Universidad Mayor de San Andrés
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Carrera de Matemática

Proyecto de grado

Caracterización de pm-anillos

Autor: Larico Paye Javier Cristobal

Tutor: Lic. Ramiro Choque Canaza

La Paz - Bolivia
Diciembre 2019

Dedicatoria

Dedicado a:
mis pádres †Silverio Larico, Santusa Paye.
esposa e hijo Beridiana, Randy Adhemar.
mis hermanas Francisca y Bithma.

Agradecimientos

Le agradezco a Dios por haberme acompañado y guiado a lo largo de mi carrera, por ser mi fortaleza en los momentos de debilidad y por brindarme una vida llena de aprendizajes, experiencias y sobre todo felicidad.

Le doy gracias a mis padres Silverio Larico (QEPD) y Santusa Paye por apoyarme en todo momento, por los valores que me han inculcado, y por haberme dado la oportunidad de tener una buena educación en el transcurso de mi vida. Sobre todo por ser un excelente ejemplo de vida a seguir. A mis hermanas Bithma y Francisca por ser parte importante de mi vida y representar la unidad familiar.

A mi esposa Beridiana y mi hijo Randy por ser un motor importante para impulsar y cumplir mis objetivos ademas de llenar mi vida de alegrías y amor cuando más lo he necesitado, por haberme apoyado en las buenas y en las malas, sobre todo por su paciencia y amor incondicional.

Mis amigos Ronnald, Erasmo y Jose Luis por haber compartido conmigo sus conocimientos y sobre todo su amistad.

Gracias a la directora Msc Miriam Mallea y Tutor Lic. Ramiro Choque por creer en mí, y haberme brindado la oportunidad de desarrollar este proyecto profesional en esta prestigiosa casa de estudio universidad mayor de San Andrés y por todo el apoyo y compartir su conocimiento con mi persona.

Al plantel docente, administrativo de la carrera de Matemáticas por compartir sus conocimientos y darme la oportunidad aprender cosas maravillosas en esta ciencia.

Resumen

El presente trabajo de grado establece que un pm-anillo es una anillo conmutativo con identidad donde cada ideal primo esta contenido en un único ideal maximal. Esta clase de anillos ha sido estudiado por Marco-Orsatti y contiene los anillos booleanos, los anillos regulares, los anillos locales y anillo de funciones.

Aquí damos nuevas propiedades de esta clase de anillos y mostramos el punto de vista de este investigador y se basa en caracterizaciones algebraicas esta caracterización algebraica de pm-anillos se da por la condición de (PM):

$$\forall m \in A,\ \exists a, b \in A\ tal\ que\ (1-am)(1-bm') = 0;\ m' = 1-m.$$

Esta condición es adecuada para probar fácilmente que un anillo es pm-anillo.

A lo largo de todo el documento, todos los anillos considerados son conmutativos con la unidad. Un anillo A se llama un pm-anillo (también llamado anillo de Gefland) si cada ideal primo está contenido exactamente en un ideal maximal. También algunas propiedades del espectro primo $\mathrm{Spec}(A)$ y el espectro maximal $\mathrm{Max}(A)$ de un pm-anillo, y varias propiedades topológicas y algebraicas de los anillos. Su resultado principal indica que el mapeo $\mu : \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Max}(A)$ que envía cada ideal primo P de A al único ideal maximal M de A que contiene P es continuo.

Tenemos como objetivo del proyecto verificar los siguientes enunciados son equivalentes:

1. A es un pm-anillo.

2. $\mathrm{Spec}(A)$ es un espacio normal.

3. Si $m, m' \in A$ con $m + m' = 1$, entonces existen elementos $a, b \in A$ tal que $(1 - am)(1 - bm') = 0$.

4. Para todo par de ideales distintos M y M' de A, existen elementos $a \notin M$ y $a' \notin M$ tal que $aa' = 0$.

Y mostramos bajo que condiciones el espectro primo de un anillo es un espacio topológico normal y mostramos lo eficiente de la propiedad PM para verificar si un anillo es pm-anillo.

Índice general

Introducción

En este proyecto llamaremos, abreviadamente, anillos a los anillos conmutativos con unidad y estudiamos las propiedades de compacidad y conexión del espectro primo de un anillo, y vemos que el espectro primo es un espacio topológico normal si, y solo si, dicho espacio retracta sobre el espectro maximal, lo que equivale a que cada ideal primo este contenido en un único ideal maximal. El espectro maximal de estos anillos con la propiedad pm es un espacio compacto y de Hausdorf. Estudiamos las propiedades de conexión del espectro primo de un anillo con la ayuda del anillo de Boole, formado por los idempotentes del anillo, anillos regulares que esta formado por elementos de Von Neumamm ,anillos locales, anillo de funciones como anillos de partida.

El trabajo se divide en cuatro capítulos. A continuación vamos a detallar algo mas el contenido de cada uno de los capítulos.

El primer capitulo se subdivide secciones definitorias de conceptos y propiedades que se vieron en cursos regulares de la carrera. En las primeras secciones nos centraremos en recordar definición de anillo y subanillo ; también vemos la importancia del subanillo ideal con sus respectivas propiedades; definimos ideales primos e ideales maximales y vemos la importancia del lema de Zorn en las demostraciones de algunas propiedades de esta sección, definimos elementos nilpotentes al igual que el nilradical y radical de un ideal y observamos la intervención del conjunto de unidades del anillo en esta sección; definimos el radical de Jacobson. En este capitulo cabe recalcar que las demostraciones de las propiedades se vieron en cursos regulares, sin embargo adicionamos en el apéndice del proyecto.

El segundo capitulo se subdivide en siete secciones. En la primera nos centraremos en definir los *pm-anillos*. De forma general, nos apoyaremos para esta parte en el articulo M. Contessa, On pm-rings, definiremos anillos booleanos y mostraremos sus propiedades, veremos algunos ejemplos de anillos booleanos y probaremos que los anillos booleanos es pm-anillo; en la siguiente sección definiremos conjunto multiplicativo y veremos la importancia de este conjunto en la demostración del teorema PM. definiremos elementos Von Neumann y el anillo formado por estos elementos definen anillos regulares, y probaremos que un anillo regular es pm-anillo; definiremos anillo local como aquel anillo que tiene un único ideal maximal y también probaremos que este anillo cumple la condición de PM definiremos y probaremos que los anillos regulares local Von Neumann y fuertemente local Von Neumann son pm-anillos. Para finalizar veremos que el anillo de funciones continuas y acotadas es pm-anillo.

El tercer capitulo lo dividimos en seis secciones recordamos conceptos de espacios topologicos; definimos lo que es espectro primo de un anillo. Dotaremos (vía una base de cerrados) al conjunto de los ideales primos del anillo A de una topología, que recibe el nombre de topología de Zariski. Este espacio topologico sera denotado con $Spec(A)$, y el subespacio formado por los ideales maximales de A sera denotado con $Max(A)$. Recordamos conceptos de vecindario, aherencia, compacidad y mencionamos teoremas de un curso regular de topología cuya prueba se adiciona en la sección de apéndice. Daremos una expresión explícito de una base de abiertos de $Spec(A)$ y veremos que tanto los abiertos de esa base como el espacio total son siempre compactos también analizaremos el cierre y conexión de $Spec(A)$.

Cerraremos con el cuarto capítulo del proyecto explorando la relación entre espectro primo y pm-anillo en que casos el espectro es un espacio normal. Llamaremos pm-anillos a aquellos anillos en los que todo ideal primo esta contenido en un único ideal maximal, y veremos que son estos anillos los que precisamente dan lugar a espectros normales. Veremos que en este caso, el espectro primo retracta sobre el maximal, y la retracción no es otra que la aplicación que envía cada ideal primo en el único ideal maximal que lo contiene. Ademas, los espectros maximales de estos anillos son espacios de Hausdorf. Finalmente, probaremos el teorema principal de nuestro objetivo que bajo que condiciones el espectro primo es un espacio topológico normal.

Capítulo 1

Aspectos Generales

1.1 Introducción

La motivación del presente proyecto de grado es analizar las características de aquellos anillos en los que cada ideal primo están contenidos en un único ideal maximal el cuál sera denominado como pm-anillo; para el desarrollo de este proyecto el contenido temático hace relación del Álgebra y parte de Topología.

A lo largo de todo el documento, todos los anillos considerados son conmutativos con unidad. Un anillo A se llama un pm-anillo (también llamado anillo de Gefland) si cada ideal primo esta contenido exactamente en un ideal maximal. Esta clase de anillos ha sido introducida por el investigador G. De Marco y A.Orsatti. Contiene a los anillos regulares de Von Neumann, anillos locales, anillos booleanos, anillos de funciones, Anillo regular local de Von Neumann y fuertemente anillo regular local de von Neumann y como objetivo se tiene analizar las características propiedades de cada uno de estos anillos y verificar mediante una simple ecuación algebraica que cada uno de estos anillos llega a formar un pm-anillo.

Justificación: Caracterización de anillos mediante una ecuación algebraica.

Importancia y aportes:

- Desarrollo de la teoría de pm-anillos y Topología de Zariski.
- Propiedades algebraicas y topológicas que son utilizados para establecer que un anillo es pm-anillos.
- Anillos especiales: Anillos booleanos, anillos Von Neumann o anillos regulares, anillos locales y anillos fuertemente locales.

1.2 Antecedentes

A lo largo de todo el proyecto, todos los anillos considerados son conmutativos con la unidad. Definimos que un anillo A se llama un pm-anillo (también llamado anillo de Gefland) si cada ideal primo está contenido exactamente en un ideal maximal. Esta clase de anillos han sido introducida en [2] por G. De Marco y A.Orsatti. Contiene a los anillos regulares de Von Neumann, anillos locales, anillos de dimensión cero, anillos de funciones, etc. Fueron estudiados algunas propiedades del espectro primo Spec(A) y el espectro maximal Max(A) de un pm-anillo, y varias propiedades topológicas y algebraicas de los anillos. Su resultado principal indica que el mapeo $\mu : \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Max}(A)$ que envía cada ideal primo P de A al único ideal maximal M de A que contiene P es continuo. Contessa [1] continuó la investigación de pm-anillos y dio nuevas propiedades de esta clase de anillos.

1.3 Planteamiento del Problema

G. De Marco y A.Orsatti [2] , y Contessa [1], principalmente ella probó resultados a partir de estos puntos de vistas, uno utiliza el espectro del anillo con la topología de Zariski y el otro se basa en la caracterización algebraica PM.

El presente trabajo de grado establece conocer las caracteristicas y propiedades de los anillos que llegan a ser pm-anillos utilizando simplemente la ecuacion algebraica de pm-anillo.

1.4 Marco teórico

A lo largo de todo el documento, todos los anillos considerados son conmutativos con la unidad.

Definición 1 *Un pm-anillo es un anillo en el que cada ideal primo está contenido en un único ideal maximal.*

Un ejemplo importante de pm-anillo es $C(X)$ el anillo de funciones continuas reales definidas en un espacio topológico X.

Definición 2 *Se dice que un elemento a de un anillo R es regular si hay un elemento x de R tal que $a = axa = a^2x$. Un anillo R es regular si todos sus elementos son regulares. Un ideal de uno o dos lados de R se llama regular si todos sus elementos son regulares.*

Entre los anillos regulares se incluyen los anillos de división, los anillos Booleanos.

Para cada subconjunto S del anillo A, denotaremos con $V(S)$ el conjunto de ideales primos de A que contienen a S, esto es

$$V(S) = \{I \text{ primo} : S \subset I\}.$$

Proposición 3 *Para cada subconjunto S de A, se verifica que:*

1. $V((S)) = V(\sqrt{(S)}) = V(S)$.

2. $V(0) = \mathrm{Spec}(A)$ *y* $V(1) = \emptyset$

Proposición 4 *Para I, J ideales de A, se tiene*

1. $V(I \cap J) = V(IJ) = V(I) \cup V(J)$.

2. $V(a) \cup V(b) = V(ab)$ *para todo* $a, b \in A$

Sea $a \in A$, definimos el conjunto $D(a)$ como el complemento del conjunto $V(a)$, es decir

$$D(a) = \mathrm{Spec}(A) - V(a).$$

Proposición 5 *la familia de conjunto* $\{D(a)\}_{a\in A}$ *es una base de abiertos de* $\mathrm{Spec}(A)$

Proposición 6 *Los conjunto abiertos $D(a)$ son compactos. En particular* $\mathrm{Spec}(A)$ *es compacto.*

Teorema 7 *El subespacio de los ideales maximales* $\mathrm{Max}(A)$ *es un espacio de Hausdorff.*

Lema 8 *Sea A un pm-anillo y sea* $\mu : \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Max}(A)$ *la aplicación que a cada ideal primo de A lo envía en el único ideal maximal que lo contiene. Entonces φ es continua.*

Teorema 9 *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *A es un pm-anillo.*

2. $\mathrm{Spec}(A)$ *es un espacio normal con la topología Zariski.*

3. *Si $m, m' \in A$ con $m + m' = 1$, entonces existen elementos $a, b \in A$ tal que* $(1 - am)(1 - bm') = 0$.

4. *Para todo par de ideales distintos M y M' de A, existen elementos $a \notin M$ y $a' \notin M$ tal que $aa' = 0$.*

1.5 Objetivos

Principal: Mostrar resultados que relacionan los pm-anillos algebraica y topológicamente.

Demostrar el teorema 9

Secundario:

- Estudio de pm-anillo mediante una ecuación que lo caracteriza
- Estudiar pm-anillos mediante la topología Zariski
- Mostrar que los anillos booleanos, regulares y otros son pm-anillos.

1.6 Alcance

Desarrollo de la teoría de anillos especiales: pm-anillos, booleanos, regulares Von Neumann, Anillos locales.

1.7 Metodología

Revisión bibliográfica. Se desarrollará en base a los textos, artículos citados, tesis, proyectos de grado y otras.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Introducción

La importancia de la estructura de anillo conmutativo con unidad radica en que, al disponer de los conceptos de suma y producto con las propiedades más usuales, también tenemos muchos de las nociones básicas de la aritmética: múltiplos y divisores, máximo común divisor y mínimo común múltiplo, primos, ideales, ideales primos, ideales maximales, nilradical etc. En cada anillo podemos desarrollar una teoría, usando las ideas y los métodos propios del álgebra.

2.2 Anillos

Definición 10 *Un anillo es un conjunto A junto con dos operaciones en A (suma $+$ y multiplicación $\cdot$) de manera que:*

1. $(A, +)$ *es un grupo abeliano. Es decir la operación $+$ es asociativa, conmutativo, con neutro aditivo 0, y donde cada elemento x tiene un opuesto aditivo $-x$. Decimos que ese grupo es el grupo aditivo del anillo.*

2. *$(A, \cdot)$ es un semigrupo, significa que la multiplicación $\cdot$ es una operación asociativa. Decimos que ese semigrupo es el semigrupo multiplicativo del anillo.*

3. *La multiplicación $\cdot$ es distributiva respecto a la adición $+$, esa decir, para todo x, y, z en A se cumple que $x(y+z) = xy + xz$ y $(y+z)x = yx + zx$.*

Un **anillo con identidad o unidad** es un anillo donde hay un neutro respecto a la multiplicación, al que usualmente simbolizaremos por 1. Para evitar trivialidades, supondremos que $1 \neq 0$. Un **anillo conmutativo** es un anillo donde la multiplicación es conmutativa.

En todo lo que sigue el proyecto consideraremos anillos conmutativos con elemento unidad, al que usualmente denotaremos con simplemente A.

Definición 11 *Llamaremos **característica de un anillo** al menor numero natural no nulo que verifique $na = 0, \forall a \in A$ Si no existe n verificando la condición anterior, diremos que A es un anillo de **característica nula**.*

Definición 12 *Se denominan **divisores de cero** a aquellos elementos no nulos de un anillo A que verifican $a \cdot b = 0$ Si existen tales elementos en A, se dice que A posee divisores de cero. Si A no posee divisores de cero y es conmutativo le llamaremos **anillo de integridad o anillo integro**; si, ademas, posee elemento unidad le llamaremos **dominio de integridad.***

Los subconjuntos de un anillo que realmente tienen interés son los que también tienen estructura de anillo.

Definición 13 *Sea $S \subset A$ anillo. Diremos que S es un subanillo de A si con respecto a las mismas operaciones de A tiene también estructura de anillo.*

Teorema 14 *La condición necesaria y suficiente para que un subconjunto S de un anillo A sea un subanillo es que*

$$\forall a, b \in S : a - b \in S$$

y

$$a \cdot b \in S.$$

Definición 15 *Sean A y A' dos anillos. Una aplicación $\Psi : A \longrightarrow A'$ es un morfismo de anillos si cumple:*

$$\Psi(a + b) = \Psi(a) + \Psi(b)$$

$$\Psi(ab) = \Psi(a) \cdot \Psi(b)$$

Si ademas cumple

$$\Psi(1_A) = 1_{A'}$$

diremos que es un morfismo de anillos con unidad. De ahora en adelante cuando utilicemos la palabra morfismo, entenderemos que es un morfismo de anillos con unidad.

Continuando con el estudio de la teoría del anillo conmutativo, veremos que uno de los conceptos que hace que la noción de un anillo sea tan útil es el de un ideal. Este concepto fue introducido por Richard Dedekind, un estudiante de Gauss.

2.3 Ideales

Definición 16 *Un ideal de un anillo A es un subconjunto I de A que es en sí mismo un grupo bajo adición y es tal que si $r \in A$ y $a \in I$, entonces $ra \in I$.*

Note que un ideal debe satisfacer una condición extra −extremadamente fuerte− con respecto a la multiplicación. Uno gusta pensar en esta propiedad de un ideal como la propiedad de absorción: No solo debe ser cerrado con respecto a la multiplicación dentro de I, sino que en realidad debe absorber la multiplicación del anillo A en el sentido de: si $a \in I$, entonces cada vez que multiplicamos a por cualquier elemento $r \in A$ el producto ra permanece en I.

Es útil contrastar la noción de ideal con la de un subanillo. Primero, un ideal debe ser cerrado bajo la multiplicación, por lo que es casi un subanillo, excepto que no necesita contener 1, el elemento identidad. Por otro lado, un subanillo es casi un ideal, ya que es un subgrupo y esté cerrado en la multiplicación, excepto que no necesita tener la propiedad más fuerte de absorber la multiplicación del anillo.

Teorema 17 *Un subconjunto no vacío I es un ideal de un anillo A si y sólo si*

1. *si $a, b \in I$, entonces $a - b \in I$,*

2. *si $r \in A$ y $a \in I$, entonces $ra \in I$.*

La condición (1) garantiza que I es un grupo y la condición (2) dice que absorbe la multiplicación de A.

Proposición 18 *Sea A un anillo. La intersección de ideales de A es de nuevo un ideal de A.*

La importancia de los ideales radica en que sirven para definir anillos cocientes. Con mas precision, tenemos el siguiente:

Teorema 19 *Sea I un ideal de A. En el grupo cociente A/I se puede introducir una estructura única de anillo que hace que la proyección canónica sea un morfismo de anillos. Si A tiene unidad también la tendrá A/I.*

Definición 20 *El conjunto $A/I = \{a + I : a \in A\}$ definida con las operaciones*

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I.$$

$$(a+I)(b+I) = (ab) + I.$$

se llama anillo cociente de A modulo I

EL anillo cociente tiene las siguientes propiedades:

$$a + I = b + I \Leftrightarrow a - b \in I.$$

$$Si\ x \in I, x + I = I; 0 + I = I.$$

$$x + I + I = x + I.$$

Teorema 21 *(Correspondencia) Sea $\Pi : A \longrightarrow A/I$ la proyección canónica. Existe una correspondencia biunívoca entre ideales de A/I e ideales de A que contienen a I.*

2.4 Ideales Primos

Los ideales son una generalización del concepto de número; por lo tanto, no es sorprendente que los ideales que corresponden a los números primos sean de particular importancia. Pero, ¿cómo vamos a capturar la noción de primo en un anillo arbitrario? Resulta que la clave de esta cuestión es la divisibilidad.

Sea $m, n \in \mathbb{Z}$. Decimos que m divide n si $n = rm$ para algún $r \in Z$, y en este caso escribimos $m|n$, una notación que se lee como "m divide n".

En el lenguaje de los ideales, si m divide n, significa precisamente que $n \in (m)$, de lo que se sigue que $(n) \subset (m)$. Este argumento es reversible, por lo que podemos resumir la forma en que la divisibilidad se refleja en la estructura ideal del anillo $\mathbb{Z}$ de la siguiente manera:

$$m|n \text{ si y solo si } (n) \subset (m).$$

Note que el número más pequeño corresponde en realidad al ideal más grande.

Volviendo a nuestra tarea de capturar la noción de primo en un anillo arbitrario, observamos además que si p es un número primo, entonces p tiene la siguiente propiedad de divisibilidad conocida, donde a y b son enteros:

$$\text{Si } p|ab, \text{entonces } p|a \text{ o } p|b.$$

que es equivalente a

$$ab \in (p) \Rightarrow a \in (p) \text{ o } b \in (p).$$

Esta propiedad de divisibilidad fundamentalmente importante de los números primos es equivalente a la noción original de primo, y también resulta ser la más adecuada para la generalización.

Definición 22 *Sea P el ideal propio de un anillo A, es decir, $P \neq A$. Entonces P es un ideal primo si para $a, b \in A$*

$$ab \in P \textit{ implica } a \in P \textit{ o } b \in P.$$

En otras palabras, un ideal propio es primo si, siempre que el producto de dos elementos se encuentre en el ideal, entonces uno de los dos elementos debe estar en el ideal. Por ejemplo, en $\mathbb{Z}$ el ideal (15) no es primo, ya que $6{\cdot}10 \in (15)$, pero ni 6 ni 10 están en el ideal (15), mientras que (7) es un ideal primo de $\mathbb{Z}$ ya que si $ab \in (7)$ entonces $7|ab$, y por lo tanto $7|a$ o $7|b$, y $a \in (7)$ o $b \in (7)$.

Ya que nuestra definición de ideales primo fue motivada completamente por la noción de primo en los enteros, no debería sorprenderte que los ideales primos distintos de cero en $\mathbb{Z}$ sean precisamente esos ideales principales.que son generados por un número primo.

Ejemplo 23 *Sea n un entero positivo. Entonces (n) es un ideal primo de $\mathbb{Z}$ si y solo si n es un número primo. Para verificar esto, primero asumimos que (n) es un ideal* *primo. Usamos contradicción para probar que n es un número primo. Supongamos que n no es primo y que $n = ab$ sea una factorización no trivial de n, es decir, donde a,$b \in \mathbb{Z}$ tal que $1 < a, b < n$. Entonces $ab \in (n)$, entonces $a \in (n)$ o $b \in (n)$, ya que (n) es un ideal primo. Pero esto es imposible, ya que $1 < a, b < n$. Por lo tanto, n es un número primo. La inversa, suponga que n es un número primo. Sea $ab \in (n)$, con $a, b \in \mathbb{Z}$. Debemos mostrar que $a \in (n)$ o $b \in (n)$. Como $ab \in (n)$, podemos escribir $ab = rn$ para algunos $r \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, $n|ab$, pero n es un número primo, entonces $n|a$ o $n|b$. Es decir, $a = sn$ o $b = tn$, para algunos $s, t \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, $a \in (n)$ o $b \in (n)$, y concluimos que (n) es un ideal primo, como se quería.*

Teorema 24 *Sea $P \subset A$ ideal primo e I, J dos ideales tales que $IJ \subset P$. Entonces $I \subset P$ o $J \subset P$.*

Existe otra definición de ideal primo que se obtiene directamente de esta. Un ideal P es primo si $a, b \notin P$ implica que $ab \notin P$. De esta forma el complementario de un ideal primo es cerrado por la operación de multiplicación.Sin embargo la caracterización mas importante de los ideales primos viene dada por el siguiente teorema.

Teorema 25 *Sea P el ideal de un anillo A. Entonces*

P es un ideal primo si y sólo si A/P es un dominio de la integridad.

Este teorema es una buena ilustración de una estrategia que es muy útil en la teoría de anillo conmutativo: dado que varias propiedades de un anillo A a menudo se reflejan en las propiedades correspondientes de los anillos cocientes A/I −y viceversa−, podemos jugar con estas propiedades una contra la otra. En otras palabras, para aprender algo sobre un anillo A, puede ser útil cambiar la ubicación de la discusión a un anillo A/I en su lugar. Supongamos, por ejemplo, que tenemos curiosidad acerca de la naturaleza de un ideal particular I en un anillo A. Si de alguna manera podemos decidir que A/I es un dominio integridad, entonces el Teorema anterior nos dice que I es un primo.

Por otra parte, ¿Qué podemos hacer si verificamos que A/I es en realidad un campo? ¿Qué nos dice esto sobre el ideal I? La respuesta a esta pregunta es el tema de la siguiente sección.

Otra caracterización de ideal primo, es la siguiente:

2.5 Ideales Maximales

Hay un tipo particular de ideal primo que es especialmente importante. Estos son los ideales maximales. Se denominan maximales porque no están contenidos en ningún otro ideal propio, es decir, son tan grandes como pueden ser y siguen siendo un ideal propio. (Note que este concepto es diferente de decir que un ideal tiene un número máximo de elementos. De hecho, es posible que un anillo tenga ideales maximales con diferentes números de elementos, es decir, de diferentes tamaños).

Definición 26 *Un ideal $M \subset A$ es maximal si los únicos ideales que lo contienen son el mismo y el total.*

Por lo tanto, M es el ideal máximo de A si no hay otros ideales contenidos entre M y A. En otras palabras, si N es un ideal tal que $M \subset N \subset A$, entonces

$$N = M \text{ o } N = A.$$

Como veremos en el siguiente ejemplo, esta será nuestra estrategia básica para demostrar que un ideal M es maximal, es decir, tomaremos un ideal N entre M y A y mostraremos que $N = M$ o $N = A$; o, alternativamente, tomaremos un Ideal N propio entre M y A y alcanzar una contradicción.

Ejemplo 27 *Demostremos que el ideal $M = (7)$ es un ideal máximal de $\mathbb{Z}$. Supongamos que N es un ideal de $\mathbb{Z}$ propio contenido entre (7) y $\mathbb{Z}$, es decir, $(7) \subsetneq N \subset Z$. Entonces existe un entero $n \in N - (7)$. Como $n \notin (7)$, 7 y n son primos relativamente, lo que significa que el máximo común de 7 y n es 1, luego hay números enteros x e y tal que $1 = 7x + ny$. Pero, $7 \in N$ y $n \in N$, entonces $1 \in N$, y se deduce que $N = Z$. Concluimos que (7) es un ideal máximal.*

Ejemplo 28 *Por otro lado, el ideal (6) obviamente no es un ideal máximal de $\mathbb{Z}$, ya que $(6) \subsetneq (2) \subsetneq Z$.*

Ya hemos encontrado la noción de un ideal generado por elementos del anillo A: por ejemplo, un ideal principal (a) generado por un solo elemento, o incluso el ideal (a, b) generado por dos elementos. También hemos visto que hay dos formas de ver cada uno de estos ideales.

Sea S un subconjunto de un anillo A. Entonces, el ideal generado por S se denota por (S) y es la intersección de todos los ideales que contienen S, es decir,

$$(S) = \bigcap_{I \supset S} I$$

Esta intersección es, de hecho, un ideal. Alternativamente, también podemos dar una descripción elemental del ideal generado por S:

$$(S) = \{r_1 s_1 + r_2 s_2 + \cdots + r_n s_n : r_i \in A, s_i \in S\}.$$

En otras palabras, (S) es solo el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de elementos del conjunto S.

Note que escribimos (a) en lugar de $(\{a\})$, y (a, b) en lugar de $(\{a, b\})$. De manera similar, escribiremos (I, a) en lugar de $(I \cup \{a\})$ para el ideal generado por I y a. Por ejemplo, A menudo será útil tener una descripción de los elementos de un ideal de la forma (I, a), también se le permitirá mostrar que

$$(I, a) = \{i + ra : i \in I,\, r \in A\}.$$

Con esta notación en la mano, ahora estamos listos para probar el teorema que hace para los ideales maximales lo que el Teorema 25 hizo para los ideales primos:

Dada la importancia fundamental de los ideales primos y maximales en la teoría del anillos conmutativos, es bueno saber si un anillo arbitrario debe contener necesariamente un ideal maximal o un ideal primo. En la siguiente sección veremos, aunque con un esfuerzo considerable, que cada anillo distinto de cero contiene al menos un ideal maximal y, por lo tanto, al menos un ideal primo.

2.6 Lema de Zorn y los ideales maximales

Nuestro objetivo principal en esta sección es mostrar que cada anillo tiene un ideal maximal. Una prueba de este hecho simple y aparentemente obvio requerirá el uso de algo fundamental conocido como el lema de Zorn. Dado que sucede que el lema de Zorn es una de las herramientas indispensables para el matemático moderno.

El lema de Zorn nos proporciona la posibilidad de garantizar la existencia de elementos máximal en un orden parcial. Resulta que todo lo que tenemos que hacer es verificar que cualquier cadena tiene una cota superior:

Lema 29 (de Zorn) *Sea $\leq$ una orden parcial en un conjunto no vacío S. Si cada cadena en S tiene una cota superior en S, entonces S contiene un elemento maximal.*

Si consideramos el conjunto $\sum$ *de todos los ideales distintos del total de* A *ordenados por inclusión, los ideales maximales son los elementos maximales de este conjunto ordenado. Aplicando el lema de Zorn veremos que todo anillo posee ideales maximales.*

Teorema 30 *Todo anillo* A *posee ideales maximales.*

Corolario 31 *Todo ideal* I *distinto del total esta contenido en un ideal maximal.*

Corolario 32 *Todo elemento* a *no invertible esta contenido en un ideal maximal.*

Existe otro resultado distinto de ideal maximal, que en muchos aspectos es mas operativo. El siguiente teorema muestra dicho resultado.

Teorema 33 *Sea* M *un ideal de un anillo* A*. Entonces,*

$$M \text{ es un ideal maximal si y sólo si } A/M \text{ es un campo.}$$

Corolario 34 *Cualquier ideal maximal es también un ideal primo*

Sin embargo, no todos los ideales primos son maximales, como muestran los siguientes ejemplos.

Ejemplo 35 *El ideal cero (0) de* $\mathbb{Z}$ *es un ejemplo particularmente simple de un ideal primo que no es maximal. Para ver que* (0) *es primo, sea* $ab \in (0)$*, que significa que* $ab = 0$*, y entonces* $a = 0$ *o* $b = 0$*, y* $a \in (0)$ *o* $b \in (0)$*, mostrando así que* (0) *es primo. Para ver que* (0) *no es maximal, simplemente observamos que* $(0) \subsetneq (2) \subsetneq \mathbb{Z}$*.*

Si el ideal I de un anillo contiene la identidad multiplicativa 1, entonces hemos visto que debo ser el anillo completo. Ya hemos usado esta idea extremadamente simple varias veces, por ejemplo, para demostrar que todos los anillos tienen ideales maximales y también para demostrar que un ideal es maximal si y solo si su anillo de cociente es un campo. Más generalmente, hay otros elementos en un anillo que, como la identidad 1, tienen la misma propiedad de que pueden estar en un ideal solo si el ideal es el anillo completo. Estos elementos son llamados las unidades.

Definición 36 *Sea A un anillo. Un elemento $u \in A$ se denomina unidad si tiene una inversa, es decir, si existe un elemento $v \in A$ tal que $uv = 1$.*

En particular, la identidad 1 es una unidad en cualquier anillo. En el anillo de enteros $\mathbb{Z}$, las únicas unidades son 1 y -1. Sin embargo, en el otro extremo, en un campo, cada elemento distinto de cero es una unidad. Dado que los términos unidad e identidad son bastante similares, es fácil confundirse, por lo que debe tener un poco de cuidado para mantenerlos en orden.

Ahora, como hemos sugerido, un ideal puede contener una unidad solo si el ideal es el anillo completo. Para ver esto, suponga que u es una unidad en un anillo A y que $u \in I$ para algún ideal I de A. Ya que u es una unidad, tiene una inversa $u^{-1} \in A$. Concluimos que $1 = u^{-1}u \in I$. Por lo tanto, $I = A$. Es decir, cualquier ideal que contenga una unidad debe ser todo el anillo. Esto se puede resumir diciendo que si u es una unidad, entonces $(u) = A$. En la otra palabras, si un elemento $a \in A$ no es una unidad, entonces $(a) \neq A$, de lo contrario, si $(a) = A$, entonces $1 \in (a)$, y $1 = ra$ para algunos $r \in A$, lo cual es contrario al hecho de que a no es una unidad. Concluimos que para un elemento $u \in A$

$$u \text{ es una unidad si y solo si } (u) = A.$$

También podemos invertir nuestra perspectiva y enfocarnos en las no unidades de un anillo. El siguiente teorema da una muy buena caracterización del conjunto de no unidades de un anillo en términos de los ideales maximales.

Teorema 37 *Sea A un anillo. La unión de todos los ideales maximales de A es el conjunto de no-unidades de A:*

$$\bigcup_{M \text{ maximal}} M = \text{ conjunto de no unidades.}$$

El teorema anterior describe los elementos que forman la unión de los ideales maximales de un anillo, es decir, las no unidades. Ahora damos una descripción de los elementos que forman la intersección de los ideales primos de un anillo. Estos elementos son los elementos nilpotentes.

2.7 Elementos nilpotentes y el nilradical.

Definición 38 *Sea A un anillo. Se dice que un elemento $a \in A$ es nilpotente si $a^n = 0$ para algún entero positivo n.*

Definición 39 *El conjunto de elementos nilpotentes en un anillo A se llama el nilradical de A.*

Notación 40 *Denotamos el nilradical del anillo A por*

$$\mathrm{Nil}(A) = \{a \in A : \exists n \in N, a^n = 0\}.$$

En el siguiente teorema veremos que en cualquier anillo el nilradical es la intersección de los ideales primos del anillo.

Dado que la intersección de cualquier colección de ideales es un ideal , se seguirá que el nilradical es un ideal. Es sin embargo nuestro esfuerzo por seguir adelante en este momento y dar una prueba directa de que el nilradical $\mathrm{Nil}(A)$ de un anillo A es un ideal.

Teorema 41 *Sea $\mathrm{Nil}(A)$ el nilradical de un anillo A. Entonces $\mathrm{Nil}(A)$ es la intersección de todos los ideales primos en A, es decir,*

$$\mathrm{Nil}(A) = \bigcap_{P \text{ } primo} P$$

Definición 42 *Sea A un Anillo y sea I un ideal del anillo. El conjunto*

$$\sqrt{I} = rad(I) = \{x \in A : \exists n \in N, x^n \in I\}$$

se denomina radical del ideal I.

Proposición 43 *Sea I y J ideales de A, S y T subconjuntos de A. Entonces se cumple:*

1. $I \subset \sqrt{I}$, *igualdad si I es primo*

2. *si $I \subset J$, entonces $\sqrt{I} \subset \sqrt{J}$*

3. *si $S \subset I$, entonces $\sqrt{(S)} \subset \sqrt{I}$.*

Definición 44 *Sea A un anillo. El radical de Jacobson de A, $J(A)$, es definido como:*

$$J(A) = \bigcap_{m \subset A, maximal} m$$

El radical de Jacobson es la intersección de todos los ideales máximales del anillo A y es caracterizado por la siguiente proposición.

Teorema 45 *Sea A un anillo. Entonces $x \in J(A)$ si y sólo si $1 - xr$ es una unidad en A para todo $r \in A$.*

2.8 conceptos básicos de topología

Definición 46 *Dado un conjunto X, τ es una topología de X si satisface:*

- $\emptyset, X \in \tau$.
- $\{A_\alpha\}_{\alpha \in B}$ *tal que* $\forall \alpha \in B$: $A_\alpha \in \tau$ *entonces* $\bigcup_{\alpha \in B} A_\alpha \in \tau$.
- $\{A_j\}_{j=1}^{n}$ *tal que* $\forall: 1 \leq j \leq n$: $A_j \in \tau$ *entonces* $\bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \tau$

Notación 47 ♦ *Si $U \in \tau$ diremos que U es abierto.*

♦ *(X, τ) es llamado espacio topológico.*

Definición 48 *Sea E subconjunto de X, E es cerrado si y solo si $E^c \in \tau$.*

Definición 49 *Sea $x \in A$, U es un vecindad de x si existe un abierto V tal que $x \in V \subset U$.*

Definición 50 *Sea $x \in A$, $S \subset A$ y (A, τ) espacio topológico, diremos que x es adherente a S si $\forall V$: vecindad de $x : V \cap S \neq \emptyset$, es decir, S contiene a cada vecindad de x.*

El cierre de S, denotado por $\overline{S}$, es el conjunto de puntos en A que son adherentes a S, evidentemente $S \subset \overline{S}$.

Definición 51 *Una definición alternativa de cierre de un conjunto es la siguiente: Sea $S \subset A$ el cierre de S es el conjunto cerrado mas pequeño que contiene a S. Es decir,*

$$\overline{S} = \cap\{D : \textit{cerrado y } S \subset D\}$$

Definición 52 *Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ tal que $\forall \alpha \in A$, $U_\alpha \in \tau$: $X = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$ es llamada una cubierta del espacio X.*

Definición 53 *Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una cubierta de X, el conjunto $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}\}_{\alpha_i \in A}$ tal que*

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$$

es llamada subcubierta finita de X.

Definición 54 *Un espacio X es compacto si $\forall$: $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ cubierta de X existe $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}\}_{\alpha_i \in A}$ una subcubierta finita de X.*

Teorema 55 *Sea X un espacio topológico compacto y $S \subset X$, S cerrado entonces S es compacto.*

Capítulo 3

pm-anillos

3.1 Introducción

A lo largo de todo el documento, todos los anillos considerados son conmutativos con la unidad. Un anillo A se llama un pm-anillo (también llamado anillo de Gefland) si cada ideal primo está contenido exactamente en un ideal maximal. Esta clase de anillos ha sido introducida por G. De Marco y A.Orsatti. Contiene a los anillos regulares de Von Neumann, anillos locales, anillos booleanos, anillos de funciones, etc.

El objetivo de este capitulo es analizar las características y propiedades de aquellos anillos que logran ser pm-anillo y cuya verificación de realizara un capitulo mas adelante.

Definición 56 *(Marco-Orsatti) Un anillo A es pm-anillo si cada ideal primo está contenido en un único ideal maximal.*

Analicemos características interesantes de anillos donde intervienen los pm-anillos. Empecemos definiendo anillos booleanos.

3.2 Anillos Booleanos

Decimos que A es un anillo de Boole si todos sus elementos son idempotentes, es decir, $x^2 = x$ para cada elemento x de A. Son ejemplos de anillos de Boole:

1. $\mathbb{Z}_2$ las clases residuales modulo 2,

2. El conjunto de partes de cualquier conjunto X, donde la suma es la diferencia simétrica, la multiplicación es la intersección y identidad multiplicativa es el conjunto X y el conjunto vació es la identidad aditiva y el inverso aditivo de un elemento es el mismo.

3. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ con las operaciones coordenada a coordenada.

Lema 57 *Sea A un anillo Booleano entonces A tiene característica* 2.

Demostración. Sea $x \in A$ entonces $x^2 = x$ y $(x+x)^2 = x + x$ lo que implica que $x^2 + 2x + x^2 = x + x$ por lo tanto $2x = 0$ así la característica de A es 2. ■

Se deduce entonces que $x = -x$ para todo x de A.

Lema 58 *Sea A un anillo Booleano entonces A es conmutativo.*

Demostración. Sea $x, y \in A$ debemos mostrar que $xy = yx$. como A es un anillo Booleano entonces se verifica que $x^2 = x$ y $y^2 = y$ ahora si

$$\begin{aligned} x + y &= (x+y)^2 \\ &= x^2 + xy + yx + y^2 \\ &= x + xy + yx + y \end{aligned}$$

Por lo tanto $xy = -yx$ pero por el lema anterior $x = -x$ para todo $x \in A$. concluimos que $xy = yx$. ■

Proposición 59 *Sea A un campo. Si A es Booleano entonces $A \cong Z_2$.*

Demostración. Sea $x \in A$ y $x \neq 0$, entonces $x^2 = x$ lo que implica que $x(x-1) = 0$ pero existe x^{-1} por lo tanto $x = 1$ así $A = \{0, 1\} \cong Z_2$. ■

Proposición 60 *Si A es un anillo booleano con identidad, entonces cada ideal primo en A es un ideal maximal en A.*

Demostración. Sea P un ideal primo de A. Para mostrar que P es maximal, mostraremos que A/P es un campo. Sea $x + P \in A/P$ con $x + P \neq P$. Luego $x \notin P$. Tenemos

$$x^2 + P = x + P.$$

Luego $x(x-1) = x^2 - x \in P$. Como P es primo, entonces $x - 1 \in P$, de donde

$$x + P = 1 + P.$$

Así $A/P = \{P, P+1\} \cong \mathbb{Z}_2$ es un campo. Por tanto concluimos que P es maximal. ■

Corolario 61 *Todo anillo booleano es un pm-anillo.*

Demostración. Sea P un ideal primo del anillo booleano A y sean M y M' ideales maximales tales que $P \subset M$ y $P \subset M'$. Como todo primo es maximal, por maximalidad de P, $M = P = M'$ ■

Con estas propiedades mostramos que un anillo booleano es pm-anillo aplicando la definición de pm-anillo.

Existe una propiedad interesante mas operativa que nos ayudara a definir si un anillo es pm-anillo cuya propiedad se enuncia en el ultimo capitulo del proyecto.

De aquí en adelante seguiremos conociendo propiedades y características de anillos que llegan a ser pm-anillo cuya verificación se probara en el capitulo 4. El objetivo de la siguiente sección es mostrar algunas propiedades de anillos locales.

3.3 Anillos Locales

Definición 62 *Un anillo A se llama local si tiene un único ideal maximal o equivalentemente, si los elementos no invertibles forman un ideal.*

Ejemplo 63 *Todos los cuerpos (los anillos de división) son anillos locales, ya que $\{0\}$ es el único ideal maximal en tales anillos.*

Ejemplo 64 *El anillo de números racionales con denominador impar es local; su ideal maximal consiste de las fracciones con numerador par y denominador impar.*

Lema 65 *Sea A un anillo. I ideal propio de A, son equivalentes:*

1 cada elemento $x \in A - I$ es invertible,

2 A es un anillo local con ideal maximal I.

Demostración. Dado un ideal propio J de A, los elementos de J no son invertibles, luego $J \subseteq I$. ■

Lema 66 *Sea A un anillo y $\boldsymbol{m}$ un ideal maximal de A tal que cada elemento $x \in 1+\boldsymbol{m}$ es invertible, entonces A es un anillo local.*

Demostración. Dado $x \in A-\mathbf{m}$, tenemos $\mathbf{m}+Ax = A$, y existen $m \in \mathbf{m}, a \in A$ tales que $m + ax = 1$,luego $ax = 1 - m \in 1 + \mathbf{m}$. Entonces ax es invertible, y por tanto x también lo es. Aplicando el Lema anterior tenemos el resultado. ■

Ahora mostraremos otro anillo interesante como son los anillos regulares o anillos Von Neumann. En la siguiente sección mostramos algunas propiedades básicas y mas utilizadas de los elementos regular Von Neumann en un anillo.

3.4 Anillos regulares Von Neumann

Definición 67 *Se dice que un elemento $a \in A$ es Von Neumann regular o elemento regular si existe $b \in A$ tal que $a = a^2b = aba$.*

Dicho elemento b se denomina inverso generalizado de a.

Definición 68 *Un anillo A se llama Von neumann Anillo Regular o simplemente anillo regular si a es elemento Von Neumann regular para cada $a \in A$ denotado por VNR-anillo. Un ideal de uno o dos lados de A se llama regular si todos sus elementos son regulares.*

Notación 69 *denotamos por:*

1 $vr(A) = \{a \in A : a \text{ es von neumann regular}\}$

2 $nvr(A) = A - vr(A)$.

Ejemplo 70 *En Z_8.*

$$vr(Z_8) = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}\}$$
$$nvr(Z_8) = \{\overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$$

Observación 71 *Los inversos generalizados no necesitan ser unicos, por ejemplo en Z_6, $\overline{5}$ y $\overline{1}$ son dos generalizados inversos por $\overline{3}$.*

Proposición 72 *Si A es un VNR-anillo se cumplen las siguientes propiedades:*

1 Si a es unitario en A entonces $a \in vr(A)$.

2 Los elementos del anillo A son unidades o divisores de cero.

3 Si $a = a^2b$ Entonces ab es un elemento idempotente.

Demostración. Veamos:

1 Inmediato.

2 Si $a \in A$ entonces $a = a^2b$ por tanto:

$$a - a^2b = 0$$
$$a(1 - ab) = 0$$

Entonces a es un divisor de cero o a es una unidad.

3 como $a = a^2b$ Entonces $ab = (ab)^2$ por lo tanto ab es un elemento idempotente.

■ Entre los anillos regulares se incluyen los anillos de división, los anillos Booleanos.

Proposición 73 *Cualquier campo es VNR-anillo y cualquier anillo Booleano es VNR-anillo.*

Demostración. Inmediato. ■

Lema 74 *Sea A un anillo y $a \in vr(A)$ entonces existe un único $b \in A$ tal que $a = a^2b$ y $b = b^2a$.*

Demostración. Sea $a \in vr(A)$ entonces existe un elemento $c \in A$ tal que $a = a^2c$ ahora sea $b = c^2a$ entonces

$$\begin{aligned} a^2b &= a^2c^2a \\ &= (a^2c)ca \\ &= aca \\ &= a^2c \\ &= a \end{aligned}$$

Por otro lado

$$
\begin{aligned}
b^2a &= (c^2a)^2a \\
&= c^4a^2a \\
&= c(ca)^2ca \\
&= c(ca)(ca) \\
&= c(ca)^2 \\
&= c(ca) \\
&= c^2a \\
&= b
\end{aligned}
$$

Ahora para probar la unicidad asumimos que existe otro elemento d tal que $a = a^2d$ y $d = d^2a$ entonces $(b^2a)d^2 = b^2(ad^2)$ por lo tanto

$$
\begin{aligned}
b - d &= b^2a - d^2a \\
&= b^2a^2d - d^2a^2b \\
&= a^2(bd^2 - b^2d) \\
&= a^20 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Así $b = d$. ■

Observación 75 *Este elemento unico sera denotado por $a^{(-1)}$ y se llamara Von Neumann inversa de a.*

Ejemplo 76 *En Z_{15}. El inverso Von Neumann de $\overline{3}$ sera $\overline{3}^{(-1)} = \overline{12}$ porque*

$$
\begin{aligned}
\overline{3} &= \overline{3}^2\overline{12} \text{ y} \\
\overline{12} &= \overline{12}^2 3.
\end{aligned}
$$

3.5 Anillo regular local de Von Neumann y fuertemente anillo regular local de von Neumann

En esta sección presentaremos y caracterizaremos los, anillos regulares locales de von Neumann y los anillos fuertemente regulares locales de von Neumann (anillos SVNL). Anillos VNL fue el primero definido en (Contessa, 1984).

Definición 77 *Un anillo A se llama anillo regular local de von Neumann (denotado por el anillo VNL) si $a \in vr(A)$ o $1 - a \in vr(A)$ para todo $a \in A$.*

Definición 78 *Un anillo A se llama fuertemente anillo regular local de von Neumann (denotado por el anillo SVNL) si para todo subconjunto no vacío $S \subset A$ con $(S) = A$, tenemos al menos un elemento de S pertenece a $vr(A)$.*

Tenga en cuenta que cualquier anillo SVNL es un anillo VNL, ya que para todo $a \in A$, $A = (a, 1 - a)$.

Primero estudiaremos las propiedades de los anillos SVNL, luego mostraremos que VNL implica SVNL.

Teorema 79 *La imagen homomórfica de un SVNL-anillo A es un SVNL-anillo.*

En particular, para cualquier ideal propio I de un SVNL-anillo, el anillo cociente A/I es un SVNL-anillo.

Demostración. Sea $\phi : A \longrightarrow A'$ un homomorfismo de anillo. Supongamos que $\phi(A) = (S)$ Así que existe $x \in A$ tal que $\phi(x) \in S$ y x pertenece a $vr(A)$ Por lo tanto, existe $y \in A)$ tal que $x = x^2 = y$. Así que

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi(x^2)\phi(y) \\ &= (\phi(x))^2\phi(y) \end{aligned}$$

Por lo tanto, S contiene un elemento, $\phi(x)$ que pertenece a $\phi(A)$ Así, $\phi(A)$ es SVNL-anillo.

Ahora; ya que $\varphi : A \longrightarrow A/I$ es un homomorfismo, el resultado es inmediato. ■

Lema 80 *Si $a \in vr(A)$, entonces para cada ideal I de A $a \in mI$ cuando $a \in I$.*

Demostración. Asumir que $a \in I$. Dado que $a \in vr(A)$, entonces existe $b \in A$ tal que $a = a^2b$. Por lo tanto $a = a^2b = a(ab)$ pero $ab \in I$ por lo tanto $a \in mI$. ■

Teorema 81 *Sea A un anillo tal que para cada $a \in A$, a es una unidad o $1-a$ es una unidad si y solo si A es un anillo local.*

Demostración. Sea M un ideal máximal de A. Supongamos que $a \in M$. Entonces $ax \in M$ para todo $x \in A$. Por lo tanto, ax no es una unidad para todo $x \in A$, entonces $1 - ax$ es una unidad para todo $x \in A$, lo que implica que $M \subseteq J(A)$. Pero $J(A) \subseteq M$, por lo tanto $M = J(A)$. Así, M es el único ideal máximal de A. Por lo tanto, A es local.

A la inversa, suponga que A es un anillo local con M, que es un ideal máximal único y sea $a \in A$. Entonces tenemos dos casos:

- Si $a \notin M$, entonces a es una unidad.
- Si $a \in M$, entonces $1 - a \notin M$ y entonces $1 - a$ es una unidad.

■

Lema 82 *Sea A un dominio de integridad. Entonces A es SVNL-anillo si y solo si A es local.*

Demostración. Supongamos que A es un dominio de integridad y un SVNL-anillo. Sea $a \in A - \{0\}$. Entonces $A = (a, 1-a)$ así que $a \in vr(A)$ o $1 - a \in vr(A)$. Por lo tanto, a es una unidad o $1 - a$ es una unidad porque A es un dominio de integridad. Así, A es local.

A la inversa, suponga que A es un anillo local y $A = (a_\alpha : \alpha \in \Lambda)$ Sea M el único ideal maximal de A. Ya que $M \subset A$, existe $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que $a_{\alpha_0} \notin M$, por lo tanto a_{α_0} es una unidad, así $a_{\alpha_0} \in vr(A)$. Por lo tanto, A es un SVNL-anillo. ■

Teorema 83 *Si A es un SVNL-anillo, entonces es un PM-anillo.*

Demostración. Sea A un SVNL-anillo y P un ideal primo de A. Entonces A/P es un dominio de integridad, entonces por Teorema anterior obtenemos que A/P es el SVNL-anillo, por lo tanto, mediante Lemma anterior obtenemos A/P es un anillo local, por lo tanto, existe un ideal máximal único M de A tal que $P \subseteq M$ y M/P es el ideal máximal de A/P, entonces P está contenido en un ideal máximal único M. Por lo tanto, A es un PM-anillo. ■ Con esto damos por finalizado las características y propiedades de anillos que llegan a ser pm-anillo cuya verificación recalcamos nuevamente más adelante.

Capítulo 4

Espectro primo y topología de Zariski

4.1 Introducción

En este capítulo vamos a trabajar con un anillo conmutativo con elemento unidad $(A, +, \cdot)$, al que usualmente denotaremos simplemente con A.

Consideraremos el conjunto de los ideales primos de A y lo dotaremos de la topología de Zariski. A este espacio topológico lo llamaremos espectro primo de A.

El objetivo del capítulo es estudiar las propiedades topológicas del espectro primo, poniendo especial atención en las propiedades de compacidad y conexión.

4.2 Topología de Zariski

Sea A un anillo y sea X el conjunto de todos los ideales primos de A. Para cada subconjunto E de A, se indica por $V(E)$ el conjunto de todos los ideales primos que contienen a E.

Tenemos que se verifica las siguientes propiedades:

Proposición 84 *Sea A un anillo. S y T subconjuntos de A.*

si $S \subset T$, entonces $V(T) \subset V(S)$

Demostración. Inmediato. ■

Proposición 85

1. *Si I es ideal $V(I) = V(rad(I))$.*

2. *$V(0) = X$, $V(1) = \emptyset$.*

3. *Si $\{S_i\}_{i\in\Lambda}$ es una familia cualquiera de subconjuntos de A, entonces*

$$V(\bigcup_{i\in\Lambda} S_i) = \bigcap_{i\in\Lambda} V(S_i).$$

4. *$V(I \cap J) = V(IJ) = V(I) \cup V(J)$.*

Demostración.

1. $V(I) = V(rad(I))$.

   Sea $P \in V(I)$ entonces $I \subset P$, pero sabemos que $I \subseteq\ rad(I)$ y que

$$rad(I) = \bigcap_{I\subseteq P_i} P_i$$

   p_i primo, tenemos que

$$I \subseteq \bigcap_{I\subseteq P_i} P_i \subseteq P \Rightarrow P \in V(rad(I))$$

   Por otro lado sea $P \in V(rad(I))$ entonces $rad(I) \subseteq P$; pero sabemos que $I \subseteq rad(I)) \Rightarrow I \subseteq P \in V(I)$ tenemos que $V(rad(I)) \subseteq V(I)$.

   Por tanto $V(I) = V(rad(I))$.

2. $V(0) = X$.

   Por definición sabemos que $V(0) = \{p : primo/0 \in p\}$ pero todo ideal de A contiene al elemento 0, entonces $V(0) = X$.

   $V(1) = \emptyset$.

   $V(1) = \{p : primo/1 \in p\}$ pero ningún ideal primo contiene al elemento 1 por tanto $V(1) = \emptyset$.

3. probemos que $V(\bigcup_{i\in\Lambda} S_i) = \bigcap_{i\in\Lambda} V(S_i)$

   Sea $P \in V(\bigcup_{i\in\Lambda} S_i)$

$$\Leftrightarrow \bigcup_{i\in\Lambda} S_i \subseteq P$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in \Lambda; S_i \subseteq P$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in \Lambda; P \in V(S_i)$$

$$\Leftrightarrow; P \in \bigcap_{i\in\Lambda} V(S_i)$$

4. Como $IJ \subset I \cap J \subset I$, entonces $V(I) \subset V(I \cap J) \subset V(IJ)$, y el mismo resultado con J. Así $V(I) \cup V(J) \subset V(I \cap J) \subset V(IJ)$. Así es suficiente probar que $V(IJ) \subset V(I) \cup V(J)$. Sea $Q \in V(IJ)$. Entonces Q un ideal primo de A tal que $IJ \subset Q$. Por reducción al absurdo, supongamos que $Q \notin V(I) \cup V(J)$, entonces $I \not\subset Q$ y $J \not\subset Q$. Luego existe un elemento $j \in J$ y $j \notin Q$. Consideremos el ideal producto $I\langle j\rangle$. Claramente $I\langle j\rangle \subset IJ \subset Q$, y por primalidad deducimos $I \subset Q$ o $\langle j\rangle \subset Q$ que es una contradicción.

■

Con estos resultados mostraremos en la siguiente proposición que los conjuntos $V(E)$ satisfacen los axiomas de los conjuntos cerrados en un espacio topológico. La topología resultante se denomina la *topología de Zariski.* El espacio topológico X se denomina el *espectro primo* de A, y se indica por $Spec(A)$.

previamente recordemos algunos conceptos de topología.

4.3 Base de cerrados y abierto de $\mathrm{Spec}(A)$

Ahora definiremos una topología en $\mathrm{Spec}(A)$. Recordamos las definiciones de base de abiertos y de base de cerrados de un espacio topológico.

Sea X un espacio topológico.

1. Una base de abiertos de X es una familia de abiertos B, tal que todo abierto U de X puede escribirse como unión de elementos de B.

2. Un familia B de subconjuntos de X es base de abiertos para alguna topología en X si cumple:

   (a) $\bigcup_{B\in B} B = X$

   (b) Para todos $B_1, B_2 \in B$ y todo $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in B$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Equivalentemente al anterior pero en términos de conjuntos cerrados es la siguiente:

1. Una base de cerrados de X es una familia de cerrados F, tal que todo cerrado F de X puede escribirse como intersección de elementos de F.

2. Una familia F de subconjuntos de X es base de cerrados para alguna topología en X si cumple:

   (a) $\bigcap_{F\in F} F = \emptyset$

   (b) Para todos $B_1, B_2 \in F$ y todo $x \notin F_1 \cap F_2$, existe $F_3 \in F$ tal que $x \notin F_3$ y $F_1 \cup F_2 \subset F_3$.

Proposición 86 *La familia de conjuntos* $F = \{V(S)\}_{S\subset A}$ *forman una base de cerrados para una topología en el conjunto* $\mathrm{Spec}(A)$ *de ideales primos de* A.

Demostración.

(a) $\bigcap_{S\subset A} V(S) = V(\bigcup_{S\subset A} S) = V(A) = \emptyset$.

(b) Sean F_1,$F_2 \in F$ y $I \notin F_1 \cup F_2$. Entonces existen subconjunto S y T de A tal que

$$F_1 = V(S) = V((S)) \text{ y } F_2 = V(T) = V((T)).$$

Existe

$$F_3 = F_1 \cup F_2 = V((S)(T)) \in F$$

tal que $I \notin F_3$,

$$\begin{aligned} F_1 \cup F_2 &= V((S)) \cup V((T)) \\ &= V((S)(T)) \\ &= F_3 \end{aligned}$$

donde algunas igualdades se justifican con la proposición 85.

■

Definición 87 *Para cada* $a \in A$, *definimos el conjunto* $D(a)$ *como el complemento del conjunto* $V(a)$ *en* $X = Spec(A)$, $D(a)$ *son los conjuntos abiertos de la topología de Zariski. es decir*

$$D(a) = \mathrm{Spec}(A) - V(a). = V^c(a)$$

Proposición 88 *la familia de conjunto* $\{D(a)\}_{a\in A}$ *es una base de abiertos de* $\mathrm{Spec}(A)$

Demostración. Debemos probar que todo abierto de $\mathrm{Spec}(A)$ es unión de algunos $D(a)$'s. Sea U un abierto de $\mathrm{Spec}(A)$. En entonces $\mathrm{Spec}(A)-U$ es cerrado que podemos escribir con intersección de los cerrados básicos.

$$\mathrm{Spec}(A) - U = \bigcap_{a\in S} V(a)$$

donde $S \subset A$. Tomado complementos

$$\begin{aligned} U &= \mathrm{Spec}(A) - \bigcap_{a\in S} V(a) \\ &= \bigcup_{a\in S} (\mathrm{Spec}(A) - V(a)) \\ &= \bigcup_{a\in S} D(a) \end{aligned}$$

■

Proposición 89 *Para $a, b \in A$ se tiene:*

1. $D(a) \cap D(b) = D(ab)$.
2. $D(a) = \emptyset$ *si y sólo si* $a \in N(A)$.
3. $D(a) = \mathrm{Spec}(A)$ *si y sólo si* , $a \in U(A)$.
4. *Si* $D(a) = D(b)$ *si y sólo si* $D(\sqrt{(a)} = D(\sqrt{(b)}$.

Demostración.

1.

$$\begin{aligned} D(a) \cap D(b) &= V^c(a) \cap V^c(b) \\ &= (V(a) \cup V(b))^c \\ &= (V(ab))^c \\ &= D(ab) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} D(a) = \emptyset &\Leftrightarrow V^c(a) = \emptyset \\ &\Leftrightarrow V(a) = X = Spec(A) \\ &\Leftrightarrow \forall P \in X; a \in P \\ &\Leftrightarrow a \in \bigcap_{P:primo} P = N(A) \end{aligned}$$

3. Si $D(a) = \text{Spec}(A)$, entonces para todo ideal primo I, $a \notin I$. Por contradicción, supongamos que a no es una unidad, y consideremos el ideal $\langle a \rangle$, que es distinto de A, ya que a no es una unidad. Todo ideal distinto de A, esta contenido en un ideal maximal, así existe un ideal maximal I tal que $\langle a \rangle \subset I$, que implica que $a \in I$ que es una contradicción. Recíprocamente, si a es una unidad, a no pertenece a ningún ideal primo I, es decir $I \in D(a)$ para todo I ideal primo, así $D(a) = \text{Spec}(A)$.

4. Si $D(a) = D(b)$, entonces, tomando complementos $V(a) = V(b)$. Por proposición 85 $V(\sqrt{(a)}) = V(\sqrt{(b)})$. Razonando inversamente, se tiene la implicación recíproca.

■

4.4 Compacidad del espectro primo

Definición 90 *Sea* $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *tal que* $\forall\alpha\in A$, $U_\alpha\in\tau$*:* $X=\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha$ *es llamada una cubierta del espacio* X*.*

Definición 91 *Sea* $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *una cubierta de* X*, el conjunto* $\{U_{\alpha_1},\dots,U_{\alpha_n}\}_{\alpha_i\in A}$ *tal que*

$$X=\bigcup_{i=1}^{n}U_{\alpha_i}$$

es llamada subcubierta finita de X*.*

Definición 92 *Un espacio* X *es compacto si* $\forall$: $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *cubierta de* X *existe* $\{U_{\alpha_1},\dots,U_{\alpha_n}\}_{\alpha_i\in A}$ *una subcubierta finita de* X*.*

Proposición 93 *Los conjunto abiertos* $D(a)$ *son compactos, en particular* $D(1)=\mathrm{Spec}(A)$ *es compacto.*

Demostración. Note que todo abierto es unión de abiertos básicos. Sea $\{D(a_i)\}_{i\in\Lambda}$ un recubrimiento de $D(a)$. Entonces

$$D(a)\subset\bigcup_{i\in\Lambda}D(a_i).$$

Tomado complementos

$$\bigcap_{i\in\Lambda}V(a_i)\subset V(a).$$

Por proposición 85

$$V(\bigcup_{i\in\Lambda}\{a_i\})\subset V(a).$$

Pero $\left(\bigcup_{i\in\Lambda}\{a_i\}\right) = (a_i)_{i\in\Lambda}$ es el ideal generado por los a_i.

$$V((a_i)_{i\in\Lambda}) \subset V(a).$$

De donde, si I esta en el primer conjunto, debe estar en el segundo. Así

$$a \in I \qquad \text{para todo } I \text{ primo, con } (a_i)_{i\in\Lambda} \subset I.$$

De donde

$$a \in \bigcap_{\substack{(a_i)_{i\in\Lambda}\subset I\\ I \text{ primo}}} I = \sqrt{(a_i)_{i\in\Lambda}}.$$

Por definición de radical, existe un entero positivo m tal que

$$a^m \in (a_i)_{i\in\Lambda}.$$

Por definición de ideal generado

$$a^m = r_1a_1 + r_2a_2 + \cdots + r_na_n.$$

De donde

$$a^m \in (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

o bien

$$(a^m) \subset (a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Aplicando V

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) \subset V(a^m) = V(a).$$

La última igualdad es fácil de probar. Luego

$$V(\bigcup_{i=1}^{n}\{a_i\}) \subset V(a)$$

y por proposición 85

$$\bigcap_{i=1}^{n} V(a_i) \subset V(a)$$

tomando complementos

$$D(a) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D(a_i).$$

■

4.5 Cierre de Spec (A)

recordemos algunos conceptos de topología.

Definición 94 *Sea $x \in A$, U es un vecindad de x si existe un abierto V tal que $x \in V \subset U$.*

Definición 95 *Sea $x \in A$, $S \subset A$ y (A, τ) espacio topológico, diremos que x es adherente a S si $\forall V$: vecindario de x : $V \cap S \neq \emptyset$, es decir, S contiene a cada vecindario de x.*

El cierre de S, denotado por $\overline{S}$, es el conjunto de puntos en A que son adherentes a S, evidentemente $S \subset \overline{S}$.

Definición 96 *Una definición alternativa de cierre de un conjunto es la siguiente: Sea $S \subset A$ el cierre de S es el conjunto cerrado mas pequeño que contiene a S. Es decir,*

$$\overline{S} = \cap\{D : cerrado\ y\ S \subset D\}$$

Proposición 97 *Sea $F \subset \mathrm{Spec}(A)$ y $\Psi = \cap\{I \text{ primo}: I \in F\}$ la intersección de ideales primos A que pertenecen a F. Entonces la adherencia de F en $\mathrm{Spec}(A)$ es $V(\Psi)$, es decir $\overline{F} = V(\Psi)$.*

Demostración. Si I es un ideal primo tal que $I \in F$. Entonces $\Psi \subset I$, luego $I \in V(\Psi)$ para todo $I \in F$, implica que $F \subset V(\Psi)$. Ahora probaremos que $V(\Psi)$ es el menor cerrado que contiene a F. Sea $V(S)$ un conjunto cerrado tal que $F \subset V(S)$, donde $S \subset A$. Entonces $S \subset I$ para todo $I \in F$. Entonces $S \subset \Psi$, luego $V(\Psi) \subset V(S)$. ■

4.6 Irreducibilidad

Definición 98 *Un espacio topologico X se dice que es irreducible si $X \neq \emptyset$ y si para cada par de conjuntos abiertos no vacíos en X se cortan, o si $X = F \cup G$ con F, G cerrados $F = X$ ó $G = X$.*

Definición 99 *Para toda parte Y de $X = Spec(A)$, definimos $\iota(Y)$ como la intersección de los ideales primos de A que pertenecen a Y , es decir:*

$$\iota(Y) = \bigcap_{P \in Y : P \text{ primo}} P.$$

Es claro que $\iota(Y)$ es un ideal de A, y que se cumplen las siguientes relaciones:

1. $\iota(\emptyset) = A$

2. $\iota(\bigcup_{\lambda \in L} Y_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in L} \iota(Y_\lambda)$

Proposición 100 *Sea A un anillo, Y una parte de $X = Spec(A)$. Entonces $V(\iota(Y))$ es la adherencia de Y en X.*

Demostración. Sabemos que $Y \subset V(\iota(Y))$ ya que si $P \in Y$

$$\Rightarrow \bigcap_{q \in Y: q \ primo} q \subseteq P.$$

$$\Rightarrow P \in V(\iota(Y))$$

Probaremos que $V(\iota(Y))$ es el menor cerrado que contiene a Y.

Sea $V(M)$ un conjunto cerrado tal que $Y \subset V(M)(M \subset A)$, entonces $M \subseteq P$ para todo $P \in Y$ ideal primo, por lo que $M \subseteq \iota(Y) \Rightarrow V(\iota(Y)) \subset V(M)$.

Por lo que $\overline{Y} = V(\iota(Y))$ ∎

Proposición 101 *Sea A un anillo. Para que una parte Y de X sea irreducible, es necesario y suficiente que el ideal $\iota(Y)$ sea primo.*

Demostración. Supongamos que $\iota(Y) = q$, notemos que para un elemento $f \in A$, la relación $f \in q$ es equivalente a $Y \subset V(f)$ ya que:

$$f \in q = \bigcap_{p \in Y: p \ primo} p$$

$$\Leftrightarrow \forall p \in Y, f \in p$$

$$\Leftrightarrow p \in V(f)$$

Supongamos que Y es irreducible, y sean $f, g \in A$ tales que $fg \in q$. Entonces

$$Y \subset V(fg) = V(f) \cup V(g);$$

como Y es irreducible, $V(f)$ y $V(g)$ son cerrados, entonces $Y \subset V(f)$ o $Y \subset V(g)$, de donde $f \in q$ o $g \in q$, por tanto q es primo.

Ahora supongamos que $\iota(Y) = p$, p primo, sabemos que $\overline{Y} = V(\iota(Y)) = V(p)$ y $\{\overline{p}\} = V(p)$ entonces $\overline{Y} = \{\overline{p}\}$ como un conjunto unitario es irreducible entonces $\overline{Y}$ es irreducible, por lo que Y es irreducible. ■

Proposición 102 *El espacio topológico $X = Spec(A)$ es irreducible si y sólo si el nilradical de A es un ideal primo.*

Demostración.

$\Rightarrow$) $X = Spec(A)$ es irreducible entonces el nilradical de A es un ideal primo.

Sean $x, y \in A$ tales que $x \notin Nil(A)$ y $y \notin Nil(A)$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists q_1, q_2 \in X \text{ tales que } x \notin q_1 \text{ y } x \notin q_2 \\ &\Rightarrow q_1 \notin V(x) \ ; \ q_2 \notin V(y) \\ &\Rightarrow q_1 \in D(x) \ ; \ q_2 \in D(y) \end{aligned}$$

Pero por hipótesis X es irreducible tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} D(x) \cap D(y) \neq \emptyset \ pero \ D(x) \cap D(y) &= D(xy) \\ D(xy) &\neq \emptyset \end{aligned}$$

Entonces existe $p \in X$ tal que $xy \notin p$ entonces $xy \notin Nil(A)$

Por lo tanto $Nil(A)$ es primo.

$\Leftarrow$) Si el nilradical de A es primo entonces $X = Spec(A)$ es irreducible.

Sean $D(f) \neq \emptyset$ y $D(g) \neq \emptyset$ con $f, g \in A$ dos conjuntos abiertos en X y supongamos que

$$\begin{aligned} D(f) \cap D(g) = \emptyset \ pero \ D(f) \cap D(g) &= D(fg) \\ D(fg) &= \emptyset \end{aligned}$$

Entonces para todo $p \in X$; $fg \in p$ entonces $fg \in Nil(A)$.

Pero por hipótesis $Nil(A)$ es ideal primo de A entonces tenemos que: $f \in Nil(A)$

o $g \in Nil(A)$ entonces $D(f) = \emptyset$ ó $D(g) = \emptyset$ lo que se contradictorio, por lo que $D(f) \cap D(g) \neq \emptyset$

Por tanto $X = Spec(A)$ es irreducible. ■

4.7 Conexión en el espectro

Estudiaremos ahora algunos resultados sobre conexión en $Spec(A)$. Para realizar esta tarea, tendremos que trabajar con los elementos idempotentes del anillo.

Denotaremos con $B(A)$ al conjunto de los idempotentes de un anillo A. Primero dotaremos a $B(A)$ de estructura de álgebra de Boole.

Vamos a recordar las nociones de retículo distributivo y de álgebra de Boole. Los retículos se pueden definir de dos formas equivalentes, como conjunto parcialmente ordenado o como conjunto con dos operaciones. Mas adelante, ahondaremos en estas construcciones, pero por el momento simplemente introducimos las definiciones necesarias para abordar el estudio de la conexión en el espectro.

Definición 103 *Diremos que $(R, \vee, \wedge)$, donde R es un conjunto y $\vee, \wedge$ son operaciones binarias en R, es un* ***retículo****, si se cumple que para todos $r_1, r_2, r_3 \in R$:*

- *Asociatividad:*
  - $r_1 \vee (r_2 \vee r_3) = (r_1 \vee r_2) \vee r_3$
  - $r_1 \wedge (r_2 \wedge r_3) = (r_1 \wedge r_2) \wedge r_3$
- *Conmutatividad:*
  - $r_1 \vee r_2 = r_2 \vee r_1$
  - $r_1 \wedge r_2 = r_2 \wedge r_1$
- *Absorción:*

- $r_1 \vee (r_1 \wedge r_2) = r_1$
- $r_1 \wedge (r_1 \vee r_2) = r_1$

De las dos propiedades de absorción se deduce:

- *Idempotencia:*
  - $r_1 \vee r_1 = r_1$
  - $r_1 \wedge r_1 = r_1$

Diremos que $(R, \vee, \wedge)$ *es un retículo distributivo si cumple:*

- *Distributividad:*
  - $r_1 \vee (r_2 \wedge r_3) = (r_1 \vee r_2) \wedge (r_1 \vee r_3)$
  - $r_1 \wedge (r_2 \vee r_3) = (r_1 \wedge r_2) \vee (r_1 \wedge r_3)$

Diremos que un elemento m *(resp.* M*) de un retículo* R *es un elemento mínimo (resp. máximo) si* $r \vee m = r$ *(resp.* $r \wedge M = r$*) para todo* $r \in R$*. El elemento mínimo (resp. máximo) en caso de existir es único y sera denotado con* 0 *(resp.* 1*).*

Sea $(R, \vee, \wedge)$ un retículo distributivo con elementos mínimo 0 y máximo 1. Diremos que R es un **álgebra de Boole** si, para cada elemento $r \in R$, existe $r' \in R$ tal que $r \vee r' = 1$ y $r \wedge r' = 0$, en cuyo caso se dice que r' es el complementario del elemento r.

Proposición 104 *Para un anillo* A*, en su conjunto de idempotentes* $B(A)$ *consideramos las operaciones:*

- $a_1 \vee a_2 = a_1 + a_2 - a_1 a_2$*, para todos* $a_1, a_2 \in B(A)$*.*
- $a_1 \wedge a_2 = a_1 a_2$*, para todos* $a_1, a_2 \in B(A)$*.*
- $a' = 1 - a$*, para todos* $a \in B(A)$*.*

De esta forma $B(A), \vee, \wedge, 0,')$ *es un álgebra de Boole. Observese que los elementos 0 y 1 del anillo* A *son respectivamente el elemento mínimo y el elemento máximo de* $B(A)$.

Veamos una forma de caracterizar los conjuntos que son simultáneamente abiertos y cerrados de $Spec(A)$, en términos de idempotentes del anillo.

Proposición 105 *Todo subconjunto abierto y cerrado de* $Spec(A)$ *es de la forma* $V(e)$ *para algún idempotente* e *del anillo* A.

Demostración. Sea S un subconjunto abierto y cerrado de $Spec(A)$. Por ser cerrado, la proposición 1.1 garantiza que existe un ideal I de A, tal que $S = V(I)$. Por ser su complementario en $Spec(A)$ cerrado, podemos razonar de manera análoga y deducir que existe un ideal J de A tal que $Spec(A) - S = V(J)$. De esta manera, tenemos $Spec(A) = V(I) \cup V(J)$ y $V(I) \cap V(J) = \emptyset$.

Utilizando la proposición 1.3 vemos que $V(I) \cup V(J) = V(IJ) = Spec(A)$, y deducimos que IJ esta contenido en todos los ideales primos de A. En particular, IJ esta contenido en $N(A)$.

De $V(I) \cap V(J) = \emptyset$ obtenemos que no existe un ideal primo de A que contenga a I y J. El ideal $I + J$ es el menor ideal que contiene a I y a J. Si $I + J$ fuera distinto del total, existiría un ideal maximal M con $I + J \subset M$, en contra de lo obtenido. Concluimos que $I + J = A$ y resulta que existen $i \in I, j \in J$ tales que $i + j = 1$. Por ser ij nilpotente, existe un entero n tal que $(ij)^n = 0$, entonces existen $a_1, a_2 \in A$ tales que:

$$\begin{aligned} 1 &= 1^{2n} \\ &= (i+j)^n (i+j)^n \\ &= i^n a_1 + j^n a_2. \end{aligned}$$

Se tiene $i^n a_1 \in I$ y $j^n a_2 \in J$. Los elementos $i' = i^n a_1 \in I$, $j' = j^n a_2 \in J$ cumplen $i'j' = 0$ y $i' + j' = 1$. Obtenemos entonces, $1 = i' + j' = i'^2 + j'^2$ y observamos que:

$$\begin{aligned} i - i' &= (1 - i')(i' + j') \\ &= i' + j' - i'j' - i'^2 \\ &= i' + j' - i'^2 \\ &= 1 - i'^2. \end{aligned}$$

Deducimos que i' es idempotente. Si un ideal primo contiene a I, entonces contiene a i' y por lo tanto no puede contener a j', ya que contendría al elemento 1. Se deduce que $V(I) = V(i')$ que permite concluir.

Recíprocamente, si e es un idempotente de A, entonces $V(e)\ V(1-e) = \emptyset$, ya que ningún ideal primo puede contener a e y a $1-e$, pues contendría a 1. De modo similar, $V(e) \cup V(1-e) = Spec(A)$, ya que $e(1-e) = 0$. Vemos claramente que $V(e)$ es abierto al ser su complementario en $Spec(A)$ cerrado, y puesto que por construcción es cerrado, podemos concluir la proposición. ■ Vemos que $Spec(A)$ es conexo si, y solo si, A no tiene elementos idempotentes distintos de 0 y 1.

Nuestro objetivo ahora es obtener un criterio para saber cuando dos ideales primos de A se encuentran en la misma componente conexa de $Spec(A)$.

Definición 106 *Un espacio topológico X es conexo si, y solo si, los únicos subconjuntos de X que son a la vez abiertos y cerrados son X y $\emptyset$.*

Antes de abordar dicho problema, necesitamos probar un resultado previo.

Sea $\Phi : A \to B$ un homomorfismo de anillos. Sabemos que si P es un ideal primo de B, entonces es un ideal primo de A. Mas aun, veremos a continuación que la aplicación inducida:

$$\Phi^* : Spec(B) \longrightarrow Spec(A)$$
$$P \longmapsto \Phi^{-1}(P)$$

Es continua.

Lema 107 *Sea $\Phi : A \to B$ un homomorfismo de anillos y $\Phi^* : Spec(B) \longrightarrow Spec(A)$ la aplicación inducida correspondiente. Dado $a \in A$ tenemos que*

$$(\Phi^*)^{-1}(D(a)) = D(\Phi(a))$$

Y como consecuencia, Φ^* es continua.

Demostración. Basta observa que:

$$\begin{aligned}(\Phi^*)^{-1}(D(a)) &= \{I \in Spec(B) : \phi^*(I) \in D(a)\} \\ &= \{I \in Spec(B) : a \notin \phi^{-1}(I)\} \\ &= \{I \in Spec(B) : \phi(a) \notin I\} \\ &= D(\Phi(a))\end{aligned}$$

■ Podemos abordar ahora el problema de las componentes conexas planteado anteriormente.

Proposición 108 *Dos ideales primos $I; J$ del anillo A pertenecen a la misma componente conexa de $Spec(A)$ si, y solo si, contienen a los mismos idempotentes.*

Demostración. Sean $I; J$ ideales primos de A. Si un idempotente e de A pertenece a I pero no a J, entonces $V(e)$ es un conjunto abierto y cerrado de $Spec(A)$ que contiene a I. Ademas, tenemos $e(1-e) = 0 \in J$ y, utilizando la primalidad de J, deducimos que J esta contenido en $V(1-e)$, que es otro conjunto abierto y cerrado. Como sabemos que

$V(e) \cup V(1-e) = Spec(A)$ y $V(e) \cap V(1-e) = \emptyset$, concluimos que I y J se encuentran en componentes conexas distintas. De esta forma vemos que si dos ideales primos están en la misma componente conexa, deben contener a los mismos idempotentes.

Veamos ahora el reciproco. Supongamos que I, J contienen a los mismos idempotentes. Denotemos con E al ideal generado por los idempotentes contenidos en I y J, por lo tanto $I; J \in V(E)$. Consideramos el anillo cociente A/E, con su homomorfi

smo de anillos suprayectivo $\Pi : A \longrightarrow A/E$ asociado. Como vimos antes, el homomorfismo Π induce una aplicación continua $\Pi^* : Spec(A/E) \longrightarrow SpecA$. Recordemos que existe una correspondencia biyectiva que conserva el orden entre los ideales de A que contienen a E y los ideales de A/E, dada por la imagen inversa de Π. Deducimos entonces que $V(E)$ es la imagen por Π^* de $Spec(A/E)$. Veamos ahora que $Spec(A/E)$ es conexo para poder asegurar que $V(E)$ es conexo y así poder concluir.

Para ver que $Spec(A/E)$ es conexo debemos probar que los únicos elementos idempotentes de A/E son $0+E$ y $1+E$. Sea $f+E$ un elemento idempotente de A/E, tenemos $(f+E)(f+E) = f^2+E$, que coincide con $f+E$. Obtenemos que $f^2 - f + E = 0 + E$, es decir, $g = f^2 - f \in E$. Podemos escribir:

$$g = \sum_{\lambda\in\rho} g_\lambda e_\lambda, \text{ con } g_\lambda \in A,\ e_\lambda \text{ idempotente de } I \text{ y } |\rho| \text{ finito.}$$

Con la notación introducida en la proposición 1.19, consideramos $e = V_{\lambda\in\rho} e_\lambda$, que esta claramente en E. Como $e_i \wedge (e_i \vee e_j) = e_i$, para $e_i; e_j$ idempotentes de I, por construcción de g vemos que $ge = g \wedge e = g$, luego $(f^2 - f)e = f^2 - f$, es decir, $(f^2 - f)(1-e) = f(f-1)(1-e) = 0$. Nos quedamos con el elemento $h = f(1-e) = f - ef$, y como $ef \in E$, tomando clases obtenemos $h + E = f + E$. Ademas, $h^2 - h = f^2(1-e) - f(1-e) = 0$, y deducimos que h es idempotente. Tenemos $h(1-h) = 0 \in I$ y, utilizando la primalidad de I, deducimos que se tiene $h \in I$ o $(1-t) \in I$. El caso $h \in I$ lleva a deducir que

$f + E = 0 + E$ y el otro caso lleva a $f + E = 1 + E$.

Concluimos que $Spec(A/E)$ es conexo, lo que implica que $V(E)$ es conexo. Tenemos que $I; J$ pertenecen al mismo conexo $V(E)$, por lo que pertenecen a la misma componente conexa de $Spec(A)$. ■

Capítulo 5

Espectro primo y pm-anillos

5.1 Introducción

El objetivo de este capitulo es definir espacio normal,retracción probaremos que el subespacio de ideales maximales es de hausdorff y verificaremos justamente el problema central del proyecto es decir probar las equivalencias que si A es pm-anillo si y solo si $Spec(A)$ es un espacio normal y ademas cumple la condicion PM y para todo par de ideales distintos M y M' de A, existen elementos $a \notin M$ y $a' \notin M'$ tal que $aa' = 0$.

5.2 Conjunto Multiplicativo

Sea A un anillo conmutativo con identidad. Un subconjunto S de A es multiplicativo si S es cerrado multiplicativamente que contiene a 1.

Lema 109 *Sea S un conjunto multiplicativo del anillo A tal que $0 \notin S$. Entonces existe un ideal primo P tal que $P \cap S = 0$*

Demostración. Sea $F = \{I \leq A : I \cap S = \emptyset\}$ el conjunto de ideales de A que es desjunto de S. Como $\{0\} \cap S = \emptyset$, entonces F no es vacío. F es una familia de conjuntos parcialmente ordenado por la inclusión de conjuntos. Sea $\{I_i\}_{\in\Lambda}$ una cadena de ideales de F y sea $I = \bigcup_{i\in\Lambda} I_i$. Entonces I es una cota superior de la cadena y I es un ideal de A. En efecto, si $x, y \in I$ y $r \in A$, entonces existe $i, j \in \Lambda$ tal que $x \in I_i$, $y \in I_j$. Como tenemos una cadena, podemos suponer que $I_i \subset I_j$, de donde $x, y \in I_j \subset I$ y $rx \in I_i \subset I$. Por lema de Zorn existe un maximal P de F. Luego P es un ideal tal que $P \cap S = \emptyset$. Ahora probaremos que P es un ideal primo. Sea $x, y \in P$, y supongamos que $x \notin P$, $y \notin P$. Consideremos los ideales $Ax + P$ y $Ay + P$. Note que $Ax + P = P$ implica $x \in P$, luego

$$P \subset Ax + P,\ P \neq Ax + P,$$

$$P \subset Ay + P,\ P \neq Ay + P.$$

Como P es maximal de F, tenemos

$$(Ax + P) \cap S \neq \emptyset,\ (Ay + P) \cap S \neq \emptyset.$$

De donde existen elementos $u, v \in S$ tal que

$$u = ax + p_1, \qquad v = by + p_2$$

donde $a, b \in A$ y $p_1, p_2 \in P$. Como S es multiplicativo, entonces $uv \in S$. Como

$$uv = abxy + axp_2 + byp_1 + p_1p_2$$

los términos del segundo miembro están de P, así $uv \in P \cap S = \varnothing$ que es una contradicción. ■

Definición 110 *Sea X un espacio topológico, decimos que X es un espacio normal si, para cada par F_1 ; F_2 de conjuntos cerrados disjuntos de X, existen abiertos disjuntos U_1; U_2 con $F_1 \subset U_1$, $F_2 \subset U_2$.*

5.3 Max(A) es de Hausdorff

Recordemos que el espacio topológico X es T_2 o *espacio Hausdorff*, si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$, existen conjuntos abiertos disjuntos U y V tal que $x \in U$ y $y \in V$.

Recordemos algunos ejemplos:

Ejemplo 111 *El espacio topologico de los reales con la topologia usual,* (R, T_u)*, es de Hausdorff.*

Ejemplo 112 *El espacio de Sierpinski* $(\{0,1\}, T_{si})$

cuya topología es

$T_{si} = \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}$

no es de Hausdorff:

Los únicos abiertos a los que pertenece 1 son

$\{1\}, \{0,1\}$

El único abierto al que 0 pertenece es

$\{0,1\}$

Por tanto, no existen abiertos disjuntos (excepto el conjunto vacío).

Definición 113 *Definimos* $Max(A)$ *del anillo* A*. Al conjunto cuyos elementos son todos los ideales maximales de* A*.*

Proposición 114 *Sea* A *un pm-anillo. Entonces el espectro maximal* $Max(A)$ *de* A *es de Hausdorff.*

Demostración. Tomemos $M, M' \in \mathrm{Max}(A)$ con $M \neq M'$. Entonces $S = A - M$, $T = A - M'$ y ST son conjuntos multiplicativos. Si $0 \notin ST$, entonces existe un ideal primo I tal que $I \cap ST = \emptyset$. Como S y T están contenidos en ST, se deduce que $I \subset M \cap M'$ ■

5.4 Continuidad de espectros de un anillo

Definición 115 *Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) dos espacios topológicos, y sea*

$$f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$$

f es continua en un punto $x \in X$ si $\forall V \in \tau_Y,\ f(x) \in V$ existe $U \in \tau_X$ tal que $x \in U$ y $f(U) \subseteq V$.

Ahora veremos que los anillos que cumplen esta propiedad son los únicos para los que $\mathrm{Spec}(A)$ retracta sobre $\mathrm{Max}(A)$.

Con el siguiente teorema queda reflejada la relación entre la condición de pm-anillo y la normalidad del espectro asociado. Para un pm-anillo A queda bien definida la aplicación $\varphi : \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Max}(A)$ que a cada ideal primo de A lo envía en el único maximal que lo contiene.

Lema 116 *Sea A un pm-anillo y sea $\mu : \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Max}(A)$ la aplicación que a cada ideal primo de A lo envía en el único ideal maximal que lo contiene. Entonces φ es continua.*

Demostración. Sea F un conjunto cerrado de $\mathrm{Max}(A)$, y definimos los conjuntos

$$\Psi = \cap\{I \text{ primo} : \mu(I) \in F\}$$
$$\Omega = \cup\{M : M \in F\}$$
$$\Phi = \cap\{M : F \in F\}.$$

y Probaremos que $\mu^{-1}(F) = V(\Psi)$. La inclusión $\mu^{-1}(F) \subset V(\Psi)$ es inmediata. La inclusión inversa es demostrar:

$$\Psi \subset I \Rightarrow \mu(I) \in F$$

para todo I ideal primo de A. Supongamos que I es un ideal primo tal que $\Psi \subset I$. Consideremos los conjuntos multiplicativos $S = A - T$ y $T = A - \Omega$. También ST es un conjunto multiplicativo y $ST \cap \Psi = \emptyset$. Aplicando lema de Zorn al conjunto $\{h$ primo: $ST \cap h = \emptyset$, $h \subset I$, $h \subset \Omega\}$, existe un ideal primo J tal que

$$ST \cap J = \emptyset, \ J \subset I, \ J \subset \Omega.$$

El ideal $J + \Phi$ es tal que $J + \Phi \subset \Omega$. El conjunto $J + \Phi \neq A$, caso contrario $\Omega = A$, y estaría en algún maximal que contiene a 1 que no es posible. Así existe un ideal maximal M tal que $J + \Phi \subset M$, y por consiguiente $\Phi \subset M$, luego

$$M \in V(\Phi) = \bar{F} = F.$$

donde $\bar{F}$ es la clausura de F en el espacio topológico $\mathrm{Max}(A)$. Como $J \subset M$ y $J \subset I$ entonces $\mu(I) = \mu(J) = M \in F$. ■

Lema 117 *Sean X e Y espacios topológicos. Sea X un espacio compacto e Y Hausdorff. Entonces una función $f : X \to Y$ continua es cerrada. En particular μ : $\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Max}(A)$ es una aplicación cerrada.*

Lema 118 *Sea X un espacio topológico. Si X es compacto y Hausdorff, entonces X es normal. En particular $\mathrm{Max}(A)$ es un espacio normal.*

Teorema 119 *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *A es un pm-anillo.*
2. *$\mathrm{Spec}(A)$ es un espacio normal.*
3. *Si $m, m' \in A$ con $m + m' = 1$, entonces existen elementos $a, b \in A$ tal que $(1 - am)(1 - bm') = 0$.*

4. Para todo par de ideales distintos M y M' de A, existen elementos $a \notin M$ y $a' \notin M$ tal que $aa' = 0$.

Demostración. (1)⇒(2) Asumimos la y hipótesis y por contradicción, supongamos que A no es pm-anillo. Entonces existe un ideal primo P, ideales maximales M, M' tales que $P \subset M \cap M'$ y $M \neq M'$. Los maximales determinan puntos cerrados, así $\{M\}$ y $\{M'\}$ son conjuntos cerrados y disjuntos. Como $\mathrm{Spec}(A)$ es un espacio topológico normal, existen abiertos básicos $D(a)$ y $D(b)$ tales que $\{M\} \subset D(a)$ y $\{M'\} \subset D(b)$ y $D(a) \cap D(b) = \emptyset$. Esto significa $a \notin M$, $b \notin M'$ y $D(ab) = \emptyset$. Luego ab es elemento nilpotente de A. Así existe un entero positivo m tal que $a^m b^m = 0$. Luego $a^m b^m \in P$, y como P es primo $a^m \in P$ o $b^m \in P$, que implica $a \in P$ o $b \in P$, se sigue que $a \in M$ o $b \in M'$ que es una contradicción.

(2)⇒(1) $\mu : \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Max}(A)$ es una aplicación cerrada, envía cerrados disjuntos de $\mathrm{Spec}(A)$ en cerrados disjuntos de $\mathrm{Max}(A)$. Si F y F' son conjuntos cerrados de $\mathrm{Spec}(A)$ disjuntos, entonces $\mu(F)$ y $\mu(F')$ son conjuntos cerrados disjuntos de $\mathrm{Max}(A)$. Como $\mathrm{Max}(A)$ es un espacio normal, existen conjuntos abiertos G y G' en $\mathrm{Max}(A)$ disjuntos que contienen a $\mu(F)$ y $\mu(F')$ respectivamente. Entonces $\mu^{-1}(G)$ y $\mu^{-1}(G')$ son los abiertos disjuntos en $\mathrm{Max}(A)$ que contienen a F y F' respectivamente.

(1) ⇒ (3) Primero, supongamos que A es un pm-anillo y sea $m, m' \in A$ con $m+m' = 1$. Consideremos los conjuntos multiplicativos $S = \{1-\alpha m : a \in A\}$, $S' = \{1-bm' : b \in A\}$ y $T = SS'$. Es suficiente probar que el conjunto T contiene a 0. Por contradicción, supongamos que $0 \notin T$. Por lema anterior existe un ideal primo P tal que $P \cap T = \emptyset$. Además, el ideal $P + Am$ no es igual a A, ya que de la igualdad $1 = p + am$ con $p \in P$, $a \in A$, implica $p = 1 - am \in S \subset T$ que es imposible siendo $P \cap T = \emptyset$. Luego existe un ideal maximal M tal que $P + Am \subset M$. Similarmente existe un ideal maximal M' tal que $P + Am' \subset M$. Note que $M \neq M'$, de otra manera $1 = m + m' \in M$ que es imposible ya que los ideales maximales no contiene al 1. De esto deducimos que $P \subset M$

y $P \subset M'$ y $M \neq M'$ que contradice la hipótesis asumida.

(1)$\Leftarrow$(3) Inversamente, supongamos que se cumple la condición (PM) y que A no es un pm-anillo. Entonces existe un ideal primo P contenido en dos ideales maximales distintos M y M'. Consideremos el ideal $M+M'$. Si es distinto de A, y como $M, M' \subset M+M'$, por maximalidad $M+M' = M = M'$ que es una contradicción. Luego $M+M' = A$, de donde existe $m \in M$ y $m' \in M'$ tal que $m+m' = 1$, y por lo tanto, por la condición (PM), existen elementos $a, b \in A$ tal que $(1-am)(1-bm') = 0 \in P$. Como P es primo se sigue que $1-am \in P$ o $1-bm' \in P$. Pero P esta contenido en los maximales, entonces $1-am \in M$ o $1-bm' \in M'$, y por clausura se sigue que $1 \in M$ o $1 \in M'$ que es una contradicción.

(1)$\Leftrightarrow$(4) Supongamos que A es pm-anillo y Tomemos $M, M' \in \mathrm{Max}(A)$ con $M \neq M'$. Entonces $S = A - M$, $T = A - M'$ y ST son conjuntos multiplicativos. Si $0 \notin ST$, entonces existe un ideal primo I tal que $I \cap ST = \emptyset$. Como S y T están contenidos en ST, se deduce que $I \subset M \cap M'$ en contra de la hipótesis. Así $0 \in ST$, de donde existe $a \notin M$ y $a' \notin M$ tal que $aa' = 0$. La recíproca es inmediato. $\blacksquare$

5.5 Aplicaciones de PM

♦ *Todo anillo regular es pm-anillo.*

Sea A un anillo regular y sea $m \in A$ y $m' = 1-m$. Entonces existe un elemento $a \in A$ tal que $m = mam$. Entonces $m(1-am) = 0$, que podemos escribir en la forma

$$(1-m')(1-am) = 0.$$

De donde A es pm-anillo.

♦ *Si A es un SVNL-anillo, entonces es un PM-anillo.*

Sea A un SVNL-anillo y P un ideal primo de A. Entonces A/P es un dominio de integridad, entonces por Teorema anterior obtenemos que A/P es el SVNL-anillo, por lo tanto, mediante Lemma anterior obtenemos A/P es un anillo local, por lo tanto, existe un ideal máximal único M de A tal que $P \subseteq M$ y M/P es el ideal máximal de A/P, entonces P está contenido en un ideal máximal único M. Por lo tanto, A es un PM-anillo.

- *Si A es anillo local entonces es PM-anillo.*

  En un anillo Local A, $m + m' = 1$ implica que al menos m (o m') es unidad, y así tenemos condición (PM): $(1 - am)(l - bm') = 0$, con $a = m^{-1}$ (o $b = (m')^{-1}$).

- *El anillo de funciones reales continuas acotadas, donde X es un espacio topológico, es un PM-anillo.*

  Observamos que $C(R, R)$ el conjunto de las funciones continuas de R en R con las operaciones usuales suma y producto definidas por:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

forma un anillo conmutativo y unitario veamos:

Como R es un campo, es claro que ambas operaciones son asociativas, conmutativas y se cumple la ley distributiva.

De hecho, $C(R, R)$ es un anillo conmutativo con unidad. El elemento cero es la función constante 0,$(0(x) = 0)$, y el elemento unidad es la función constante 1, $(1(x) = 1)$, El inverso aditivo $-f$ de f esta caracterizado por $(-f)(x) = -f(x)$.

Este anillo cumple la condición PM. Sea $m \in A$. Considere la función $\Phi : R \longrightarrow R$ definida como sigue:

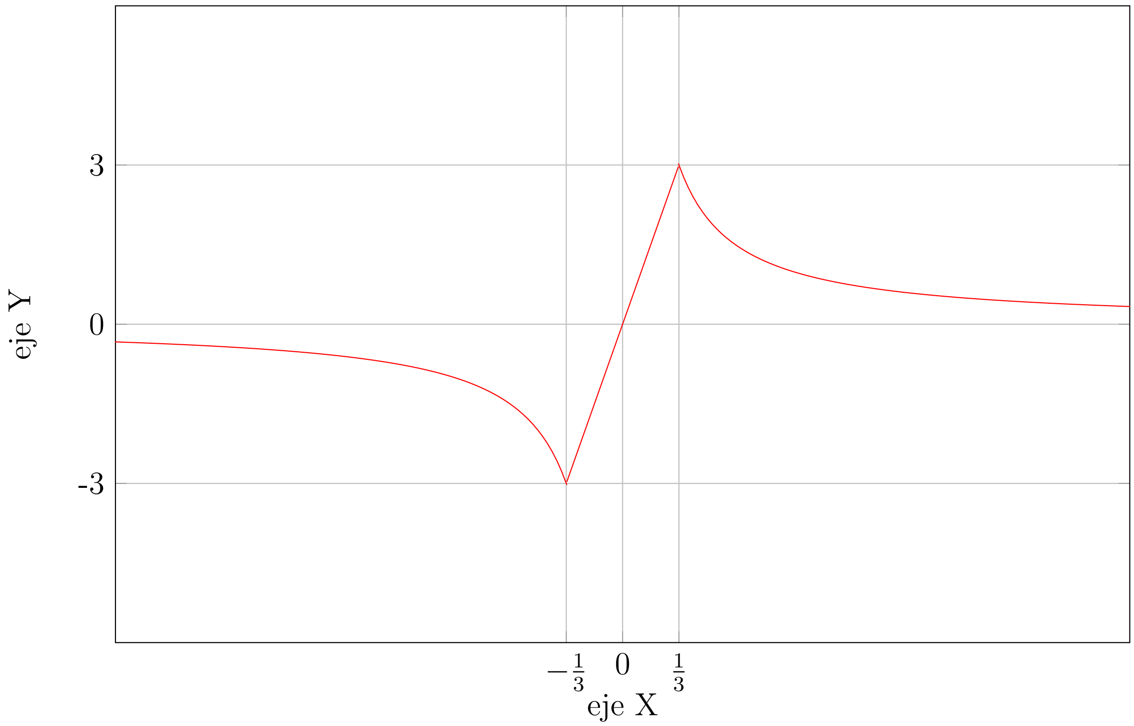

Figure 5.1: gráfico de la función

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } |x| > \frac{1}{3} \\ 9x & \text{si } |x| \leq \frac{1}{3} \end{cases}$$

El cual tiene el siguiente gráfico:

Sea $a = \Phi \circ m$, $b = \Phi \circ m'$. Afirmamos que $(1 - am)(1 - bm') = 0$.

De hecho :

Si $|m(x)| > \frac{1}{3}$, entonces $(1 - am)(x) = 1 - a(x)m(x) = 1 - \Phi(m(x))m(x) = 0$.

Si $|m(x)| \leq \frac{1}{3}$, entonces $|m'(x)| = |1 - m(x)| > \frac{1}{3}$ y por lo tanto $1 - b(x)m'(x) = 0$

por tanto es pm-anillo.

Conclusión

1. Las anteriores proposiciones y sus demostraciones muestran la importancia de los fundamentos del álgebra y la topología por tanto con estas propiedades mostramos el resultado PM de este proyecto.

2. La matemática es una ciencia que ayuda de gran manera en la comprensión de conceptos abstractos como es la definición de pm-anillos una forma de comprender es justamente expresarlo en su forma algebraica y eso facilita su comprensión.

3. Nos permiten definir conceptos como pm-anillos y observar sus propiedades desde un punto de vista algebraico y vemos que la condición que debe cumplir el anillo es precisamente debe ser pm-anillo para que el espectro primo del anillo sea un espacio topológico normal.

4. Estudiamos los espectros primos de anillos conmutativos, se presenta una serie interesante de problemas que pueden permitir al lector profundizar y seguir en este estudio.

Apéndice

Apéndice A

Apéndice : preliminares

Proposición 120 *Sea A un anillo. La intersección de ideales de A es de nuevo un ideal de A.*

Demostración. Sea I_j una colección de ideales de A. Su intersección es un subgrupo. Ademas si $r \in A$ y $a \in \cap I_j$ tenemos que $ra \in I_j$ para todo j. Así $ra \in \cap I_j$ y concluimos que es un ideal. ∎

Teorema 121 *Sea I un ideal de A. En el grupo cociente A/I se puede introducir una estructura única de anillo que hace que la proyección canónica sea un morfismo de anillos. Si A tiene unidad también la tendrá A/I.*

Demostración. Sabemos que en A/I se puede introducir una estructura de grupo abeliano con las condiciones pedidas. Para que la proyección canónica $\Pi : A \longrightarrow A/I$ sea morfismo de anillos, la única definición posible de producto en A/I es

$$\Pi(a) \cdot \Pi(b) = \Pi(ab)$$

Si I es un ideal esta definición no depende de los representantes elegidos. En efecto si

$\Pi(a) = \Pi(a')$ *entonces* $a = a' + r$, *con* $r \in I$. $\Pi(b) = \Pi(b')$ *entonces* $b = b' + s$, *con* $s \in I$

De esto concluimos que $ab = a'b' + a's + rb' + rs$. Entonces $\Pi(ab) = \Pi(a'b')$ puesto que $a's + rb' + rs \in I$. ■

Teorema 122 *(Correspondencia) Sea* $\Pi : A \longrightarrow A/I$ *la proyección canónica. Existe una correspondencia biunívoca entre ideales de* A/I *e ideales de* A *que contienen a* I*.*

Demostración. Sea J un ideal del cociente. Entonces $\Pi^{-1}(J)$ es un ideal de A que contiene a I. Del mismo modo $\Pi(\Pi^{-1}(J)) = J$ es un ideal por ser la proyección canónica epiyectiva. Esto prueba que la correspondencia es biunívoca. ■

Teorema 123 *Sea* $P \subset A$ *ideal primo e* I, J *dos ideales tales que* $IJ \subset P$*. Entonces* $I \subset P$ *o* $J \subset P$*.*

Demostración. Supongamos que $I \not\subseteq P$. Entonces existe $a \in I$ que no pertenece a P. Dado un elemento cualquiera $b \in J$ tenemos que $ab \in IJ \subset P$. Como a no esta en P, necesariamente $b \in P$ para todo elemento $b \in J$. Deducimos entonces que $J \subset P$. ■

Teorema 124 *Todo anillo* A *posee ideales maximales.*

Demostración. Sea I_j una cadena de ideales de $\sum$. Dados dos ideales de la cadena I_α e I_β debe cumplirse $I_\alpha \subset I_\beta$ o $I_\beta \subset I_\alpha$. Sea $M = \bigcup I_j$. Este conjunto es un ideal. Veamos por ejemplo que es subgrupo. Si $a, b \in \bigcup I_j$, entonces $a \in I_\alpha$ y $b \in I_\beta$. Podemos suponer $I_\alpha \subset I_\beta$. Por lo tanto $a - b \in I_\beta$ puesto que I_β es subgrupo aditivo. Así $a - b \in \bigcup I_j$. Por el lema de Zorn, existen en $\sum$ elementos maximales. Queda probada la existencia de ideales maximales. ■

Corolario 125 *Todo ideal* I *distinto del total esta contenido en un ideal maximal.*

Demostración. Sea $\prod : A \longrightarrow A/I$ la proyeccion canonica. En A/I existen ideales maximales Sea m' un ideal maximal de A/I. Entonces $\prod^{-1}(m')$ es maximal y contiene a I aplicando el teorema de correspondencia. ■

Corolario 126 *Todo elemento a no invertible esta contenido en un ideal maximal.*

Demostración. (a) no es el ideal total puesto que a no es invertible. Este ideal esta contenido en ideal maximal y por lo tanto a también. ■

Teorema 127 *Sea M un ideal de un anillo A. Entonces,*

$$M \text{ es un ideal maximal si y sólo si } A/M \text{ es un campo.}$$

Demostración. Recordemos que un cuerpo es un anillo que solo tiene ideales triviales. Aplicando el teorema de correspondencia tenemos que

$$\{Ideales\ que\ contienen\ a\ m\} = \{Ideales\ de\ A/m\}$$

Si m es maximal, existen dos ideales que contienen a m y por lo tanto el cociente tiene dos ideales. Esto implica que el cociente es un cuerpo. Si A/m es cuerpo, vemos que solo hay dos ideales que contienen a m, que es entonces maximal. ■

Corolario 128 *Cualquier ideal maximal es también un ideal primo*

Demostración. Sea M el ideal maximal de un anillo A. Entonces, por el teorema anterior, A/M es un campo. Pero, cualquier campo es un dominio de integridad, por lo que A/M es un dominio integridad, y así, según el Teorema 25, M es un ideal primo. Esto completa la prueba. ■

Teorema 129 *Sea A un anillo. La unión de todos los ideales maximales de A es el conjunto de no-unidades de A:*

$$\bigcup_{M\ maximal} M = \text{ conjunto de no unidades.}$$

Demostración. Sea $u \in A$. Acabamos de demostrar que si u es una unidad, entonces u no está contenida en ningún ideal propio. En particular, entonces, si u es una unidad, $u \notin M$ para cualquier ideal maximal M de A (ya que, si $u \in M$, entonces $1 = u^{-1}u \in M$ implica que $M = A$). Por lo tanto, ninguna unidad está contenida en la unión de los ideales máximos. Esto muestra que la unión de los ideales maximales está contenida en el conjunto de no-unidades.

Por otro lado, si un elemento u no está contenido en la unión de los ideales máximos, entonces $u \notin M$ para cualquier ideal maximal, por lo que el ideal (u) no está contenido en ningún ideal maximal. Por lo tanto,(u) no es un ideal propio, ya que cualquier ideal propio está contenido en el ideal maximal por el lema de Zorn. Por lo tanto,$(u) = A$, y u es una unidad. Esto muestra que el conjunto de no unidades está contenido en la unión de los ideales maximales. Dado que cada uno de estos dos conjuntos está contenido en el otro, esto completa la prueba. ■

Teorema 130 *Sea* $\mathrm{Nil}(A)$ *el nilradical de un anillo* A*. Entonces* $\mathrm{Nil}(A)$ *es la intersección de todos los ideales primos en* A*, es decir,*

$$\mathrm{Nil}(A) = \bigcap_{P \ primo} P$$

Demostración. Sea S la intersección de todos los ideales primos de A. Si a es nilpotente, tenemos que $a^n = 0 \in p$ para cualquier ideal primo p. Entonces a o a^{n-1} están en p. Razonando por inducción, concluimos que a están en p. Por lo tanto a está en la intersección de todos los primos. Esto demuestra la inclusión $Nil(A) \subset S$. Sea ahora a no nilpotente. Consideramos el conjunto Σ de todos los ideales I de A que no contienen a ninguna potencia de a. Como a no es nilpotente, el conjunto Σ no es vacio puesto que $0 \in \Sigma$. Aplicando el lema de Zorn, Σ posee elementos maximales. Sea $\mathbf{m}$ un elemento maximal. Probaremos que $\mathbf{m}$ es primo. Si $x, y \notin \mathbf{m}$, los ideales $\mathbf{m}+(x)$ y $\mathbf{m}+(y)$ contienen a $\mathbf{m}$ en sentido estricto. Como $\mathbf{m}$ es maximal, estos ideales no están en Σ y contienen a alguna potencia de a.

$$a^n \in \mathbf{m} + (x); a^m \in \mathbf{m} + (y)$$

De este modo $a^{m+n} \in \mathbf{m} + (xy)$. De esto se sigue que xy no pueden estar en $\mathbf{m}$, pues de lo contrario $\mathbf{m} + (xy) = \mathbf{m}$. Queda así demostrado que $\mathbf{m}$ es un ideal primo y que los elementos no nilpotentes no pueden estar en S. Se concluye que $S \subset Nil(A)$, inclusión que demuestra el teorema. $\blacksquare$

Bibliografía

[1] M. Contessa, On pm-rings, Comm. Algebra 10 (1982), 93-108.

[2] G. De Marco and A. Orsatti, Commutative rings in which every prime ideal is contained in a unique maximal ideal, Proc. Amer. Math. Soc. 30 (1971), 459-466.

[3] L. Gillman and M. Jerison, Rings of Continuous Functions, Van Nostrand, 1960.

[4] Weinstein Rivera, Jorge Daniel, z-Filtros & z-Ideales, Proyecto de grado, Carrera de Matemática, Umsa.