Índice general

CAPÍTULO 1

Introducción

A lo largo de todo este trabajo daremos las definiciones necesarias para poder manipular con comodidad el álgebra de Clifford "general"de un espacio vectorial cualquiera. Afinaremos luego la puntería para tratar en detalle las álgebras de Clifford canónicas sobre $\mathbb{R}^n$, y veremos como es posible dar una representación manejable del revestimiento universal del grupo SO_n mediante un cierto subgrupo del álgebra de Clifford canónica (el grupo Spin). Concluimos con una breve introducción a la geometría Spin.
Hemos intentado que este trabajo sea autocontenido en la medida de lo posible, citando solamente los resultados que consideramos "más conocidos", en forma precisa (i.e. [libro][página]), para evitar inútiles ambulaciones por la bibliografía. Las referencias a los resultados contenidos en el trabajo son específicas (i.e. Teorema 3.4) y las referencias a ecuaciones o fórmulas que aparecen centradas están entre paréntesis, para diferenciarlas de las referencias a capítulos, secciones y subsecciones.

1.1. Antecedentes

Al final de la década del 1920 la marcha de las ideas y los descubrimientos llevaron a los físicos a una aceptación general de la teoría relativista del electrón. Sin embargo, Paul Dirac se encontraba disconforme con las ideas prevalecientes del momento y estaba buscando

una mejor formulación. En 1928, finalmente encontró una teoría acorde a sus ideas que explicaba la mayoría de los principios de la época. Finalmente, su teoría resultó ser uno de los grandes logros intelectuales de ese tiempo, de una gran belleza en la matemática utilizada y que no sólo clarificó algunos fenómenos misteriosos sino que predijo la existencia de una partícula similar al electrón, pero de energía negativa!. Esto fue luego comprobado experimentalmente y cambió el modo de entender la naturaleza desde entonces.
En mecánica cuántica el estado de una partícula se describe por una función de onda $\psi(t,x)$ del espacio de Lorentz $\mathbb{R}^{1,3}$. Buscando darle forma a su teoría, Dirac se topó con el problema de encontrar una ecuación de onda $D\psi = \lambda\psi$ Lorentz-invariante que sea compatible con la ecuación de Klein-Gordon $(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2})\psi = \lambda\psi$. La causalidad más la invarianza de Lorentz requería que D fuese de primer orden en todas las variables. Lo que Dirac estaba buscando era, básicamente, una factorización del Laplaciano $\Delta = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. Asumiendo que D fuera un operador a coeficientes constantes consideró:

$$D = \sum_{i=0}^{3} \gamma_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad \gamma_i \in \mathbb{C}.$$

La condición $D^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ implica que para $0 \leq i,j \leq 3$ con $i \neq j$ se tiene:

$$\gamma_i^2 = -1 \quad y \quad \gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = 0.$$

Dicho D es el llamado operador de Dirac. Generalizando a dimensión n, hoy reconocemos a estas relaciones como las generadoras del álgebra de Clifford $Cl(n)$ de $\mathbb{R}^n$ con la forma cuadrática definida negativa $-\|\cdot\|^2$.

1.2. Planteamiento del Problema

El operador de Dirac, tal como éste lo definió, sólo se puede considerar en $\mathbb{R}^n$. Los operadores de Dirac en variedades Riemannianas fueron introducidos por Atiyah y Singer, y por Lichnerowicz, tratando de generalizar el operador de Dirac de $\mathbb{R}^n$. Éstos, son operadores de gran importancia en geometría diferencial y juegan hoy un rol fundamental en el estudio de las mutuas y profundas interrelaciones existentes entre topología, geometría, análisis y física matemática. Aparecen en situaciones tan diversas como teoría de índice de operadores, teoría de Hodge, teoría de calibres (gauge theory), cuantización geométrica, etcétera. Como la geometría de las variedades spin viene desempeñando un papel cada vez más importante, tanto en matemática como en física matemática, nuestra intención es contribuir a la comprensión de la definición de variedad spin.

1.3. Objetivos

Este trabajo se ubica dentro del ámbito de la geometría diferencial. Los tres temas principales de los cuales nos ocuparemos en el presente trabajo son: (1) el estudio de las álgebras de Clifford, (2) mostraremos el teorema de Cartan del subgrupo cerrado, y (3) mostramos que los grupos espinores son grupos de Lie y recubrimientos dobles.
El proyecto de grado está estructurado en cuatro partes. La primera parte se ocupa de los preliminares (productos tensoriales y álgebra tensorial) que se usarán en el estudio de las álgebras de Clifford. La segunda parte trata exclusivamente sobre las álgebras de Clifford y los grupos espinores, que son subgrupos del grupo de las unidades de esas álgebras. En la tercera parte se dan los resultados sobre grupos de Lie y sus álgebras. La última parte es la parte medular del trabajo. Allí se estudian las estructuras spin y se dan algunas aplicaciones.
A continuación, haremos una revisión general de los temas tratados indicando brevemente la relevancia de cada uno de ellos.

Consideremos la siguiente:

DEFINICIÓN 3.1.- Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $\varphi : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineal simétrica y $q : V \to \mathbb{K}$ la forma cuadratica asociada, esto es, $q(v) = \varphi(v, v)$. La álgebra de Clifford, $Cl(V, q)$, asociada a V y a q es una $\mathbb{K}$-álgebra asociativa con identidad, junto con una aplicación lineal $i = i_q : V \to Cl(V, q)$ tal que:
i) $(i(v))^2 = q(v)\cdot 1$, $\forall v \in V$;
ii)(Propiedad universal) Para toda $\mathbb{K}$-álgebra A y toda aplicacion lineal $j : V \to A$ con $(j(v))^2 = q(v)\cdot 1_A, \forall v \in V$, existe un único $\mathbb{K}$-homomorfismo de álgebras, $f : Cl(V, q) \to A$, tal que $j = f \circ i$.

La álgebra de Clifford así definida verifica las siguientes propiedades:

PROPOSICIÓN 3.4.- Cl(V,q) es un álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada, i.e. $Cl(V, q) = Cl^0(V, q) \oplus$

$Cl^1(V,q)$ donde $Cl^0(V,q)$ y $Cl^1(V,q)$ son subespacios tales que $Cl^i(V,q) \cdot Cl^j(V,q) \subset Cl^{i+j mod 2}(V,q)$.

COROLARIO 3.1.- Sea dimV=n. Entonces

$$dim Cl(V,q) = 2^n.$$

- Si $\{x_i\}$ es cualquier base de V, entoces los 2^n vectores:

$$1_{Cl(V,q)}, x_i, x_i x_j (i < j), ..., x_1 x_2 ... x_n,$$

forman una base de Cl(V,q).

Establecidos estos resultados, pasamos a definir los grupos espinores.

DEFINICIÓN 3.2.- El grupo Pin asociado al $\mathbb{K}$-espacio vectorial V y a q, denotado por $Pin(V,q)$, es el subgrupo

$$\text{Pin:=}\langle\{v \in V; q(v) = \pm 1\}\rangle.$$

Y el grupo Spin asociado a V y a q, es dado por

$$Spin(V,q) := Pin(V,q) \cap Cl^0(V,q)$$

que verifican las siguientes propiedades:

PROPOSICIÓN 3.9.- Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y q una forma cuadrática. Si $w \in V$ y $q(v) \neq 0$, entonces la aplicación $\rho_w : V \to V$ dada por

$$v \mapsto \alpha(w) v w^{-1}$$

es la reflexión sobre el hiperplano H ortogonal al vector w.

PROPOSICIÓN 3.11.- Las restricciones de la representación adjunta torcida ρ a los grupos espinores, $\rho : Pin(V,q) \to O(V,q)$ y $\rho : Spin(V,q) \to SO(V,q)$, son homomorfismos sobreyectivos de grupos.

Acontinuación veremos que los grupos $Pin(n)$ y $Spin(n)$ son grupos de Lie:

Recordemos que un grupo de Lie, G , es un grupo con una estructura de variedad diferenciable, tal que las operaciones

$$p(g,h) = gh \ \ e \ \ i(g) = g^{-1},$$

para $g, h \in$ G, son diferenciables.
Con esto, para ver que el grupo Spin(n) es grupo de Lie, precisamos también del concepto de subgrupo de Lie, como sigue:

DEFINICIÓN.- Decimos que H es un subgrupo de Lie de un grupo de Lie G, si existe un grupo de Lie H' y un inmersión inyectiva, $\varphi : H' \to G$, tal que $H = Im\varphi$ y $\varphi : H' \to H$ es un difeomorfismo.

También necesitamos del siguiente resultado de la teoría de los grupos de Lie:

PROPOSICIÓN 4.9 (Teorema de Cartan del subgrupo cerrado).- Todo subgrupo cerrado H de un grupo de Lie G es un subgrupo de Lie.

Así veremos que Spin(n) es un subgrupo cerrado de Pin(n), que a su vez es un subgrupo cerrado en $\Gamma(n)$, que también es un subgrupo cerrado de Cl_n^*, y por fin este es un grupo de Lie, porque es un abierto en Cl_n. Esto queda establecido en las siguientes proposiciones:

PROPOSICIÓN 5.1.- El grupo de Clifford $\Gamma(n)$ es cerrado en Cl_n^*.

PROPOSICIÓN 5.2.- El grupo Spin(n) es un grupo de Lie.

1.4. Alcances

Las álgebras de Clifford estan intimamente relacionadas con los grupos de rotación y sus representaciones. El ejemplo más simple y relevante es la conexión existente entre el grupo SO(3), constituido por las matrices ortogonales reales 3×3 de determinante unitario (que son las matrices de rotación en el espacio tridimensional) y el grupo SU(2), de las matrices complejas unitarias 2×2 de determinante unitario. Las representaciones de estos dos grupos también estan relacionados, básicamente, las representaciones del grupo

SU(2) incluyen todas las representaciones del grupo SO(3) además de una clase infinita de representaciones conocidas como representaciones espinoriales. Las representaciones espinoriales aparecen naturalmente en mecánica cuántica para describir las funciones de onda de los electrones, que eran denominados espinores. Una formulación puramente geométrica de la teoría de los espinores se debe al matemático francés Elie Cartan. Esta relación entre los grupos SU(2) y SO(3) se extiende para dimensiones más altas y son descritas por medio de las álgebras de Clifford con los grupos Pin y Spin.

CAPÍTULO 2

Preliminares

En este capítulo vamos a estudiar los principales conceptos y resultados del Álgebra Multilineal los cuales giran en torno de la noción de producto tensorial de espacios vectoriales, estos conceptos son necesarios para el desarrollo de este trabajo.

2.1. Álgebras y G-graduaciones

Una álgebra, A, es un espacio vectorial junto con una aplicación $A \times A \to A$ que satisface las siguientes dos condiciones:

$$(\lambda x_1 + \mu x_2)y = \lambda(x_1 y) + \mu(x_2 y) \tag{2.1}$$

$$x(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda(x y_1) + \mu(x y_2) \tag{2.2}$$

La imágen de dos vectores $x \in A, y \in A$, es llamada producto de x y y, que será denotado por xy.

Supongamos que B es una segunda álgebra. Entonces la aplicación lineal $\varphi : A \to B$ es llamada un homomorfismo (de álgebas) si φ preserva productos; i.e.,

$$\varphi(xy) = \varphi x \cdot \varphi y.$$

Una álgebra es llamada asociativa si

$$x(yz) = (xy)z, \quad \forall x, y, z \in A$$

y conmutativa si

$$xy = yx, \quad \forall x, y \in A.$$

Un ideal derecho (izquierdo) de un álgebra A es un subespacio I tal que para cada $x \in I$, y cada $y \in A, xy \in I$ $(yx \in I)$. Un subespacio que es ideal derecho e izquierdo es llamado simplemente un ideal de A.

2.1.1. Álgebras Cociente

Sea V_1 un subespacio del espacio vectorial V. Dos vectores $x \in V$ e $y \in V$ son llamados equivalentes mod V_1 si $y - x \in V_1$. Es inmediato verificar que esta relación es reflexiva, simétrica y transitiva y por tanto es una relación de equivalencia. Sea V$/V_1$ el conjunto de las clases de equivalencia asi obtenido y sea

$$\pi : V \to V/V_1$$

la aplicacion dada por

$$\pi x = [x], x \in V$$

donde [x] es la clase de equivalencia que contiene a x. Claramente π es una aplicación sobreyectiva.

PROPOSICIÓN 2.1. *Con la construcción anterior, existe una única estructura lineal (de espacio vectorial) en V/V_1 de tal modo que π es una aplicación lineal.*

DEMOSTRACIÓN.- (Unicidad) Asuma que V/V_1 tiene estructura de espacio vectorial de tal modo que π es una aplicación lineal. Entonces las identidades:

$$\pi(x + y) = \pi x + \pi y$$

$$\pi(\lambda x) = \lambda \pi x$$

muestran que las operaciones lineales en V/V_1 son determinadas de manera única por las operaciones lineales en V.

(Existencia) Falta probar que puede ser definida una estructura de espacio vectorial en V/V_1 de tal modo que π llegue a ser una aplicación lineal. Sean $\bar{x}$ e $\bar{y}$ dos elementos arbitarios de V/V_1 y considere vectores $x \in V$ e $y \in V$ tales que

$$\pi x = \bar{x}, \pi y = \bar{y}.$$

Entonces la clase $\pi(x+y)$ depende solo de $\bar{x}$ e $\bar{y}$. En efecto, asuma por un instante que $x' \in V$ es otro vector tal que $\pi x' = \bar{x}$. Entonces $\pi x' = \pi x$ y de ahí podemos escribir

$$x' = x + z, z \in V_1.$$

De esto se sigue que

$$x' + y = (x + y) + z$$

de donde

$$\pi(x' + y) = \pi(x + y)$$

como queríamos.
Ahora definimos la suma de los elementos $\bar{x} \in V/V_1$ e $\bar{y} \in V/V_1$ por

$$\bar{x} + \bar{y} \quad = \quad \pi(x+y) \;\; donde \;\; \bar{x} = \pi x \;\; e \;\; \bar{y} = \pi y. \tag{2.3}$$

Es inmediato verificar que V/V_1 llega a ser un grupo abeliano con esta operación y que la clase $\bar{0} = V_1$ es el elemento cero.
Ahora sean $\bar{x} \in V/V_1$ un elemento arbitrario y $\lambda \in \mathbb{K}$ un escalar. Consideremos $x \in V$ tal que $\pi x = \bar{x}$. Entonces un argumento similar al anterior muestra que la clase $\pi(\lambda x)$ solo depende de $\bar{x}$ (y no de la elección del vector x). Definimos ahora la multiplicación escalar en V/V_1 por

$$\lambda \cdot \bar{x} \quad = \quad \pi(\lambda x) \;\; donde \;\; \bar{x} = \pi x. \tag{2.4}$$

Otra vez es inmediato verificar que la multiplicación definida satisface los axiomas de producto por un escalar. Así, V/V_1 se constituye en un espacio vectorial. Se sigue inmediatamente de (2.3) y de (2.4) que:

$$\pi(x+y) = \pi x + \pi y, \quad x, y \in V$$

$$\pi(\lambda x) = \lambda \pi x, \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

i.e., π es una aplicación lineal. $\square$

El espacio vectorial V/V_1 obtenido de esta forma es llamado el espacio cociente de V con respecto al subespacio V_1. La aplicación lineal π es llamada la proyección canónica de V sobre V_1.

Sea A un álgebra y B un subespacio arbitrario de A. Consideremos la proyección canónica

$$\pi : A \to A/B.$$

Mostraremos que A/B admite una multiplicación y π es un homomorfismo si y sólo si B es un ideal en A.
En efecto, supongamos que existe una multiplicación en A/B tal que π es un homomorfismo. Entonces para cada $x \in A$ e $y \in B$, tenemos

$$\pi(xy) = \pi x \cdot \pi y = \pi x \cdot 0 = 0,$$

luego $xy \in B$.
Similarmente se sigue que $yx \in B$ y así B es un ideal.
Recíprocamente, supongamos que B es un ideal. Entonces definimos la multiplicación en A/B por

$$[x][y] \quad = \quad \pi(xy) \ ; \ [x],[y] \in A/B \tag{2.5}$$

donde x e y son cualesquiera representantes de $[x]$ e $[y]$ respectivamente.
Debemos mostrar que el producto no depende de la elección de x e y.
Sean x_1 e y_1 otros dos elementos tales que $\pi x_1 = [x]$ y $\pi y_1 = [y]$. Entonces

$$x_1 - x \in B \ \ y \ \ y_1 - y \in B.$$

De donde podemos escribir

$$x_1 = x + b, \ b \in B \ \ e \ \ y_1 = y + c, \quad c \in B$$

se sigue que

$$x_1 y_1 - xy = by + xc + bc \in B$$

y así

$$\pi(x_1 y_1) = \pi(xy).$$

La multiplicación claramente satilface (2.1) y (2.2), lo cual se sigue de la linealidad de π. Finalmente, reescribimos (2.5) en la forma

$$\pi(xy) = \pi x \cdot \pi y$$

vemos que π es un homomorfismo y que la multiplicación en A/B está univocamente determinada por el hecho de que π es un homomorfismo.

El espacio vectorial A/B junto con la multiplicación (2.5) es llamada la álgebra cociente de A con respecto al ideal B. Es claro que si A es asociativo (conmutativo) entonces también lo es A/B. Si A tiene un elemento unidad e, entonces $[e] = \pi e$ es el elemento unidad del álgebra A/B.

2.1.2. Álgebras G-graduadas

Sean V un espacio vectorial y G un grupo abeliano. Además, suponga que es dada una descomposición en suma directa:

$$V = \sum_{\alpha \in I} V_\alpha \tag{2.6}$$

y que a cada subespacio V_α un elemento $k(\alpha)$ de G le es asignado de tal modo que la aplicación $\alpha \mapsto k(\alpha)$ es inyectiva. Entonces V es llamado espacio vectorial G-graduado, G es llamado el grupo de graduación de V. Los vectores de V_α son llamados homogéneos de grado $k(\alpha)$ y escribiremos

$$grado(x) = k(\alpha), \quad x \in V_\alpha$$

En paticular, el vector cero es homogéneo de cualquier grado. Si la aplicación $\alpha \mapsto k(\alpha)$ es biyectiva podemos usar el grupo como conjunto de índices en la descomposición (2.6). Entonces (2.6) se escribe

$$V = \sum_{k \in G} V_k$$

donde V_k denota el subespacio de los elementos homogéneos de grado k. Si $G = \mathbb{Z}$, V simplemente será llamado espacio vectorial graduado.
Supongamos que V es un espacio vectorial con descomposición directa

$$V = \sum_{k=0}^{\infty} V_k, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Entonces poniendo $V_k = 0$ $(k < 0)$ hacemos de V un espacio graduado.

DEFINICIÓN 2.1. *Sea A un álgebra y supongamos que una G-graduación $A = \sum_{k \in G} A_k$ es definida en el espacio vectorial A. Entonces A es llamada una álgebra G-graduada si para cada dos elementos homogéneos x e y, xy es homogéneo, y*

$$grado(xy) = grado(x) + grado(y)$$

2.2. Producto Tensorial

DEFINICIÓN 2.2. *Sean U y V espacios vectoriales de dimensión finita sobre un campo $\mathbb{K}$. El producto tensorial de U y V, es la pareja (T,f) donde T es un espacio vectorial de dimensión finita y $f : U \times V \to T$ es una función bilineal, tal que si W es un espacio vectorial de dimensión finita y $g : U \times V \to W$ es bilineal, entonces existe una función lineal única h:T$\to$ W tal que $g = h \circ f$.*

El producto tensorial es único salvo isomorfismo como vemos en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 2.2. *(Unicidad) Dados dos productos tensoriales (T,f) y (T_1, f_1) de U y V, existe un isomorfismo entre T y T_1.*

DEMOSTRACIÓN.- Por ser T un producto tensorial, existe $h : T \to T_1$ tal que $f_1 = h \circ f$.Análogamente, como T_1 es un producto tensorial, existe $h_1 : T_1 \to T$ tal que $f = h_1 \circ f_1$. Luego $(h_1 \circ h) \circ f = f$ y como $1_T : T \to T$ es tal que $1_T \circ f = f$ por la unicidad de la identidad $h_1 \circ h = 1_T$.
Análogamente $h \circ h_1 = 1_{T_1}$. Por lo tanto h es un isomorfismo. □

NOTACIÓN.- La notación para el producto tensorial será: $T = U \otimes V$

El resultado anterior se basa en la existencia del producto tensorial, a continuación veremos que éste existe.

PROPOSICIÓN 2.3. *(Existencia) Sean U y V espacios vectoriales de dimensión finita sobre un campo $\mathbb{K}$. Entonces existe un espacio vectorial T de dimensión finita sobre K que cumple la definición 2.2.*

DEMOSTRACIÓN.- Sean $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ una base de U y $\{v_1, v_2, ...v_n\}$ una base de V. Sea $T = \mathbb{K}^{mn}$ el espacio vectorial de dimensión mn sobre $\mathbb{K}$ y $\{e_{ij}\}$ con $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$ la base canónica. Los elementos de T se pueden expresar en forma única como

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}e_{ij} \quad con \quad \lambda_{ij} \in \mathbb{K}.$$

Sea $f : U \times V \rightarrow$T la función dada por

$$f(u,v) = f(\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_m u_m, \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\beta_j e_{ij}.$$

En particular, $f(u_i, v_j) = e_{ij}$. Veamos que se cumple la Definición 1.2.
Comprobemos que f es bilineal: Sea $u' = \alpha'_1 u_1 + ... + \alpha'_n u_n$, luego:

$$\begin{aligned} f(u+u',v) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\alpha_i + \alpha'_i)\beta_j e_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\alpha_i\beta_j + \alpha'_i\beta_j)e_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\alpha_i\beta_j e_{ij} + \alpha'_i\beta_j e_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\beta_j e_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha'_i\beta_j e_{ij} \\ &= f(u,v) + f(u',v) \end{aligned}$$

Análogamente se tiene que $f(u, v + v') = f(u, v) + f(u, v')$ y que $f(\lambda u, v) = \lambda f(u, v) = f(u, \lambda v)$. Finalmente, sea $g : U \times V \rightarrow W$ una función bilineal. Existe una única función lineal $h : T \rightarrow W$ tal que $h(e_{ij}) = g(u_i, v_j)$.
Así,

$$\begin{aligned} g(u,v) &= g(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i u_i, \sum_{j=1}^{n}\beta_j v_j) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\beta_j g(u_i, v_j) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\beta_j h(e_{ij}) \\ &= h(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\beta_j e_{ij}) \\ &= h(f(u,v)) \end{aligned}$$

□

La función bilineal f se llama función bilineal universal (cualquier otra función bilineal $g : U \times V \to W$ se obtiene de f).
Para cada $u \in U$ y $v \in V$, el elemento $f(u, v)$ lo escribiremos en la forma $u \otimes v$. $f(U \times V)$ genera el producto tensorial T, el cual denotamos por $U \otimes V$.

Veamos algunas propiedades del producto tensorial.

PROPOSICIÓN 2.4. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n sobre un campo $\mathbb{K}$. Entonces*

$$V \otimes \mathbb{K} \cong V \cong \mathbb{K} \otimes V$$

DEMOSTRACIÓN.- Sea g la función bilineal dada por $g(v, \lambda) = \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $v \in V$. Entonces existe una función lineal única $h : V \otimes \mathbb{K} \to V$ tal que $h \circ f = g$. La función bilineal g es sobreyectiva pues $g(v, 1) = 1 \cdot v = v$. Como $h \circ f = g$ entonces h es sobreyectiva.

Veamos que h es inyectiva: consideremos $x \in V \otimes \mathbb{K}$. Sea $\{v_i\}_{i=1}^{n}$ una base de V, x es de la forma $\Sigma_{i=1}^{n}(v_i \otimes \lambda_i)$ para $v_i \in V, \lambda_i \in \mathbb{K}$ y tal que:

$$x = \Sigma_{i=1}^{n}(v_i \otimes \lambda_i) = \Sigma_{i=1}^{n}(\lambda_i v_i \otimes 1) = (\Sigma_{i=1}^{n}\lambda_i v_i) \otimes 1 = v \otimes 1.$$

Luego $h(x) = h(v \otimes 1) = h(f(v, 1)) = g(v, 1) = 1 \cdot v = v$. Si $h(v \otimes 1) = 0$ entonces v=0 y por lo tanto $x = v \otimes 1 = 0$. Así, h es inyectivo. □

DEFINICIÓN 2.3. *Sean $\{V_i\}_{i=1}^{m}$ espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{K}$. El producto tensorial de $\{V_i\}_{i=1}^{m}$ es una pareja (T,f) donde T es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y f es una función multilineal $f : V_1 \times V_2 \times ... \times V_m \to T$ tal que si W es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$ y $g : V_1 \times V_2 \times ... \times V_m \to W$ es multilineal, entonces existe una función lineal única $h : T \to W$ tal que $g = h \circ f$. Denotaremos a T con $V_1 \otimes ... \otimes V_m$ o con $\otimes_{i=1}^{m} V_i$ y es posible comprobar la unicidad y existencia de T.*

PROPOSICIÓN 2.5. *Sean U, V, W espacios vectoriales sobre un campo K. Entonces*

$$(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W) \cong U \otimes V \otimes W$$

DEMOSTRACIÓN.- Consideremos la función bilineal $g'' : U \times V \to U \otimes V \otimes W$ dada por $g''(u, v) = u \otimes v \otimes w$ para $w \in W$ fija, la cual induce una función lineal $h_w : U \otimes V \to$

$U \otimes V \otimes W$ tal que $h_w(u \otimes v) = u \otimes v \otimes w$. Sea $g : (U \otimes V) \times W \to U \otimes V \otimes W$ dada por $g(t, w) = h_w(t)$, notemos que g es bilineal y por lo tanto induce una función lineal $h : (U \otimes V) \otimes W \to U \otimes V \otimes W$ tal que $h((u \otimes v) \otimes w) = u \otimes v \otimes w$.
Construyamos ahora una función $h' : U \otimes V \otimes W \to (U \otimes V) \otimes W$ tal que $h' \circ h = 1_{(U \otimes V) \otimes W}$ y $h \circ h' = 1_{U \otimes V \otimes W}$. Para construir h' considere la función $g' : U \times V \times W \to (U \otimes V) \otimes W$ dada por $g'(u, v, w) = (u \otimes v) \otimes w$. Notemos que g' es lineal en cada variable, luego induce una función lineal $h' : U \otimes V \otimes W \to (U \otimes V) \otimes W$ tal que $h(u \otimes v \otimes w) = (u \otimes v) \otimes w$. Es inmediato comprobar que $h' \circ h = 1_{(U \otimes V) \otimes W}$ y que $h \circ h' = 1_{U \otimes V \otimes W}$ y, por lo tanto, h y h' son isomorfos. La demostración de que $U \otimes (V \otimes W) \cong U \otimes V \otimes W$ es análoga. □

2.3. Álgebra Tensorial

DEFINICIÓN 2.4. *Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial. Un álgebra tensorial es un par ($T(V)$,f), donde $T(V)$ es un $\mathbb{K}$-álgebra y $f : V \to T(V)$ es $\mathbb{K}$-lineal, con la siguiente propiedad: para toda aplicación $g : V \to A$ lineal, donde A es una $\mathbb{K}$-álgebra, existe un único homomorfismo de álgebras $h : T(V) \to A$ con $g = h \circ f$.*

El álgebra tensorial es único salvo isomorfismos, como queda establecido en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 2.6. *(Unicidad) Dadas dos álgebras tensoriales ($T(V)$,f) y $(T'(V), f')$ de V existe un isomorfismo entre $T(V)$ y $T'(V)$.*

DEMOSTRACIÓN.- Por ser T(V) un álgebra tensorial, existe $h : T(V) \to T'(V)$ tal que $f' = h \circ f$. Análogamente, como $T'(V)$ es un álgebra tensorial, existe $h' : T'(V) \to T(V)$ tal que $f = h' \circ f'$. Luego $(h' \circ h) \circ f = f$ y como $1_{T(V)} : T(V) \to T(V)$ es tal que $1_{T(V)} \circ f = f$ por la unicidad de la identidad tenemos $h' \circ h = 1_{T(V)}$. Análogamente $h \circ h' = 1_{T'(V)}$. Por lo tanto h es un isomorfismo. □

El resultado anterior se basa en la existencia del ágebra tensorial, ahora veremos que éste existe.

PROPOSICIÓN 2.7. *(Existencia) Existe una álgebra que verifica la Definición 2.4.*

DEMOSTRACIÓN.- Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$. Para cada entero $r \geq 0$, tenemos el espacio $V_0^r = V \otimes ... \otimes V$ (r factores) de los tensores r-veces contravariantes. Como sabemos, $V_0^0 = \mathbb{K}$ y $V_0^1 = V$. Consideremos en seguida el espacio vectorial

$$T(V) = V_0^0 \oplus V_0^1 \oplus V_0^2 \oplus ... \oplus V_0^r \oplus ...$$

suma directa de los espacios $V_0^r, r = 0, 1, 2, ...$
Dos elementos genéricos de T(V) son de la forma:

$$z = z_0 + z_1 + ... + z_k; \quad w = w_0 + w_1 + ... + w_m;$$

donde z_0, w_0 son escalares, z_1, w_1 son vectores en V, z_2, w_2 son tensores contravariantes de segundo orden, etc.
Definiremos una multiplicación en T(V) poniendo

$$zw = z_0w_0 + (z_0w_1 + z_1w_0) + (z_0w_2 + z_1w_1 + z_2w_0) + ... + z_kw_m$$

donde cada producto $z_iw_j \in V_0^{i+j}$ es dado por la multiplicación de los tensores $z_i \in V_0^i$ y $w_j \in V_0^j$.
Como cada multiplicación parcial $(z_i, w_j) \to z_iw_j$ es bilineal, se sigue que la aplicación $m : T(V) \times T(V) \to T(V)$ dada por $m(z, w) = zw$ (donde zw es definida por la fórmula de arriba) es bilineal y hace de T(V) un álgebra, llamada la álgebra tensorial de V.

2.3.1. Producto tensorial anticonmutativo de álgebras graduadas

Sean $A = \Sigma_p A_p$ y $B = \Sigma_q B_q$ dos álgebras graduadas. Considere el operador anticonmutativo

$$Q : (A \otimes B) \otimes (A \otimes B) \to (A \otimes A) \otimes (B \otimes B)$$

definido por

$$Q(x \otimes y \otimes x' \otimes y') = (-1)^{p'q} x \otimes x' \otimes y \otimes y'$$

donde: $grado(x') = p'$ y $grado(y) = q$. Entonces la aplicación lineal

$$\mu_{A\hat{\otimes}B} : (A \otimes B) \otimes (A \otimes B) \to A \otimes B$$

definida por

$$\mu_{A\hat{\otimes}B} = (\mu_A \otimes \mu_B) \circ Q$$

determina una estructura de álgebra en el espacio vectorial graduado $A \otimes B$. El álgebra resultante, $A\hat{\otimes}B$, es llamada producto tensorial anticonmutativo. La multiplicación en $A\hat{\otimes}B$ es dada por

$$(x \otimes y)(x' \otimes y') = (-1)^{p'q} xx' \otimes yy'.$$

Si A y B son álgebras con graduación, entonces observe que los espacios vectoriales subyacentes de las álgebras $A \otimes B$ y $A\hat{\otimes}B$ coinciden.
Ahora mostraremos que $A\hat{\otimes}B$ es un álgebra graduada. De hecho, si $x_1 \in A_{p_1}, x_2 \in A_{p_2}$, $y_1 \in B_{q_1}, y_2 \in B_{q_2}$ son arbitrarios tenemos:

$$(x_1 \otimes y_1)(x_2 \otimes y_2) = (-1)^{p_2 q_1} x_1 x_2 \otimes y_1 y_2.$$

Puesto que A y B son álgebras graduadas, se sigue que

$$grado(x_1 x_2) = p_1 + p_2 \quad grado(y_1 y_2) = q_1 + q_2$$

En vista de la definición de la graduación en $A\hat{\otimes}B$ obtenemos que $(x_1 \otimes y_1)(x_2 \otimes y_2)$ es homogéneo de grado $p_1 + p_2 + q_1 + q_2$, luego $A\hat{\otimes}B$ es un álgebra graduada.

2.4. Álgebra Exterior

DEFINICIÓN 2.5. *Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre un campo $\mathbb{K}$. Diremos que la función bilineal $f : V \times V \to W$ es alternante si $f(v, v) = 0$ para toda $v \in V$.*

DEFINICIÓN 2.6. *La potencia exterior (de grado 2) de un espacio vectorial V de dimensión finita sobre un campo $\mathbb{K}$, es una pareja $(V \wedge V, f)$ donde $V \wedge V$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $f : V \times V \to V \wedge V$ es una función bilineal alternante, tal que para todo espacio vectorial W y toda $g : V \times V \to W$ función bilineal alternante, existe una función lineal única $g : V \wedge V \to W$ tal que $g = h \circ f$.*

Análogamente al caso del producto tensorial se demuestra que, si existe, la potencia exterior es única.

La existencia se demuestra fácilmente utilizando los conceptos de producto tensorial y espacio vectorial cociente:

PROPOSICIÓN 2.8. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo $\mathbb{K}$ y $(V \otimes V, f')$ el producto tensorial. Sea U el subespacio de $V \otimes V$ generado por los elementos $v \otimes v$ con $v \in V$. Sea $p : V \otimes V \to (V \otimes V)/U$ la proyección canónica. Entonces la pareja $((V \otimes V)/U, f)$, con $f = pf'$ es la potencia exterior $V \wedge V$.*

DEMOSTRACIÓN.- Veamos que f es bilineal alternante. En efecto, es bilineal porque f' lo es y p es lineal; es alternante porque $f(v, v) = pf'(v, v) = p(v \otimes v) = (v \otimes v) + U = U$ que es el cero de $(V \otimes V)/U$.
Demostraremos que satisface (la propiedad universal de) la definición de potencia exterior. Dada una función bilineal alternante arbitraria $g : V \times V \to W$ consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
V \times V \arrow[r, "f'"] \arrow[dr, "g"'] & V \otimes V \arrow[r, "p"] \arrow[d, "h'"] & V \otimes V/U = V \wedge V \arrow[dl, "h"] \\
 & W &
\end{tikzcd}$$

donde $f = pf'$.
Por ser $V \otimes V$ el producto tensorial existe h', función lineal tal que $g = h'f'$. Así, $h'(v \otimes v) = h'f'(v, v) = g(v, v) = 0$. Luego, $h'(v \otimes v) = h'f'(v, v) = 0$ para toda $v \in V$, lo cual implica que $h'(U) = 0$. Entonces existe una función lineal única h tal que $h' = hp$. Por lo tanto $g = hpf' = hf$.

Observe que como imf' (imágen de f') genera a $V \otimes V$ y p es suprayectiva, resulta que imf genera a $V \wedge V$.

Si $f : V \times V \to V \wedge V$ es la función bilineal alternante que da la potencia exterior $V \wedge V$ usaremos la notación

$$f(u, v) = u \wedge v.$$

PROPOSICIÓN 2.9. *Si $dimV = n$ entonces $dimV \wedge V = \binom{n}{2}$.*

DEMOSTRACIÓN.- Sea $\{v_i\}_{i=1}^{n}$ una base de V. Sabemos que $\{v_i \otimes v_j\}$ $(i, j = 1, ..., n)$ es una base de $V \otimes V$ y como $p : V \otimes V \to V \wedge V$ es suprayectiva, $\{v_i \wedge v_j\}$ $(i, j = 1, ..., n)$ genera a $V \wedge V$. Como $v_i \wedge v_j = 0$ $(i = j)$ y $v_i \wedge v_j = -v_j \wedge v_i$ $(i \neq j)$ de este conjunto podemos eliminar los vectores innecesarios y quedarnos con $\{v_i \wedge v_j\}$ $(1 \leq i < j \leq n)$ y sigue generando $V \wedge V$. Además este conjunto es linealmente independiente, por lo que es base de $V \wedge V$. Como el número de vectores es $\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$, la dimensión de $V \wedge V$ es $\binom{n}{2}$. $\square$

El concepto de potencia exterior puede extenderse a más de dos factores. Diremos que una función multilineal $f : \times_{i=1}^{k} V_i \to W$ con $V_i = V$ es alternante si $f(v_1, ..., v_k) = 0$ siempre que $v_i = v_j$ para algunas $i \neq j$.

DEFINICIÓN 2.7. *La potencia exterior de grado k de un espacio vectorial V de dimensión finita sobre un campo $\mathbb{K}$ es una pareja $(\wedge^k V, f)$ en donde $\wedge^k V$ es un espacio vectorial y $f : \times_{i=1}^{k} V_i \to \wedge^k V$ $(V_i = V)$ es una función multilineal alternante tal que para todo espacio vectorial W y toda $g : \times_{i=1}^{k} V_i \to W$ $(V_i = V)$ función multilineal alternante, existe una única función lineal $h : \wedge^k V \to W$ tal que $g = h \circ f$.*

La demostración de la unicidad y existencia de la potencia exterior sigue exactamente los mismos pasos que para el caso $\wedge^2 V = V \wedge V$.

Además, si $\{v_1, ..., v_n\}$ es una base de V entonces

$$\{v_{j_1} \wedge ... \wedge v_{j_k} \mid 1 \leq j_1 < ... < j_k \leq n\}$$

es base de $\wedge^k V$. Puesto que este conjunto tiene $\binom{n}{k}$ elementos, la dimensión de $\wedge^k V$ es $\binom{n}{k}$.

Si denotamos $J = \{j_1, ..., j_k\}$ con $1 \leq j_1 < ... < j_k \leq n$ entonces los elementos $v \in \wedge^k V$ son de la forma $v = \Sigma_J \alpha_J v_J$ en donde $v_J = v_{j_1} \wedge ... \wedge v_{v_k}$.

Para completar la definición de $\wedge^k V$ definimos $\wedge^0 V = \mathbb{K}$ y $\wedge^1 V = V$. Obsérvese que para índices $k > n = dimV$, claramente $\wedge^k V = 0$.

A continuación definiremos una multiplicación la cual denotaremos también con el símbolo $\wedge$ por conveniencia.

DEFINICIÓN 2.8. *Sea*

$$\wedge : \wedge^k V \times \wedge^l V \to \wedge^{k+l} V$$

dado por

$$\wedge(u_1 \wedge ... \wedge u_k, v_1 \wedge ... \wedge v_l) = u_1 \wedge ... \wedge u_k \wedge v_1 \wedge ... \wedge v_l.$$

Esta multiplicación suele llamarse producto exterior y posse las siguientes propiedades:
i) $\wedge$ es asociativo
ii) $\wedge$ es distributivo con respecto a la suma directa.
iii) $u_1 \wedge ... \wedge u_k \wedge v_1 \wedge ... \wedge v_l = (-1)^{kl} v_1 \wedge ... \wedge v_l \wedge u_1 \wedge ... \wedge u_k$.

DEFINICIÓN 2.9. *Sea $\wedge^k V = V \wedge ... \wedge V$ el producto exterior de un espacio vectorial V sobre un campo $\mathbb{K}$, k veces. Consideremos la multiplicación exterior definida anteriormente, entonces tenemos un álgebra graduada*

$$\wedge V = (K, V, \wedge^2 V, \wedge^3 V, ...)$$

llamada álgebra exterior o álgebra de Grassmann de V.

CAPÍTULO 3

Álgebras de Clifford y los grupos espinores

En este capítulo $\mathbb{K}$ denotará un cuerpo de característica cero.

3.1. Álgebras de Clifford

DEFINICIÓN 3.1. *Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $\varphi : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineal simétrica y $q : V \to \mathbb{K}$ la forma cuadrática asociada, esto es, $q(v)=\varphi(v,v)$. La álgebra de Clifford, $Cl(V,q)$, asociada a V y a q es una $\mathbb{K}$-álgebra asociativa con identidad, junto con una aplicación lineal $i=i_q : V \to Cl(V,q)$ tal que:*

i) $(i(v))^2=q(v)\cdot 1$, para todo $v \in V$;

ii)(Propiedad universal) Para toda $\mathbb{K}$-álgebra A y toda aplicación lineal $j : V \to A$ con $(j(v))^2 = q(v) \cdot 1_A$, para todo $v \in V$, existe un único $\mathbb{K}$-homomorfismo de álgebras, $f : Cl(V,q) \to A$, tal que $j = f \circ i$.

NOTA.- Usamos la notación, $\lambda \cdot u$ para el producto de un escalar, $\lambda \in \mathbb{K}$, y de un elemento, u, en el álgebra Cl(V,q) y la yuxtaposicion, uv, para la multiplicación de dos elementos, u y v en la álgebra Cl(V,q).

PROPOSICIÓN 3.1. *(Unicidad) Dadas dos álgebras de Clifford (Cl(V,q),i), $(Cl_1(V,q),i_1)$ asociados a V y q, existe un isomorfismo entre Cl(V,q) y $Cl_1(V,q)$.*

DEMOSTRACIÓN.- Por ser Cl(V,q) un álgebra de Clifford, existe $f : Cl(V,q) \to Cl_1(V,q)$ tal que $i_1 = f \circ i$. Análogamente, como $Cl_1(V,q)$ es un álgebra de Clifford existe $g : Cl_1(V,q) \to Cl(V,q)$ tal que $i = g \circ i_1$.
Luego $(g \circ f \circ i) = i$ y como $1 : Cl(V,q) \to Cl(V,q)$ es tal que $1 \circ i = i$ por la unicidad de la identidad $g \circ f = 1$. Análogamente $f \circ g = 1$. Por lo tanto f es un isomorfismo. $\square$

PROPOSICIÓN 3.2. *(Existencia) Existe una $\mathbb{K}$-álgebra asociativa que satisface la Definición 3.1.*

DEMOSTRACIÓN.- Dado el $\mathbb{K}$-espacio vectorial V, consideremos su álgebra tensorial T(V), y sea $I \subset T(V)$ el ideal generado por $\{v \otimes v - q(v) \cdot 1 : v \in V\}$. Afirmamos que la $\mathbb{K}$-álgebra buscada es $T(V)/I$ junto con $i_q = \pi \circ i_1$, donde $i_1 : V \to T(V)$ es la inyección natural obtenida en la construcción de T(V) y $\pi : T(V) \to T(V)/I$ es la aplicación cociente. En efecto, tenemos que

i) $i(v)^2 = (\pi(i_1(v))^2 = [v][v] = [v \otimes v] = [q(v) \cdot 1] = q(v)[1] = q(v) \cdot 1$

ii) Para toda $\mathbb{K}$-álgebra A y toda aplicación lineal $j : V \to A$ con $(j(v))^2 = q(v) \cdot 1$, para todo $v \in V$, por la propiedad universal de la álgebra tensorial existe un único $\mathbb{K}$-homomorfismo de álgebras, $h : T(V) \to A$ tal que

$$h \circ i_1 = j,$$

obtenemos de la propiedad universal del cociente, un único $\mathbb{K}$-homomorfismo de álgebras, $\hat{h} : T(V)/I \to A$ tal que $\hat{h} \circ \pi = h$, o sea, $\hat{h} \circ \imath_q = \hat{h} \circ (\pi \circ \imath_1) = (\hat{h} \circ \pi) \circ \imath_1 = h \circ \imath_1 = j$.
Por tanto, $Cl(V,q) = T(V)/I$ es una álgebra de Clifford asociada a V y a q. $\square$

EJEMPLO 3.1. Sea V=$\mathbb{R}$ y $\Phi : V \to \mathbb{R}$ definida por $\Phi(x) = -x^2$. Vamos a mostrar que la álgebra de Clifford $Cl(\mathbb{R}, \Phi)$ es $\mathbb{C}$. Para esto, consideremos la aplicación $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por $\phi(x) = xi$. Observemos que ϕ es una aplicación de Clifford,

$$\phi^2(x) = (xi)^2 = \Phi(x) \cdot 1_C.$$

Ahora, sea A una $\mathbb{R}$-álgebra y $\varphi : \mathbb{R} \to A$ una aplicación $\mathbb{R}$-lineal tal que

$$\varphi(x)^2 = \Phi(x) \cdot 1_A.$$

Consideremos el homomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definido por $f(a+bi) = a+b\varphi(1)$, tenemos que

$$f \circ \phi(x) = f(xi) = x\varphi(1) = \varphi(x).$$

Por otro lado sea $g : \mathbb{C} \to A$ un homomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras tal que,

$$g \circ \phi = \varphi.$$

Entonces, $g(a + bi) = ag(1) + bg(i) = ag(1) + bg(\phi(1)) = a \cdot 1 + b\varphi(1) = f(a + bi)$. Por tanto, $Cl(\mathbb{R}, \Phi) = \mathbb{C}$.

EJEMPLO 3.2. Sea $V = \mathbb{R}$ y $\Phi(a) = a^2$ la forma cuadrática asociada. El espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ con el producto $(a, b) \cdot (c, d) = (ac + bd, ad + bc)$, es una álgebra asociativa con $(1, 0)$ como elemento unitario. Se tiene que $Cl(\mathbb{R}, \Phi)$ es $\mathbb{R}^2$.

3.1.1. Propiedades

PROPOSICIÓN 3.3. *Cl(V,q) es generada como álgebra por la imágen de i_q (y por la unidad 1).*

DEMOSTRACIÓN.- Para esto denotamos por A:= $\langle Im\ i_q \rangle$ la subálgebra generada por tal imágen y consideremos la aplicación î: $V \to A$. Como $\hat{\imath}(v)^2$=$q(v) \cdot 1$, de la definición existe un único homomorfismo de álgebras $f : Cl(V, q) \to A$ tal que:

$$f \circ i = \hat{\imath}.$$

Por otro lado, tomandose la inclusión $j : A \hookrightarrow Cl(V, l)$ tenemos que

$$j \circ \hat{\imath} = \mathrm{i}.$$

De donde se sigue

$$(j \circ f) \circ i = j \circ (f \circ i) = j \circ \hat{\imath} = \mathrm{i}$$

y ya que $id \circ i = i$, por la unicidad de la aplicación identidad, $j \circ f = id$, de donde j es sobreyectiva. Por tanto, $\langle Im\ i_q \rangle$=Cl(V,q). □

PROPOSICIÓN 3.4. *Cl(V,q) es una álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada.*

DEMOSTRACIÓN.- Consideremos $\alpha_0 : V \to Cl(V,q)$ dada por $\alpha_0(v) = -i(v)$, vemos que es lineal y $(\alpha_0(v))^2 = (-i(v))^2 = i(v)^2 = q(v) \cdot 1$. Así, por la propiedad universal de las álgebras de Clifford, existe un único homomorfismo de álgebras, $\alpha : Cl(V,q) \to Cl(V,q)$, tal que

$$\alpha \circ i = \alpha_0$$

esto es,

$$\alpha(i(v)) = -i(v), v \in V.$$

Y para $x \in Cl(V,q)$ de la Proposición 2.3, tenemos que

$$\alpha(x) = \Sigma\lambda\alpha(i(v_1))^{t_1}\alpha(i(v_2))^{t_2}...\ \alpha(i(v_m))^{t_m}\ ,$$

de donde

$$\alpha(x) = \Sigma\lambda(-i(v_1))^{t_1}(-i(v_2))^{t_2}...\ (-i(v_m))^{t_m},\ v_i \in V$$

obteniendo $\alpha \circ \alpha = id$ y, de donde se sigue la biyectividad de α.
El automorfismo α es llamado automorfismo canónico. Con α, podemos descomponer la álgebra de Clifford en una suma directa de dos subespacios,

$$Cl(V,q) = Cl^0(V,q) \oplus Cl^1(V,q),$$

donde $Cl^i(V,q) = \{x \in Cl(V,q) : \alpha(x) = (-1)^i x,\ para\ i = 0,1\}$ y x es llamado elemento homogéneo de grado i.
Como podemos verificar que $Cl^i(V,q) \cdot Cl^j(V,q) \subseteq Cl^{i+j mod2}(V,q)$, se muestra que Cl(V,q) es una álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada o una superálgebra. □

PROPOSICIÓN 3.5. *La aplicación de Clifford $i_q : V \to Cl(V,q)$ es inyectiva.*

DEMOSTRACIÓN.- Si la forma bilineal asociada φ es nula, $\varphi \equiv 0$, $Cl(V,q) = \wedge(V)$, entonces i es inyectiva, puesto que $I \subseteq \oplus_{n\geq 2}V^{\otimes n}$, implica que la aplicación cociente, $\pi : T(V) \to T(V)/I := \wedge(V)$ restringida a $V^{\otimes 1}$ es inyectiva e $i = \pi \circ i_1 = \pi\mid_{V^{\otimes 1}}$, donde $i_1 : V^{\otimes 1} \to T(V)$.

Si la forma bilineal φ es no degenerada (o sea, si $v \in V$ y $\varphi(v,w) = 0$ para todo $w \in V$, entonces v=0), tenemos que si $x \in ker\ i$, para $y \in V$, se tiene:

$$0 = i(x)i(y) + i(y)i(x) = 2\varphi(x,y) \cdot 1$$

de donde $x = 0$.
Si la forma bilineal es cualquiera, podemos escribir $V = V_0 \oplus V_1$, donde V_0 es el espacio nulo,

$$V_0 := \{v \in V; \varphi(v,w) = 0, para\ todo\ w \in V\}$$

y V_1 es el espacio complementario de V_0.
Observemos que $\varphi\ |_{V_1 \times V_1}$ asociada a $q_1 = q\ |_{V_1}$ es no degenerada. En efecto, si $v_1 \in V_1$ y $\varphi(v_1, v) = 0$ para todo $v \in V_1$, tenemos que $\varphi(v_1,w) = \varphi(v_1,w_0) + \varphi(v_1,w_1)$, con $w = w_0 + w_1 \in V$, $w_0 \in V_0, w_1 \in V_1$, implicando, $\varphi(v,w) = 0$ para todo $w \in V$, luego $v_1 \in V_0$ más como $V_0 \cap V_1 = \{0\}$, se tiene $v_1 = 0$.
Por tanto por lo que mostramos anteriormente, la aplicación estructural de la álgebra de Clifford asociada a V_1 y q_1, $i_{q_1} : V_1 \to Cl(V_1,q_1)$ es inyectiva.
Consideremos así la aplicación

$$\psi_1 : V \xrightarrow{\pi_1} V_1 \xrightarrow{i_{q_1}} Cl(V_1,q_1)$$

donde $\pi_1 : V \to V_1$ es la aplicación proyección. Entonces,

$$\psi_1(v)^2 = q_1(v) \cdot 1 = q(v) \cdot 1$$

ya que

$$q(v) = \varphi(v_0 + v_1, v_0 + v_1) = \varphi(v_1,v_1) = q_1(v).$$

Definamos

$$\psi : V \to \wedge(V) \otimes Cl(V_1,q_1)$$

$$v \longmapsto \pi_0(v) \otimes 1 + 1 \otimes \psi_1(v)$$

donde $\pi_0 : V \to V_0$ es la aplicación proyección. Y notemos que

$$\psi(v)^2 = \pi_0(v)^2 \otimes 1 + \pi_0(v) \otimes \psi_1(v) - \pi_0(v) \otimes \psi_1(v) + 1 \otimes \psi_1(v)^2 = q(v) \cdot 1,$$

pues $\alpha(\pi_0(v)) = \alpha(v_0) = -v_0 = -\pi_0(v)$ y $\alpha(\psi_1(v)) = -i_q(\pi_1(v)) = -\psi_1(v)$, de donde: $grado(\psi_1(v)) = grado(\pi_0(v)) = 1$.

Luego, por la propiedad universal de las álgebras de Clifford, existe un único homomorfismo de álgebras $f : Cl(V,q) \to \wedge(V) \otimes Cl(V_1,q_1)$, tal que

$$f \circ i_q = \psi.$$

Como ψ es inyectiva, pues $\psi(v) = 0$, implica $\pi_0(v) = 0$ y $\psi_1(v) = 0$, de donde siendo i_{q_1} inyectiva, v=0, se sigue que i_q es inyectiva como queriamos mostrar. □

PROPOSICIÓN 3.6. *Sea $V= V_1 \oplus V_2$ una descomposicion q-ortogonal del espacio vectorial V (i.e. $q(v_1 + v_2) = q(v_1) + q(v_2)$ para todo $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$). Entonces existe un isomorfismo natural de álgebras de Clifford*

$$Cl(V,q) \to Cl(V_1,q_1) \bigotimes Cl(V_2,q_2)$$

donde q_i denota la restriccion de q a V_i y $\bigotimes$ denota el producto tensorial $\mathbb{Z}_2 -$ graduado.

DEMOSTRACIÓN.- Consideremos la aplicación $V_1 \to V_1 \oplus V_2 \to Cl(V,q)$ y también $V_2 \to V_1 \oplus V_2 \to Cl(V,q)$, con $V_1 \to V$ y $V_2 \to V$ las aplicaciones inclusión. Ellas inducen homomorfismos

$$\gamma : Cl(V_1,q_1) \to Cl(V,q)$$

y

$$\psi : Cl(V_2,q_2) \to Cl(V,q).$$

Ahora definamos una aplicación lineal $f : Cl(V_1,q_1) \bigotimes Cl(V_2,q_2) \to Cl(V,q)$ por

$$f(u \otimes v) = \gamma(u) \cdot \psi(w), u \in Cl(V_1,q_1), w \in Cl(V_2,q_2).$$

Mostramos que f es un homomorfismo de álgebras. Puesto que γ y ψ son homomorfismos, es suficiente mostrar que

$$\gamma(x) \cdot \psi(y) = (-1)^{\alpha\beta}\psi(y) \cdot \gamma(x), donde\ \alpha = grado(x), \beta = grado(y).$$

Mas aún, en vista de la Proposición 3.3, podemos asumir que:

$$x = x_1 x_2 ... x_p, x_i \in V_1$$

y

$$y = y_1 y_2 ... y_q, y_j \in V_2.$$

Entonces

$$\gamma(x)\psi(y) = \gamma(x_1)...\gamma(x_p)\psi(y_1)...\psi(y_q).$$

Puesto que cada dos vectores $\gamma(x_i)$ y $\psi(y_j)$ son ortogonales con respecto a q en V, se sigue que

$$\gamma(x_i)\psi(y_j) + \psi(y_j)\gamma(x_i) = 0.$$

Así, obtenemos

$$\begin{aligned}\gamma(x)\psi(y) &= (-1)^{pq}\psi(y_1)...\psi(y_q)\gamma(x_1)...\gamma(x_p)\\ &= (-1)^{pq}\psi(y)\gamma(x)\\ &= (-1)^{\alpha\beta}\psi(y)\gamma(x)\end{aligned}$$

Para mostrar que f es un isomorfismo construimos un homomorfismo inverso. Considere la aplicación lineal

$$\eta : V_1 \oplus V_2 \to Cl(V_1, q_1) \bigotimes Cl(V_2, q_2)$$

dado por

$$\eta(x \oplus y) = x \otimes e_{V_2} + e_{v_1} \oplus y, x \in V_1, y \in V_2.$$

Este satisface

$$\begin{aligned}(\eta(x \oplus y))^2 &= x^2 \otimes e_{V_2} + x \otimes y - x \otimes y + e_{V_1} \otimes y^2\\ &= x^2 \otimes e_{V_2} + e_{V_1} \otimes y^2\\ &= [q(x) + q(y)]e_{V_1} \otimes e_{V_2}\\ &= q(x \oplus y)e_V\end{aligned}$$

Así, η es una aplicación Clifford y se extiende a un homomorfismo

$$g : Cl(V, q) \to Cl(V_1, q_1) \bigotimes Cl(V_2, q_2).$$

Se sigue de la definición de f y g que

$$gf(x \otimes e_{V_2}) = g\gamma(x) = g(x \oplus 0) = \eta(x \oplus 0) = x \otimes e_{V_2}, x \in V_1.$$

Similarmente,

$$fg(e_{V_1} \otimes y) = e_{V_1} \otimes y, y \in V_2.$$

Finalmente,

$$gf(e_{V_1} \otimes e_{V_2}) = e_{V_1} \otimes e_{V_2}.$$

Puesto que la álgebra de Clifford $Cl(V_1, q_1) \bigotimes Cl(V_2, q_2)$ es generado por los elementos $x \otimes e_{V_2}, e_{V_1} \otimes y$;y $e_{V_1} \otimes e_{V_2}$; esto implica que

$$g \circ f = id.$$

Para el otro lado:

$$\begin{aligned} fg(x \oplus y) &= f\eta(x \oplus y) \\ &= f(x \otimes e_{V_2}) + f(e_{V_1} \otimes y) \\ &= \gamma(x) + \psi(y) \\ &= x \oplus y, x \in V_1, y \in V_2. \end{aligned}$$

Y,

$$fg(e_V) = e_V.$$

Estas relaciones implican que $f \circ g = id$. Así, f es un isomorfismo. $\square$

3.1.2. Álgebras de Clifford sobre un espacio de dimensión finita

En esta sección V denota un espacio vectorial n-dimensional.

PROPOSICIÓN 3.7. *Sea dimV=n. Entonces*

$$dimCl(V, q) = 2^n$$

DEMOSTRACIÓN.- Primero consideremos el caso n=1. Fijemos un vector a distinto de cero en V y sea A el espacio vectorial generado por $1_{Cl(V,q)}$ y a. Entonces

$$1_{Cl(V,q)}a = a1_{Cl(V,q)} = a, \ y, \ a^2 = q(a) \cdot 1_{Cl(V,q)}.$$

Así, A es una álgebra. Es posible verificar que la aplicación inclusión $V \hookrightarrow A$ se extiende a un isomorfismo $Cl(V, q) \to A$. Así, dimCl(V,q)=2.
En el caso general elijamos una base ortogonal $\{e_i\}$ (i=1,...n) de V y denotemos por V_i el subespacio 1-dimensional de V generado por e_i (i=1,...,n).
Entonces tenemos la descomposición ortogonal

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_n.$$

Así, por la Proposición 3.6:

$$Cl(V,q) \cong Cl(V_1,q_1) \bigotimes ... \bigotimes Cl(V_n,q_n).$$

Y así

$$dimCl(V,q) = 2^n.$$

□

COROLARIO 3.1. *Si $\{x_i\}$ es cualquier base de V, entonces los 2^n vectores*

$$1_{Cl(V,q)}, x_i, x_i x_j \ (i < j), \dots \ , x_1 x_2 ... x_n$$

forman una base de Cl(V,q).

DEMOSTRACIÓN.- Se sigue de la relación $x_i x_j + x_j x_i = 2\varphi(x_i, x_j) \cdot 1_{Cl(V,q)}$ que los vectores anteriores generan el espacio Cl(V,q). Puesto que, porel corolario anterior $dimCl(V,q) = 2^n$, ellos forman una base de Cl(V,q). □

COROLARIO 3.2. *$\wedge V$ y Cl(V,q) son isomorfos como espacios vectoriales.*

DEMOSTRACIÓN.- Consideremos la aplicación

$$\xi : \wedge V \to Cl(V,q)$$

dado por

$$\xi(x_1 \wedge ... \wedge x_p) = \frac{1}{p!} \sum \epsilon_\sigma x_{\sigma(1)} ... x_{\sigma(p)}, (1 < p < n).$$

Mostraremos que ξ es un isomorfismo lineal. En efecto, escojamos una base ortogonal $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de V. Entonces $e_i e_j = -e_j e_i \ (i \neq j)$ y así

$$\xi(e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_p}) = e_{i_1} ... e_{i_p}, (i_1 < i_2 < ... < i_p).$$

Así ξ lleva una base de $\wedge V$ a una base de Cl(V.q), por lo tanto es un isomorfismo lineal. □

3.2. Los grupos espinores

Como el título de la sección indica, precisamos relacionar las álgebras Cl(V,q) con el concepto de grupo. Para eso, consideremos el grupo multiplicativo de las unidades en la álgebra de Clifford, esto es:

$$Cl^*(V,q) := \{x \in Cl(V,q); existe\ x^{-1} \in Cl(V,q) \text{ tal que } x^{-1}x = xx^{-1} = 1\}$$

Así, como $Cl^*(V,q)$ contiene a los vectores $v \in V$ tal que $q(v) \neq 0$, pues $v^2 = q(v) \cdot 1$, tomemos el subgrupo de $Cl^*(V,q)$ generado por los elementos $v \in V$ con $q(v) \neq 0$, denotado por P(V,q). A partir de ahí, podemos especificar los grupos espinores.

DEFINICIÓN 3.2. *El grupo Pin asociado al $\mathbb{K}$-espacio vectorial V y a q, denotado por Pin(V,q), es el subgrupo*

$$Pin := \langle \{v \in V; q(v) = \pm 1\} \rangle.$$

DEFINICIÓN 3.3. *El grupo Spin asociado a V y a q, es dado por*

$$Spin(V,q) := Pin(V,q) \cap Cl^0(V,q).$$

Observemos que Spin(V,q) es realmente un grupo, pues como $x \in Pin(V,q)$, restaria mostrar que $x^{-1} \in Cl^0(V,q)$, y esto es cierto ya que $\alpha(x^{-1}) = \alpha(x)^{-1}$.

Como nuestro trabajo se centra en las algebras de Cliffod asociadas a espacios vectoriales de dimensión finita, pasaremos a obtener una definición de tales grupos en ese contexto.

PROPOSICIÓN 3.8. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial asociado a la forma cuadrática q, entonces existe un único antiautomorfismo, $t : Cl(V,q) \to Cl(V,q)$, tal que*

$$t \circ t = id, \quad t(x \cdot y) = t(y) \cdot t(x) \quad y \quad t(v) = v$$

para todo $v \in V$ y $x, y \in Cl(V,q)$.

DEMOSTRACIÓN.- Consideremos la involución $J : T(V) \to T(V)$ dada por

$$v_1 \otimes v_2 \otimes \ldots \otimes v_k \mapsto v_k \otimes \ldots \otimes v_1$$

extendiendola por linealidad.

Observemos que $I \subset Ker(\pi \circ J)$, donde $I = \langle v \otimes v - q(v) \cdot 1, v \in V \rangle$ y π es la aplicación cociente. En efecto,

$$\pi \circ J(v \otimes v - q(v) \cdot 1) = \pi(v \otimes v - q(v) \cdot 1) = 0.$$

Por tanto, por la propiedad universal del cociente, existe un único $\mathbb{K}$-homomorfismo $t : Cl(V,q) \to Cl(V,q)$ de modo que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
T(V) \arrow[r, "J"] \arrow[d, "\pi"'] & T(V) \arrow[r, "\pi"] & Cl(V,q) \\
T(V)/I \arrow[urr, "t"'] & &
\end{tikzcd}$$

conmuta (i.e. $t \circ \pi = J \circ \pi$).

Por tanto,

i) $t(v) = t(i_q(v)) = t \circ \pi(i_1(v)) = J \circ \pi(i_1(v)) = J(v) = v$;

ii) Como π es sobreyectiva, dados $x, y \in Cl(V, q)$, existen $x', y' \in T(V)$ tales que $\pi(x') = x$ y $\pi(y') = y$. De ahí $t(x \cdot y) = t(\pi(x')\pi(y')) = t \circ \pi(x' \cdot y') = J \circ \pi(x' \cdot y') = J(x \cdot y) = y \cdot x = J(y)J(x) = J(\pi(y')\pi(x')) = t(y)t(x)$;

iii) Como $J \circ J = id$, donde $t \circ J(J \circ \pi) = t \circ \pi$, implicando $t \circ J(t \circ \pi) = t \circ \pi$, y por la unicidad de la identidad, $t \circ J = id$, tenemos que $t \circ t(x) = t \circ J \circ \pi(x') = \pi(x') = x$.

Así, t es un antiautomorfismo como querímos demostrar. $\square$

DEFINICIÓN 3.4. *Un antiautomorfismo, $^{-} : Cl(V, q) \to Cl(V, q)$ dado por $\bar{x} := t \circ \alpha(x)$ se dice conjugación.*

Aprovechemos para observar que $t \circ \alpha = \alpha \circ t$, esto porque siendo $dimV < \infty$, del Corolario 3.1 sabemos que $1, e_{j_1}e_{j_2}...e_{j_k}$ con $1 \leq j_1 < ... < j_k \leq n$, forman una base de Cl(V,q), de donde

$$t(e_{j_1}e_{j_2}...e_{j_k}) = e_{j_k}e_{j_{k-1}}...e_{j_1}$$

y

$$\alpha(e_{j_1}e_{j_2}...e_{j_k}) = (-1)^k e_{j_1}e_{j_2}...e_{j_k}.$$

Con la conjugación podemos definir otra aplicación, $N : Cl(V, q) \to Cl(V, q)$ llamada norma, dada por

$$N(x) = x\bar{x},$$

donde $N(e_{j_1}e_{j_2}...e_{j_k}) = (-1)^k q(e_{j_1})q(e_{j_2})...q(e_{j_k})$ por el mismo argumento del párrafo anterior y ya que $\overline{e_{j_1}e_{j_2}...e_{j_k}} = (-1)^k e_{j_k}e_{j_{k-1}}...e_{j_1}$.

DEFINICIÓN 3.5. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita. El grupo Clifford de la forma cuadrática q, denotado por $\Gamma(V, q)$, es el subgrupo formado por los elementos*

$x \in Cl^*(V,q)$ *para el cual*

$$\alpha(x)vx^{-1} \in V, \text{ para todo } v \in V.$$

Como la aplicación $\rho_x : V \to V$, dada por $\rho_x(v) = \alpha(x)vx^{-1}$, es lineal e inyectiva para cada $x \in \Gamma(V,q)$, debido a que $dimV < \infty$, es biyectiva. Así la inversa existe y es dada por $\rho_x^{-1}(v) = \alpha(x^{-1})vx$, recordando que α es un automorfismo. De donde, $x^{-1} \in \Gamma(V,q)$, permitiendonos mostrar que $xy^{-1} \in \Gamma(V,q)$, para $x, y \in \Gamma(V,q)$, y concluir que $\Gamma(V,q)$ es un subgrupo de las unidades de la álgebra de Clifford.

Además de esto, podemos ver que si $v \in V$ y $q(v) \neq 0$ la aplicación ρ_x tiene una interpretación geométrica como sigue:

PROPOSICIÓN 3.9. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y q una forma cuadrática. Si $w \in V$ y $q(v) \neq 0$, entonces la aplicación $\rho_w : V \to V$ dada por*

$$v \mapsto \alpha(w)vw^{-1}$$

es la reflexión sobre el hiperplano H ortogonal al vector w.

DEMOSTRACIÓN.- Ya que $w^2 = q(w) \cdot 1$ se sigue que $w^{-1} = \frac{w}{q(w)}$, y de ahí

$$\begin{aligned}\rho_w(v) &= \alpha(w)vw^{-1} \\ &= -wv\frac{v}{q(w)} \\ &= (vw - 2\varphi(v,w) \cdot 1)\frac{w}{q(w)} \\ &= v - 2\frac{\varphi(v,w)}{q(w)}w,\end{aligned}$$

para todo $v \in V$. Por tanto, siendo esa última igualdad la definición de reflexión s_w sobre el hiperplano $H :=\{v \in V : \varphi(v,w) = 0\}$ ortogonal al vector w, se sigue lo deseado. □

Al comenzar la sección vimos la definición de los grupos espinores, tenemos ahora una definición equivalente, que los caracteriza cuando la dimensión de V es finita.

DEFINICIÓN 3.6. *El grupo Pin asociado a un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita V y a una forma cuadrática q no degenerada, denotado por Pin(V,q), es el subgrupo*

$$Pin(V,q) := \{x \in \Gamma(V,q); N(x) = \pm 1\}.$$

Y el grupo Spin asociado a V y q, está dado por:

$$Spin(V,q) := Pin(V,q) \cap Cl^0(V,q).$$

Vamos a mostrar que ρ es un homomorfismo de $\Gamma(V,q)$ en el grupo ortogonal O(V,q) de las isometrías.

LEMA 3.1. *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y q una forma cuadrática no degenerada. El núcleo de la aplicación $\rho : \Gamma(V,q) \to End(V)$ es el grupo $K^* \cdot 1$ de los múltiplos escalares no nulos de la unidad de la álgebra de Clifford.*

DEMOSTRACIÓN.- Sea $x \in Cl^*(V,q)$ y supongamos que $x \in ker(\rho)$, entonces $\rho(x) = Id$, lo que implica que $\alpha(x)v = vx$, para todo $v \in V$. Descomponiendo x en sus partes par e impar, obtenemos

$$x = x_0 + x_1 \quad x_0 \in Cl^0(V,q), x_1 \in Cl^1(V,q).$$

Se sigue de $\alpha(x)v = vx$ para todo $v \in V$ que

$$vx_0 = x_0 v \quad y \quad -x_1 v = vx_1. \tag{3.1}$$

Sabemos que x_0 y x_1 pueden ser escritos como combinaciones lineales de elementos de la forma $e_{i_1}...e_{i_k}$ donde los e_{i_j} forman una base ortogonal $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de V, y además $1 \leq i_1 \leq ... \leq i_k \leq n$. Aplicando sucesivamente la relación:

$$e_i e_j + e_j e_i = 2\varphi(e_i, e_j),$$

podemos expresar x_0 y x_1 convenientemente en las formas

$$x_0 = a + e_1 b \quad y \quad x_1 = c + e_1 d, \tag{3.2}$$

donde a,b,c y d no contienen el vector e_1. A su vez, aplicando el automorfismo α, obtenemos

$$a + e_1 b = x_0 = \alpha(x_0) = \alpha(a) - e_1 \alpha(b)$$

y

$$-c - e_1 d = \alpha(x_1) = \alpha(c) - e_1 \alpha(d).$$

De ahí tenemos que a y d son elementos pertenecientes a $Cl^0(V,q)$, y c y b son elementos pertenecientes a $Cl^1(V,q)$.

Ahora multiplicando las igualdades (3.2) por e_1 y $-e_2$ respectivamente, obtenemos las expresiones

$$e_1a + e_1^2b = e_1x_0 = x_0e_1 = ae_1 + e_1be_1 = ae_1 - e_1^2b$$

y

$$-e_1c - e_1^2d = -e_1x_1 = x_1e_1 = ce_1 + e_1de_1 = ce_1 + e_1^2d.$$

Esto implica que $2e_1^2b = 0$ y $2e_1^2d = 0$, o sea, que b=0 y d=0. Luego, x_0 y x_1 son independientes de e_1. Podemos aplicar el mismo argumento para los otros elementos básicos $e_2, ...e_n$ y concluir al final que x_0 y x_1 son independientes de los vectores de la base, lo que implica, que x_0 y x_1 estan en el cuerpo $\mathbb{K}$ y por tanto $x = x_0 + x_1$, también pertenece a $\mathbb{K}$. Como $x \neq 0$, ya que $x \in \Gamma(V,q)$ entonces $x \in K^* \cdot 1$. Por tanto, $ker\rho \subset K^* \cdot 1$. La inclusión contraria es trivialmente verificada debido al hecho de que $K^* \cdot 1 \subset Cl^*(V,q)$. $\square$

OBSERVACIÓN.- El Lema 3.1 no es válido para formas degeneradas. Por ejemplo, si $q \equiv 0$, entonces $Cl(V,q) = \wedge V$. Considere el elemento $x = 1 + e_1e_2$. Claramente, $x^{-1} = 1 - e_1e_2$. Más, para $v \in V$, tenemos

$$\alpha(1 + e_1e_2)v(1 + e_1e_2)^{-1} = (1 + e_1e_2)v(1 - e_1e_2) = v$$

Sin embargo, $1 + e_1e_2$ no es un múltiplo escalar de 1.

PROPOSICIÓN 3.10. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y q una forma cuadrática no degenerada. Si $x \in \Gamma(V,q)$, entonces $N(x) \in \mathbb{K}^* \cdot 1$.*

DEMOSTRACIÓN.- Si $x \in \Gamma(V,q)$ se tiene

$$t(\alpha(x)vx^{-1}) \quad = \quad \alpha(x)vx^{-1}$$

entonces,

$$t(x)^{-1}vt(\alpha(x)) = \alpha(x)vx^{-1}$$

luego,

$$\begin{aligned} v &= t(x)\alpha(x)vx^{-1}t(\alpha(x))^{-1} \\ &= \alpha(\alpha \circ t(x)x)v(\alpha \circ t(x)x)^{-1} \end{aligned}$$

de donde $\bar{x}x \in ker\rho$.

Como $\bar{x} = \alpha(t(x)) \in \Gamma(V,q)$ se tiene que:

$$N(x) = x\bar{x} = \alpha \circ t(\alpha \circ t(x))(\alpha \circ t(x)) = \bar{\bar{x}}\bar{x} \in ker\rho.$$

□

COROLARIO 3.3. *La norma restringida al grupo* $\Gamma(V,q)$, $N:\Gamma(V,q)\to\mathbb{K}^*\cdot 1$, *es un homomorfismo y* $N(\alpha(x))=N(x)$ *para todo* $x\in\Gamma(V,q)$.

DEMOSTRACIÓN.-Vemos que para $x,y\in\Gamma(V,q)$, por la proposición anterior se tiene:

$$\begin{aligned} N(xy) &= xy\overline{xy} \\ &= xyt\circ\alpha(xy) \\ &= xyt\circ\alpha(y)t\circ\alpha(x) \\ &= xy\bar{y}\bar{x} \\ &= xN(y)\bar{x} \\ &= N(x)N(y). \end{aligned}$$

De la misma forma:

$$N(\alpha(x))=\alpha(x)\overline{\alpha(x)}=\alpha(x)\alpha\circ t(\alpha(x))=\alpha(x)\alpha(\bar{x})=\alpha(N(x))=N(x).$$

□

A continuación haremos uso del siguiente Teorema que lo presentamos sin demostración, la demostración puede encontrarse en [4], pág. 77.

TEOREMA 3.1. *(de Cartan-Diudonne) Sea* V *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial de dimensión finita y* q *una forma cuadrática no degenerada. Todo elemento del grupo ortogonal* $f\in O(V,q)$, *puede ser escrito como el producto de* k *reflexiones,*

$$f=s_1\circ s_2\circ\ldots\circ s_k$$

donde $k\le dimV$ *y* $O(V,q)=\{T\in GL(V):q(Tv)=q(v),\forall v\in V\}$.

COROLARIO 3.4. *La imágen de la representación adjunta torcida es el grupo de las aplicaciones ortogonales, o sea,* $\rho(\Gamma(V,q))=O(V,q)$.

DEMOSTRACIÓN.- Observemos que si $x\in\Gamma(V,q)$ y $v\in V$, con $q(v)\neq 0$, por el Corolario 3.3,

$$N(\rho_x(v))=N(\alpha(x)vx^{-1})=N(x)N(v)N(x)^{-1}=N(v),\forall v\in V\ \ y\ \ x\in\Gamma(v),$$

de donde, $q(\rho_x(v)) = q(v)$, mostrando que $\rho_x \in O(V,q)$ (pues para $v \in V$, sabemos que $N(v) = -q(v)\cdot 1$.
Ahora, si $f \in O(V,q)$, como q es no degenerada, por el Teorema de Cartan-Dieudonné,

$$f = s_1 \circ s_2 \circ ... \circ s_k.$$

También por ser q no degenerada, $V' := \{v \in V : q(v) \neq 0\}$ es no vacío, y por una proposición anterior sabemos que $V' \subset \Gamma(V,q)$.
Así podemos considerar el vector no nulo $w_j \in V'$ ortogonal al hiperplano sobre el cual está definido s_j, obteniendo

$$\rho(w_j) = s_j.$$

En consecuencia, notando que para $x_1, ...x_r \in Cl(V,q)$ se tiene

$$\rho_{x_1...x_r}(v) = \alpha(x_1...x_r)v(x_1...x_r)^{-1} = \rho_{x_1} \circ ... \circ \rho_{x_r}(v),\ para\ todo\ v \in V,$$

se sigue

$$f = \rho_{w_1...w_k}, w_j \in \Gamma(V,q),$$

concluyendo la demostración. □

OBSERVACIÓN.- Así, tenemos la siguiente secuencia exacta

$$1 \to \mathbb{K}^* \cdot 1 \hookrightarrow \Gamma(V,q) \xrightarrow{\rho} O(V,q) \to 1$$

Así, finalizamos la sección obteniendo que la representación adjunta torcida restringida a los grupos Pin(V,q) y Spin(V,q) son homomorfismos sobreyectivos, respectivamente, sobre el grupo ortogonal, O(V,q), y el grupo ortogonal especial,

$$\text{SO(V,q)}=\{T \in O(V,q); det(T) = 1\}$$

que nos permitirá demostrar que tales grupos son recubrimientos duplos.

PROPOSICIÓN 3.11. *Las restricciones de la representación adjunta torcida ρ a los grupos espinores, $\rho : Pin(V,q) \to O(V,q)$ y $\rho : Spin(V,q) \to SO(V,q)$, son homomorfismos sobreyectivos de grupos.*

DEMOSTRACIÓN.- Del Corolario 2.4 tenemos que $\rho(\Gamma(V,q)) = O(V,q)$, en la demostración de este podemos tomar w_i unitario, $u_j = \frac{w_j}{|q(w_j)|}$, y obtenemos que $u_1 ... u_j \in Pin(V,q)$, pues $N(u_j) = \pm 1$, y así, para cualquier $f \in O(V,q)$

$$f = \rho_{u_1 ... u_k},$$

mostrando la sobreyectividad de $\rho \mid_{Pin(V,q)}$.
Ahora, supongamos por el absurdo que $\rho(Spin(V,q)) \neq SO(V,q)$.
Entonces existe $f \in O(V.q)/SO(V,q)$ tal que $\rho_x = f$ para algún $x \in Spin(V,q)$.
Notemos que escogiendo una base $\{e_1, ..., e_n\}$ de V con $v = e_1$ y $\varphi(v, e_j) = 0$ para $j > 2$, se tiene $\rho_v(e_1) = -e_1$ y $\rho_v(e_j) = e_j, j \geq 2$.
Con eso $det \rho_v = -1$, y en consecuencia,

$$\text{SO(V,q)=}\{s_1 \circ ... \circ s_k\text{:k es par }\}$$

De ahí, f puede ser escrita como $f = \rho_{w_1 ... w_{2k+1}}$, y así $\rho_{w_1 ... w_{2k+1}} = \rho_x$, lo que implica $x^{-1} w_1 ... w_{2k+1} \in \mathbb{K}^* \cdot 1$.
De esa forma, para algún $\lambda \in \mathbb{K}^*$,

$$x = \frac{1}{\lambda} w_1 ... w_{2k+1}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \frac{1}{\lambda} \alpha(w_1) ... \alpha(w_{2k+1}) \\ &= \frac{1}{\lambda} (-1)^{2k+1} w_1 ... w_{2k+1} \\ &= -x, \end{aligned}$$

lo que es absurdo, pues $x \in Spin(V,q)$. Por tanto, $\rho : Spin(V,q) \to SO(V,q)$ es sobreyectiva. $\square$

CAPÍTULO 4

Grupos de Lie y sus Álgebras de Lie. Subgrupos de Lie

4.1. Grupos y Álgebras de Lie

El objetivo de este capítulo es introducir los conceptos de grupos de Lie y sus álgebras de Lie. La álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de un grupo de Lie G es definida como el subespacio de los campos invariantes (a izquierda o a derecha), con el corchete dado por el corchete de Lie de los campos de vectores. Los flujos de los campos invariantes establecen la aplicación exponencial exp:$\mathfrak{g} \to G$, que es la principal ligazón entre $\mathfrak{g}$ y G.

4.1.1. Definiciones y Ejemplos

DEFINICIÓN 4.1. *Un grupo de Lie es un grupo G provisto de una estructura diferenciable de modo que las funciones*

$$(g, h) \in G \times G \overset{p}{\mapsto} gh \in G$$

$$g \in G \overset{i}{\mapsto} g^{-1} \in G$$

son diferenciables, considerando en $G \times G$ la estructura de variedad producto.

OBSERVACIONES.-
1.- El elemento neutro de G será denotado, como es usual, por 1.
2.- La exigencia de que la operación de grupo y la inversión sean diferenciables puede ser sustituida por que

$$(g,h) \in G \times G \mapsto gh^{-1} \in G$$

sea diferenciable.
Tanto la estructura de variedad diferenciable de G, como la diferenciabilidad de p e i presuponen un grado de diferenciabilidad C^k, $1 < k < \omega$. Para desarrollar buena parte de la teoría es necesario tomar apenas derivadas de primer orden en G y en el fibrado tangente TG, y suponer que G, p e i son de clase C^2. De cualquier manera se asume que G es de clase C^∞ asi como el producto p y la inversión i, lo que permite tomar libremente derivadas de cualquier orden.

DEFINICIÓN 4.2. *Dado $g \in G$, las traslaciones a izquierda y a derecha $E_g : G \to G$ y $D_g : G \to G$, son definidas respectivamente por $E_g(h) = gh$ y $D_g(h) = hg$.*
Las aplicaciones E_g y D_g son diferenciables, pues $E_g = p \circ s_{g,1}$ y $D_g = p \circ s_{g,2}$ donde $s_{g,1}(h) = (g,h)$ y $s_{g,2}(h) = (h,g)$ son aplicaciones diferenciables $G \to G \times G$. En realidad, ambas traslaciones son difeomorfismos, ya que $E_g \circ E_{g^{-1}} = D_g \circ D_{g^{-1}} = id$. De la misma forma, los automorfismos internos $C_g = E_g \circ D_{g^{-1}}, g \in G$, son diferenciables.

EJEMPLO 4.1. Sean G y H grupos de Lie. Entonces, el producto cartesiano $G \times H$ admite la estructura de variedad producto y la estructura de grupo producto $(g_1,h_1)(g_2,h_2) = (g_1g_2, h_1h_2)$, haciendo de $G \times H$ un grupo de Lie. De hecho la diferenciabilidad del producto es consecuencia de que cada coordenada es diferenciable. De manera más general, si $G_i, i = 1, ..., k$, es un número finito de grupos de Lie entonces el producto directo $G_1 \times ... \times G_k$ es un grupo de Lie con las estructuras producto, del grupo y de la variedad diferenciable.

EJEMPLO 4.2. Sea E un espacio vectorial real de dimensión finita y normado. Esto define, una estructura diferenciable en E a travéz de una única carta (E, ϕ), en que $\phi : E \to \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo lineal.
Considerando la operación

$$(u,v) \in E \times E \to u + v \in E,$$

vemos que E es un grupo de Lie abeliano.

EJEMPLO 4.3. En $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}/\{0\}$, considere la estructura de subvariedad abierta y la de grupo con la operación de multiplicación. Eso hace de $\mathbb{R}^*$ un grupo de Lie. Lo mismo vale para $\mathbb{C}^*$ y $\mathbb{H}^*$.

4.1.2. Álgebra de Lie de un grupo de Lie

El primer paso en el estudio de los grupos de Lie consiste en la construcción de las álgebras de Lie asociadas. Una álgebra de Lie consiste de un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ dotado de un producto (corchete) [,]:$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ que satisface las propiedades:

1.- El corchete [,] es bilineal, esto es, lineal en cada una de las variables.
2.- Antisimetría, esto es, [X,Y]=-[Y,X], para cada X,Y$\in \mathfrak{g}$.
3.- Identidad de Jacobi: para X,Y,Z$\in \mathfrak{g}$,

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]].$$

DEFINICIÓN 4.3. *Un subespacio $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ de una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es una subálgebra de Lie si es cerrado para el corchete. En ese caso $\mathfrak{h}$ es también una álgebra de Lie.*

Un ejemplo de álgebra de Lie es dado por el espacio vectorial de los campos de vectores sobre una variedad diferenciable (C^∞) dotado del corchete de Lie de campos de vectores. Otro ejemplo es el álgebra $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ formada por las matrices $n \times n$ con el corchete dado por el conmutador de matrices

$$[A, B] = AB - BA.$$

En seguida será definida la álgebra de Lie de un grupo de Lie G como una subálgebra de Lie de los campos de vectores sobre G, formada por campos invariantes en G.

DEFINICIÓN 4.4. *Sea G un grupo de Lie.Un campo de vectores X en G se dice*
- invariante a la derecha si para todo $g \in G$, $(D_g)_*X = X$. Esto es: $d(D_g)_h(X(h)) = X(hg)$ para todo $g, h \in G$.
- El campo de vectores X se dice invariante a la izquierda si para todo $g \in G$, $(E_g)_*X = X$, esto es; $d(E_g)_h(X(h)) = X(gh)$.

Los campos invariantes a la derecha o a la izquierda son completamente determinados por sus valores en el elemento neutro $1 \in G$, pues para todo $g \in G$ la condición de invarianza a la derecha, por ejemplo, implica que $X(g) = d(D_g)_1(X(1))$. Por tanto, cada elemento del espacio tangente T_1G determina un único campo invariante a la derecha y un único campo invariante a la izquierda.
Dado $A \in T_1G$ la notación A^d indica el campo invariante a la derecha tal que $A^d(1) = A$. Y A^e denota el campo invariante a la izquierda correspondiente. Explicitamente,

$$A^d(g) = d(D_g)_1(A) \quad A^e(g) = d(E_g)_1(A).$$

Denote por Inv^d el conjunto de los campos invariantes a la derecha. Este conjunto es un subespacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$) del espacio de todos los campos de vectores en G, ya que $(D_g)_*$ es una aplicación lineal sobre los campos de vectores. Análogamente, el conjunto Inv^e de los campos invariantes a la izquierda también es un subespacio vectorial (en general, diferente del subespacio de los campos invariantes a la derecha). Las aplicaciones $A \in T_1G \mapsto A^d \in Inv^d$ y $A \in T_1G \mapsto A^e \in Inv^e$ son isomorfismos entre los espacios vectoriales correspondientes, cuyas inversas son dadas por $X \in Inv^{d,e} \mapsto X(1) \in T_1G$.
La álgebra de Lie de un grupo de Lie es definida como cualquiera de los espacios de los campos invariantes Inv^d o Inv^e dotado con el corchete de Lie. El siguiente lema pone esto en términos precisos.

LEMA 4.1. *Sean X e Y campos invariantes a la derecha en un grupo de Lie G. Entonces, el corchete de Lie [X, Y] es invariante a la derecha. La misma afirmación vale para campos invariantes a la izquierda.*

DEMOSTRACIÓN.- Es consecuencia de la siquiente fórmula general: sean M una variedad, X,Y campos de vectores en M y ϕ un difeomorfismo en M. Entonces $\phi_*[X, Y] = [\phi_* X, \phi_* Y]$. Aplicando esta fórmula a $\phi = D_g (o\ E_g)$ y X,Y, campos invariantes, se llega a la invarianza del corchete. $\square$

Dicho de otra manera, los espacios Inv^d y Inv^e son subálgebras de Lie de la álgebra de Lie de todos los campos de vectores en G. En particular, ambos espacios vectoriales admiten estructuras de álgebra de Lie. La álgebra de Lie del grupo G es cualquiera de las álgebras de Lie Inv^d o Inv^e.
Los argumentos mencionados en seguida muestran que esas álgebras de Lie son, en esencia, las mismas, esto es, son isomorfas, no existiendo por tanto, ninguna ambiguedad en

la terminologia.

Através de los isomorfismos el corchete de Lie restringido a los subespacios de campos invariantes induce corchetes $[,]_d$ y $[,]_e$ en T_1G. Esos corchetes son dados, para $A, B \in T_1G$ por

$$[A, B]_d = [A^d, B^d](1)$$
$$[A, B]_e = [A^e, B^e](1)$$

El siguiente lema permite relacionarlos.

LEMA 4.2. *Sean $A \in T_1G$ y $i(g) = g^{-1}$ la inversa en G. Entonces,*

$$(i)_*(A^d) = (-A)^e \quad y \quad (i)_*(A^e) = (-A)^d.$$

En detalles:

$$(di)_{g^{-1}}(A^d(g^{-1})) = -A^e(g) \;\; y \;\; (di)_{g^{-1}}(A^e(g^{-1})) = -A^e(g).$$

DEMOSTRACIÓN.- Escriba $Y = (i)_*(A^d)$. Entonces,

$$(E_g)_*(Y) = (E_g)_*(i)_*(A^d).$$

Usando la regla de la cadena y la igualdad $E_g \circ i = i \circ D_{g^{-1}}$, se sigue que $(E_g)_*(Y) = (i \circ D_{g^{-1}})_*(A^d)$. Este segundo miembro es igual a $(i)_*(A^d) = Y$, por la regla de la cadena y por el hecho que A^d es invariante a la derecha. Por tanto, $(E_g)_*(Y) = Y$ y de ahí que Y es invariante a la izquierda. Ahora, $Y(1) = (di)_1(A^d(1))$. Más $A^d(1) = A$ y $(di)_1 = -id$, de ahí que Y(1)=-A, mostrando que $Y = (-A)^e$. La otra igualdad es probada de la misma manera. □

PROPOSICIÓN 4.1. *Sean $A, B \in T_1G$. Entonces, $[A, B]_d = -[A, B]_e$.*

DEMOSTRACIÓN.- Por definición $[A, B]_d = [A_d, B_d](1)$. Aplicando $di_1 = -id$ a esa igualdad, se obtiene:

$$-[A, B]_d = (di)_1[A, B]_d = (di)_1([A^d, B^d](1)).$$

Más, por el Lema 3.2 (y por la propiedad de homomorfismo de i_*):

$$i_*[A^d, B^d] = [i_*A^d, i_*B^d] = [A^e, B^e].$$

De ahí que

$$-[A,B]_d = [A^e, B^e](1) = [A,B]_e,$$

concluyendo la demostración. $\square$

Alterando un poco el punto de vista, esta proposición muestra que las estructuras de álgebra de Lie en T_1G inducidas por Inv^d y Inv^e son isomorfas, en el sentido en que existe una aplicación lineal invertible $L : T_1G \to T_1G$ tal que $L[A,B]_d = [LA, LB]_e$. De hecho, tome L=-id. Entonces, $L[A,B]_d = -[A,B]_d$ en tanto que $[LA, LB]_e = [A,B]_e$,por tanto -id es un isomorfismo. Visto también de otra manera, la proposición anterior muestra que la aplicación i_* define un isomorfismo entre Inv^d y Inv^e dotado del corchete de Lie de campos de vectores.

DEFINICIÓN 4.5. *La álgebra de Lie de G, denotada por $\mathfrak{g}$, es cualquiera de las álgebras de Lie isomorfas $Inv^d, Inv^e, (T_1G, [,]_d)$ o también $(T_1G, [,]_e)$.*

El isomorfismo entre $Inv^{d,e}$ y T_1G se refleja en la notación utilizada en la cual, $X \in \mathfrak{g}$ significa tanto un elemento de T_1G como un campo de vectores invariante.

4.1.3. La Aplicación Exponencial

La aplicación exponencial exp:$\mathfrak{g} \to G$ es el objeto central usado para transferir al grupo de Lie G propiedades de su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. La idea básica de su construcción es que, por definición los elementos de $\mathfrak{g}$ son ecuaciones diferenciales ordinarias en G (campos invariantes), que poseen flujos, los cuales son formados por difeomorfismos locales de G. Los elementos formadores de esos flujos se identifican naturalmente a elementos de G, permitiendo construir, a partir de $X \in \mathfrak{g}$, un subgrupo de G parametrizado por $t \in \mathbb{R}$ (subgrupo uniparamétrico). La aplicación exponencial es construida a partir de esos subgrupos.

PROPOSICIÓN 4.2. *Un campo invariante (a izquierda o a derecha) es completo.*

OBSERVACIÓN.- Sea $X \in Inv^d$. Denote por X_t su flujo. Entonces

$$X_t(hg) = X_t(h)g$$

en particular $X_t(g) = X_t(1)g$.
En efecto, tome $g, h \in G$ con $h \in domX_t$. Consideremos

$$\alpha(t) = X_t(h)g \ \ con \ \ \alpha(0) = X_0(h)g = hg$$

Por la regla de la cadena

$$\alpha'(t) = d(D_g)_{X_t(h)}X(X_t(h)) = X(X_t(h)g) = X(\alpha(t))$$

Por lo tanto, α es solución de $\frac{dg}{dt} = X(g)$ con condición inicial $\alpha(0) = hg$, esto es $\alpha(t) = X_t(hg)$.

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN.- Sea (α, ω) con $\alpha < 0, \omega > 0$ el intervalo común de las soluciones maximales $t \mapsto X_t(g), g \in G$.
Supongamos por absurdo que $\omega < \infty$. Defina las curvas

$$\begin{aligned} x(t) &= X_t(1), \quad t \in (\alpha, \infty) \\ y(t) &= X_{t-\frac{\omega}{2}}(X_{\omega/2}(1)), \quad t \in (\alpha + \omega/2, 3\omega/2) \end{aligned}$$

Ambas son soluciones de la ecuación diferencial $\frac{dg}{dt} = X(g)$. Como $x(\omega/2) = y(\omega/2) = X_{\omega/2}(1)$ la unicidad de las soluciones garantiza que $x(t) = y(t)$ en el intervalo $(\alpha+\omega/2, \omega)$. Por lo tanto, las dos curvas definen una solución $z(t)$ cuyo dominio de definición es la unión $(\alpha, 3\omega/2)$ de los intervalos de definición de x e y. Como z(0)=1, por la observación, eso contradice el hecho de que el intervalo de la solución maximal es (α, ω). De ahí $\omega = \infty$. De la misma forma $\alpha = -\infty$, concluyendo la demostración. $\square$

Ahora ya podemos definir la **aplicación exponencial** en un grupo de Lie.

DEFINICIÓN 4.6. *Sea $X \in T_1G$. Entonces, $expX = (X^d)_{t=1}(1) = (X^e)_{t=1}(1)$. Como es usual $expX$ también se escribe como e^X. Esto define una aplicación exp:$\mathfrak{g} \to G$ donde $\mathfrak{g}$=T_1G es la álgebra de Lie de G.*

La aplicación exponencial esta bien definida pues los campos invariantes son completos, de ahí que la solución de $\frac{dg}{dt} = X(g)$ que pasa por el elemento neutro cuando t=0 se extienda hasta t=1.

PROPOSICIÓN 4.3. *(Propiedades de la aplicación exponencial). Sea G un grupo de Lie y sea $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. a) La aplicación exponencial es una aplicación diferenciable de $\mathfrak{g}$ en G.*
b) Para cualquier $X \in \mathfrak{g}, F(t) = exptX$ es el subgrupo uniparamétrico de G generado por X.
c) Para cualquier $X \in \mathfrak{g}, exp(s+t)X = expsXexptX$.
d) El pushforward $exp_* : T_0\mathfrak{g} \to T_1G$ es la aplicación identidad con la identificación canónica de $T_0\mathfrak{g}$ y T_1G con $\mathfrak{g}$ misma.
e) La aplicación exponencial es un difeomorfismo de un entorno de 0 en $\mathfrak{g}$ en un enterno de 1 en G
f) El flujo X_t de un campo vectorial invariante a izquierda es dado por $X_t = D_{exptX}$ (multiplicación a derecha por $exptX$).

DEMOSTRACIÓN.- (Ver [8], pág. 523).

4.1.4. Homomorfismos

DEFINICIÓN 4.7. *Sean G y H grupos de Lie. Un homomorfismo $\phi : G \to H$ diferenciable entre G y H es llamado* **homomorfismo de grupos de Lie**. *La misma terminología se aplica a isomorfismos y automorfismos de grupos de Lie.*

OBSERVACIÓN.- Si ϕ es diferenciable en 1, entonces es diferenciable en $g, \forall g \in G$.
En efecto, como $\phi \circ D_g = D_{\phi(g)} \circ \phi$ y $\phi \circ E_g = E_{\phi(g)} \circ \phi$. De la primera de ellas se obtiene $\phi = D_{\phi(g)} \circ \phi \circ D_{g^{-1}}$, entonces:

$$\begin{aligned} d\phi_g &= d(D_{\phi(g)})_{\phi(D_{g^{-1}}(g))} \circ d\phi_{D_{g^{-1}}(g)} \circ d(D_{g^{-1}})_g \\ &= d(D_{\phi(g)})_{\phi(1)} \circ d\phi_1 \circ d(D_{g^{-1}})_g. \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 4.8. *Un homomorfismo entre las álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ es una aplicación lineal θ :$\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ que satisface $\theta[X, Y] = [\theta X, \theta Y]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.*

LEMA 4.3. *Sean G y H grupos de Lie con álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$, respectivamente. Sea $\phi : G \to H$ un homomorfismo diferenciable y tome $X \in \mathfrak{g}$. Entonces, para todo $g \in G$, vale*

$$d\phi_g(X^d(g)) = Y^d(\phi(g)) \quad d\phi_g(X^e(g)) = Y^e(\phi(g))$$

donde $Y = d\phi_1(X)$.

DEMOSTRACIÓN.- Como X^d es campo invariante a la derecha,

$$\begin{aligned} d\phi_g(X^d(g)) &= d\phi_g(d(D_g)_1 X^d(1)) \\ &= d\phi_g \circ d(D_g)_1(X) \\ &= d(\phi \circ D_g)_1(X) \\ &= d(D_{\phi(g)} \circ \phi)_1(X) \\ &= d(D_{\phi(g)})_{\phi(1)} \circ d\phi_1(X) \\ &= d(D_{\phi(g)})_{\phi(1)}(Y) \\ &= d(D_{\phi(g)})_1 Y^d(1) \\ &= Y^d(\phi(g)) \end{aligned}$$

La demostración para los campos invariantes a la izquierda es semejante. □

PROPOSICIÓN 4.4. *Sean G y H grupos de Lie con álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$, respectivamente. Sea $\phi : G \to H$ un homomorfismo diferenciable y tome $X \in \mathfrak{g}$. Entonces,*

$$\phi(exp(X)) = exp(d\phi_1(X))$$

DEMOSTRACIÓN.- Recordemos que dos campos de vectores X e Y se dicen ϕ-relacionados si $d\phi_x(X(x)) = Y(\phi(x))$. En ese caso las trayectorias de Y son las imágenes por ϕ de las trayectorias de X. Por el lema anterior los campos invariantes a derecha $X \in T_1G$ y $Y = d\phi_1(X)$ estan $\phi - relacionados$. Como las trayectorias son dadas por las respectivas exponenciales obtenemos lo deseado. □

PROPOSICIÓN 4.5. *Sean G y H grupos de Lie con álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$, respectivamente. Sea $\phi : G \to H$ un homomorfismo diferenciable. Entonces, $d\phi_1 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ es homomorfismo, esto es,*

$$d\phi_1[X, Y] = [d\phi_1 X, d\phi_1 Y]$$

con el corchete invariante a la derecha o a la izquierda.

DEMOSTRACIÓN.- Si $Z = d\phi_1(X)$ y $W = d\phi_1(Y)$ entonces X^d y Z^d asi como Y^d y W^d estan $\phi - relacionados$. Por tanto $[X, Y]^d$ y $[Z, W]^d$ estan $\phi - relacionados$. De ahí que

$$[Z, W]_d = [Z, W]^d(1) = d\phi_1[X, Y]_1$$

□

La proposición afirma que homomorfismos de grupos de Lie inducen homomorfismos de álgebras de Lie.

4.1.5. Representaciones Adjuntas

DEFINICIÓN 4.9. *Una representación es un homomorfismo de grupos de Lie en el que el contradominio es Gl(V).*

Sea $g \in G$ definimos el automorfismo interno $C_g(x) = gxg^{-1}$. Es claro que $C_g(1) = 1$, por tanto $d(C_g)_1$ es una aplicación lineal $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Dados $g, h \in G$,

$$C_g \circ C_h(x) = g(hxh^{-1})g^{-1} = C_{gh}(x)$$

lo que implica que

$$d(C_{gh})_1 = d(C_g \circ C_h)_1 = d(C_g)_{C_h(1)} \circ d(C_h)_1 = d(C_g)_1 \circ d(C_h)_1$$

De ahí que la aplicación $g \mapsto d(C_g)_1$ es una representación de G en $\mathfrak{g}$, esto es, un homomorfismo de G en Gl($\mathfrak{g}$).

DEFINICIÓN 4.10. *La* **representacion adjunta** *$Ad : G \to Gl(\mathfrak{g})$, de G en su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es definida por*

$$Ad(g) = d(C_g)_1 = d(E_g \circ D_{g^{-1}})_1 = d(D_{g^{-1}} \circ E_g)_1$$

$$= d(E_g)_{g^{-1}} \circ (dD_{g^{-1}})_1 = (dD_{g^{-1}})_g \circ (dE_g)_1$$

Esto también muestra que la representación adjunta es diferenciable.
Aplicando la Proposición 3.3 a $\phi = C_g$, obtenemos

$$C_g(expX) = exp((dC_g)_1(X))$$

esto es,

$$gexp(X)g^{-1} = exp(Ad(g)X).$$

DEFINICIÓN 4.11. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie. Su* **representacion adjunta***, es la aplicación ad:$\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ definida por*

$$ad(X)(Y) = [X, Y]$$

La identidad de Jacobi garantiza que la aplicación ad es de hecho un homomorfismo de álgebras de Lie, donde el corchete en $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ es dado por el conmutador.

PROPOSICIÓN 4.6. *Sea G un grupo de Lie, con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, con el corchete dado por los campos invariantes a la izquierda. Entonces, $d(Ad)_1(X) = ad_e(X)$ para todo $X \in \mathfrak{g}$ y vale la igualdad*

$$Ad(expX) = exp(ad_e(X)).$$

DEMOSTRACIÓN.- Sea X campo invariante a la izquierda. Entonces, $d(Ad)_1(X)$ es una aplicación lineal $\mathfrak{g}\rightarrow\mathfrak{g}$. Para calcularla, sea Y otro campo invariante a la izquierda.
Si $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} Ad(e^{tX})(Y) &= d(E_{e^{tX}} \circ D_{e^{-tX}})_1(Y) \\ &= d(D_{e^{-tX}})_{e^{tX}}(d(E_{e^{tX}})_1(Y)) \\ &= d(D_{e^{-tX}})_{e^{tX}}(Y(e^{tX})). \end{aligned}$$

Por la proposición 3.3 f) el flujo X_t de X es $X_t = D_{exp(tX)}$. Usando esto tenemos

$$Ad(e^tX)(Y) = d(X_{-t})_{X_t(1)}(Y(X_t(1))$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(Ad(e^{tX})(Y))_{|t=0} = \frac{d}{dt}(d(X_{-t})_{X_t(1)}(Y(X_t(1))_{|t=0}$$

Luego, como X y Y son campos invariantes a la izquierda

$$\frac{d}{dt}Ad(e^{tX})_{|t=0} = ad_e(X)$$

. □

4.2. Subgrupos de Lie y el Teorema de Cartan del subgrupo cerrado

4.2.1. Sobre Inmersiones y Subvariedades

Sean V y M variedades diferenciables. Una inmersión $f : V \rightarrow M$ es una aplicación diferenciable tal que para todo $x \in V, df_x$ es inyectiva. Cuando f es una inmersión inyectiva el conjunto $L = f(V)$ es llamado subvariedad inmersa de M. En ese caso la aplicación

$V \to f(V)$ es biyectiva, lo que permite transferir la estructura diferenciable de V a f(V), denominada estructura diferenciable intrinseca. La topología subyacente a esa estructura diferenciable es llamada topología intrínseca de la subvariedad.
Otra topología natural en la subvariedad inmersa $f(V) \subset M$ es la topología inducida, como subconjuto de M. Como la inmersión f es una aplicación contínua, todo abierto de la topología inducida es un abierto intrínseco. Sin embargo, en general, las dos topologías son diferentes. Cuando las topologías coinciden la subvariedad inmersa es llamada subvariedad regular o subvariedad sumergida. En ese caso la inmersión es llamada sumersión o inmersión regular.

El siguiente Teorema nos da una caracterización muy conocida de las subvariedades sumergidas.

TEOREMA 4.1. *Un subconjunto $N \subset M$ es una subvariedad sumergida si, y solamente si, la siguiente condición es satisfecha: para todo $x \in N$ existen i) una vecindad W de x en M; ii) vecindades del origen $V \subset \mathbb{R}^k$ y $U \subset \mathbb{R}^p$ y iii) un difeomorfismo $\psi : V \times U \to W$ tal que $\psi(V \times \{0\}) = W \cap N$.*

Finalizamos esta sección con la siguiente

DEFINICIÓN 4.12. *Una subvariedad inmersa L=f(V) se dice casi-regular (o casi-sumergida) si cumple:*
- Sea N un espacio topológico localmente conexo y $\phi : N \to M$ una aplicación continua. Suponga que ϕ asume valores en L. Entonces, $\phi : N \to L$ es contínua en relación a la topología intrínseca.

Si una aplicación contínua $\phi : N \to L$ asume valores en L entonces $\phi : N \to L$ es contínua en relación a la topología inducida. En particular, si esa topología coincide con la topología intrínseca entonces la condición de casi- regularidad es satisfecha. En otras palabras, toda subvariedad sumergida es casi-regular.
La propiedad de continuidad que aparece en la definición de subvariedad casi-regular se extiende a la diferenciabilidad en relación a la estructura diferenciable intrínseca de la subvariedad, como muestra el siguiente resultado.

TEOREMA 4.2. *Sea L una subvariedad casi-regular y N una variedad diferenciable conexa. Si una aplicación diferenciable $\phi : N \to M$ asume valores en L entonces ella es diferenciable en relación a la estructura diferenciable intrínseca en L.*

4.2.2. Subálgebras y Subgrupos de Lie

DEFINICIÓN 4.13. *Sea G un grupo de Lie y $H \subset G$ un subgrupo. Entonces, H es un* **subgrupo de Lie** *de G si H es una subvariedad inmersa de G tal que el producto $H \times H \to H$ es diferenciable en relación a la estructura intrinseca de H.*

Recordemos que una subvariedad inmersa de la variedad M es un subconjunto $N \subset M$, que admite una estructura de variedad tal que la inclusión $i : N \hookrightarrow M$ es una inmersión. La estructura diferenciable en N es la estructura intrínseca mencionada en la definición.

Un caso bastante general en el cual el producto $H \times H \to G$ es diferenciable es cuando H es una subvariedad inmersa casi-regular (o casi-sumergida). En ese caso la aplicación diferenciable $H \times H \to G$ asume valores en H y por tanto, es diferenciable en relación a la topología intrínseca(por la anterior proposición).

La siguiente proposición la presentamos sin demostración, la demostración puede encontrarse en [8], pág. 194.

PROPOSICIÓN 4.7. *Sea G un grupo de Lie, y supongamos que $H \subset G$ es un subgrupo que es también una subvariedad sumergida. Entonces H es un subgrupo de Lie cerrado de G.*

4.2.3. Teorema del Subgrupo Cerrado

Una de las más poderosas aplicaciones de la aplicación exponencial es mostrar que cada subconjunto cerrado de un grupo de Lie es en realidad un subgrupo de Lie regular.

PROPOSICIÓN 4.8. *Sea G un grupo de Lie y sea $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{g}$, existe una función diferenciable $Z : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ que satisface Z(0)=0, y tal que la siguiente identidad se cumple para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$:*

$$(exptX)(exptY) = expt(X + Y + Z(t))$$

DEMOSTRACIÓN.- Ya que la aplicación exponencial es un difeomorfismo en alguna vecindad del origen en $\mathfrak{g}$, existe algún $\epsilon > 0$ tal que la aplicación $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathfrak{g}$ definida por

$$\gamma(t) = exp^{-1}(exp\; tXexp\; tY)$$

es diferenciable. Claramente satisface $\gamma(0) = 0$ y

$$exp\; tXexp\; tY = exp\gamma(t).$$

Observe que podemos escribir γ como la composición

$$\mathbb{R} \overset{e_X \times e_Y}{\longrightarrow} G \times G \overset{m}{\longrightarrow} G \overset{exp^{-1}}{\longrightarrow} G$$

donde $e_X(t) = exp\; tX$ y $e_Y(t) = exptY$. Se puede verificar que $m_*(X,Y) = X + Y$ para $X, Y \in T_eG$, lo cual implica

$$\gamma'(0) = exp_*^{-1}(e'_X(0) + e'_Y(0)) = X + Y$$

Por lo tanto, la fórmula de Taylor de primer orden para γ es

$$\gamma(t) = t(X+Y) + tZ(t)$$

para alguna función diferenciable Z que satisface Z(0)=0. $\square$

PROPOSICIÓN 4.9. *(Teorema del Subgrupo Cerrado de Cartan).- Supongamos que G es un grupo de Lie y $H \subset G$ es un subgrupo que también es un subconjunto cerrado de G. Entonces H es un subgrupo de Lie regular.*

DEMOSTRACIÓN.- Por la proposición 4.7 , es suficiente probar que H es una subvariedad regular de G. Comenzamos identificando un subespacio de Lie(G) que resultará ser el álgebra de Lie de H. Sea $\mathfrak{g} = Lie(G)$, y defina un subconjunto $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ por

$$\mathfrak{h}=\{X \in \mathfrak{g} : exp\; tX \in H \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}$$

Necesitamos mostrar que $\mathfrak{h}$ es un subespacio vectorial de $\mathfrak{g}$. Es obvio por la definición de $\mathfrak{h}$ que si $X \in \mathfrak{h}$, entonces $tX \in \mathfrak{h}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Para ver que $\mathfrak{h}$ es cerrado bajo la adición de vectores, sean $X, Y \in \mathfrak{h}$ arbitrarios. Observe que la proposición anterior implica que para cualquier $t \in \mathbb{R}$ y cualquier entero n suficientemente grande

$$\left(exp\frac{t}{n}X\right)\left(exp\frac{t}{n}Y\right) = exp\frac{t}{n}\left(X + Y + Z(\frac{t}{n})\right)$$

con Z(0)=0, y una simple inducción usando la Proposición 3.8 da:

$$\begin{aligned}\left(\left(exp\frac{t}{n}X\right)\left(exp\frac{t}{n}Y\right)\right)^{n} &= \left(exp\frac{t}{n}\left(X+Y+Z(\frac{t}{n})\right)\right)^{n}\\ &= exp\ t\left(X+Y+Z(\frac{t}{n})\right)\end{aligned}$$

fijando t y tomando el límite cuando $n \to \infty$, obtenemos

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(exp\frac{t}{n}X\right)\left(exp\frac{t}{n}Y\right)\right)^{n} = expt(X+Y)$$

Ya que $exp\left(\frac{t}{n}X\right)$ y $exp\left(\frac{t}{n}Y\right)$ estan en H por suposición, y H es un subgrupo cerrado de G, esto muestra que expt(X+Y) esta en H para cada t. Así $X+Y \in \mathfrak{h}$, luego $\mathfrak{h}$ es un subespacio.

A continuación mostraremos que existe un entorno U del origen en $\mathfrak{g}$ en la que la aplicación exponencial de G es un difeomorfismo, y que tiene la propiedad:

$$exp(U\cap\mathfrak{h}) \quad = \quad (expU)\cap H \tag{4.1}$$

Esto nos permitirá construir una carta adaptada para H alrededor de la identidad, y entonces usaremos la traslación a izquierda para obtener una carta adaptada en una vecindad de cualquier punto de H.

Si U es un entorno de $0 \in \mathfrak{g}$ en la que exp es un difeomorfismo, entonces $exp\ (U\cap\mathfrak{h}) \subset (exp\ U)\cap H$ por definición de $\mathfrak{h}$. Así para hallar un entorno que satisfaga (4.1), todo lo que necesitamos hacer es probar que U puede ser elegido lo suficientemente pequeño para que $(exp\ U)\cap H \subset exp(U\cap\mathfrak{h})$. Supongamos que esto no es posible. Elija una base $E_1,...,E_k$ para $\mathfrak{h}$ y extiéndala a una base $E_1,...,E_k,E_{k+1},...,E_n$ para $\mathfrak{g}$. Sea $\mathfrak{e}$ el subespacio generado por $E_{k+1},...,E_n$, asi que $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{e}$ como espacios vectoriales. Entonces la aplicación $\Phi : \mathfrak{h}\oplus\mathfrak{e} \to G$ dada por $\Phi(X,Y) = exp(X)exp(Y)$ es un difeomorfismo en algun entorno de (0,0). Elija vecindades U_0 de 0 en $\mathfrak{g}$ y $\hat{\mathrm{U}}_0$ de (0,0) en $\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{e}$ tal que exp y Φ restringidas a U_0 y $\hat{\mathrm{U}}_0$ respectivamente son difeomorfismos en sus imágenes. Sea $\{U_i\}$ una base numerable de entornos para $\mathfrak{g}$ en 0 (por ejemplo una sucesión numerable de bolas cuyo radio tiende a cero). Si ponemos $V_i = exp(U_i)$ y $\hat{\mathrm{U}}_i = \Phi^{-1}(V_i)$ entonces $\{V_i\}$ y $\{\hat{\mathrm{U}}_i\}$ son bases de entornos de G en e y $\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{e}$ en (0,0), respectivamente. Descartando un número finito de términos en el comienzo de la sucesión, podemos asumir que $U_i \subset U_0$ y $\hat{\mathrm{U}}_i \subset \hat{\mathrm{U}}_0$ para todo i.

Nuestra suposición implica que para cada i, existe $h_i \in (exp(U_i) \cap H$ tal que $h_i \notin exp(U_i \cap \mathfrak{h})$. Esto significa que $h_i = exp(Z_i)$ para algún $Z_i \in U_i$. Ya que $exp(U_i) = \Phi(\hat{\mathrm{U}}_i)$, podemos también escribir

$$h_i = exp(X_i)exp(Y_i)$$

para algún $(X_i, Y_i) \in \hat{\mathrm{U}}_i$. Si Y_i fuera cero, entonces tendríamos $exp(Z_i) = exp(X_i) \in exp(\mathfrak{h})$. Pero ya que exp es inyectiva sobre U_0, esto implica $X_i = Z_i \in U_i \cap \mathfrak{h}$, lo cual contradice nuestra suposición de que $h_i \notin exp(U_i \cap \mathfrak{h})$. Puesto que $\{\hat{\mathrm{U}}_i\}$ es una base de entornos, $Y_i \to 0$ cuando $i \to \infty$. Observe que $exp(X_i) \in H$ por definición de $\mathfrak{h}$, asi se sigue $exp(Y_i) = (exp(X_i))^{-1}h_i \in H$ también.

Elija un producto interno sobre $\mathfrak{e}$ y sea $|\cdot|$ la norma asociada con este producto interno. Si definimos $c_i = |Y_i|$, de donde tenemos que $c_i \to 0$ cuando $i \to \infty$. La sucesión $c_i^{-1}Y_i$ está sobre la esfera unitaria en $\mathfrak{e}$, así sustituyendo esta sucesión por una subsucesión, podemos asumir que $c_i^{-1}Y_i \to Y \in \mathfrak{e}$,con $|Y| = 1$ por continuidad. En particular, $Y \neq 0$. Mostraremos que $exp(tY) \in H, \forall t \in \mathbb{R}$, lo cual implica que $Y \in \mathfrak{h}$. Puesto que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{e}$=$\{0\}$, esto es una contradicción.

Sea $t \in \mathbb{R}$ arbitrario, y para cada i, sea n_i el entero más grande menor o igual que $\frac{t}{c_i}$. Entonces

$$|n_i - \frac{t}{c_i} \leq 1,$$

lo cual implica

$$|n_i c_i - t| \leq c_i \to 0,$$

así $n_i c_i \to t$. Así,

$$n_i Y_i = (n_i c_i)(c_i^{-1}Y_i) \to tY$$

luego $expn_iY_i \to exptY$ por continuidad. Pero $expn_iY_i = (expY_i)^{n_i} \in H$ así el hecho de que H es cerrado implica $exptY \in H$. Esto completa la prueba de la existencia de U satisfaciendo (4.1).

Escojamos cualquier isomorfismo lineal $E : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}^m$ que envia $\mathfrak{h}$ a $\mathbb{R}^k$. La aplicación compuesta $\phi = E \circ exp^{-1} : exp(U) \to \mathbb{R}^m$ es entonces una carta diferenciable para G, y $\phi((exp(U) \cap H) = E(U \cap \mathfrak{h})$ es la carta adaptada obtenida poniendo las últimas m-k coordenadas igual a cero. Mas aún, si $h \in H$ es arbitrario, la aplicacion traslacion a izquierda E_h es un difeomorfismo de $exp(U)$ a una vecindad de h. Puesto que H es un subgrupo, $E_h(H) = H$, y así:

$$E_h((exp(U) \cap H) = E_h(exp(U)) \cap H,$$

y se ve facilmente que $\phi \circ E_h^{-1}$ es una carta adaptada para H en una vecindad de h. Así H es una subvariedad regular de G, de donde es un subgrupo de Lie. $\square$

CAPÍTULO 5

El Spin como grupo de Lie

5.1. El Spin como grupo de Lie

En esta sección mostraremos que Spin(n) es un grupo de Lie y determinaremos sus álgebras de Lie. Veremos que Spin(n) es un grupo cerrado en Pin(n), que a su vez es un subgrupo cerrado en Γ_n, que también es un subgrupo cerrado de Cl_n^*, y por fin este es un grupo de Lie, porque es un abierto en Cl_n.

Iniciemos considerando un $\mathbb{R}$-espacio vectorial n-dimensiona V, y supongamos que la forma cuadrática Φ sea no degenerada en V. Podemos escoger una base $\{e_1, ..., e_2\}$ para V ([4], pág. 64), de forma que

$$q(x) = x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_{p+q}^2,$$

donde p+q=n y $0 \leqslant p \leqslant n$. Denotamos por $\Phi_{p,q}$ a la forma cuadrática correspondiente al par (p,q), llamado signatura de $\Phi_{p,q}$.
Denotamos a las álgebras de Clifford asociadas a las formas cuadráticas que tienen esa signatura por $Cl_{p,q}$, sus grupos de Clifford por $\Gamma_{p,q}$, y sus grupos espinores por, $pin_{p,q}$ y $spin_{p,q}$.

Cuando $p = 0$, la notación es Cl_n y

$$N(x) \quad = \quad x_1^2 + ... + x_n^2, para \ \ todo \ \ x \in \Gamma_n, \tag{5.1}$$

lo que nos permite definir los grupos Pin_n y $Spin_n$ de la siguiente forma, que es exactamente la Definición 2.6 en tales álgebras:

DEFINICIÓN 5.1. *Pin_n es el núcleo de $N : \Gamma_n \to \mathbb{R}^* \cdot 1$, para $n \geqslant 1$, y $Spin_n$ es el subgrupo de Pin_n que es la imágen inversa de SO_n sobre $\rho : Pin_n \to O_n$, para $n \geqslant 1$.*

Observemos que $Cl_{p,q}$ tiene estructura topológica y diferenciable. En efecto, de la proposición 2.7 sabemos que $Cl_{p,q}$ tiene dimensión 2^{p+q}. De ahí, si $\{e_1, ...e_{2^{p+q}}\}$ es una base de $Cl_{p,q}$ como espacio vectorial, tenemos el isomorfismo $J : \mathbb{R}^{2^{p+q}} \to Cl_{p,q}$ dado por

$$J(\lambda_1, ...\lambda_{2^{p+q}}) = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_{2^{p+q}} e_{2^{p+q}}$$

Asi $Cl_{p,q}$ es un espacio topológico como espacio vectorial isomorfo a $\mathbb{R}^{2^{p+q}}$, una vez que siendo $R^{2^{p+q}}$ un espacio métrico completo, podemos definir una norma en $Cl_{p,q}$ fijando

$$\parallel J(x) \parallel := \parallel x \parallel,$$

donde $\|\|$ es la norma euclidiana, que sin importar la elección de la base tenemos la misma topología, ya que cualesquiera dos normas son equivalentes. Además de eso $Cl_{p,q}$ hereda la estructura diferenciable de $\mathbb{R}^{2^{p+q}}$.

De ahí definiendo $\lambda_x(y) = xy$, para $x, y \in Cl_{p,q}$, se sigue que la función $f : Cl_{p,q} \to Cl_{p,q}$, dada por

$$x \mapsto det(\lambda_x)$$

es continua, siendo polinomial en $Cl_{p,q}$.

En consecuencia, como para cada $x \in Cl^*_{p,q}$ se obtiene λ_x invertible, y de esa forma $f(x) \neq 0$, concluimos que $Cl^*_{p,q}$ es abierto en $Cl_{p,q}$. Luego, tiene la estructura topológica y diferenciable de $Cl_{p,q}$, obtenida con el isomorfismo J. Y por tanto, el grupo de las unidades de Clifford $Cl^*_{p,q}$ es un grupo de Lie.
En particular, Cl^*_n es un grupo de Lie y veamos que Γ_n es cerrado en Cl^*_n.

PROPOSICIÓN 5.1. *El grupo Clifford Γ_n es cerrado en Cl_n^*.*

DEMOSTRACION.- Iniciemos observando que el homomorfismo $\varphi : Cl_n^* \to GL(Cl_n)$ definido por $x \mapsto \varphi_x(y) := \alpha(x)yx^{-1}$ es contínuo, puesto que φ_x es un isomorfismo lineal, para cada $x \in Cl_n^*$, pues $\varphi_x^{-1} = \varphi_{x^{-1}}$, y es polinomial en Cl_n. Entonces la acción asociada $\mu_\varphi : Cl_n^* \times Cl_n \to Cl_n, \mu_\varphi(x,y) = \varphi_x(y)$, también es contínua. Y ya que $\mathbb{R}^n \subset Cl_n$ y $\mathbb{R}^n$ es un $\mathbb{R}$-subespacio vectorial, es cerrado y el estabilizador de $\mathbb{R}^n$ que está dado por $Cl_n^*, \mathbb{R}^n_{Cl_n^*} := \{x \in Cl_n^*; \varphi_x(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n\}$, es cerrado en Cl_n^* (Ver [1], pag 38). Por tanto, por la Definición 2.5, Γ_n es cerrado en Cl_n^*, como queríamos mostrar. □

PROPOSICIÓN 5.2. *El grupo $Spin_n$ es un grupo de Lie.*

DEMOSTRACIÓN.- Por la Proposición 4.9 el grupo Clillford Γ_n es un grupo de Lie. Y de esa forma, la aplicación norma restringida a este, $N : \Gamma_n \to \mathbb{R}$, es un homomorfismo de grupos contínuo, conforme el Corolario 3.3 y, en (5.1), tenemos $N(x) = \| x \|^2$.
De ahí, de la Definición 5.1 se sigue que Pin_n es cerrado en Γ_n, y en consecuencia, es también un grupo de Lie. Con eso tenemos que el automorfismo canónico restringido a Pin_n, $\alpha : Pin_n \to Pin_n$, es contínuo. Y como $Spin_n = \alpha(Pin_n \cap Cl_n^0)$, obtenemos que este es cerrado en Pin_n, con la topología relativa. Luego, $Spin_n$ es un grupo de Lie. □

5.1.1. La Álgebra de Lie de Spin

Consideremos el grupo multiplicativo de los elementos inversibles en el álgebra de Clifford, el cual está defido por:

$$Cl^*(V,q) = \{x \in Cl(V,q) : \exists x^{-1} \text{ con } xx^{-1} = x^{-1}x = 1\}$$

Cuando dimV=$n < \infty$ y $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$, este es un grupo de Lie como acabamos de ver. El álgebra de Lie asociada es $\mathfrak{cl}(V,q) = Cl(V,q)$ con corchete de Lie dado por:

$$[x,y] = xy - yx$$

PROPOSICIÓN 5.3. *La subálgebra de Lie de $(\mathfrak{cl}_n, [,])$ correspondiente al subgrupo $Spin_n \subset Cl_n^*$ es*

$$\mathfrak{spin}_n = \wedge^2 \mathbb{R}^n.$$

En particular $\wedge^2\mathbb{R}^n$ es cerrado para la operación corchete.

DEMOSTRACIÓN.- La subálgebra de Lie $\mathfrak{spin}_n$ es el subespacio vectorial de Cl_n generado por los vectores tangentes a la subvariedad $Spin_n$ en 1. Fijando una base ortonormal $e_1, ...e_n$ de $\mathbb{R}^n$ y considerando para cada par $i < j$, la curva:

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= (e_i cos\ t + e_j sen\ t) \cdot (e_i cos\ t - e_j sen\ t) \\ &= (cos^2 t - sen^2 t) + 2e_ie_j sen\ t\ cos\ t \\ &= cos(2t) + sen(2t)e_ie_j.\end{aligned}$$

Esta curva esta en $Spin_n$ por definición de $Spin_n$, y su vector tangente en $\gamma(0) = 1$ es $2e_ie_j$. Por tanto, $\mathfrak{spin}_n$ contiene al subespacio vectorial $span_{\mathbb{R}}\{e_ie_j\}_{i<j}{=}\wedge^2\mathbb{R}^n$. Puesto que $dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{spin}_n) = \frac{n(n-1)}{2}$, concluimos que son iguales. $\square$

OBSERVACIÓN.- Nótese que $dim(Spin(n)) = dim(SO(n)) = \frac{n(n-1)}{2}$.

5.2. Aplicaciones

5.2.1. Nociones de Topología Algebraica

Recordemos algunos conceptos de Topología Algebraica que son importantes para esta sección pues permite comprender que los grupos $Pin_{p,q}$ y $Spin_{p,q}$ son recubrimientos dobles.

DEFINICIÓN 5.2. *Sean X e Y espacios topológicos. Una aplicación de recubrimiento es una aplicación $p : Y \to X$ sobreyectiva contínua en que todo punto $x \in X$ tiene un abierto $U \subset X$, con $x \in U$, donde $p^{-1}(U)$ es la unión disjunta de abiertos en Y, $p^{-1}(U) = \cup_\alpha V_\alpha$, y $p : V_\alpha \to U$ es un homeomorfismo, esto es, una biyección contínua con inversa contínua.*

Decimos que U, llamada una vecindad distinguida, es uniformemente cubierto por p, Y es un espacio de recubrimiento de X, y para cada $x \in X, p^{-1}(x)$ es una fibra sobre x. Si X fuera uniformemente cubierto por p, esto es, $Y = p^{-1}(X) = \cup_\alpha V_\alpha$ con V_α homeomorfo a X, el recubrimiento p es llamado trivial.

DEFINICIÓN 5.3. *Cuando cada fibra, $p^{-1}(x)$, del espacio topológico X, tiene la misma cardinalidad finita n, llamada número de hojas del recubrimiento, para todo $x \in X$, decimos que p es un n-recubrimiento o un recubrimiento de n hojas.*

Cuando el espacio X es conexo, por ejemplo, sus aplicaciones de recubrimiento son siempre n-recubrimientos, como muestra la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 5.4. *Si X, a veces llamado base, de un recubrimiento $p : Y \to X$ es conexo, entonces todas las fibras $p^{-1}(x), x \in X$, poseen el mismo número de hojas.*

DEMOSTRACIÓN.- Observemos inicialmente, que para todo x de una vecindad distinguida U el número cardinal de la fibra $p^{-1}(x)$ es el mismo, pues como $p^{-1}(U) = \cup_\alpha V_\alpha$ y $p\mid_{V_\alpha}$ es un homeomorfismo, cada V_α tiene un único punto de $p^{-1}(x)$, de lo contrario, esta no seria inyectiva. Así, el número de hojas para cada x en una vecindad distinguida es el número de componentes V_α de esta.
Ahora, dado cualquier punto x_0 de X, podemos definir el conjunto

$$A=\{x \in X : \text{la cardinalidad de } p^{-1}(x) \text{ es la misma de } p^{-1}(x_0)\}$$

Siendo este abierto, pues si $x \in A$, por lo que fué observado, $U \subset A$, tenemos una descomposición de X como una unión disjunta de abiertos, en los cuales el número de hojas de $p^{-1}(x)$ es constante. Luego, como X es conexo, se tiene un abierto único, y por tanto, todas las fibras $p^{-1}(x)$ tienen el mismo número de hojas como queriamos probar. □

5.2.2. Los Recubrimientos duplos en las Álgebras de Clifford Reales

Consideremos los conceptos presentados en la anterior sección, mostraremos que $Pin_{p,q}$ y $Spin_{p,q}$ son recubrimientos duplos, y en particular, Pin_n y $Spin_n$ lo son. Así, recordemos lo que es una acción de un grupo en un espacio topológico, pues el camino que seguiremos muestra tales recubrimientos como resultado de la acción del grupo $\mathbb{Z}_2$.

DEFINICIÓN 5.4. *Una acción de un grupo G en un espacio topológico Y, a la izquierda, es una aplicación $G \times Y \to Y$, dada por $(g, y) \mapsto gy$, satisfaciendo:*
i)Para todo $g, h \in G$ e $y \in Y, (gh)y = g(hy)$;
ii) Para todo $y \in Y$ y $e \in G$ la unidad en G, $cy = y$;
iii) Para todo $g \in G$, la aplicación $y \mapsto gy$ es un homeomorfismo de Y.

Con tal acción podemos definir una relación de equivalencia en Y, donde para $x, y \in Y$, $x \sim y$ si, y solamente si, $y = gx$, para algún $g \in G$. Asi podemos obtener el conjunto Y/G de las clases de equivalencia Gx=$\{gx : g \in G\}$ de cualquier $x \in Y$, que llamamos la órbita de x, y la aplicación proyección

$$p : Y \to Y/G$$

$$y \mapsto Gy$$

Dotandolo con la topología cociente, esto es, un subconjunto U en Y/G es abierto, si $p^{-1}(U)$ fuera abierto en Y, tenemos el espacio cociente Y/G.
Además de eso, dado un subconjunto V de Y y cualquier $g \in G$ definimos el conjunto gV=$\{gy : y \in V\}$ y decimos que g actúa uniformemente en Y, si para todo $y \in Y$ existe un subconjunto abierto V, $y \in V$, tal que $gV \cap hV = \phi$, para cualesquiera dos elementos distintos $g, h \in G$. Así tenemos el siguiente resultado fundamental para lo que deseamos mostrar.

PROPOSICIÓN 5.5. *Si g actúa uniformemente en el espacio Y, entonces la aplicación proyección $p : Y \to Y/G$ es una aplicación de recubrimiento.*

DEMOSTRACIÓN.- Como p es sobreyectiva, por construcción, es contínua, por la definición de la topología cociente, nos resta mostrar que para cada punto $x = p(y)$ en Y/G existe una vecindad distinguida.
Para eso observemos que p es una aplicación abierta, una vez que, si V es un abierto en Y tenemos que p(V) es abierto en Y/g, pues $p^{-1}(p(V)) = \bigcup gV$ y gV es abierto. Esto último por el hecho de $y \mapsto gy$ es un homeomorfismo, conforme la definición 3.7, y lo anterior, si $y \in p^{-1}(p(V))$, entonces $p(y) = p(v)$, para algun $v \in V$, implicando que $Gy = Gv \Rightarrow hy = gv$, para algun $h, g \in G$, donde $y \in \bigcup gV$, y para la inclusión inversa si $y \in \bigcup gV$, se tiene $y = gv$, para algún $g \in G$, lo que implica $p(y) = p(gv) = Ggv = Gv = p(v) \Rightarrow y \in p^{-1}(p(V))$.
Así, como G actúa uniformemente en Y, tomamos un abierto $V, y \in V$, y existe un abierto $U = p(V)$, para todo $x \in Y/G$. Y como $gV \cap hV = \varphi$, para $g \neq h \in G$, se tiene $p^{-1}(U) = p^{-1}(p(V)) = \bigcup gV$.
Y para cuncluir, tenemos que $\rho_{gV} : gV \to p(V)$ es biyectiva, por el hecho de que $y \sim gy$, implicando que $p(gy) = p(y)$, y $Ghy_1 = Ggy_2 \Rightarrow hgy_1 = gy_2$, para algún $h \in G$, de donde

$gV = ghV$, que siendo la acción uniforme, $h = e$. Por tanto, como p es abierta, es un homeomorfismo. □

En fin, podemos presentar $Pin_{p,q}$ y $Spin_{p,q}$ como recubrimientos no triviales, excepto cuando $p = q = 1$, y duplos, pues $SO_{p,q}$ tiene dos componentes conexas y $(\rho\mid_{Spin_{p,q}})^{-1}(id) = Z_2$, ya que

$$ker(\rho\mid_{Spin_{p,q}}) = ker\rho \cap Spin_{p,q} = R^* \cdot 1 \cap Spin_{p,q} = \{\text{-}1{,}1\},$$

y $O_{p,q} = SO_{p,q} \cup T \cdot SO_{p,q}$ con $T \in O_{p,q}/SO_{p,q}$.

PROPOSICIÓN 5.6. *Los grupos $Pin_{p,q}$ y $Spin_{p,q}$ son recubrimientos dobles de $O_{p,q}$ y $SO_{p,q}$ respectivamente, para $p, q \geq 0$. Además de eso, son no triviales si $(p, q) \neq (1, 1)$.*

DEMOSTRACIÓN.- Observando que, como $\rho\mid_{Pin_{p,q}}$ es un homomorfismo sobreyectivo, conforme el teorema 1,28, y como $\mathbb{Z}_2$ es su núcleo, $O_{p,q} \simeq \frac{Pin_{p,q}}{\mathbb{Z}_2}$, donde $\frac{Pin_{p,q}}{\mathbb{Z}_2}$ representa el grupo cociente dado por la relación $x \sim y \Rightarrow y^{-1}x \in \mathbb{Z}_2$, $x, y \in Pin_{p,q}$.
Ahora, si tomamos la acción natural de $\mathbb{Z}_2$ en $Pin_{p,q}, \mathbb{Z}_2 \times Pin_{p,q} \to Pin_{p,q}$, dada por $(-1, x) \mapsto -x$ y $(1, x) \mapsto x$, tenemos la aplicación proyección $\pi : Pin_{p,q} \to Pin_{p,q}/\mathbb{Z}_2$, donde $Pin_{p,q}/\mathbb{Z}_2$ es el espacio topológico de las órbitas dadas por la relación $x \sim y \Rightarrow y = x$ o $y = -x$, para $x, y \in Pin_{p,q}$.
Así, como las relaciones determinan la misma estructura algebraica, ρ es una aplicación proyección y obtenemos que $O_{p,q}$ es homeomorfo a $Pin_{p,q}/\mathbb{Z}_2$, considerando la definición de topología cociente en $O_{p,q}$.
Entonces, mostrando que $\mathbb{Z}_2$ actúa uniformemente, se sigue de la proposición anterior, que $Pin_{p,q}$ es un recubrimiento de $O_{p,q}$. Si eso no fuera así, existiría $y \in Pin_{p,q}$ y un abierto V,$y \in V$, tal que $1V \cap (-1)V \neq \phi$, de donde tendríamos $y' = y$ y $y' = -y$, implicando $y = 0 \Rightarrow N(y) = 0 \Rightarrow y \notin Pin_{p,q}$, lo que es absurdo. Luego tenemos que $\mathbb{Z}_2$ actúa uniformemente en $Pin_{p,q}$, como queriamos mostrar.
Para ver que los recubrimientos son no triviales para $(p, q) \neq (1, 1)$, es suficiente mostrar que -1 y 1 estan ligados por un camino en $Pin_{p,q}$. Esto porque si nosotros tuvieramos $Pin = U_1 \bigcup U_2$ con U_1, U_2 abiertos, disjuntos y homeomorfos a $O(n)$ entonces 1 y -1 no pueden estar en el mismo U_i, eso porque $\rho(1) = \rho(-1) = id$, y de ahí ellos estarán en componentes conexas disjuntas. Así 1 y -1 no pueden conectarse por un camino.
De esa forma, como $(p, q) \neq (1, 1)$, podemos encontrar dos vectores ortogonales tales que

$q_{p,q}(e_1) = q_{p,q}(e_2) = \pm 1$, y definimos $\gamma : [0,\pi] \to Pin_{p,q}$ dada por $\gamma(t) = \pm cos(2t)1 + sen(2t)e_1e_2$, que es un camino en $Pin_{p,q}$ como podemos mostrar por medio de un cálculo directo, sabiendo que $\gamma(t)^{-1} = \gamma(t) = \pm cos(2t)1 - sen(2t)e_1e_2$. Análogamente, obtenemos que $Spin_{p,q}$ es un recubrimiento de $SO_{p,q}$. □

PROPOSICIÓN 5.7. *Los grupos Pin_n y $Spin_n$ son subgrupos compactos.*

DEMOSTRACIÓN.- Observemos que Cl_n es Hausdorff, pues es un espacio topológico isomorfo a R^n como espacio vectorial, como ya fué visto. Así, Pin_n y $Spin_n$ también son Hausdorff. Y siendo las aplicaciones $\rho_1 : Pin_n \to O_n$ y $\rho_2 : Spin_n \to SO_n$ recubrimientos dobles, son homeomorfismos locales tales que $\rho_1^{-1}(f)$ y $\rho_2^{-1}(g)$ tiene dos elementos, para todo $f \in O_n$ y $g \in SO_n$. En consecuencia, son aplicaciones propias, esto es, la imágen inversa de un compacto es compacto. Por tanto, ya que O_n y SO_n son compactos, se sigue el resultado. □

La proposición anterior puede ser usada para estudiar las relaciones entre las representaciones de $Spin_n$ y SO_n, usando el siguiente resultado: supongamos que G sea un grupo de Lie compacto, cuyas representaciones son conocidas y $\beta : G \to H$ un homomorfismo sobreyectivo contínuo de G en un grupo de Lie compacto H, donde K es el núcleo. Si π fuera una representación irreducible de H, entonces $\pi \circ \beta$ será una representación irreducible de G.
Con eso tenemos una correspondencia inyectiva entre tales representaciones llevando K en el operador identidad. Y entonces, para determinar las representaciones de $Spin_n$ que no son levantamientos de las representaciones de SO_n escogemos aquellas que no aplican {-1,1} en la identidad.

5.2.3. Noción de Variedad Spin

DEFINICIÓN 5.5. *Una métrica riemanniana en una variedad diferenciable M es dada por un producto interno en cada espacio tangente T_pM que depende diferenciablemente del punto base p. Una variedad riemanniana es una variedad diferenciable equipada con una métrica riemanniana.*

DEFINICIÓN 5.6. *El fibrado tangente de la variedad M es una tripleta (TM, π, M), donde: TM, llamado espacio total del fibrado tangente, es la unión disjunta de los espacios tangentes, $T_pM, p \in M; \pi : TM \to M$ con $\pi(w) = p$ para $w \in T_pM$ es la proyección en* *el punto base; Y si $x : U \to R^m$, y $y : V \to R^m$ son cartas para M, $dx : TU \to Tx(U)$ es definida por $w \to dx(\pi(w))(w) \in T_{x(\pi(w))}x(U)$, donde $TU := \cup_{p\in U} T_pM$ y $Tx(U)$ tiene estructura diferenciable de $x(U) \times R^m$, entonces las aplicaciones de transición $dy \circ dx^{-1} = d(y \circ x^{-1})$ son diferenciables.*

Observando que el fibrado tangente es un ejemplo de fibrado vectorial, pasaremos a la definición de este, que puede ser considerado como una familia de espacios vectoriales parametrizados por una variedad.

DEFINICIÓN 5.7. *Un fibrado vectorial diferenciable es una terna (E, π, M) donde E, llamado espacio total, y M, llamada base, son variedades diferenciables, la proyección $\pi : E \to M$ es diferenciable, cada fibra $E_x := \pi^{-1}(x), x \in M$ tiene estructura de espacio vectorial n-dimensional y para cada $x \in M$, existe una vecindad $U \in M$, y un difeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times R^n$, llamado trivialización local, tal que para todo $y \in U, \varphi_y := \varphi \mid_{E_y}: E_y \to \{y\} \times \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo. El par (U, φ) es llamado carta fibrado.*

Cuando $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ es una cobertura abierta de M, cuyos fibrados son triviales, esto es, isomorfos a $M \times \mathbb{R}^m$, con trivializaciones correspondientes $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^m$, es $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$, obtenemos la aplicación transición

$$\varphi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(\mathbb{R}^m)$$

dada por $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, v) = (x, \varphi_{\beta\alpha}(x)v)$, para $x \in U_\alpha \cap U_\beta, v \in \mathbb{R}^m$. Y notamos que un fibrado vectorial puede ser construido de sus aplicaciones de transición.

DEFINICIÓN 5.8. *Un fibrado vectorial (E, π, M) es orientado, si existe una orientación continuamente definida en las fibras $E_x, x \in M$.*

DEFINICIÓN 5.9. *Una estructura riemanniana en un fibrado vectorial (E, π, M) es una familia de productos internos definido positivo continuamente definido en las fibras $E_x, x \in M$. Un fibrado vectorial riemanniano es un fibrado vectorial equipado con una estructura riemanniana.*

Observemos que todo fibrado puede ser equipado con una estructura riemanniana.

Para poder pasar a la noción de variedad spin, nos resta considerar el siguiente concepto:

DEFINICIÓN 5.10. *Un G-fibrado principal es una terna* $(P_G(M), \pi, M)$ *junto con un grupo de Lie G, donde el espacio total del fibrado* $P_G(M)$ *y la base M son variedades diferenciales, y la proyección* $\pi : P_G(M) \to M$ *es diferenciable, con la acción de G en* $P_G(M), (p, g) \mapsto pg, (p, g) \in G \times P_G(M)$ *y* $pg \in P_G(M)$*, satisfaciendo:*
i) G actúa libremente en $P_G(M)$*, esto es,* $pg \neq p$ *para* $g \neq e$*.*
ii) M es el cociente de $P_G(M)$ *por la relación de equivalencia definida por la acción de G, donde* $p \sim q \leftrightarrow \exists g \in G; p = qg, \pi$ *aplica* $p \in P_G(M)$ *en su clase de equivalencia, y la fibra* $\pi^{-1}(x)$ *puede ser identificada con G.*
iii) Para cada $x \in M$*, existe una vecindad U y un difeomorfismo* $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$*, llamado trivialización local, dado por* $\varphi(p) = (\pi(p), \psi(p))$*, que es G-invariante, o sea,* $\varphi(pg) = (\pi(p), \psi(p)g)$*, para todo* $g \in G$*.*

Y, de la misma forma que en un fibrado vectorial cualquiera, tenemos la aplicación transición de $P_G(M)$

$$\varphi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$$

dada por $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, g) = (x, \varphi_{\beta\alpha}(x)g)$, para $x \in U_\alpha \cap U_\beta, g \in G$. Las cuales, cuando todas toman valores en un subgrupo H de G, este es llamado grupo estructura del fibrado $P_G(M)$.

En fin, sea E un fibrado vectorial riemanniano n-dimensional orientado sobre una variedad $M, P_{SO}(E)$ su SO_n-fibrado principal, que E sea orientado es equivalente a la elección de un tal fibrado, y , para $n \geq 3, \xi_0 : Spin_n \to SO_n$ el homomorfismo de recubrimiento de SO_n, cuyo núcleo es {-1,1}$\cong Z_2$.

DEFINICIÓN 5.11. *Una estructura spin en E es un* $Spin_n$*-fibrado principal* $P_{Spin}(E)$ *junto con un doble recubrimiento*

$$\xi : P_{Spin}(E) \to P_{SO}(E)$$

tal que $\xi(pg) = \xi(p)\xi_0(g)$*, para todo* $p \in P_{Spin}(E)$ *y* $g \in Spin_n$*.*

Considerando las acciones de $Spin_n$ y SO_n, vemos que eso es lo mismo que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} P_{Spin}(E)\times Spin_n & \rightarrow & P_{Spin}(E) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P_{SO}(E)\times SO_n & \rightarrow & P_{SO}(E) \end{array}$$

conmuta.
La existencia de una tal estructura, ya que puede ser construída de sus aplicaciones de transición, equivale a poder levantar cada función de transición $\varphi_{\beta\alpha}$ de $P_{SO}(E)$.

Con esto ya podemos presentar la definición de variedad spin.

DEFINICIÓN 5.12. *Sea M una variedad riemanniana orientada. Diremos que M es una variedad spin, cuando tiene una estructura spin en su fibrado tangente TM.*

Bibliografía

[1] Baker, A. Matrix Groups: an introduction to Lie Group Theory. Springer-Verlag: London, 2002. 330p.

[2] Farias, José Ginaldo de Souza. Álgebra de Clifford: classificações e representações. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013. 92p.

[3] Gallier,J. Clifford Algebras. Clifford Groups, and a Generalization of the Quaternions: the Pin and Spin Groups.[2002]. Disponible en http://carlossicoli.free.fr/G/

[4] Garling,D.J.H. Clifford Algebras: An Introduction. Cambridge University Press: New York, 2011. 200p.

[5] Greub, W. Multilinear Algebra 2da. Ed. Springer-Verlag: New York, 1978. 294p.

[6] Greub, W. Linear Algebra. Birkhäuser, 1967. 434p.

[7] Lawson, H.B. y Michelsonh,M.L. Spin Geometry. Princeton University Press: New Jersey. 1989. 427p.

[8] Lee, John M. Introduction to Smooth Manifolds. Springer, 2003.

[9] Lluis-Puebla, E. Algebra Lineal, Algebra Multilineal y K-Teoría Algebraica Clásica.

2da. Ed. Sociedad Matemática Mexicana, 2008. 180p.

[10] San Martin, L.A.B. Grupos de Lie.[2016]
Disponible en http://www.ime.unicamp.br/ smartin/cursos/grupolie-2016/gruplie0.pdf

[11] Sousa, Mônica Paula de. Álgebras de Clifford: uma introdução à Geometria Spin. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013. 61p.