W}$ de un espacio vectorial X está generando si y sólo si para cada $x \in X$ existe algún $y \in \mathcal{W}$ que satisface $y \geq_{\mathcal{W}} x$.*

Sea $\mathcal{W}$ una cuña de un espacio vectorial X. Diremos que un vector $e \in \mathcal{W}$ es un *orden unitario* (o más precisamente un $\mathcal{W}$-orden unitario en caso de que la cuña $\mathcal{W}$ debe indicarse) si para cada $x \in X$ existe algún $\lambda > 0$ tal que $x \leq \lambda e$. Está claro que si $\mathcal{W}$ tiene un orden unitario, entonces la cuña $\mathcal{W}$ es automáticamente generador. además, si $e \in \mathcal{W}$ es un orden unitario, entonces también lo son αe para todo $\alpha > 0$ y $e + x$ para cada $x \in \mathcal{W}$.

Los ordenes unitarios de una cuña coinciden con su puntos internos.

Lema 5.3. *Sea $\mathcal{W}$ una cuña de algún espacio vectorial X. Un vector $e \in \mathcal{W}$ es un orden unitario si y sólo si es un punto interno de $\mathcal{W}$.*

Demostración. Supongamos primero que e es un punto interno de $\mathcal{W}$ y sea $x \in X$. Entonces existe algún $\alpha > 0$ tal que $e + \alpha(-x) \geq 0$. Esto implica que $x \leq \frac{1}{\alpha} e$, por lo que e es un orden unitario.

Por el contrario, supongamos que e es un orden unitario y sea que $x \in X$. Hagamos que algún $\lambda_0 > 0$ tal que $\lambda_0(-x) \leq e$. Ahora note que para cada $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$ tenemos

$$\lambda(-x) = (\frac{\lambda}{\lambda_0})\lambda_0(-x) \leq \frac{\lambda}{\lambda_0} e \leq e.$$

En consecuencia, $e + \lambda x \geq 0$ para todo $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$, lo que demuestra que e es un punto interno de $\mathcal{W}$. ■

Hay algunos sistemas útiles asociados con un espacio vectorial ordenado que juegan un papel importante en nuestro estudio. Los introduciremos a continuación. Si x e y son dos vectores en un espacio vectorial ordenado L que satisface $x \leq y$, entonces, el *intervalo de orden* $[x, y]$ es el conjunto definido por $[x, y] = \{z \in L \mid x \leq z \leq y\}$. Si $x \leq y$ no es cierto, entonces tenemos que $[x, y] = \emptyset$, por lo que el intervalo de orden se define para todos los vectores x e y. Claramente, para todo x e y tenemos

$$[x, y] = (x + L^+) \cap (y - L^+) = x + [0, y - x].$$

En particular, cada intervalo de orden es un conjunto convexo.

Definición 5.5. *Un subconjunto A de un espacio vectorial ordenado L se dice que es* completo *(o* orden-convexo*) si para cada $x, y \in A$ tenemos $[x, y] \subseteq A$.*

Claramente, la intersección de una familia de conjuntos completos es un conjunto completo. De esto, podemos ver fácilmente que cada subconjunto B de L se incluye en una mas pequeña (con respecto a la inclusión), llamado *subconjunto-completo* el *casco completo* de B y denotado $[B]$. Un breve razonamiento revela que:

$$[B] = (B + L^+) \cap (B - L^+) = \bigcup_{x,y \in B} [x, y].$$

De la primera fórmula se concluye que

1. el casco completo de un conjunto convexo es convexo, y

2. el casco completo de un conjunto circled es circled.

Un subconjunto A de un espacio vectorial ordenado L se dice que esta *acotado superiormente* si existe algún vector x (llamado una *cota superior* de A) tal que $a \leq x$ que es válido para todo $a \in A$. Del mismo modo, A esta *acotado inferiormente* si existe algún vector x (llamado una *cota inferior* de A) que satisface que $x \leq a$ para todo $a \in A$.

Un subconjunto A de L esta *acotado* si A está acotado superiormente e inferiormente o, equivalentemente, si se incluye en un intervalo orden.

Un vector u en un espacio vectorial ordenado L se llama *extremo superior* (o el *supremo*) de un subconjunto no vacío A de L, y lo escribimos $u = \sup A$, si

a) u es una cota superior de A, es decir, $a \leq u$ para todo $a \in A$, y

b) u es el extremo superior de A en el sentido de que para cualquier cota superior v de A tenemos $u \leq v$

Debe quedar claro a partir de la definición anterior que un subconjunto no vacío de una espacio vectorial ordenada puede tener como máximo un supremo. La definición del *extremo inferior* (o el *ínfimo*) de un conjunto no vacío A, denotado por ínf A, se introduce de forma análoga.

Las notaciones clásicas de retículos para el supremo y el ínfimo de un conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\}$ son

$$sup\{x_1, \ldots, x_n\} = \bigvee_{i=1}^{n} x_i \text{ y } \inf\{x_1, \ldots, x_n\} = \bigwedge_{i=1}^{n} x_i.$$

también escribiremos $\sup\{x, y\} = x \vee y$ y $\inf\{x, y\} = x \wedge y$.

Por supuesto, en cualquier espacio vectorial ordenado $x \wedge x = x \vee x = x$. En especial en espacios vectoriales ordenados cualquier conjunto finito de puntos tiene un supremo y un ínfimo. Otros espacios vectoriales ordenados que son igualmente raros tienen la propiedad que algunos pares de vectores no tienen un supremo o un ínfimo mientras que otras parejas tienen cotas superiores e inferiores más grandes. En la mayoría de espacios vectoriales ordenados, para cada par de puntos x, y que no son comparables (es decir, $x \not\geq y \not\geq x$) el supremo $x \vee y$ e ínfimo $x \wedge y$ no existen.

Hay una interpretación geométrica útil del supremo y el ínfimo de un conjunto de dos puntos. Supongamos que $\mathcal{K}$ es un cono de un espacio vectorial L. Entonces, para cualquiera dos vectores $x, y \in L$ existe alguna $z \in L$ que satisfacen $(x + \mathcal{K}) \cap (y + \mathcal{K}) = z + \mathcal{K}$ si y sólo si $z = x \vee y$. Del mismo modo, existe algún $w \in L$ tal que $(y - \mathcal{K}) \cap (x - \mathcal{K}) = w - \mathcal{K}$ si y sólo si $w = x \wedge y$. Observe que $x \vee y$ existe pero $x \wedge y$ no existe. Volveremos las propiedades de retículos del capítulo 2.

Seguimos recordando las nociones de redes monótonas.

Una red $\{x_\alpha\}$ En un conjunto parcialmente ordenado se dice que es *creciente*, y lo escribiremos $x_\alpha \uparrow$ (respectivamente *decreciente*, y los escribiremos $x_\alpha \downarrow$) si $\alpha \geq \beta$ implica $x_\alpha \geq x_\beta$ (respectivamente $x_\alpha \leq x_\beta$). El símbolo $x_\alpha \uparrow x$ significa que $x_\alpha \uparrow$ y $x = sup\ x_\alpha$. Del mismo modo la notación $x_\alpha \uparrow \leq x$ (respectivamente $x \leq x_\alpha \downarrow$) significa que la red $\{x_\alpha\}$ es creciente (respectivamente decreciente) $x_\alpha \leq x$ (respectivamente $x \leq x_\alpha$) se cumple para cada índice α. El significado $x_\alpha \downarrow x$ es análogo. Las redes decrecientes y crecientes se denominan *redes monótonas*.

Definición 5.6. *Sea L y M dos espacios vectoriales ordenados. Un operador $T : L \to M$ se llama un* orden isomórfico *(o un* orden-incrustado*) si*

(a) T *es uno-a-uno y*

(b) $x \geq 0$ *se conserva en* L *si y sólo si* $Tx \geq 0$ *se conserva en* M*.*

Si existe un orden isomórfico sobre (es decir, sobreyectivo) de L a M, entonces L y M es llamado *orden isomórfico* ordenado de espacios vectoriales.

Es decir, dos espacios vectoriales son ordenados de orden isomórfico si y sólo si existe una correspondencia uno a uno entre los elementos de los espacios vectoriales ordenados que conserva tanto lo algebraico como las estructuras de orden.

Desde el punto de vista de la teoría de espacios vectoriales ordenados. Dos espacios vectoriales ordenados isomórficos son vistos como objetos idénticos.

Diremos también que un espacio vectorial ordenado L es $orden - incrustado$ en otro espacio vectorial ordenado M si existe un orden isomórfico de L a M. En este caso, el subespacio $T(L)$ fue ordenado con el vector inducido de M puede ser identificado con L y por esta razón $T(L)$ es referido como una copia de L en M.

Capítulo 6

Grupos Arquimedianos Totalmente ordenados

A manera de introducción mencionaremos una importante clasificación de los elementos de un grupo totalmente ordenado.

Sea G un grupo totalmente ordenado, el valor *absoluto* $|a|$ de un elemento $a \in G$ es definido como $|a| = \text{máx}(a, a^{-1})$.

Sean $a, b \in G$, el elemento a se dice que es *incomparablemente más pequeño* que b si

$$|a|^n < |b| \text{ para todo entero positivo } n;$$

denotamos esta situación por $a \ll b$. Por otra parte, a y b son llamados *equivalentes arquimedianos*, en notación: $a \sim b$, si existen enteros positivos m y n tales que

$$|a| < |b|^m \quad \text{y} \quad |b| < |a|^n.$$

y de esto se sigue que

(a) Una, y sólo una de las siguientes relaciones se cumple:

$$a \ll b, \quad a \sim b, \quad b \ll a,$$

para cada par $a, b \in G$;

(b) $a \ll b$ implica $x^{-1}ax \ll x^{-1}bx$ para cada $x \in G$;

(c) $a \ll b$ y $a \sim c$ implica $c \ll b$;

(d) $a \ll b$ y $b \sim d$ implica $a \ll d$;

(e) $a \ll b$ y $b \ll c$ implica $a \ll c$;

(f) $a \sim b$ y $b \sim c$ implica $a \sim c$.

La equivalencia de arquímedes separa los elementos de G en clases disjuntas que pueden ser totalmente ordenadas definiendo $C_1 \leq C_2$ para las clases C_1 y C_2 si, y sólo si, para algunos representantes (y por lo tanto para todos) $a \in C_1$ y $b \in C_2$ tenemos que $a \ll b$. Los elementos e forman una clase por si mismos, la clase minimal; todas las otras clases contienen conjuntos con infinitos elementos, para $a \sim a^n$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Claramente, G es Arquimediano si, y sólo si, G no tiene más que dos clases arquimedianas.

Definición 6.1. *Un ℓ- grupo es arquimediano si $e \leq a$ y $a^n < b$, para cualquier entero positivo n, implica $a = e$*

Teorema 6.1. *Un ℓ-grupo arquimediano es abeliano*

Demostración. Si $a, b \in G$ donde G es arquimediano. Entonces

$$|a^{-1}b^{-1}ab| \ll |a| \vee |b|$$

lo que implica que $a^{-1}b^{-1}ab = e$, así $ab = ba$ ∎

Comencemos el estudio de los grupos totalmente ordenados, o también llamados o-grupos con el caso arquimediano. Los siguientes resultados serán indispensables en el posterior desarrollo.

Lema 6.1. *Sean G y H ℓ-grupos y $\tau : G^+ \to H^+$ un ℓ-homomorfismo de semigrupos talque $\tau(e) = e$. Entonces existe una única extension de τ a un ℓ-homomorfismo de grupos $\bar{\tau}$ de G a H (es decir,$\bar{\tau} : G \to H$ talque $\bar{\tau}\mid_{G^+} = \tau$)*

Demostración. Definamos $\bar{\tau}(g) = \tau(g_+)$ y $\tau(g_-)^{-1}$
Se tiene que $\bar{\tau}(g^{-1}) = \tau(g_-)\tau(g_+)^{-1} = [\tau(g_+)\tau(g_-)^{-1}]^{-1} = \bar{\tau}(g)^{-1}$
Es decir, $\bar{\tau}(g^{-1}) = \bar{\tau}(g)^{-1}$ Por otro lado se tiene que:

$$\begin{aligned}
\tau(g_-)\tau(gh \vee e)\tau(h_-) &= \tau[g_-(gh \vee e)h_-] \\
&= \tau\{(g_-)[g_-^{-1}g_+h_+h_-^{-1} \vee e](h_-)\} \\
&= \tau[(g_+h_+) \vee (g_-h_-)] \\
&= \tau(g_+h_+) \vee \tau(g_-h_-) \\
&= \tau(g_-)[\tau(g)^{-1}\tau(g_+)\tau(h_+)\tau(h_-)^{-1} \vee e]\tau(h_-) \\
&= \tau(g_-)[\bar{\tau}(g)\bar{\tau}(h) \vee e]\tau(h_-),
\end{aligned}$$

aplicado la cancelación, se tiene

$$\begin{aligned}
\tau(gh \vee e) &= [\bar{\tau}(g)\bar{\tau}(h)] \vee e \\
\text{por lo que } \bar{\tau}(gh) &= \{\tau[(gh)_+]\}\{\tau[(gh)_-]\}^{-1} \\
&= [\tau(gh \vee e)][\tau(h^{-1}g^{-1} \vee e)]^{-1} \\
&= [\bar{\tau}(g)\bar{\tau}(h)] + \{[\bar{\tau}(g)\bar{\tau}(h)]_-\}^{-1} \\
&= \bar{\tau}(g)\bar{\tau}(h).
\end{aligned}$$

Lo cual demuestra que $\bar{\tau}$ es un homomorfismo de grupos además, como$\bar{\tau}(g \vee e) = \tau(g) \vee e$, $\bar{\tau}$ es también un l-homomorfismo.
Claramente la unicidad se verifica. ■

Teorema 6.2. *(Teorema de Hölder) Todo o-grupo arquimediano es o-isomorfo a un subgrupo de* $(\mathbb{R}, +)$.

Demostración. Sea G un grupo arquimediano y sea $a \in G$ tal que $a > e$.
Sea además $b \in G^+$.
Definimos $\tilde{b} = \{\frac{m}{n} \mid a^m \leq b^m, \forall m, n \in \mathbb{Z}\}$.
Como $0 \in \tilde{b}$, $\tilde{b} \neq \emptyset$.
Si $\frac{p}{q} \leqslant \frac{m}{n} \in \tilde{b}$, entonces $pn \leqslant mq$.
Por el método de reducción al absurdo, supongamos que $a^p > b^q$. Entonces $a^{mq} \leqslant b^{nq} < a^{np} \leqslant a^{mq}$, lo cual es una contradicción, por lo que $a^p \leqslant b^q$, lo cual implica que $\tilde{b}$ es un ideal de $\mathbb{Q}$.
Como $b \leqslant a^k$ para algún $K \in \mathbb{Z}$, $\tilde{b}$ esta acotado superiormente y por lo tanto $sup(\tilde{b})$ existe en $\mathbb{R}$.
Definamos $\tau : G^+ \to \mathbb{R}$ por $\tau(b) = sup(\tilde{b})$

Afirmación: $\tau(bc) = \tau(b) + \tau(c)$. Para probar esta afirmación, sean $\frac{m}{n} \in \tilde{b}$ y $\frac{p}{q} \in \tilde{c}$. Sin perdida de generalidad, $q = n$. Así, $a^m \leqslant b^n$ y $a^p \leqslant c^q$. Luego, $a^{m+p} \leqslant b^n c^n$ y $a^{m+p} \leqslant c^n b^n$. Si $bc \leqslant cb, b^n c^n \leqslant (bc)^n$.
Lo cual implica que $a^{m+p} \leqslant (bc)^n$. Así, $\frac{m+p}{n} \in bc$.
De esta forma, concluimos que $\tau(b) + \tau(c) \leqslant \tau(bc)$.
De manera similar se demuestra que $\tau(bc) \leqslant \tau(b) + \tau(c)$.
Si $\tau(b) = 0$, entonces los únicas potencias de a que son menores o iguales que potencias positivas de b son las potencias negativas. Así, para cada entero positivo n, $b^n \leqslant a$ y por lo tanto $b = e$; pero esto implica que τ es inyectiva.
De manera natural se extiende τ a un o-isomorfismo de G a $\mathbb{R}$ aplicando el lema 6,1

■

El problema de determinar el o-isomorfismo de dos subgrupos de los números reales ahora se presenta naturalmente. Una completa respuesta es dada por el siguiente resultado:

Proposición 6.1. *Si $A \neq 0$ y B es un subgrupo del grupo aditivo de los números reales, provisto con el orden natural, y φ es un homomorfismo (o o-isomorfismo) de A en B. Entonces existe un número real $r \geq 0$ tal que*

$$\varphi(a) = ra$$

para todo $a \in A$.

Demostración. Si $\varphi(a_0) = 0$ para algún $a_0 \in A$, con $a_0 > 0$, entonces $\varphi(a) = 0$ para todo $a \in A$, porque $0 < a < na_0$ implica que $\varphi(a) = 0$. En este caso, $r = 0$. En los restantes casos $a_i > 0$ $(a_i \in A)$ implica $\varphi(a_i) > 0$. Asumamos sin perder generalidad que $\varphi(a_1) : \varphi(a_2) < a_1 : a_2$, y tomemos un número racional m/n $(m, n > 0)$ entre $\varphi(a_1)/\varphi(a_2)$ y a_1/a_2. Tenemos $ma_2 < na_1$, mientras $m\varphi(a_2) > n\varphi(a_1)$, lo que es imposible. Así, $\varphi(a) : a = r$ es una constante y definitivamente positiva. ■

Corolario 6.3. *Los o-automorfismos de un o-grupo arquimediano forman un subgrupo del grupo multiplicativo de los números reales positivos.*

Finalmente, mencionamos una sencilla consecuencia del Teorema de Hölder:

Corolario 6.4. *Un o-grupo continuo $G \neq e$ (es decir, cada sección de Dedekind determina un, y sólo un elemento) es isomorfo al o-grupo de los numeros reales.*

Demostración. Asumamos que $a^n \leq b$ para algún $a \geq e$ y para $n = 0, 1, 2, \ldots$. El supuesto implica que $\limsup a^n = x$ existe, esto es tanto como decir que, $U(e, a, a^2, \ldots, a^n, \ldots) = U(x)$. Por esto tenemos que x satisface $ax = x$ cuando $a = e$ y el grupo tiene orden arquimediano. Por el Teorema de Hölder este es o-isomorfo a un subgrupo de los números reales, y este debe ser continuo. ■

Corolario 6.5. *Si el orden parcial de G es aislado y G no tiene más subgrupos convexos que G y e, entonces G es o-isomorfo a un subgrupo de los números reales (y por tanto es totalmente ordenado).*

Demostración. Se sigue del Teorema de Hölder. ■

Capítulo 7

Conos de Arquímedes

El objetivo aquí es introducir y estudiar la clase especial de conos Arquimedianos. Comenzamos con su definición.

Definición 7.1. *Un espacio vectorial ordenado L se dice que es* Arquimediano *(o decimos que L tiene la* propiedad Arquimediana*) cada vez que se sigue que $y \in L, x \in L_+$ y $ny \leq x$ para todo $n = 1, 2, \ldots$ con $y \leq 0$.*

Un cono $\mathcal{K}$ de un espacio vectorial L se dice que es *Arquimediano* si el orden inducido por $\mathcal{K}$ en L hace a L un espacio vectorial ordenado Arquimediano.

El vector $x \in L_+$ en la definición anterior se puede asumir que esta en L.

Lema 7.1. *Un vector de espacio ordenado L es Arquimediano si y sólo si se sigue que si $x, y \in L$ y $ny \leq x$ para todos $n = 1, 2, \ldots$ con $y \leq 0$.*

Demostración. Si la condición es verdad , entonces L es claramente Arquimediano. Para el contrario, se supone que L es Arquimediano y que para algún $x, y \in L$ tenemos $ny \leq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que $(n+1)y \leq x - y$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así $x - y \geq 0$, se deduce fácilmente que $y \leq 0$. ■

Un ejemplo clásico de un espacio vectorial ordenado no-arquimediano esta dado por el plano lexicográfico. El plano *lexicográfico* es el espacio vectorial $L = \mathbb{R}^2$ equipado con el siguiente orden vectorial (conocido como el *orden lexicográfico*):

$$(x_1, x_2) \geq (y_1, y_2) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 > y_1 \\ x_1 = y_1, x_2 \geq y_2. \end{cases}$$

El orden lexicográfico es inducida por el cono

$$L_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{ o } x > 0 \text{ o bien } x = 0 \text{ y } y \geq 0\}.$$

que se conoce como el *cono lexicográfico.*

Para ver que L esta equipado con el cono L_+ es un espacio vectorial ordenado no Arquimediano, note, que para $n(0,1) \leq (1,0)$ se mantiene para todo n mientras que $(0,1) \notin -L_+$. Observe también que el orden lexicográfico es *total*. Es decir, que para cualquiera dos vectores arbitrarios $u, v \in L$ son comparables en el sentido de que, o bien $u \geq v$ o $v \geq u$ es cierto.

Los siguientes dos resultados contienen algunas propiedades básicas de propiedades de "orden de continuidad" en espacios vectoriales Arquimedianos.

Teorema 7.1. *Sea $x_1, \ldots, x_k$ vectores positivos en un espacio vectorial ordenado Arquimediano. Supongamos que las sucesiones reales $\{\alpha_n^i\}(i = 1, \ldots, k)$ cumple $\alpha_n^i \xrightarrow[n\to\infty]{\alpha}_i$ en $\mathbb{R}$ para cada $i = 1, \ldots, k$ y $\alpha_n^1 x_1 + \cdots + \alpha_n^k x_k$ para cada n. Luego tenemos $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k \leq 0$.*

Demostración. Fijemos cualquier $m \in \mathbb{N}$ y luego cogemos algún n tal que $\alpha_i - \alpha_n^i < \frac{1}{m}$ para todo $i = 1, \cdots, k$. Ahora tenemos

$$\begin{aligned}
\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k &= (\alpha_1 - \alpha_n^1)x_1 + \cdots + (\alpha_k - \alpha_n^k)x_k + \alpha_n^1 x_1 + \cdots + \alpha_n^k x_k \\
&\leq (\alpha_1 - \alpha_n^1)x_1 + \cdots + (\alpha_k - \alpha_n^k)x_k \\
&\leq \frac{1}{m}x_1 + \cdots + \frac{1}{m}x_k,
\end{aligned}$$

vemos que $m(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k) \leq x_1 + \cdots + x_k$ es válido para todos los $m \in \mathbb{N}$. Ahora utilizando la propiedad Arquimediana para ver que $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k \leq 0$. ∎

Una consecuencia fácil del resultado anterior es el siguiente.

Corolario 7.2. *Sea $x_1, \ldots, x_k$ e $y_1, \ldots, y_m$ vectores en un espacio vectorial ordenado arquimediano L. Supongamos que las sucesión de números reales $\{\alpha_n^i\}$, $(i = 1, \ldots, k)$ y $\{\beta_n^j\}$, $(j = 1, \cdots, m)$ satisfacen:*

(a) $\alpha_n^i \xrightarrow[n\to\infty]{\alpha}_i$ *para cada* $i = 1, \cdots k$,

(b) $\beta_n^j \xrightarrow[n\to\infty]{\beta}_j$ *para cada* $j = 1, \cdots m$ *y*

(c) $\alpha_n^1 x_1 + \cdots + \alpha_n^k x_k \leq \beta_n^1 y_1 + \cdots + \beta_n^m y_m$ *para cada* n.

Si x_i *y* y_i *pertenecen a* $L_+ - L_+$*, entonces*

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k \leq \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_m y_m.$$

Apéndice

Grupos Ordenados

Definición 7.2. *Sea A un conjunto, un subconjunto $R \neq \emptyset$ de $A \times A$ se llama una relación de orden parcial, si R es reflexivo, transitivo y antisimétrico.*

Una relación de orden se llama total, si además se satisface:

$\forall a, b$ *ó* $a \leqslant b$ *ó* $b \leqslant a$ *dicotomia*

Se escribe $(A, \leqslant)$ (escribimos $\leqslant$ en lugar de R)

Definición 7.3. *Sea $(A, \leqslant)$un conjunto con una relación de orden parcial. Si para cada par $a, b \in A$ hay un elemento $x \in A$ tal que $a \leqslant x$; $b \leqslant x$ y cuando $a = y$, $b \leqslant y$, entonces $x \leqslant y$ se llama el x supremo de a y b y se escribe por $a \vee b = x$. Análogamente para el ínfimo $a \wedge b$.*

Ejemplos

- $(\mathbb{R}, \leqslant)$; $(\mathbb{N}, \leqslant)$.Son conjuntos totalmente ordenados
- $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leqslant)$ donde $(a, b) \leqslant (c, d)$ si y sólo si $a \leqslant c$ y $b \leqslant d$. Así

$$(a, b) \vee (c, d) = (a \vee c, b \vee d)$$
$$(3, 5) \vee (4, 1) = (4, 5)$$

Observación. Este ejemplo corresponde a un conjunto parcialmente ordenado, pero no es un retículo

Ejemplos de Retículos

1. $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leqslant)$

2. $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$, como $\mathbb{R}$ es abeliano solo necesitamos verificar 1 y 2

3. $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leqslant)$

4. $\{(f, +, \cdot, \leqslant)\}$ colección de $\ell-$grupos también. $\prod g_i$ es un $\ell-$grupo con las operaciones puntuales.

5. $(\mathbb{R}\times \leqslant)$. $(a, b) \leqslant (c, d)$ si y sólo si $a < c$ o $a = c$ o $b \leqslant d$, es un grupo $\ell-$grupo.

6. Sea X un espacio topológico $C(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R}/f \text{ continua}\}$

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x)\\ (f\cdot g)(x) &= f(x)\cdot g(x)\end{aligned}$$

   $f \leqslant g \;\Leftrightarrow\; f(x) \leqslant g(x) \;\; \forall x \in X,$

$$\begin{aligned}(f\vee g)(x) &= f(x)\vee g(x)\\ (f\wedge g)(x) &= f(x)\wedge g(x)\end{aligned}$$

   Entonces $C(X)$ es un $\ell-$grupo. Observemos que $\mathbb{R}$ debe ser totalmente ordenado.

7. $(Aut(R), \circ)$

   $Aut(R) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/f$ es nbiyectiva y $f(x) \leqslant f(z)$ cuando $x \leqslant z \in \mathbb{R}\}$

   Cada $f \in Aut(R)$ es continuo. $f \leqslant g$, $f(x) \leqslant g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Es un $\ell-$grupo. Aquí $\mathbb{R}$ puede cambiarse por cualquier cadena d.

8. $F(x, y)$ es el grupo libre generado por x , y

$$\begin{aligned}&a_1^{\epsilon_1}\dots a_n^{\epsilon_n}\\ &a_i = x\circ y\\ &\epsilon_i = \pm 1\end{aligned}$$

   e es el neutro. $x < y$, $x \times y \times y^{-1} \leqslant xyx$. $\ell-$grupo (un grupo ordenado total).

Lema 7.2. *Si* $(G, \circ, +, \leqslant)$ *es un* $\ell-$*grupo para todo* $a, b, c \in G$, *si* $a \leqslant b$, *entonces*

$$\begin{aligned}c + a &\leqslant c + b\\ a + c &\leqslant b + c\end{aligned}$$

Demostración.

$c+(a\wedge b) = (c+a)\wedge(c+b) \;\Rightarrow\; -b+a \leqslant -b+b = 0 \;\Rightarrow\; -b+a-a \leqslant 0-a \;\Rightarrow\; -b \leqslant -a$

Definición 7.4. *Los elementos del $\ell-$grupo G que son mas grandes que 0 se llaman positivos*

$$G^+ = \{s \in G / s \geqslant 0\}$$
$$G^- = \{s \in G / s \leqslant 0\}$$

$G^+ \cup G^-$ *si y sólo si* G *es total ordenado.*

Lema 7.3. *a es positivo ssi $-a$ es negativo*

Lema 7.4 (Ley de Morgan)**.** $-(a \wedge b) = -a \vee -b$ *y* $-(a \vee b) = -a \wedge -b$

Demostración.

$$\begin{cases} a \wedge b \leqslant a \\ a \wedge b \leqslant b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -a \leqslant -(a \wedge b) \\ -b \leqslant -(a \wedge b) \end{cases} \Longrightarrow -a \vee -b \leqslant -(a \wedge b)$$

Sea $t = -a \vee -b$, entonces

$$\begin{cases} -a \leqslant t \\ -b \leqslant t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -t \leqslant a \\ -t \leqslant b \end{cases} \Longrightarrow -t \leqslant a \wedge b \Longrightarrow -(a \wedge b) \leqslant t \Longrightarrow -(a \wedge b) \leqslant -a \vee -b$$

Proposición 7.1. $(G, +\circ, \leqslant)$ *es un $\ell-$grupo. El retículo* $(G, \leqslant)$ *es distributivo.*

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

Demostración.

$$\begin{array}{rcl} a & \geqslant & a \wedge b \ , \ a \wedge c \\ b \vee c & \geqslant & a \wedge b \ , \ a \wedge c \\ \hline a \wedge (b \vee c) & \geqslant & (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \end{array}$$

Veamos la otra dirección:

$$z = b \vee c \geqslant b \Longrightarrow b - z \leqslant 0 \Longrightarrow a + b - z \leqslant a$$

$$\begin{array}{rcl} (a \wedge z) + b - z & \leqslant & a + b - z \leqslant a \\ a \wedge z + b - z & \leqslant & b \\ b - z + (a \wedge z) & \leqslant & b \\ b - z + (a \wedge z) & \leqslant & a \wedge b \end{array}$$

También se puede demostrar usando $a \leqslant x,\ b \leqslant y\ \Rightarrow\ a\vee \leqslant x \vee y$

$$\begin{aligned}
-z + (a \wedge z) &\leqslant a \wedge c \\
(a \wedge b) \vee (a \wedge c) &\geqslant (b - z + (a \wedge z)) \vee (c - z + (a \wedge z)) \\
&= (b - z \vee c - z) + a \wedge z \\
&= ((b \vee c) - z) + a \wedge z \\
&= (z - z) + a \wedge z \\
&= 0 + a \wedge z = a \wedge z = a \wedge (b \vee c)
\end{aligned}$$

Usando la antisimetría tenemos la igualdad. ■

Lema 7.5. *Si* $a, b \geqslant 0,\ \ a + b \geqslant a \vee b$

Demostración.

$$\begin{cases} a \geqslant 0 & a + b \geqslant b \\ b \geqslant 0 & a + b \geqslant a \end{cases} \implies a + b \geqslant b \vee a$$

Lema 7.6. $\forall a, b \in G,\ \ a - (a \wedge b) + b = a \vee b$

Corolario 7.3. *Si* $a \wedge b = 0$, *entonces* $a + b = a \vee b$

Demostración. $a - (a \wedge b) = a + b\ \Rightarrow\ a + (-a \vee -b) + b\ \Rightarrow\ (0 \vee a - b) + b\ \Rightarrow\ b \vee a = a \vee b$

Definición 7.5. *Sea* $a \in G$:

$$\begin{aligned}
a \vee 0 = a^{+} &\quad \textit{parte positiva de } a \\
(-a) \vee 0 = a^{-} &\quad \textit{parte negativa de } a
\end{aligned}$$

$a = a^{+} + a^{-}\ \ \Rightarrow\ \ a + a^{-} = a + (-a \vee 0) = 0 \vee a = a^{+}$. Además $a^{+} \vee a^{-} = |a|$. Valor absoluto

Lema 7.7. $|a| = a^{+} + a^{-} = a^{+} \vee a^{-}$

Demostración. $a^{+} \wedge a^{-} = 0$. Por lema anterior. $0 \leqslant \underbrace{(a \vee 0)}_{positivo} \wedge \underbrace{(-a \vee 0)}_{positivo} = (a \wedge -a) \vee 0.$

Lema 7.8. $\forall\, a \in G\ ;\quad a^{+} \wedge a^{-} = 0$

Demostración. $a^{+} \wedge a^{-} = (a + a^{-}) \wedge a^{-} = (a \wedge 0) + a^{-} = -(-a \vee 0) + a^{-} = -a^{-} + a^{-} = 0$ ■

Lema 7.9. *(i).* $|-a| = |a|$ *(ii).* $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$

Demostración. (i). $|-a| = (-a)^+ \vee (-a)^- = (-a \vee 0) \vee (a \vee 0) = a^- \vee a^+ = |a|$

(ii). Como $a \leqslant |a| \quad \Rightarrow \quad -a \leqslant |-a| = |a| \quad \Rightarrow \quad -|a| \leqslant a$

O bien de otra forma: $|a| = a^+ \vee a^- = (a \vee 0) \vee a^- = a \vee a^- \geqslant a$

Por otro lado: $|a| = a^+ \vee ((-a) \vee 0) = a^+ \vee (-a) = (a \vee 0) \vee (-a) = a \vee (-a) \geqslant -a$

Además $|a| \geqslant -a \quad \Rightarrow \quad -|a| \leqslant a \leqslant |a|$. ■

Corolario 7.4. $|a| = a^+ + a^-$

Demostración. $|a| = a^+ \vee a^- = a^+ - (a^+ \wedge a^{-1}) + a^- = a^+ + a^-$. ■

Corolario 7.5. *Si* $a \wedge b = 0$, *entonces* $a + b = b + a$

Demostración. $a - (a \wedge b) + b \quad\quad a + b = a \vee b = b \vee a = b - (b \wedge a) + a = b + a$

$a + b = a - (a \wedge b) + b = a \vee b = b \vee a = b - (a \wedge b) + a = b + a$. ■

Lema 7.10. $a = a^+ - a^-$. *Si* $a = s - t$, $s \wedge t = 0$, *entonces*

$s = a^+$, $t = a^-$

Demostración. $a^- = (-a) \vee 0 = (t - s) \vee 0 = t + (-s \vee -t) = t - (s \wedge t) = t$. Análogamente para $a^+ = s$ ■

Lema 7.11. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad s \in G$:

$$n(g \wedge 0) = ng \wedge (n-1)g \wedge \cdots \wedge g \wedge 0$$

$$n(g \vee 0) = ng \vee (n-1)g \vee \cdots \vee g \vee 0$$

Demostración. Demostremos por inducción. para $n = 1$ es verdad. supongamos que es verdad para n:

$$\begin{aligned}
(n+1)(g \wedge 0) &= g \wedge 0 + n(g \wedge 0) \\
&= g \wedge 0 + (ng \wedge \cdots \wedge g \wedge 0) \\
&= (g \wedge 0 + ng) \wedge (g \wedge 0 + (n-1)g) \wedge \cdots \wedge (g \wedge 0 + g) \wedge (g \wedge 0) \\
&= ((n+1)g \wedge ng) \wedge (ng \wedge (n-1)g) \wedge \cdots \wedge ng \wedge g \wedge g \wedge 0 \\
&= (n+1)g \wedge (n)g \wedge \cdots \wedge g \wedge 0. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 7.6. *Cada* $g \in G$ *con* $0 \neq g$, $o(g) = +\infty$. *Aquí el* $o(g)$ *es el orden de* g.

Demostración. $ng = 0$ por lo que,

$$\begin{aligned} n(g \wedge 0) &= ng \wedge (n-1)g \wedge \cdots \wedge g \wedge 0 \\ &= (n-1)g \wedge \cdots \wedge g \wedge 0 \\ &= (n-1)(g \wedge 0) \end{aligned}$$

$g \wedge 0 = 0$, entonces $g \geqslant 0$.

$$n(g \vee 0 = (n-1)(g \vee 0) \quad \Rightarrow \quad g \vee 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad g \leqslant 0$$

Luego $g = 0$. ■

Corolario 7.7. $ng \geqslant 0$, *entonces* $g \geqslant 0$

Teorema 7.8 (Descomposición de Riesz)**.** *Si* $0 \leqslant a \leqslant b_1 + \cdots + b_n$*, entonces existen*

$$0 \leqslant a_1, a_2 \ldots a_n$$

$0 \leqslant a_1 \leqslant b_1, \;\; a \leqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

Demostración. Para $n = 2$, $0 \leqslant a \leqslant b_1 + b_2$, $0 \leqslant b_1 b_2$

$0 \leqslant a_1 := a \wedge b_1 \leqslant b_1 \qquad a_2 := -a_1 + b_2, \;\; a = a_1 + a_2.$

$$\begin{aligned} a_1 &\leqslant a \\ 0 &\leqslant -a_1 + a = a_2 \\ a_2 &= -(a \wedge b_1) + a \\ &= -a \vee -b_1 + a \qquad \text{Morgan} \\ &= 0 \vee (-b_1 + a) \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant b_2 \quad \text{o} \quad -b_1 + a \leqslant b_2. \blacksquare \end{aligned}$$

Corolario 7.9. *Si* $a, b, c \geqslant 0, \quad a \wedge (b + c) \leqslant (a \wedge b) + (a \wedge c)$

Demostración. $0 \leqslant a \wedge (b + c) \leqslant b + c.$

Por el teorema de Riesz.

$$a \wedge (b + c) = x + y$$

donde $0 \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant y \leqslant c$. Así

$$0 \leqslant x \leqslant a \wedge (b + c) \leqslant a, \quad \Longrightarrow \quad x \leqslant a \wedge b.$$

También

$$0 \leqslant y \leqslant a \wedge (b + c) \leqslant a \quad \Longrightarrow \quad y \leqslant a \wedge c,$$

$a \wedge (b + c) x + y \leqslant \overbrace{(a \wedge b)}^{x} + \overbrace{(a \wedge c)}^{y}.$ ■

Teorema 7.10 (Desigualdad triangular)**.** *Para todo $a, b \in G$, $|a+b| \leqslant |a|+|b|+|a|$. En general G no es abeliano (Si G es abeliano, entonces $|a+b| \leqslant |a|+|b|$).*

Demostración. $a \leqslant |a|$, $b \leqslant |b|$, entonces $a+b \leqslant |a|+|b| \leqslant |a|+|b|+|a|$.

$$\begin{aligned} -|a| &\leqslant a \\ -|b| &\leqslant b \\ -|a|-|b|-|a| \leqslant -|a|-|b| &\leqslant a+b \\ -(|a|+|b|+|a|) &\leqslant a+b \leqslant |a|+|b|+|a| \end{aligned}$$

Entonces $|a+b| \leqslant ||a|+|b|+|a|| = |a|+|b|+|a|$. ■

Corolario 7.11. *Si G es abeliano $\forall\, a, b \in G$, $|a+b| \leqslant |a|+|b|$*

Definición 7.6. *Un subgrupo $H \leqslant G$ es un $\ell-$subgrupo si para todo $a, b \in H$, $a \vee b$, $a \wedge b \in H$.*

Lema 7.12. *Si $H \leqslant G$, H es un $\ell-$subgrupo si y sólo si para todo $a \in H$, $a \vee 0 \in H$ (respectivamente $a\wedge \in H$)*

Demostración. La demostración de izquierda a derecha es inmediato. Supongamos que $a, b \in H$ entonces

$$a \vee b = a + (0 \vee (-a+b)) \in H, \qquad \text{pues } -a+b \in H$$

De la misma forma tenemos

$$a \wedge b = -(-a \vee -b) \in H. \;\blacksquare$$

Ejemplo

1. $\mathbb{Z} \leqslant \mathbb{Q} \leqslant \mathbb{R}$, son $\ell-$subgrupos. Si $(G, \leqslant)$ es un grupo (G cadena) entonces cada subgrupo es un $\ell-$subgrupo

2. $C(X, \mathbb{Z}) \leqslant C(X, \mathbb{Q}) \leqslant C(X)$ son $\ell-$subgrupos.

Definición 7.7. *Un anillo A es un $\ell-$anillo si es un $\ell-$grupo y también para todo $a, b \in A^+$, $ab \geqslant 0$*

Proposición 7.2. *Supongamos que F es el $\ell-$campo y F es totalmente ordenado. Todo los cuadrados son positivos.*

Demostración. $1 \not> 0 \;\Rightarrow\; 1 < 0 \;\Rightarrow\; -1 > 0 \;\Rightarrow\; (-1)(-1) > 0 \;\Rightarrow\; 1 > 0$ contradicción con $1 < 0$. $0 < x^2 = (-x)^2$. ■

Definición 7.8. *Un $\ell-$anillo A se llama un $f-$anillo si cuando $a \wedge b = 0$ y $c \geqslant 0$, entonces $ac \wedge b = 0$, $ca \wedge b = 0$*

Ejemplo Si A es totalmente ordenado y es un $\ell-$anillo, entonces es un $f-$anillo, entonces

$$a \wedge b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \quad \text{o} \quad b = 0$$

lo que quiere decir es que $ac \wedge b = 0 \wedge b = 0$ y $ac \wedge 0 = ac \wedge 0 = 0$

Lema 7.13. *Supongamos que A es un $f-$anillo y $a \wedge b = 0$, entonces $ab \wedge b = 0$*

Demostración. $b \wedge ab = ab \wedge ab = ab = 0$. ■

Corolario 7.12. *Supongamos que A es un $f-$ dominio, entonces A es totalmente ordenado*[1]

Demostración. $a, b \geqslant 0$, $(a - a\wedge) \wedge (b - a \wedge b) = 0$. Sin perder generalidad $a \wedge b = 0$, entonces $ab = 0$ $(\rightarrow\leftarrow)$. ■

Lema 7.14. *Supongamos que A es un $f-$anillo y $a \wedge b = 0$, $c \geqslant 0$, entonces $ab \wedge cb = 0$*

Lema 7.15. *Supongamos que A es un $f-$anillo $c \geqslant 0$ entonces*

$$\forall\, a \in A, \quad (ca)^+ = ca^+ \;; \qquad (ca)^- = ca^- \qquad (ac)^+ = a^+c, \quad (ac)^- = a^-c$$

Donde $(ac)^+$ se llama la parte positiva y $(ac)^-$ la parte negativa

Demostración. $ca = c(a^+ - a^-) = ca^- ca^-$, ca^+, $ca^- \geqslant 0$.

$a^+ \wedge a^- = 0$, por lema anterior $ea^+ \wedge ca^- = 0$ por teorema tenemos $ca^+ = (ca)^+$, $ca^- = (ca)^-$. ■

Corolario 7.13. *$c \geqslant 0$, $a \in A$, entonces $c|a| = |ca|$*

Demostración. $c(a +^+ a^-) = ca^+ + ca^- = (ca)^+ + (ca)^- = |ca|$. ■

Lema 7.16. *Si $a \in A$, $aa^2 \geqslant 0$, $\Delta-$familia*

[1] Si no es totalmente ordenado se puede encontrar dos elementos disjuntos

Demostración. $a^2 = (a^+ - a^-)(a^+ - a^-) = (a^+)^2 + (a^-)^2 \geqslant 0$ [2]. ■

1. $\begin{pmatrix} a & ab \\ c & d \end{pmatrix} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad a, b, c, d \geqslant 0.$

2. $(\mathrm{Mat}_2\mathbb{R}\ ,\ \leqslant)$ es un $\ell-$anillo pero no es un $f-$anillo, porque $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2$

3. $(\mathrm{Mat}_2\mathbb{R}\ ,\ \leqslant)$ no es un $f-$anillo

Teorema 7.14. *Supongamos A un $\ell-$anillo:*

1. *A es un $f-$anillo*

2. *Cada $\ell-$subgrupo $X^\perp$ es un ideal.*

3. *Cada $\ell-$subgrupo primo minimal es un ideal.*

4. *Existe una colección $\{(R_i\ ,\ \leqslant_i)\}_{i\in I}$ y cada $(R_i\ ,\ \leqslant_i)$ es un $\ell-$anillo totalmente ordenado y un $\ell-$homoemorfismo $\Psi : A \longrightarrow \prod_{i\in I} R_i$ que Ψ es inyectivo.*

Demostración

$(1) \Rightarrow (2)$ $Y^\perp$ por demostrar que es un ideal.[3]

Necesitamos que $a \in A$, $b \in Y^\perp$, entonces $ab \in Y^\perp$, entonces $ba \in Y^\perp$

$$ab = (a^+ - a^-)b = a^+b - a^-b$$

Aquí, $a^+b \in Y^\perp$, y $a^-b \in Y^\perp$.

Supongamos ahora que $a \in A^+$, entonces

$$ab = a(b^+ - b^-) = ab^+ - ab^-$$

Aquí, $ab^+ \in Y^\perp$, y $ab^- \in Y^\perp$. $b \in Y^\perp$ entonces $b^+ \in Y^\perp$, luego $b^- \in Y^\perp$

$a \in A^\perp$, $b \in Y^\perp$, $b \leqslant 0$, $a, b \in Y^\perp$. ¿$ab \wedge |y| = 0$? $\forall Y$

Como $b \in Y^\perp$, entonces $b \wedge |y| = 0$, para todo $y \in Y$.

Como A es un $f-$anillo, entonces $ab \wedge |y| = 0$.

[2] $a^+a^+ - a^+a^- - a^-a^+ + a^-a^-$; $\quad -a^+a^- - a^-a^+ = 0$

[3] Un anillo es un $\ell-$grupo

$(4) \Rightarrow (1)$ Supongamos que $c \geqslant 0,\ a \wedge b = 0$ por (4) tenemos que

$$\Psi : A \longrightarrow \prod_{i \in I} R_i$$

Por demostrar que $\Psi(ca \wedge b) = 0$, tomar en cuenta que $(R_i, \leqslant)$ son totalmente ordenados.

$$\Psi(ca \wedge b)_i = \Psi(ca) \wedge \Psi(b)_i = \Psi(c)\Psi(a) \wedge \Psi(b)_i = 0$$

Como R_i es un $f-$anillo y $\Psi(c) \geqslant 0$

$$\Psi(a) \wedge \Psi(b)_i = \Psi(a \wedge b)_i = \Psi(0)_i = 0$$

Donde $\Psi(a \wedge b) = 0 \ \Rightarrow \ a \wedge b = 0.$ ■

Ejemplo 1. $C(X) \subseteq \prod_{x \in X} R = R^X,\ Y \subset G,\ G$ *es un* $\ell-$*grupo aditivo*

$$Y^{\perp} = \{g \in G / |g| \wedge |y| = 0 \ , \quad \forall\, y \in Y\}$$

$Y^{\perp} \in \mathcal{C}(G),\ Y^{\perp}$ *el polar de* Y*, donde* $y = \{y\},\ Y^{\perp} = y^{\perp}$*.*

Primero $a \wedge b = 0$*, entonces* $a \in P$ *o* $b \in P$*, si y sólo si*

$$\{B \in \mathcal{C}(G) / \ P \subseteq B\} \qquad \textit{es una cadena}$$

$\{P_i\}$ *cadena de primos.* $\bigcap P_i$ *también es primo, (usar el lema de Zorn para demostrar la existencia de primos minimales).*

$[Z^{\perp}]$ *existen primos minimales, cada subgrupo minimal es un* $\ell-$*grupo.*

Teorema 7.15. $P \in \mathcal{C}(G)$ *un primo.* P *es minimal si y sólo si*

$$x, y \in P \ ; \quad x \wedge y \notin P \ ; \quad x \wedge y^{\perp} \supseteq x^{\perp} \vee y^{\perp}$$

Además

$$\bigwedge(G) = \{P \in \mathcal{C}(G) / \ P \ \ \textit{es primo}\} \ ; \qquad \bigcap \bigwedge(G) = \{0\}$$

con $g \neq 0,\ g \in \{0\}$

Teorema 7.16. *Supongamos* A *un* $f-$*anillo conmutativo*

1. A *es semiprimo* [4] *(si* $a^n = a,\ a = 0$*)*

[4] A no tiene elementos nilpotentes

2. $\forall\, a, b \in A,\ \ ab = 0$ *ssi* $|a| \wedge |b| = 0$

3. Cada polar es un semiprimo $(a^n \in P \ \Rightarrow\ a \in P)$

4. Cada $\ell-$subgrupo primo minimal es primo (ideal)

5. Existe un $\ell-$homeomorfismo $\Psi : A \longrightarrow \prod_{i\in I} R_i$ *con* $(R_i, \leqslant)$ *totalmente ordenado y* R_i *un dominio.*

Demostración.

$(1) \Rightarrow (2)$ $a \wedge b = 0 \ \Rightarrow\ ab = 0$, así

$$|a| \wedge |b| = 0 \ \Rightarrow\ |a||b| = 0 \ \Rightarrow\ |ab| = 0 \ \Rightarrow\ ab = 0$$

Además si $ab = 0$, entonces

$$0 \leqslant (|a| \wedge |b|)^2 \leqslant |a||b| = |ab| = |0| = 0$$

por (1) tenemos que $|a| \wedge |b| = 0$

$(2) \Rightarrow (1)$ Supongamos que $a \in A,\ a^2 = 0$ $(a^n = 0\ ,\ \ a^{n-1} \neq 0\ ,\ \ (a^{n-1})^2 = 0)$.

Por (2) tenemos $a \cdot a = 0 \ \Rightarrow\ |a| \wedge |a| = 0 \ \ \Rightarrow\ \ a = 0$

$(1) \Rightarrow (3)$ $P = Y^{\perp}$. Sea $a^2 \in P$, para todo $y \in Y$: $|a^2| \wedge |y| = 0$ y $|a| \wedge |y| = 0$ donde:

(a). $a^2 y = 0$, entonces $(a^2 y)y = 0y = 0$

(b). $(ay)^2 = 0$, entonces $ay = 0$

Según (2) $|a| \wedge |y| = 0,\ \ a \in Y^{\perp}$.

Lema 7.17. *P es $\ell-$subgrupo convexo primo, P es mínimo si y sólo si* $P = \bigcup\{X^{\perp} :\ X \notin P\}$

$(3) \Rightarrow (4)$ P es un $\ell-$subgrupo convexo primo minimal. Sabemos que el P es un ideal. Primero demostraremos que P es semiprimo.

Supongamos $a^2 \in P$ entonces

$$\exists\, x \notin P \ \ a^2 \in X^{\perp}$$

por (3) $a \in X^{\perp}$,entonces $a \in P$. $\dfrac{A}{P}$ es un anillo semiprimo. Recíprocamente mostraremos que es un dominio. Supongamos que $(a+p)(b+p) = P$, $ab \in P$, entonces $|ab| = |a||b| \in P$.

Como P es un ideal semirpimo y P es $\ell-$subgrupo convexo, $ab \geqslant 0$

$$0 \leqslant (a \wedge b)^2 \leqslant ab \in P \;\Rightarrow\; (a \wedge b)^2 \in P \;\Rightarrow\; a \wedge b \in P \;\Rightarrow\; a \in P \quad \text{o} \quad b \in P$$

(4) $\Rightarrow$ (5) $\Psi : A \longrightarrow \prod \dfrac{A}{P}$, donde P es un $\ell-$subgrupo primo minimal.

(5) $\Rightarrow$ (1) $\Psi : A \longrightarrow \prod D_i$, suryectivo, donde D_i es un dominio:

$$a^n = 0 \;\Rightarrow\; \Psi(a^n)_i = 0 \;\Rightarrow\; \Psi(a)_i^n = 0 \;\Rightarrow\; \Psi(a) = 0$$

Ψ es inyectivo , entonces $a = 0$. ■

❑ $\text{máx}(A) = \{M \leqslant A/\ M \quad \text{es un ideal}\}$

❒ $\text{espec}(A) = \{P \leqslant A/\ P \quad \text{es un primo}\}$

❑ $\text{mín}(A) = \{P \in \text{ espec}(P)/\ P \quad \text{es un mínimo en espec}(A)\}$

❒ $A = \mathbb{Z}$, $\text{mín}(A) = \{\{0\}\}$, si y sólo si A es un dominio

▲ $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times \{0\}$, anillo no es un dominio:

Teorema 7.17. *Supongamos que A es un $f-$anillo conmutativo y semiprimo, cada $P \in \text{mín}(A)$ es un $\ell-$subgrupo convexo o primo (minimal en el sentido de ideal).*

Definición 7.9. $0 \notin F$, $F = \left\{ 0 < x \in A/\ \exists\ t_1, t_2, \ldots, t_k \notin P \;\; y \;\; \bigwedge_{i=1}^{k} |t_i| \leqslant x \right\}$

1. $x,\ y \in F \;\Rightarrow\; x \wedge y \in F$

$$\bigwedge_{i=1}^{k} |t_i| \leqslant x\ ,\quad t_i \notin P\ ; \qquad \bigvee_{i=1}^{j} |s_i| \leqslant y\ ; \qquad\qquad x \wedge y \geqslant \left(\bigwedge_{i=1}^{k} |t_i| \right) \wedge \left(\bigvee_{i=1}^{j} |s_i| \right)$$

2. Si $x \in F$, $x \leqslant y \;\Rightarrow\; y \in F$. *Entonces F es un filtro de elementos positivos $F \subseteq S$es un ultrafiltro.*

Proposición 7.3. *Existe una biyección de la colección de $\ell-$subgrupos primos minimales y la colección de ultrafiltro de elementos positivos*

$$F \longrightarrow \{s \in F/\ |s| \notin F\}$$

es un $\ell-$subgrupo convexo primo minimal

$$P \longrightarrow \{g \in G^+/ \ g \notin F\}$$

es un ultrafiltro

$N = \{g \in G/ \ |g| \notin S\}$, $N \leqslant P$, $n \in N - P$ tal que $|n| \geqslant |n|$, $n \notin P$, entonces $|n| \in F \subseteq S$, $n \in N$, $|n| \notin S$ $(\rightarrow\leftarrow)$

N es un $\ell-$subgrupo convexo primo minimal (el teorema implica N es un primo), pero $N \subseteq P$, entonces $N = P$ $(P \in \text{mín}(a))$

$\text{mín}_\ell(A) = \{$P $\ell-$subgrupo convexo minimal $\}$. $\text{mín}(A) \subseteq \text{mín}_\ell(A)$

$P \in \text{mín}_\ell(A)$, $\exists Q \in \text{mín}(A)$, entonces $Q \leqslant P$ pero $Q \in \text{mín}_\ell(A)$, entonces $P = Q \in \text{mín}(A)$

$$\text{mín}(A) \subset \underset{\ell}{\text{mín}}(A)$$

Bibliografía

[1] Marlow Anderson, Lattice-Ordered Group, Marlow, ©1988 by D. Reidel Publishing Comnpany, Dordrecht, Holland

[2] V.M. Kopytov Medvdev, The Theory of Lattice Ordered Groups, Kluewer Academic Publishers. 1994

[3] G. Birkhoff, Lattice Theory, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, 1984

[4] Michael Darnel: Theory of Lattice-Ordered Groups, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 1995

[5] R. Byrd: Complete Distributive in Lattice-Ordered Groups, Pacific J. Math, 1967

[6] A.M.W. Glass W. Charles Holland: Lattice-Ordered Groups, Kluwer Academic Publishers (1989)

[7] C.D. Aliprantis & R.Tourky: Cones and duality, Graduate Studies in Math. Vol. 84 American Math. Soc. (2007)

[8] Kopytov, V. M.; Medvedev, N. Ya, Right-Ordered Groups, Siberian School of Algebra and Logic, Springer, pp. 3334, . (1996)

[9] Vinogradov, A. A.,Ordered Algebraic Systems, Algebra, Topology, Geometry, 1965 (Russian) , Akad. Nauk SSSR Inst. Naun. Tehn. Informacii, Moscow, pp. 83131, MR 0215761, (1967)