Universidad Mayor de San Andrés
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Carrera de Matemática

Autómatas Celulares y Grupos (Algebra)

Proyecto de Grado

para obtener el Titulo de Licenciatura.

Por: Esteban Mamani Mamani

Tutor: Lic. Ramiro Choque Canaza

La Paz – Bolivia

2018

Dedicado a:

Dios creador de la vida.

A mi familia y a Virginia Yampara Mamani.

Agradecimientos

Primeramente quiero agradecer a Dios al creador de vida. Agradezco a mis familiares Andrés Limachi, Pedro Huanca, Corcina Villca, Petrona Mamani, Rosmary Mamani, Irene Mamani, Carmela Mamani, Simon Mamani, Francisco Mamani, Romario Mamani, Juan Huanca, Emiliana Aruquipa, Jany Huanca, Monica Huanca y Virginia Yampara por sus apoyos incondicionales.

Agradezco a la universidad Mayor de San Andrés y en especial a la Carrera de Matemática y a todos los docentes que me enseñaron y me formaron profesionalmente. Agradezco al Lic. Ramiro Choque Canaza mi tutor por toda sus sugerencias y el apoyo en la elaboración de este trabajo de proyecto de grado. Al mismo tiempo agradezco a mis dos tribunales, M. Sc. Ernesto Cupé Clemente y al Lic. Helder Edwin López Romero por su paciencia que tuvieron conmigo.

Finalmente agradezco al Dr. Guillermo Fernando Vera Hurtado por las sugerencias y el apoyo de este proyecto. También agradezco Lic. Erasmo Chura Callisaya por las sugerencias en la transcripción en LaTeX y también a todo mis amigos por sus palabras de aliento: Wilder Huanca Condori y Julio Aruquipa.

La Paz, La Paz — Esteban Mamani Mamani

5 de diciembre de 2018.

Resumen

Los autómatas celulares surgen en la década de 1940 con John von Neumann, que intentaba modelar una máquina que fuera capaz de auto reproducirse, llegando así a un modelo matemático de dicha máquina con reglas complicadas sobre una rejilla cuadrada in finita de dos dimensiones, una rejilla cuadrada cambiaba de estado (color) según una regla establecida la cual depende del tipo de vecindad que se desee trabajar. Von Neumann utilizó 29 estados posibles y cuyas vecindades eran únicamente las rejillas cuadradas superiores, inferiores, y laterales de la rejilla cuadrada.

Inicialmente fueron interpretados como conjunto de células que crecían, se reproducían y morían a medida que pasaba el tiempo. A esta similitud con el crecimiento de las células se le debe nombre.

El matemático británico John Horton Comway en 1970 asoció autómatas celulares con el *juego de la vida* y fue popularizado por Martin Gardner, los elementos de este juego son: un universo que es una cuadrícula ortogonal infinita de dos dimensiones de celdas cuadradas dentro de cada celda cuadrada existe una célula c y el alfabeto es finito. El juego consiste en que cada célula c de la celda cuadrada (ver Figura. (2.1)) está en uno de dos estados posibles, vivos o muertos y cada célula c interactúa con sus ocho células vecinas, a saber, el norte, noreste, este, sudeste, sur, sureste, oeste y noreste.

En este trabajo de proyecto de grado se relacionará dos nociones de la matemática, los autómata celulares y los grupos. Como un autómata celular es un modelo matemático, a partir de este modelo se obtiene una serie de propiedades algebraicas para los autómatas celulares. El universo siempre será un grupo G y sus elementos se llaman células, un conjunto A alfabeto que puede ser finito o infinito y sus elementos se llaman estados. Las

configuraciones son mapeos del grupo en el alfabeto que asignan un único estado a cada célula del grupo. Un autómata celular es un mapeo del conjunto de configuraciones en sí mismo y definido a partir de un sistema de reglas locales que conmuta con la acción de desplazamiento.

En la sección 1 se definirá los conceptos y propiedades de autómatas celulares como el conjunto alfabeto, el mapeo de configuración y al espacio de configuraciones que se dotará de la topología prodiscreta y G-equivariante.

En la sección 2 se definirá autómatas celulares y se dará un ejemplo muy importante de autómata celular que es el "juego de la vida". También se demostrará proposiciones como todo autómata celular es G-equivariante y continua y también se demostrará un lema que es muy importante pues se usará en la demostración de la generalización del Teorema de Curtis-Hedlun.

En la sección 3 se demostrará el Teorema de Curtis-Hedlund cuando el alfabeto A es finito y se dará un ejemplo que muestra que cuando el alfabeto A es infinito y el mapeo $\tau : A^G \longrightarrow A^G$ es continua y G-equivariante pero no es un autómata celular. Posteriormente introduciremos el concepto de estructura uniforme en donde se demostrará la generalización del Teorema de Curtis-Hedlund a un alfabeto infinito.

Índice general

Índice de figuras

1

Preliminares

1.1. Historia de los autómatas celulares

Los autómatas celulares surgen en la década de 1940 con John von Neumann, que intentaba modelar una máquina que fuera capaz de auto reproducirse, porque en esa época la manufacturación de automóviles y objetos electrónicos empezaba a automatizar. Llegando así a un modelo matemático completamente teórico de dicha máquina con reglas complicadas sobre una rejilla cuadrada infinita de dos dimensiones o $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. La cual posee varios cuadros en su interior los cuales pueden tener un estado de una cantidad finita de ellos y pueden ir cambiando según una regla establecida la cual depende del tipo de vecindad que se desee trabajar. Para su objetivo von Neumann utilizó un autómata con 29 estados posibles y cuyas vecindades eran únicamente los cuadrados superiores, inferiores y laterales de la rejilla cuadrada. La Figura 1.1 muestra un ejemplo del tipo de vecindad usada por von Neumann.

El cuadrado amarillo irá cambiando de estado (color) a medida que pasa el tiempo (discreto), según el color que posean las células de alrededor suyo. De esta manera logró

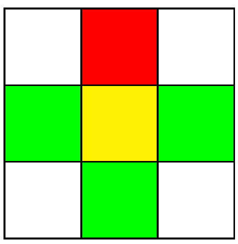

Figura 1.1: Vecindad de von Neumann

crear un autómata que pudiera auto reproducirse. Inicialmente fueron interpretados como un conjunto de celdas que crecían, se reproducían y morían a medida que pasaba el tiempo. A esta similitud con el crecimiento de las células se le debe su nombre. von Neumann muere en el año 1957, y sólo hasta el año de 1966, el matemático Arthur W. Burks publica los trabajos de John von Neumann.

Después de los trabajos de von Neumann, otras personas siguieron investigando en este campo buscando autómatas más sencillos que hicieran lo deseado por von Neumann, uno de los pocos que lo lograron fue el inglés Edgar Frank Codd quien probó la existencia de autómatas celulares con la propiedad de construcción universal (idea de von Neumann) con ocho estados y tomando el mismo tipo de vecindades que Neumann, tiempo después Christopher Langton simplificó las reglas para la creación de este tipo de autómatas, esto fue posible dando una propiedad universal computacional, la cual consiste básicamente en tener una secuencia de instrucciones distribuidas especialmente (parecido a las estructuras del ADN) la cual es ejecutada para crear una nueva estructura y generar a partir de esta una copia exacta de la condición inicial.

El hecho más importante que caracteriza a los autómatas celulares es su capacidad de lograr una serie de propiedades algebraicas que surgen del modelo matemático.

1.2. Configuración y la acción de desplazamiento

En esta sección se presentará los elementos de un autómata celular para relacionar dos nociones en la matemática que aparentemente no tenía relación: entre grupos y los autómatas celulares. Para ello se fijará un grupo G que se llamará universo y sus elementos se llamarán células, un conjunto A arbitrario que se llamará el alfabeto que puede ser finito o infinito y sus elementos se llamarán estados. Una configuración se definirá como un mapeo del grupo al alfabeto. Por lo tanto, una configuración es una forma de asociar un elemento del alfabeto a cada elemento del grupo.

La multiplicación por izquierda en G induce una acción natural del grupo G en el conjunto de las configuraciones que se llama *G-desplazamiento* y todos los autómatas celulares necesitan moverse (Proposición 1.2.5). Equipamos al conjunto de configuraciones con la topología prodiscreta.

Definición 1.2.1. Sea G un grupo. Para $g \in G$, se define la función multiplicación por izquierda $L_g : G \longrightarrow G$ mediante $L_g(g') = gg'$, para todo $g \in G$.

Observe que para todo $g_1, g_2, g' \in G$, tenemos

$$\begin{aligned}\big(L_{g_1} \circ L_{g_2}(g')\big) &= L_{g_1}\big(L_{g_2}(g')\big)\\ &= L_{g_1}(g_2 g')\\ &= g_1(g_2 g')\\ &= (g_1 g_2)g'\\ &= L_{g_1 g_2}(g').\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$L_{g_1} \circ L_{g_2} = L_{g_1 g_2}. \tag{1.1}$$

Definición 1.2.2. Sea $C \neq \emptyset$ y $\{X_c\}_{c \in C}$ una familia de conjuntos no vacíos, El *producto cartesiano* es el conjunto

$$\prod_{c \in C} X_c = \left\{ f : C \longrightarrow \bigcup_{c \in C} X_c : \big(\forall c \in C\big)\big(f(c) \in X_c\big) \right\}.$$

Sean G un grupo y A un conjunto. *El espacio de configuraciones* es el producto cartesiano

$$\prod_{g \in G} A_g = \left\{ x : G \longrightarrow \bigcup_{g \in G} A_g : \big(\forall g \in G\big)\big(x(g) \in A_g\big) \right\}$$

donde $A_g = A$, para todo $g \in G$, entonces tenemos

$$\prod_{g \in G} A = \left\{ x : G \longrightarrow A : \ x \ \text{ es un mapeo} \right\} = A^G.$$

El conjunto A se llama el *alfabeto*. Los elementos de A se llaman *letras*, *estados*, *símbolos*, o *colores*. El grupo G se llama el *universo*. Los elementos de A^G se llaman *configuraciones* sobre el grupo G y el alfabeto A.

Definición 1.2.3. Dado un elemento $g \in G$ y una configuración $x \in A^G$, se define la configuración $gx \in A^G$ por

$$gx = x \circ L_{g^{-1}}. \tag{1.2}$$

Entonces en (1.2), para todo $g' \in G$,

$$\begin{aligned}\big(gx\big)(g') &= \big(x \circ L_{g^{-1}}\big)(g') \\ &= x\big(L_{g^{-1}}(g')\big) \\ &= x(g^{-1}g').\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\big(gx\big)(g') = x(g^{-1}g'). \tag{1.3}$$

Definición 1.2.4. Sea X un conjunto y sea G un grupo, una *acción* (a la izquierda) de G sobre X es una función $\cdot : G \times X \longrightarrow X$ que cumple las siguientes condiciones:

1) $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x$, para todo $g_1, g_2 \in G$ y $x \in X$;

2) $1_G \cdot x = x$, para todo $x \in X$.

Proposición 1.2.5. *El mapeo*

$$\begin{aligned}\cdot : G \times A^G &\longrightarrow A^G \\ (g, x) &\longmapsto gx = x \circ L_{g^{-1}},\end{aligned}$$

es una acción por la izquierda de G en A^G.

Demostración. En efecto, para todo $g_1, g_2 \in G$ y $x \in A^G$, tenemos

$$\begin{aligned}g_1(g_2x) &= g_1(x \circ L_{g_2^{-1}}) \\ &= x \circ (L_{g_2^{-1}} \circ L_{g_1^{-1}}) \\ &= x \circ L_{g_2^{-1}g_1^{-1}} \\ &= x \circ L_{(g_1g_2)^{-1}} \\ &= (g_1g_2)x.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la acción es asociativa.

Si denotamos por 1_G el elemento identidad de G y por $Id_G : G \longrightarrow G$ la aplicación identidad, entonces tenemos

$$\begin{aligned} 1_G x &= x \circ L_{(1_G)^{-1}} \\ &= x \circ L_{1_G} \\ &= x \circ Id_G \\ &= x. \end{aligned}$$

Así, tenemos $1_G x = x$. Por lo tanto el mapeo es una acción izquierda de G sobre A^G. $\square$

Esta acción por la izquierda de G sobre A^G se llama el G-*desplazamiento* en A^G.

1.3. Producto de espacios topológicos

Definición 1.3.1. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de espacios topológicos, entonces el producto cartesiano de esta familia es

$$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha = \left\{ f : A \longrightarrow \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha : \big(\forall\alpha\in A\big)\big(f(\alpha)\in X_\alpha\big) \right\},$$

las funciones proyecciones $\pi_\alpha : \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \longrightarrow X_\alpha$ definidas por $\pi_\alpha(f) = f(\alpha)$ inducen la *topología producto* en el producto cartesiano y tiene como subbase

$$\{\pi_\alpha^{-1}(U) : U \text{ abierto en } X_\alpha,\ \alpha\in A\}.$$

Los miembros de la subbase se llaman *cilindros elementales.*

Una base de la topología producto es la familia de todas las intersecciones finitas de los miembros de la subbase, es decir,

$$\left\{ \bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(U) : F \text{ es un subconjunto finito de } A \text{ y } U\subset X_\alpha \text{ es abierto} \right\}.$$

un miembro de esta base es de la forma $\bigcap\{\pi_\alpha^{-1}(U_a) : a\in F\}$ donde F es un subconjunto finito de A y U_a es abierto en X_a, para todo $a\in F$.

El espacio producto es el producto cartesiano con la topología producto.

1.3.1. Topología prodiscreta

Sea G un grupo y A un conjunto. Se dota a cada factor A de A^G con la topología discreta y el espacio de configuraciones A^G se dota con la topología prodiscreta. Esta topología es la topología producto obtenida al tomar la topología discreta en cada factor A de A^G. Esta es la topología más pequeña en A^G para la cual el mapeo proyección $\pi_g : A^G \longrightarrow A$, definido por $\pi_g(x) = x(g)$, es continua, para todo $g \in G$. Por lo tanto, los cilindros elementales

$$C(g,a) = \pi_g^{-1}\big(\{a\}\big) = \big\{x \in A^G : \big(\forall g \in G\big)\big(\forall a \in A\big)\big(x(g) = a\big)\big\},$$

son cerrados y abiertos a la vez y forman una subbase para el espacio de configuraciones A^G. Un subconjunto $U \subset A^G$ es abierto si y sólo si U puede ser expresado como una unión (finita ó infinita) de intersección finita de cilindros elementales.

Definición 1.3.2. Sea (X, τ) un espacio topológico. Una *base local* para $x \in X$ es una colección de conjuntos $\mathcal{B}_x$ tal que para todo $\mathcal{U} \in \tau$ con $x \in \mathcal{U}$, existe un $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in B \subset \mathcal{U}$.

Para un subconjunto $\Omega \subset G$ y una configuración $x \in A^G$. Se denota por $x|_\Omega \in A^G$ la restricción de la configuración x a Ω, es decir, $x|_\Omega : \Omega \longrightarrow A$ definido por $x|_\Omega(g) = x(g)$, para todo $g \in \Omega$.

Proposición 1.3.3. *Una* base local *para $x \in A^G$, está dada por los conjuntos*

$$V(x,\Omega) = \big\{y \in A^G : x|_\Omega = y|_\Omega\big\} = \bigcap_{g\in\Omega} C\big(g, x(g)\big), \tag{1.4}$$

donde Ω varia sobre todos los subconjuntos finitos de G.

Demostración.

$$\begin{aligned}\text{Sea } y \in V(x,\Omega) &\Rightarrow y|_\Omega = x|_\Omega \\ &\Rightarrow y(g) = x(g) = a, \ \text{para todo } g \in \Omega \\ &\Rightarrow y \in \bigcap_{g\in\Omega} C\big(g, x(g)\big).\end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$V(x,\Omega) \subset \bigcap_{g\in\Omega} C\big(g, x(g)\big).$$

$$\text{Sea } y \in \bigcap_{g\in\Omega} C\big(g, x(g)\big) \text{ con } x = y \Rightarrow x(g) = y(g) = a, \text{ para todo } g \in \Omega$$
$$\Rightarrow y|_\Omega = x|_\Omega$$
$$\Rightarrow y \in V(x, \Omega).$$

Así, tenemos que

$$\bigcap_{g\in\Omega} C\big(g, x(g)\big) \subset V(x, \Omega).$$

Por lo tanto

$$\bigcap_{g\in\Omega} C\big(g, x(g)\big) = V(x, \Omega).$$

Sea $z \in A^G$ y $C(g, a)$ un cilindro elemental de A^G tal que $z \in C(g, a)$, entonces $z(g) = a$. Así, tenemos

$$z \in \bigcap_{g\in\Omega} C\big(g, x(g)\big) = V(x, \Omega),$$

entonces $z \in V(x, \Omega$. Como $\bigcap_{g\in\Omega} C\big(g, x(g)\big) \subset C(g, a)$. Entonces $z \in V(x, \Omega) \subset C(g, a)$. Por lo tanto $V(x, \Omega)$ es una base local para z. □

Definición 1.3.4. Un espacio topológico X se dice que es *totalmente disconexo* si y sólo si los únicos subconjuntos conexos están formados por los conjuntos unitarios, es decir, todas las componentes conexas de X son conjuntos unitarios.

Definición 1.3.5. Un espacio topológico X se dice *espacio de Hausdorff* si y sólo si para cada par x_1 y x_2 de puntos distintos de X, existe vecindades U_1, U_2 de x_1 y x_2, respectivamente, que son disjuntas.

Proposición 1.3.6. *Si X es un espacio topológico discreto, entonces X es de Hausdorff.*

Demostración. Supongamos que (X, τ) un espacio topológico discreto. Sea $a, b \in X$ con $a \neq b$, entonces existe $\{a\}$, $\{b\} \in \tau$ tal que $a \in \{a\}$ y $b \in \{b\}$; claramente $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset$. Por lo tanto, (X, τ) es de Hausdorff. □

Proposición 1.3.7. *Sea (X, τ) un espacio de Hausdorff con la topología discreta, entonces X es totalmente disconexo.*

Demostración. Supongamos que X no es totalmente disconexo, entonces existe un subconjunto conexo que tiene al menos dos elementos. Sea $\{a, b\}$ un subconjunto conexo de X, pero $\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}$ y $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset$, esto es una contradicción. Por lo tanto, X es totalmente disconexo. $\square$

Proposición 1.3.8. *Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda \in H}$ una familia de espacios topológicos de Hausdorff. Entonces $X = \prod_{\lambda \in H} X_\lambda$ es de Hausdorff para la topología producto.*

Demostración. Sean $x = (x_\lambda$ e $y = y_\lambda$ puntos disjuntos de X. Entonces existe $\lambda_0 \in H$ tal que $x_{\lambda_0} \neq y_{\lambda_0}$. Ya que X_{λ_0} es de Hausdorff, entonces podemos encontrar subconjuntos abiertos disjuntos U y V de X_{λ_0} que contienen a x_{λ_0} e y_{λ_0}, respectivamente. Las preimágenes de U y V por el mapeo proyección $\pi_{\lambda_0} : X \longrightarrow X_{\lambda_0}$ son subconjuntos abiertos disjuntos de X que contienen a x e y respectivamente. Por lo tanto, X es de Hausdorff. $\square$

Proposición 1.3.9. *Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda \in H}$ una familia de espacios topológicos totalmente disconexos. Entonces $X = \prod_{\lambda \in H} X_\lambda$ es totalmente disconexo para la topología producto.*

Demostración. Sea C un subconjunto conexo no vacío de X. Entonces, para cada $\lambda \in H$, la imagen de C por el mapeo proyección $\pi_\lambda : X \longrightarrow X_\lambda$ es un subconjunto conexo no vació de X_λ. Como X_λ es totalmente disconexo, el conjunto $\pi_\lambda(C)$ se reduce a un solo punto para cada $\lambda \in H$. Esto implica que C se reduce a un solo punto. Por lo tanto, X es totalmente disconexo. $\square$

Proposición 1.3.10. *El espacio de configuraciones A^G es de Hausdorff y es totalmente disconexo.*

Demostración. De la Proposición 1.3.6 tenemos que la topología discreta en A es de Hausdorff, por la Proposición 1.3.7 tenemos que A es totalmente disconexo y por la Proposición 1.3.8 el producto de espacios de Hausdorff es de Hausdorff. Entonces A^G es de Hausdorff y por la Proposición 1.3.9 obtenemos que A^G es totalmente disconexo. $\square$

Definición 1.3.11. Una acción de un grupo G sobre un espacio topológico X se llama *continua* si el mapeo $\varphi_g : X \longrightarrow X$ definido por $\varphi_g(x) = gx$ es continua sobre X, para todo $g \in G$.

Proposición 1.3.12. *La acción de G-desplazamiento de G en A^G es continua.*

Demostración. Sea $g \in G$ y considar el mapeo $\varphi_g : A^G \longrightarrow A^G$ definido por $\varphi_g(x) = gx$. El mapeo proyección $\pi_h : A^G \longrightarrow A$ definido por $\pi_h(x) = x(h)$ es continua, para todo $h \in G$. Además

$$\begin{aligned}\big(\pi_h \circ \varphi_g\big)(x) &= \pi_h\big(\varphi_g(x)\big)\\ &= \pi_h(gx)\\ &= gx(h)\\ &= x(g^{-1}h)\\ &= \pi_{g^{-1}h}(x).\end{aligned}$$

Así, tenemos que $\pi_h \circ \varphi_g = \pi_{g^{-1}h}$ y como el mapeo $\pi_{g^{-1}h}$ es continua sobre A^G, para todo $h \in G$, entonces $\pi_h \circ \varphi_g$ es continua.

Sea U un subconjunto abierto de A^G, entonces por la continuidad de $\pi_h \circ \varphi_g$, tenemos

$$\big(\pi_h \circ \varphi_g\big)^{-1}(U) = \big(\varphi_g^{-1} \circ \pi_h^{-1}\big)(U) = \varphi_g^{-1}\big(\pi_h^{-1}(U)\big),$$

que es un conjunto abierto de A^G. Así, tenemos que φ_g es continua. $\square$

1.4. Configuraciones periódicas

Definición 1.4.1. Sea G un grupo y A un conjunto. Sea H un subgrupo de G. Una configuración $x \in A^G$ se llama *H-periódica* si x es fijado por H, es decir,

$$hx = x, \text{ para todo } h \in H.$$

Se denota por $Fix(H)$ el subconjunto de A^G que consta de todas las configuraciones H-periódicas, es decir, $Fix(H) = \{x \in A^G : (\forall h \in H)(hx = x)\}$.

Ejemplo 1.4.2. Si $H = \{1_G\}$, entonces

$$Fix(H) = \big\{x \in A^G : (\forall 1_G \in H)(1_G x = x)\big\} = A^G.$$

Proposición 1.4.3. *Si H es un subgrupo de G. Entonces el conjunto $Fix(H)$ es cerrado en A^G para la topología prodiscreta.*

Demostración. Tenemos

$$Fix(H) = \{x \in A^G : (\forall\ h \in H)(hx = x)\} = \bigcap_{h \in H} \Big\{x \in A^G : hx = x\Big\}. \tag{1.5}$$

El espacio de configuraciones A^G es de Hausdorff por la Proposición 1.3.10 y la acción de G sobre A^G es continua por la Proposición 1.3.12. Como el mapeo

$$\begin{aligned} \varphi_g : A^G &\longrightarrow A^G \\ x &\longmapsto gx \end{aligned}$$

es continua, entonces el conjunto de puntos fijados por el mapeo φ_g es cerrado en A^G, para todo $g \in G$. Por lo tanto, $Fix(H)$ es cerrado en A^G por (1.5). $\square$

Sea $H \subset G$ y consideramos el conjunto $G/H = \{Hg : g \in G\}$ que consta todas las clases de lateral derecha de H en G, y el mapeo canónico sobreyectivo

$$\begin{aligned} \rho : G &\longrightarrow G/H \\ g &\longmapsto Hg. \end{aligned}$$

Proposición 1.4.4. *Dado un elemento $y \in A^{G/H}$, es decir, un mapeo $y : G/H \longrightarrow A$, se puede formar el mapeo compuesto $y \circ \rho : G \longrightarrow A$, entonces $y \circ \rho \in Fix(H)$.*

Demostración. Para todo $g \in G$ tenemos

$$\begin{aligned} [h(y \circ \rho)](g) &= \big(y \circ \rho\big)(h^{-1}g) \\ &= y\big(\rho(h^{-1}g)\big) \\ &= y(Hh^{-1}g) \\ &= y(Hg) \\ &= y\big(\rho(g)\big) \\ &= \big(y \circ \rho\big)(g). \end{aligned}$$

Así, tenemos que $h(y \circ \rho) = y \circ \rho$, para todo $h \in H$. Por lo tanto, $y \circ \rho \in Fix(H)$. $\square$

Proposición 1.4.5. *Sea H un subgrupo de G y sea $\rho : G \longrightarrow G/H$ el mapeo sobreyectivo canónico. Entonces, el mapeo $\rho^* : A^{G/H} \longrightarrow Fix(H)$ definido por $\rho^*(y) = y \circ \rho$, para todo $y \in A^{G/H}$ es biyectivo.*

Demostración. Sean $y_1, y_2 \in A^{H\backslash G}$ y que satisfacen $\rho^*(y_1) = \rho^*(y_2)$, entonces por definición de ρ^* tenemos $y_1 \circ \rho = y_2 \circ \rho$. Como ρ es sobreyectivo, entonces existe ρ^{-1} inversa por derecha tal que $(y_1 \circ \rho) \circ \rho^{-1} = (y_2 \circ \rho) \circ \rho^{-1}$, entonces $y_1 \circ Id_{G/H} = y_2 \circ Id_{G/H}$. Así, tenemos que $y_1 = y_2$. Por lo tanto, $\rho*$ es inyectivo.

Sea $x \in Fix(H)$, definamos el mapeo $y : G/H \longrightarrow A$ por $y(Hg) = x(g)$, para demostrar que el mapeo y está bien definida. Sea $Hg, Hg' \in A^{G/H}$ tal $Hg = Hg'$, entonces $H = Hg'g^{-1}$. Así, tenemos que $g'g^{-1} \in H$, entonces

$$\begin{aligned} y(Hg) &= x(g) \\ &= x(g'g^{-1}g) \\ &= x(g'(g^{-1}g)) \\ &= x(g'1_G) \\ &= x(g') \\ &= y(Hg'). \end{aligned}$$

Así, tenemos que el mapeo y está bien definida.

Sea $g \in G$ tenemos $\rho^*(y)(Hg) = (y \circ \rho)(g) = y(\rho(g)) = y(Hg) = x(g)$. Así, tenemos que $\rho^*(y) = x$. Por lo tanto $\rho^*(y)$ es sobreyectivo. □

Supongamos ahora que N es un subgrupo normal de G, es decir, $gN = Ng$, para todo $g \in G$. Entonces, existe una estructura natural grupo sobre G/N para el cual el mapeo sobreyectivo canónico $\rho : G \longrightarrow G/N$ es un homomorfismo.

Definición 1.4.6. Sea X un conjunto no vacío y sea G un grupo que actúa sobre X. Se dice que un subconjunto $Y \subset X$ es *G-invariante*, o simplemente invariante, si $(gy) \in Y$, para todo $g \in G$ e $y \in Y$, es decir, $GY \subset Y$.

Proposición 1.4.7. *Sea N un subgrupo normal de G. Entonces $Fix(N)$ es un subconjunto G-invariante de A^G.*

Demostración. Como $N \trianglelefteq G$, entonces $gNg^{-1} = N$. Si $h \in N$, entonces existe $h' \in N$ tal que $h' = g^{-1}hg$, ahora multiplicando por izquierda por $g \in G$, tenemos $gh' = hg$. Si $x \in Fix(N)$, entonces tenemos

$$(hg)x = (gh')x = g(h'x) = gx.$$

Esto muestra que $gx \in Fix(N)$. $\square$

Definición 1.4.8. Sea G un grupo que actúa sobre el espacio de configuraciones A^G. Un mapeo $\tau : A^G \longrightarrow A^G$ es *G-equivariante* si y sólo si para todo $x \in A^G$ y $g \in G$ tenemos

$$\tau(gx) = g\tau(x).$$

Ejemplo 1.4.9. Sea $A = \mathbb{Z}$ el conjunto alfabeto y $G = (\mathbb{Z}, +)$ el grupo. Consideremos el mapeo $\tau : \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ definido por $\tau(x)(n) = x\big(x(n) + n\big)$, para todo $x \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ y $n \in \mathbb{Z}$. Entonces τ es $\mathbb{Z}$-equivariante.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ y $n, m \in \mathbb{Z}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\tau(mx)(n) &= mx(mx(n) + n) \\
&= x(mx(n) + n - m) \\
&= x\big(x(n-m) + (n-m)\big) \\
&= \tau(x)(n-m) \\
&= \tau(x)(-m+n) \\
&= m\tau(x)(n).
\end{aligned}$$

Por lo tanto τ es $\mathbb{Z}$-equivariante. $\square$

Puesto que cada elemento de $Fix(N)$ está fijado por N, la acción de G sobre $Fix(N)$ induce una acción de G/N sobre $Fix(N)$ que satisface $\rho(g)x = gx$, para todo $g \in G$ y $x \in Fix(N)$.

Proposición 1.4.10. *Sea N un subgrupo normal de G y sea $\rho : G \longrightarrow G/N$ el epimorfismo canónico. Entonces el mapeo $\rho^* : A^{G/N} \longrightarrow Fix(N)$ definido por $\rho^*(y) = y \circ \rho$, para todo $y \in A^{G/N}$ es una biyección G/N-equivariante.*

Demostración. Por Proposición 1.4.5 tenemos que ρ^* es biyectivo. Para demostrar que ρ^*

es G/N-equivariante. Sea $g', g \in G$ e $y \in A^{G/N}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\rho(g)\rho^*(y)(g') &= g\rho^*(y)(g') \\
&= \rho^*(y)(g^{-1}g') \\
&= \big(y \circ \rho\big)(g^{-1}g') \\
&= y\big(\rho(g^{-1}g')\big) \\
&= y\big(\rho(g^{-1})\rho(g')\big) \\
&= y\big((\rho(g))^{-1}\rho(g')\big) \\
&= \rho(g)y(\rho(g')) \\
&= \rho^*\big(\rho(g)y\big)(g').
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\rho(g)\rho^*(y) = \rho^*\big(\rho(g)y\big)$. Esto muestra que ρ^* es G/N-*equivariante.* $\square$

2

Autómatas celulares

En esta sección se definirá la noción de un autómata celular. Fijar un grupo y un conjunto arbitrario que se llamará el alfabeto. Como se definió una configuración como un mapeo del grupo al alfabeto. Así, una configuración es una forma de asociar un elemento del alfabeto a cada elemento del grupo. Un autómata celular es un mapeo del conjunto de las configuraciones en sí mismo. Resulta que todo autómata celular es continua con respeto a la topología prodiscreta (Proposición 2.1.10) y conmuta con la acción de desplazamiento (Proposición 1.2.5).

Definición 2.0.11. Sea G un grupo y A un conjunto alfabeto. Un *autómata celular* sobre A^G es un mapeo $\tau : A^G \to A^G$ tal que existe un subconjunto finito $S \subset G$ y un mapeo $\mu : A^S \to A$ que satisface

$$\tau(x)(g) = \mu\big((g^{-1}x)|_S\big), \tag{2.1}$$

para todo $x \in A^G$ y $g \in G$, donde $(g^{-1}x)|_S$ denota la restricción de la configuración $g^{-1}x$ a S. Tal conjunto S se llama el conjunto memoria y μ se llama el mapeo local para τ.

La igualdad (2.1) significa que el valor de la configuración $\tau(x)$ en elemento $g \in G$ es el valor tomado por el mapeo local μ en el patrón obtenido por la restricción de G al conjunto memoria S y la configuración x es desplazado a $g^{-1}x$.

Observación 2.0.12. a) La igualdad (1.2), también podemos escribir de la siguiente manera

$$\tau(x)(g) = \mu\big((x \circ L_g)|_S\big). \tag{2.2}$$

b) Para $g = 1_G$ en la igualdad (2.1) tenemos

$$\tau(x)(1_G) = \mu(x|_S). \tag{2.3}$$

Como el mapeo restricción $A^G \longrightarrow A^S$, $x \longmapsto x|_S$ es sobreyectivo, esto muestra que si S es un conjunto memoria para el autómata celular τ, entonces existe un único mapeo $\mu : A^S \longrightarrow A$ que satisface (2.1). Así, tenemos que μ es el único mapeo local para τ asociado con conjunto memoria S.

2.1. Ejemplos de autómatas celulares

Ejemplo 2.1.1. *El Autómata celular asociado con el juego de la vida.* El concepto de autómata celular fue introducido por John von Newmann en la década de 1940, quien los uso como modelos teóricos para las máquinas de reproducción automática y después en 1970 el matemático britaníco John Horton Conway asoció la teoría de los autómatas celulares con el *juego de la vida* y fue popularizado por Martin Gardner. En el juego de la vida, el conjunto alfabeto es finito y el universo es una cuadrícula ortogonal infinita de dos dimensiones de celdas cuadradas, dentro de cada celda cuadrada hay una célula c que está en uno de dos estados posibles, vivo o muerto. Cada célula c interactúa con sus ocho células vecinas, es decir, el norte, noreste, este, sudeste, sur, sureste, oeste y noreste, ver Figura 2.1.

c(NO)	c(N)	c(NE)
c(O)	c	c(E)
c(SO)	c(S)	c(SE)

Figura 2.1: Las ocho células vecinas de la célula c.

En cada paso en el tiempo, se sigue las siguientes reglas para la evolución de los estados de las células, ver Figuras 2.2-2.5 etiquetamos con "$\bullet$" una célula viva y con una "$\circ$" una célula muerta:

(⋆) *Nacimiento*: Una célula muerta en el tiempo t se vuelve viva en el tiempo $t+1$, si y sólo si, tres de sus células vecinas están vivas en el tiempo t, ver Figura 2.2.

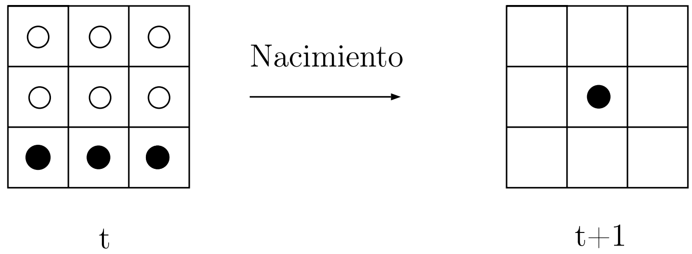

Figura 2.2: Nacimiento de una célula.

(⋆) *Sobrevivencia*: Una célula viva en el tiempo t permanecerá viva en el tiempo $t+1$, si y sólo si, tiene exactamente dos o tres células vecinas vivas en el tiempo t, ver Figura 2.3.

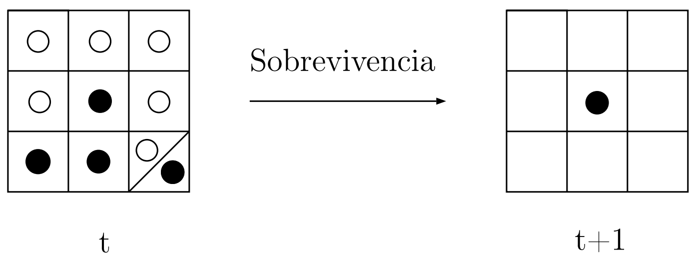

Figura 2.3: Sobrevivencia de una célula.

(⋆) *Muerte por soledad*: Una célula viva en el tiempo t estará muerta en el tiempo $t+1$, si y sólo si, tenía como máximo una célula vecina viva en el tiempo t, ver Figura 2.4.

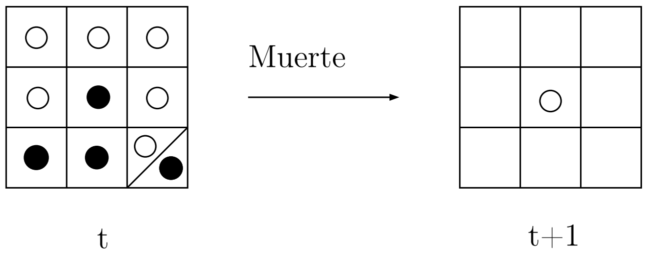

Figura 2.4: Muerte de una célula.

($\star$) *Muerte por hacinamiento o sobrepoblación* Una célula viva en el tiempo t estará muerta en el tiempo $t+1$, si y sólo si, tenía cuatro o más células vecinas vivas en el tiempo t, ver Figura 2.5.

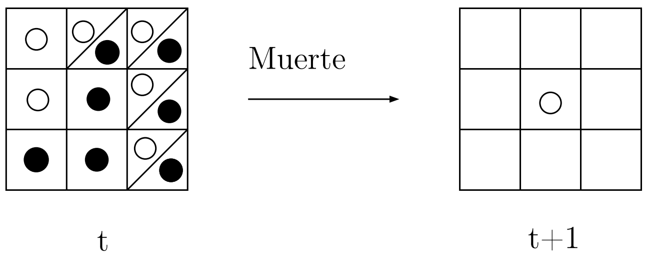

Figura 2.5: Muerte de una célula.

Se mostrará que el mapeo que transforma una configuración de células en el tiempo t hacia la configuración en el tiempo $t+1$ de acuerdo con las reglas anteriores es, de hecho, un autómata celular.

Considerar el grupo $G = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ y el conjunto finito $S = \{-1, 0, 1\}^2 \subset G$. Existe una correspondencia uno-a-uno entre las celdas de las células y los elementos de G de tal manera que se cumple lo siguiente. Si c es una célula dada, entonces $c + (0, 1)$ es la célula vecina del norte, $c + (1, 1)$ es la célula vecina del noreste y así sucesivamente, es decir, c y sus ocho células vecinas corresponden a los elementos del grupo con la operación de suma $c + s$ con $s \in S$, ver Figura 2.6.

$c+(-1,1)$	$c+(0,1)$	$c+(1,1)$
$c+(-1,0)$	c	$c+(1,0)$
$c+(-1,-1)$	$c+(0,-1)$	$c+(1,-1)$

Figura 2.6: Célula c y sus ocho células vecinas

De la Figura 2.6 tenemos que la célula c y sus ocho células vecinas $c+s$ con $s \in S$,

$$S = \{(-1,-1),(-1,0),(-1,1),(0,-1),(0,0),(0,1),(1,-1),(1,0),(1,1)\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Considerar el alfabeto $A = \{0,1\}$. El estado, número o símbolo 0 (resp. 1) corresponde a ausencia (resp. presencia) de la vida. Con cada configuración de los estados de las células de las cuadriculas asociamos con una mapeo $x \in A^G$ definida como sigue. Dada una célula c tenemos el mapeo de configuración $x : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to A$ definido por

$$x(c) = \begin{cases} 1, & \text{si la célula } c \text{ está viva o (presencia),} \\ 0, & \text{si la célula } c \text{ está muerta o (ausencia).} \end{cases}$$

Considerar el mapeo $\mu : A^S \longrightarrow A$ definido por

$$\mu(y) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad \begin{cases} \sum_{s \in S} y(s) = 3, \\ \text{o} \\ \sum_{s \in S} y(s) = 4 \quad \text{e} \quad y((0,0)) = 1, \end{cases} \\ \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{2.4}$$

para todo $y \in A^S$. Por lo tanto, μ expresa simplemente las reglas del juego de la vida.

El autómata celular $\tau : \{0,1\}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \longrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ asociado con conjunto memoria S y el mapeo de definición local μ es llamado el autómata celular asociado con el *Juego de la vida*.

Ejemplo 2.1.2. *El autómata celular de acción mayoritaria.* Sea G un grupo y sea S un subconjunto finito de G. Tomemos el conjunto alfabeto $A = \{0, 1\}$ y consideramos el mapeo $\tau : A^G \longrightarrow A^G$ definido por

$$\tau(x)(g) = \begin{cases} 1, & \text{si } \sum_{s\in S} x(gs) > \frac{|S|}{2}, \\ 0, & \text{si } \sum_{s\in S} x(gs) < \frac{|S|}{2}, \\ x(g), & \text{si } \sum_{s\in S} x(gs) = \frac{|S|}{2}, \end{cases}$$

para todo $x \in G$. Entonces τ es un autómata celular sobre G con conjunto memoria $S \cup \{1_G\}$ y el mapeo local $\mu : A^{S\cup\{1_G\}} \longrightarrow A$ definido por

$$\mu(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } \sum_{s\in S} y(s) > \frac{|S|}{2}, \\ 0, & \text{si } \sum_{s\in S} y(s) < \frac{|S|}{2}, \\ y(1_G), & \text{si } \sum_{s\in S} y(s) = \frac{|S|}{2}, \end{cases}$$

para todo $y \in A^{S\cup\{1_G\}}$.

El autómata celular τ se llama el autómata celular de acción mayoritaria asociado con G y S, ver Figuras 2.7 y 2.8.

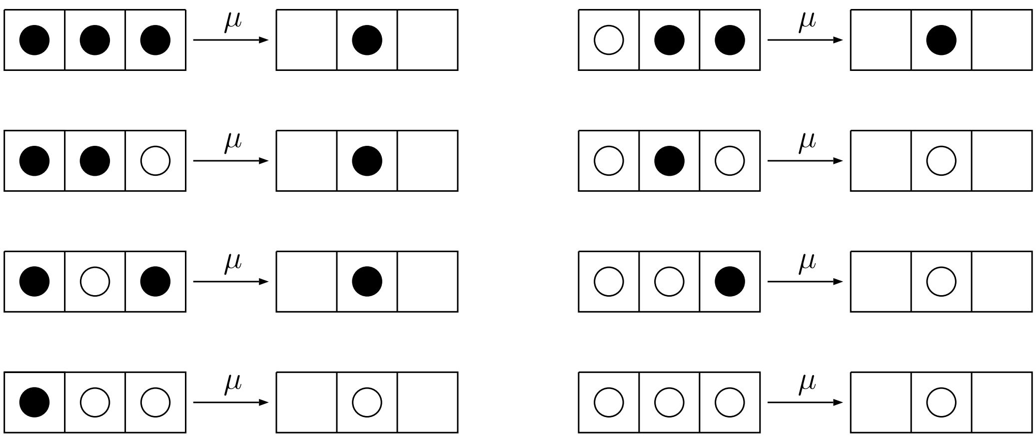

Figura 2.7: El mapeo local μ para la acción mayoritaria en $\mathbb{Z}$ asociado con $S = \{+1, -1\}$.

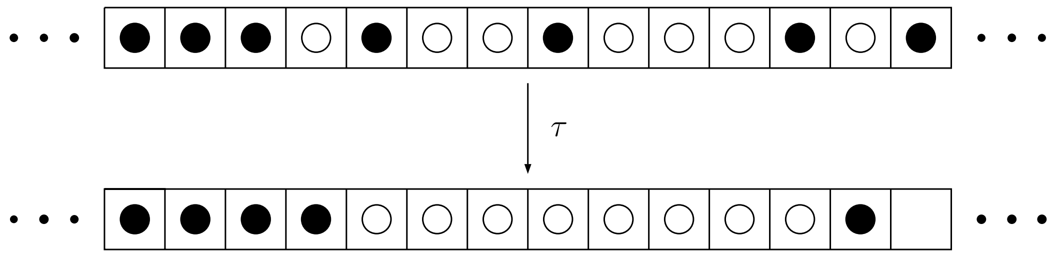

Figura 2.8: La acción mayoritaria τ en $\mathbb{Z}$ asociado con $S = \{+1, -1\}$.

La terminología de acción mayoritaria viene el hecho de que dado $x \in A^G$ y $g \in G$, el valor $\tau(x)(g)$ es igual a $a \in \{0, 1\}$ si existe una mayoría estricta de elementos de gS en la que la configuración x toma el valor a, o a $x(g)$ si no existe tal mayoría.

Ejemplo 2.1.3. El mapeo identidad $\tau = Id_{A^G} : A^G \longrightarrow A^G$ es un autómata celular con conjunto memoria $S = \{1_G\}$ y el mapeo local $\mu = Id_A : A^S \longrightarrow A$ definido por $\mu(y)(s) = y(s)$.

Ejemplo 2.1.4. Si fijamos un elemento $g_0 \in G$, entonces el mapeo $\tau : A^G \to A^G$ definido por $\tau(x)(g) = x(gg_0)$, es un autómata celular con conjunto memoria $S = \{g_0\}$ y el mapeo local $\mu : A^S \to A$ definido por $\mu(y) = y(g_0)$.

Proposición 2.1.5. *Sea G un grupo y A un conjunto. Entonces cualquier autómata celular $\tau : A^G \longrightarrow A^G$ es G-equivariante (i.e. τ conmuta con la acción de G en A^G).*

Demostración. Como τ es un autómata celular, entonces existe un conjunto memoria S y el mapeo local $\mu : A^S \longrightarrow A$. Para todo $g, h \in G$ y $x \in A^G$, tenemos

$$\begin{aligned}
\tau(gx)(h) &= \mu\big((h^{-1}(gx))|_S\big) \\
&= \mu\big(((g^{-1}h)^{-1}x)|_S\big) \\
&= \tau(x)(g^{-1}h) \\
&= \tau(x)(L_{g^{-1}}(h)) \\
&= (\tau(x) \circ L_{g^{-1}})(h) \\
&= g\tau(x)(h).
\end{aligned}$$

Así, tenemos que $\tau(gx) = g\tau(x)$. Por lo tanto τ es G-equivariante. $\square$

Ejemplo 2.1.6. Si fijamos un elemento $g_0 \in G$. El mapeo $\tau : A^G \to A^G$ definido por $\tau(x)(g) = x(gg_0)$ es un autómata celular con conjunto memoria $S = \{g_0\}$ y el mapeo local $\mu : A^S \to A$ definido por $\mu(x) = x(g_0)$, entonces τ es G-equivariante

Demostración. Sea $g, g' \in G$ y $x \in A^G$ tenemos

$$\begin{aligned} \tau(gx)(g') &= gx(g'g) \\ &= x(g^{-1}g'g_0). \end{aligned} \tag{$*$}$$

Por otra parte, tenemos que

$$\begin{aligned} g\tau(x)(g') &= gx(g'g_0) \\ &= x(g^{-1}g'g_0). \end{aligned} \tag{$**$}$$

Así, de $(*)$ y $(**)$ tenemos que $\tau(gx)(g') = g\tau(x)(g')$, entonces $\tau(gx) = g\tau(x)$. Por lo tanto τ es G-equivariante. □

Corolario 2.1.7. *Sea $\tau : A^G \longrightarrow A^G$ un autómata celular y sea H un subgrupo de G. Entonces, tenemos que $\tau\big(Fix(H)\big) \subset Fix(H)$.*

Demostración. Sea $\tau(x) \in \tau\big(Fix(H)\big)$, entonces $x \in Fix(H)$, entonces $hx = x$, para todo $h \in H$. Por la Proposición 2.1.5 tenemos que $\tau(x) = \tau(hx) = h\tau(x)$, entonces $\tau(x) = h\tau(x)$. Así, tenemos que $\tau(x) \in Fix(H)$. □

Proposición 2.1.8. *Sea G un grupo y sea A un conjunto.*
Considerar un mapeo $\tau : A^G \to A^G$. Sea S un subconjunto finito de G y sea $\mu : A^S \longrightarrow A$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

a) τ es un autómata celular que admite a S como un conjunto memoria y a μ como el mapeo local asociado a τ;

b) τ es G-equivariante y $\tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)$, para todo $x \in A^G$.

Demostración. De la Proposición 2.1.5, tenemos que τ es G-equivariante y por (2.3) tenemos

$$\tau(x)(1_G) = \mu\big((1_G^{-1}x)|_S\big) = \mu(x|_S).$$

Recíprocamente, supongamos (b). Entonces, usando la G-equivarianza de τ, para todo $x \in A^G$ y $g \in G$ tenemos

$$\begin{aligned}
\tau(x)(g) &= \tau(x)((g^{-1})^{-1}1_G) \\
&= g^{-1}\tau(x)(1_G) \\
&= \tau(g^{-1}x)(1_G) \\
&= \mu\big((1_G(g^{-1}x))|_S\big) \\
&= \mu\big((g^{-1}x)|_S\big).
\end{aligned}$$

Así, tenemos que τ es autómata celular. Consecuentemente τ tiene a S como conjunto memoria y a μ el mapeo local. Consecuentemente τ satisface (a).

$\square$

Una característica importante de los autómatas celulares es su continuidad (con respecto a la topología prodiscreta). En la prueba de la Generalización del Teorema de Curtis-Hedlund, se usará el siguiente Lema.

Lema 2.1.9. *Sea G un grupo y A un conjunto. Sea $\tau : A^G \longrightarrow A^G$ un autómata celular con conjunto memoria S y $g \in G$. Entonces $\tau(x)(g)$ depende solo de la restricción de x a gS.*

Demostración. Para todo $s \in S$, $g \in G$, tenemos

$$\begin{aligned}
(g^{-1}x)(s) &= \big(x \circ L_{(g^{-1})^{-1}}\big)(s) \\
&= \big(x \circ L_g\big)(s) \\
&= x\big(L_g(s)\big) \\
&= x(gs).
\end{aligned}$$

Así, tenemos que $(g^{-1}x)(s) = x(gs)$.

De (2.1) tenemos, para todo $s \in S$, $g \in G$

$$\begin{aligned}
\tau(x)(g) &= \mu\big((g^{-1}x)|_S\big) \\
&= \mu(x|_{gS}) \\
&= \tau(x)(gs),
\end{aligned}$$

para todo $gs \in gS$. Esto significa que $\tau(x)(g)$ depende solo de la restricción de x a gS. $\square$

Proposición 2.1.10. *Sea G un grupo y A un conjunto. Entonces cualquier autómata celular $\tau : A^G \longrightarrow A^G$ es continua.*

Demostración. Sea S un conjunto memoria para τ. Sea $x \in A^G$ y una vecindad W de $\tau(x)$ en A^G. Por la Proposición 1.3.3, existe $\Omega \subset G$ finito, entonces existe una vecindad $V(x, \Omega)$ de x. Sea $y \in V(x, \Omega)$, entonces $y|_\Omega = x|_\Omega$, entonces $\tau(y|_\Omega) = \tau(x|_\Omega)$. Así, tenemos que

$$V\big(\tau(x), \Omega\big) = \{\tau(z) \in A^G : \tau(z|_\Omega) = \tau(x|_\Omega)\} \subset W.$$

Considerar el conjunto finito $\Omega S = \{gs : g \in \Omega,\ s \in S\}$, entonces por la Proposición 1.3.3, existe una vecindad $V(x, \Omega S)$ de x. Sea $\tau(y) \in \tau\big(V(x, \Omega S)\big)$, entonces

$$\begin{aligned}
y|_{\Omega S} = x|_{\Omega S} &\Rightarrow y(gs) = x(gs),\ \text{para todo } gs \in \Omega S\\
&\Rightarrow g^{-1}y(s) = g^{-1}x(s),\ \text{para todo } s \in S\\
&\Rightarrow (g^{-1}y)|_S = (g^{-1}x)|_S\\
&\Rightarrow \mu\big((g^{-1}y)|_S\big) = \mu\big((g^{-1}x)|_S\big)\\
&\Rightarrow \tau(y)(g) = \tau(x)(g),\ \text{para todo } g \in \Omega\\
&\Rightarrow \tau(y|_\Omega) = \tau(x|_\Omega)\\
&\Rightarrow y \in V\big(\tau(x), \Omega\big).
\end{aligned}$$

Así, tenemos que $\tau\big(V(x, \Omega S)\big) \subset V\big(\tau(x), \Omega\big) \subset W$, entonces $\tau\big(V(x, \Omega S)\big) \subset W$. Por lo tanto τ es continua. □

Proposición 2.1.11. *Sea G un grupo y A un conjunto. Sea $\sigma : A^G \to A^G$ y $\tau : A^G \to A^G$ autómatas celulares. Entonces la composición de mapeos $\sigma \circ \tau : A^G \longrightarrow A^G$ es un autómata celular. Además, si S (resp. T) es un conjunto memoria para σ (resp. τ), entonces*

$$ST = \{st : s \in S \text{ y } t \in T\}$$

es un conjunto memoria para $\sigma \circ \tau$.

Demostración. Sea $x \in A^G$, g y $g' \in G$ tenemos

$$\begin{aligned}
\big(\sigma \circ \tau\big)(gx)(g') &= \sigma\big(\tau(gx)\big)(g')\\
&= \sigma\big(g\tau(x)\big)(g')\\
&= g\sigma\big(\tau(x)\big)(g')\\
&= g\big(\sigma \circ \tau\big)(x)(g').
\end{aligned}$$

Así, tenemos que $\big(\sigma\circ\tau\big)(gx) = g\big(\sigma\circ\tau\big)(x)$. Por lo tanto el mapeo $\sigma\circ\tau$ es G-equivariante.

Sea S y (resp. T) un conjunto memoria para σ (resp. τ). Para todo $x\in A^G$, $1_G\in G$ tenemos $\big(\sigma\circ\tau\big)(x)(1_G) = \sigma\big(\tau(x)\big)(1_G)$. Por Lema 2.1.9 tenemos que $\sigma\big(\tau(x)\big)(1_G)$ depende solo de la restricción de $\tau(x)$ a $S = 1_G S$. Usando Lema 2.1.9 nuevamente, deducimos que, para todo $s\in S$, el elemento $\tau(x)(s)$ de A^G depende solo de la restricción de s a sT. Por lo tanto $\sigma\circ\tau(x)(1_G)$ depende solo de la restricción de x a ST. Aplicando la Proposición 2.1.8, concluimos que el mapeo $\sigma\circ\tau$ es un autómata celular que admite a ST como un conjunto memoria. $\square$

Observación 2.1.12. Con la hipótesis y notación de la Proposición 2.1.11, denotar por $\mu : A^S \longrightarrow A$ y $\nu : A^T \longrightarrow A$ los mapeos locales asociados para σ y τ, respectivamente. Entonces, el mapeo local $\kappa : A^{ST} \longrightarrow A$ para $\sigma\circ\tau$ puede describirse de la siguiente manera.

Para $y\in A^{ST}$ y $s\in S$ definamos a $y_s\in A^T$ por $y_s(t) = y(st)$, para todo $t\in T$. También, denotamos por $\bar{y}\in A^S$ el mapeo definido por $\bar{y}(s) = \nu(y_s)$, para todo $s\in S$.
Finalmente definamos el mapeo $\kappa : A^{ST}\longrightarrow A$ por

$$\kappa(y) = \mu(\bar{y}), \quad \text{para todo} \quad y\in A^{ST}. \tag{2.5}$$

Sea $x\in G$, $g\in G$, $s\in S$ y $t\in T$, entonces tenemos

$$\begin{aligned}
\big(s^{-1}g^{-1}x\big)|_T(t) &= (s^{-1}g^{-1}x)(t)\\
&= g^{-1}x\big((s^{-1})^{-1}t\big)\\
&= g^{-1}x(st)\\
&= \big(g^{-1}x\big)|_{ST}(st)\\
&= \big((g^{-1}x)|_{ST}\big)_s(t).
\end{aligned}$$

Esto muestra que

$$\big(s^{-1}g_{-1}x\big)|_T = \big((g^{-1}x)|_{ST}\big)_s$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\tau\big(g^{-1}x\big)(s) &= \nu\big((s^{-1}g^{-1}x)|_T\big)\\
&= \nu\Big(\big((s^{-1}g^{-1}x)|_{ST}\big)_s\Big)\\
&= \overline{(g^{-1}x)|_{ST}}(s).
\end{aligned}$$

Como consecuencia tenemos,

$$\tau(g^{-1}x)|_S = \overline{(g^{-1}x)|_{ST}}. \tag{2.6}$$

Finalmente, tenemos que

$$\begin{aligned}\big(\sigma \circ \tau\big)(x)(g) &= \sigma\big(\tau(x)\big)(g)\\ &= \mu\Big(\big(g^{-1}\tau(x)\big)|_S\Big)\\ &= \mu\big(\tau(g^{-1}x)|_S\big)\\ &= \mu\big(\overline{(g^{-1}x)|_{ST}}\big)\\ &= \kappa\big((g^{-1}x)|_{ST}\big).\end{aligned} \tag{2.7}$$

Definición 2.1.13. Un conjunto X diferente de vacío se llama *monoide* si y solo si está dotado de una ley de composición interna que es asociativo y con elemento identidad.

Denotar por $AC(G; A)$ el conjunto de todas las autómatas celulares $\tau : A^G \longrightarrow A^G$.

Corolario 2.1.14. *El conjunto $AC(G; A)$ es un monoide con la composición.*

Demostración. La ley de composición interna es el mapeo

$$\begin{aligned}\circ : AC(G; A) \times AC(G; A) &\longrightarrow AC(G; A)\\ (\tau, \tau) &\longmapsto \circ(\tau, \tau') = \tau \circ \tau'.\end{aligned}$$

La asociatividad de la composición

$$(\tau \circ \gamma) \circ \sigma = \tau \circ (\gamma \circ \sigma), \text{ para todo } \tau, \gamma, \sigma \in AC(G; A).$$

Los autómatas celulares $(\tau \circ \gamma) \circ \sigma$ y $\tau \circ (\gamma \circ \sigma)$ tienen el mismo dominio y codominio para probar la igualdad, sólo falta probar que tienen las mismas imágenes, para todo $x \in A^G$ y $g \in G$

$$\begin{aligned}\big(\tau \circ \gamma\big) \circ \sigma(x)(g) &= \big(\tau \circ \gamma\big)\big(\sigma(x)(g)\big)\\ &= \tau\big(\gamma(\sigma(x)(g))\big).\end{aligned} \tag{$*$}$$

Por otra parte, tenemos

$$\begin{aligned}\tau \circ \big(\gamma \circ \sigma\big)(x)(g) &= \tau\big((\gamma \circ \sigma)(x)(g)\big)\\ &= \tau\big(\gamma(\sigma(x)(g))\big).\end{aligned} \tag{$**$}$$

De $(*)$ y $(**)$ tenemos

$$\big(\tau\circ\gamma\big)\circ\sigma(x)(g)=\tau\circ\big(\gamma\circ\sigma\big)(x)(g),\ \text{para todo } x\in A^G \text{ y } g\in G.$$

Por la definición de igualdad de mapeos tenemos

$$(\tau\circ\gamma)\circ\sigma=\tau\circ(\gamma\circ\sigma).$$

Como existe el automata celular identidad $Id_{A^G}: A^G\longrightarrow A^G$. Por lo tanto $AC(G;A)$ es un monoide. □

2.2. La memoria mínima

Sea G un grupo y A un conjunto. Sea $\tau: A^G\longrightarrow A^G$ un autómata celular. Sea S un conjunto memoria para τ y $\mu: A^S\longrightarrow A$ el mapeo de definición local asociado a τ. Si S' es un subconjunto finito de G tal que $S\subset S'$, entonces S' también es un conjunto de memoria para τ y el mapeo de definición local asociado con S' es el mapeo $\mu': A^{S'}\longrightarrow A$ definido por $\mu'=\mu\circ p$, donde $p: A^{S'}\longrightarrow A^S$ es la proyección canónica. Esto muestra que el conjunto memoria para un autómata celular no es único en general. Sin embargo, veremos que cada autómata celular admite un único conjunto memoria de *cardinalidad mínima*. Primero establezcamos el siguiente resultado.

Lema 2.2.1. *Sea $\tau: A^G\longrightarrow A^G$ un autómata celular. Sea S_1 y S_2 conjuntos memorias para τ. Entonces $S_1\cap S_2$ también es un conjunto memoria para τ.*

Demostración. Sea $x\in A^G$. Demostraremos que $\tau(x)(1_G)$ depende solo de la restricción de x a $S_1\cap S_2$. Para esto, consideramos un elemento $y\in A^G$ tal que $x|_{S_1\cap S_2}=y|_{S_1\cap S_2}$. Ahora eligamos un elemento $z\in A^G$ tal que $z|_{S_1}=x|_{S_1}$ y $z|_{S_2}=y|_{S_2}$, entonces

$$\tau(z)(1_G)=\mu(z|_{S_1})=\mu(x|_{S_1})=\tau(x)(1_G) \qquad (*)$$

$$\tau(x)(1_G)=\mu(z|_{S_1})=\mu(x|_{S_2})=\tau(y)(1_G) \qquad (**)$$

De $(*)$ y $(**)$ tenemos $\tau(x)(1_G)=\tau(y)(1_G)$. Así, existe un mapeo $\mu: A^{S_1\cap S_2}\longrightarrow A$ tal que

$$\tau(x)(1_G)=\mu(x|_{S_1\cap S_2}),\ \text{para todo } x\in A^G.$$

Como τ es autómata celular, entonces τ es G-equivariante por la Proposición 2.1.5. Aplicando la Proposición 2.1.8 deducimos que $S_1 \cap S_2$ es un conjunto memoria para τ. $\square$

Proposición 2.2.2. *Sea $\tau : A^G \longrightarrow A^G$ un autómata celular con conjunto memoria S. Si S_0 es un conjunto memoria cardinalidad mínima para τ si y sólo si $S_0 \subset S$.*

Demostración. Supongamos que S es un conjunto memoria para τ, por Lema 2.2.1 tenemos que $S_0 \cap S$ es también un conjunto memoria para τ. Como S_0 es de cardinalidad mínima, entonces $S_0 = S_0 \cap S$. Así, tenemos que $S_0 \subset S$.

Recíprocamente, supongamos que S_0 es un conjunto memoria de cardinalidad mínima. Como hemos visto al principio de está sección, cada subconjunto de G que contiene a S_0 también es un conjunto memoria para τ. Así, tenemos que S es un conjunto memoria para τ. $\square$

Proposición 2.2.3. *Sea $\tau : A^G \longrightarrow A^G$ un autómata celular. Entonces existe un único conjunto de memoria $S_0 \subset G$ para τ de cardinalidad mínima.*

Demostración. Primero demostaremos la existencial de S_0. Sea

$$M = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : n = |S| \ \text{ y } \ S \subset G \text{ finito memoria para } \tau\},$$

$M \neq \emptyset$ pues, si $S = \emptyset \subset G$, entonces $|S| = 0$, entonces por el principio de buen orden M tiene un elemento mínimo. Así existe $S_0 \subset G$ finito de cardinalidad mínima para τ. Ahora demostraremos la unicidad. Supongamos que existe S_1 un conjunto memoria para τ con $|S_1| = |S_0|$ por la Proposción 2.2.2 tenemos que $S_0 \subset S$ y como S_0 y S son finitos, entonces $S_1 = S_0$, esto es una contradicción. Por lo tanto S_0 es único conjunto memoria de cardinalidad mínima para τ. $\square$

El conjunto memoria de cardinalidad mínima de un autómata celular se llama el conjunto memoria *mínima.*

Ejemplo 2.2.4. Si fijamos un elemento $a \in A$, entonces el mapeo constante $\tau : A^G \to A^G$ definido por $\tau(x)(g) = a$, para todo $g \in G$, es un autómata celular con conjunto memoria $S = \emptyset$. Entonces τ es de memoria mínima vacía.

2.3. Autómatas celulares sobre grupos cocientes

Sea G un grupo y sea A un conjunto. Sea $\tau : A^G \longrightarrow A^G$ un autómata celular. Supongamos que N es un subgrupo normal de G y sea $\rho : G \longrightarrow G/N$ el epimorfismo canónico. De la Proposición 1.4.10 deducimos que el mapeo $\rho^* : A^{G/N} \longrightarrow Fix(N)$, definido por $\rho^*(y) = y \circ \rho$, para todo $y \in A^{G/N}$, es una biyección del conjunto $A^{G/N}$ de configuraciones sobre el grupo G/N hacia el conjunto $Fix(N) \subset A^G$ de configuraciones N-periódicas sobre G. Por otra parte, el conjunto $Fix(N)$ satisface $\tau(Fix(N)) \subset Fix(N)$ por Corolario 2.1.7. Así, podemos definir un mapeo $\overline{\tau} : A^{G/N} \longrightarrow A^{G/N}$ por

$$\overline{\tau} = (\rho^*)^{-1} \circ \tau|_{Fix(N)} \circ \rho^*. \tag{2.8}$$

Proposición 2.3.1. *El siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
A^{G/N} \arrow[r, "\rho^*"] \arrow[d, "\overline{\tau}"'] & Fix(N) \subset A^G \arrow[d, "\tau|_{Fix(N)}"] \\
A^{G/N} \arrow[r, "\rho^*"'] & Fix(N)
\end{tikzcd}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\rho^* \circ \overline{\tau} &= \rho^* \circ (\rho^*)^{-1} \circ \tau|_{Fix(N)} \circ \rho^* \\
&= [\rho^* \circ (\rho^*)^{-1}] \circ \tau|_{Fix(N)} \circ \rho^* \\
&= Id_{Fix(N)} \circ \tau|_{Fix(N)} \circ \rho^* \\
&= [Id_{Fix(N)} \circ \tau|_{Fix(N)}] \circ \rho^* \\
&= \tau|_{Fix(N)} \circ \rho^*.
\end{aligned}$$

Por lo tanto el diagrama es conmutativo. □

Supongamos que $S \subset G$ es un conjunto memoria para τ y que $\mu : A^S \longrightarrow A$ es el mapeo de definición local asociado a τ. Considerar el subconjunto finito $\overline{S} = \rho(S) \subset G/N$ y el mapeo $\overline{\mu} : A^{\overline{S}} \longrightarrow A$ definido por $\overline{\mu} = \mu \circ \pi$, donde $\pi : A^{\overline{S}} \longrightarrow A^S$ es el mapeo inyectivo inducido por ρ.

Proposición 2.3.2. *El mapeo* $\overline{\tau} : A^{G/N} \longrightarrow A^{G/N}$ *es un autómata celular sobre el grupo* G/N *que admite a* $\overline{S}$ *como un conjunto memoria y* $\overline{\mu} : A^{\overline{S}} \longrightarrow A$ *como el mapeo de definición local asociado a* $\overline{\tau}$.

Demostración. Sea $y \in A^{G/N}$, $g \in G$ y $\rho(g) = Ng$, tenemos

$$\begin{aligned}
\overline{\tau}(y)(Ng) &= \overline{\tau}(y)(\rho(g)) \\
&= \tau(y \circ \rho)(g) \\
&= \mu\big((g^{-1}(y \circ \rho))|_S\big) \\
&= \overline{\mu}\big((Ng^{-1}y)|_{\rho(S)}\big) \\
&= \overline{\mu}\big(((Ng^{-1})y)|_{\overline{S}}\big).
\end{aligned}$$

Así, tenemos que $\overline{\tau}$ es un autómata celular con conjunto memoria $\overline{S}$ y el mapeo local $\overline{\mu} : A^{\overline{S}} \longrightarrow A$. □

Definición 2.3.3. Dados los monoides X e Y, un mapeo $\varphi : X \longrightarrow Y$ se llama un *morfismo monoidal* si satisface:

(i) $\varphi(1_X) = 1_Y$;

(ii) $\varphi(xx') = \varphi(x)\varphi(x')$, para todo $x, x' \in X$.

En donde 1_X (resp. 1_Y) es el elemento identidad de X (resp.Y). Si φ es morfismo biyectivo monoide se llama un isomorfismo monoide.

Proposición 2.3.4. *El mapeo* $\varphi : AC(G; A) \longrightarrow AC(G/N; A)$ *definido por* $\varphi(\tau) = \overline{\tau}$, *es un epimorfismo monoidal, en donde* $\overline{\tau}$ *está definido por (2.8).*

Demostración. Sea $\sigma : A^{G/N} \longrightarrow A^{G/N}$ un autómata celular sobre G/N con conjunto memoria $T \subset G/N$ y el mapeo local $\nu : A^T \longrightarrow A$. El mapeo $\rho : G \longrightarrow G/N$ definido por $\rho(g) = Ng$, induce un mapeo biyectivo $\phi : S \longrightarrow T$ definido por $\phi(g) = \rho(g)$, para todo $g \in S$. Sea $\tau : A^G \longrightarrow A^G$ un autómata celular sobre G con conjunto memoria S y el mapeo local $\mu : A^S \longrightarrow A$ definido por $\mu(y) = \nu(y \circ \phi^{-1})$, para todo $y \in A^S$. Tenemos

$$\overline{\mu}(z) = \big(\mu \circ \pi\big)(z) = \mu\big(\phi(z)\big) = \nu\big(\pi(z) \circ \phi^{-1}\big) = \nu(z), \text{ para todo } z \in A^{\overline{S}}.$$

Así, tenemos que $\overline{\mu} = \nu$, entonces $\overline{\tau} = \sigma$. Por lo tanto $\varphi(\tau) = \overline{\tau} = \sigma$. Esto muestra que φ es sobreyectivo.

Ahora demostraremos que $\varphi(Id_{A^G}) = Id_{A^{G/N}}$.

$$\begin{aligned}
\varphi(Id_{A^G}) &= (\rho^*)^{-1} \circ Id_{A^G}|_{Fix(N)} \circ \rho^* \\
&= (\rho^*)^{-1} \circ (Id_{A^G}|_{Fix(N)} \circ \rho^*) \\
&= (\rho^*)^{-1} \circ \rho^* \\
&= Id_{A^{G/N}}.
\end{aligned}$$

Para demostrar $\varphi(\tau \circ \tau') = \varphi(\tau) \circ \varphi(\tau')$. Sea $\tau, \tau' \in AC(G; A)$, entonces

$$\begin{aligned}
\varphi(\tau \circ \tau') &= (\rho^*)^{-1}(\tau \circ \tau')|_{Fix(N)} \circ \rho^* \\
&= (\rho^*)^{-1} \circ \tau|_{Fix(N)} \circ \tau'|_{Fix(N)} \circ \rho^* \\
&= (\rho^*)^{-1} \circ [\tau|_{Fix(N)} \circ Id_{Fix(N)}] \circ \tau'|_{Fix(N)} \circ \rho^* \\
&= (\rho^*)^{-1} \circ \tau|_{Fix(N)} \circ [\rho^* \circ (\rho^*)^{-1}] \circ \tau'|_{Fix(N)} \circ \rho^* \\
&= [(\rho^*)^{-1} \circ \tau|_{Fix(N)} \circ (\rho^*)] \circ [(\rho^*)^{-1} \circ \tau'|_{Fix(N)} \circ \rho^*] \\
&= \varphi(\tau) \circ \varphi(\tau').
\end{aligned}$$

Por lo tanto φ es un epimorfismo monoidal. □

2.4. Inducción y restricción de autómatas celulares

Sea G un grupo, H un subgrupo de G y A un conjunto. Denotamos por $AC(G, H; A)$ el conjunto de todos los autómatas celulares $\tau : A^G \to A^G$ con conjunto memoria S tal que $S \subset H$. Así, tenemos que $AC(G, H; A)$ es subconjunto de $AC(G; A)$.

Definición 2.4.1. Un subconjunto N de un monoide M se llama *submonoide* si el elemento identidad $1_M \in M$ está en N y N es cerrado bajo la ley de composición de M, es decir, $(xy) \in N$, para todo $x, y \in N$.

Proposición 2.4.2. *El conjunto $AC(G, H; A)$ es un submonoide de $AC(G; A)$.*

Demostración. El elemento identidad de $AC(G; A)$ es el mapeo identidad Id_{A^G}. Tenemos $Id_{A^G} \in AC(G, H; A)$ ya que $\{1_G\}$ es un conjunto memoria para Id_{A^G} y $\{1_G\} \subset H$. Sea

$\sigma, \tau \in AC(G, H; A)$, con S (resp. T) un conjunto memoria para σ (resp. τ) tal que $S \subset H$ (resp. $T \subset H$). De la Proposición 2.1.11 se deduce que ST es un conjunto memoria para $\sigma \circ \tau$. Como $ST \subset H$, esto implica $\sigma \circ \tau \in AC(G, H; A)$. Esto muestra que $AC(G, H; A)$ es un submonoide de $AC(G; A)$. □

Definición 2.4.3. Sea $\tau \in AC(G, H; A)$, asociado con conjunto memoria $S \subset H$ y el mapeo local $\mu : A^S \longrightarrow A$. Denotamos por τ_H la *restricción* del autómata celular τ a H. Entonces el mapeo $\tau_H : A^H \longrightarrow A^H$ definido por

$$\tau_H(x)(h) = \mu\big((h^{-1}x)|_S\big), \quad \text{para todo } \ x \in A^H \ \text{ y } \ h \in H,$$

es un autómata celular sobre el grupo H con conjunto memoria $S \subset H$ y el mapeo local μ.

Observación 2.4.4. La configuración $\widetilde{x} \in A^G$ ($\widetilde{x} : G \to A$) es la extensión de la configuración $x \in A^H$ ($x : H \to A$), entonces $x(h) = \widetilde{x}(h)$, para todo $h \in H$.

Si $\widetilde{x} \in A^G$ tal que $\widetilde{x}|_H = x$, entonces

$$\tau_H(x)(h) = \tau_H(\widetilde{x}|_H)(h) = \tau(\widetilde{x})(h), \quad \text{para todo } h \in H. \tag{2.9}$$

Esto muestra en particular que τ_H no depende de la elección del conjunto memoria $S \subset H$.

Definición 2.4.5. Sea $H \leq G$ y $\sigma : A^H \longrightarrow A^H$ un autómata celular asociado con conjunto memoria $S \subset H$ y el mapeo local $\mu : A^S \longrightarrow A$. Denotamos por σ^G el autómata celular obtenido por *inducción* de σ a G. Entonces el mapeo $\sigma^G : A^G \longrightarrow A^G$ definido por

$$\sigma^G(\widetilde{x})(g) = \mu\big((g^{-1}\widetilde{x})|_S\big), \quad \text{para todo } \widetilde{x} \in A^G \text{ y } g \in G,$$

es un autómata celular sobre G con conjunto memoria S y el mapeo local μ.

Si S_0 es el conjunto memoria mínima de σ y $\mu_0 : A^{S_0} \longrightarrow A$ es el mapeo local, entonces $\mu = \mu_0 \circ \pi$, donde $\pi : A^S \longrightarrow A^{S_0}$ es el mapeo de restricción. Así, tenemos

$$\sigma^G(\widetilde{x})(g) = \mu\big((g^{-1}\widetilde{x})|_S\big) = \mu_0 \circ \pi\big((g^{-1}\widetilde{x})|_S\big) = \mu_0\big((g^{-1}\widetilde{x})|_{S_0}\big),$$

para todo $x \in A^G$ y $g \in G$. Esto muestra en particular que σ^G no depende de la elección del conjunto memoria $S \subset H$.

Proposición 2.4.6. *El mapeo* $\alpha : AC(G, H; A) \longrightarrow AC(H; A)$ *definido por* $\alpha(\tau) = \tau_H$ *es un isomorfismo monoidal, cuyo inverso es el mapeo* $\beta : AC(H; A) \longrightarrow AC(G, H; A)$ *definido por* $\beta(\sigma_H) = \sigma^G$.

Demostración. Por definición α y β tenemos que $\beta \circ \alpha$ y $\alpha \circ \beta$ son los mapeos identidades. Así, tenemos que α es biyectivo con inverso β. Ahora demostraremos que α es un morfismo monoidal. Sea $x \in A^H$ y $\widetilde{x} \in A^G$, donde $\widetilde{x}$ es la extensión de x. Aplicando (2.9) tenemos

$$\alpha(Id_{A^G})(x)(h) = Id_{A^H}(x)(h) = Id_{A^G}(\widetilde{x})(h) = \widetilde{x}(h) = x(h), \text{ para todo } h \in H.$$

Esto muestra que $\alpha(Id_{A^G})(x) = x$, para todo $x \in A^H$, es decir, $\alpha(Id_{A^G}) = Id_{A^H}$.

Sea $\sigma, \tau \in AC(G, H; A)$. Sea $x \in A^H$ y $\widetilde{x} \in A^G$, donde $\widetilde{x}$ es la extensión de x. Aplicando (2.9), tenemos

$$\alpha\big(\sigma \circ \tau\big)(x)(h) = \big(\sigma \circ \tau\big)_H(\widetilde{x})(h) = \big(\sigma \circ \tau\big)(\widetilde{x})(h) = \sigma\big(\tau(\widetilde{x})\big)(h), \tag{2.10}$$

para todo $h \in H$. Como $\tau(\widetilde{x})$ es la extensión de $\alpha(\tau)(x)$, tenemos

$$\alpha(\sigma)\big(\alpha(\tau)(x)\big)(h) = \sigma_H\big(\tau(\widetilde{x})\big)(h) = \sigma\big(\tau(\widetilde{x})\big)(h), \text{ para todo } h \in H.$$

es decir,

$$\big(\alpha(\sigma) \circ \alpha(\tau)\big)(x)(h) = \sigma(\tau(\widetilde{x}))(h), \text{ para todo } h \in H. \tag{2.11}$$

De (2.10) y (2.11) tenemos que $\alpha(\sigma \circ \tau)(x)(h) = (\alpha(\sigma) \circ \alpha(\tau))(x)(h)$, para todo $x \in A^H$, entonces $\alpha(\sigma \circ \tau)(x) = \alpha(\sigma) \circ \alpha(\tau)(x)$. Por lo tanto $\alpha(\sigma \circ \tau) = \alpha(\sigma) \circ \alpha(\tau)$. □

Sea $\tau \in AC(G, H; A)$. Para analizar la forma en que τ transforma a una configuración $\widetilde{x} \in A^G$, ahora introducimos el conjunto $G/H = \{gH : g \in G\}$ que consta de todas las clases laterales izquierdas de H en G. Ya que las clases $c \in G/H$ forman una partición de G, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.4.7. *Entre los siguientes conjuntos*

$$A^G = \{\tilde{x} : G \longrightarrow A : \tilde{x} \textit{ es la extensión de } x\} \textit{ y}$$

$$\prod_{c \in G/H} A^c = \left\{ \tilde{x}|_c : G \longrightarrow \bigcup_{c \in G/H} A^c : (\forall c \in G/H)(\tilde{x}|_c \in A^c) \right\}$$

hay una biyección.

Demostración. Sea

$$\alpha : A^G \longrightarrow \prod_{c\in G/H} A^c.$$

$$\tilde{x} \longmapsto \alpha(\tilde{x}).$$

$$\alpha(\tilde{x}) : G/H \longrightarrow \bigcup_{c\in G/H} A^c,\ \alpha(\tilde{x})(c) \in A^c.$$

$$c \longmapsto \tilde{x}|_c : c \longrightarrow A.$$

Para demostrar que α es inyectivo. Sea $\tilde{x}, \tilde{y} \in A^G$ tal que $\alpha(\tilde{x}) = \alpha(\tilde{y})$. Para cualquier $g \in G$, existe un único $c' \in G/H$ tal que $g \in c'$. En particular para $c' \in G/H$ tenemos $\alpha(\tilde{x})(c') = \alpha(\tilde{y})(c')$, entonces por definición de α tenemos $\tilde{x}|_{c'} = \tilde{y}|_{c'}$. Como $g \in c'$, entonces $\tilde{x}|_{c'}(g) = \tilde{y}|_{c'}(g)$. Así, tenemos $\tilde{x}(g) = \tilde{y}(g)$, para todo $g \in G$, entonces $\tilde{x} = \tilde{y}$. Por lo tanto α es inyectivo.

Para demostrar que α es sobreyectivo.

$$\text{Sea } p \in \prod_{c\in G/H} A^c,\ p : G/H \longrightarrow \bigcup_{c\in G/H} A^c,\ \text{con } p(c) \in A^c,\ \text{para todo } c \in G/H.$$

Definamos la configuración $\tilde{x} : G \longrightarrow A$ por $\tilde{x}(g) = p(c)(g)$. Si $g \in c$, entonces $\tilde{x}|_c = p(c)$, como $c \in G/H$ forma una partición de G. Así, tenemos que $\tilde{x}$ está bien definida. Ahora

$$\alpha(\tilde{x}) : G/H \longrightarrow \bigcup_{c\in G/H} A^c.$$

Sea $c \in G/H$; $\alpha(\tilde{x})(c) = \tilde{x}|_c = p(c)$, para todo $c \in G/H$. Por lo tanto $\alpha(\tilde{x}) = p$. Así, tenemos que α es sobreyectivo. $\square$

Por la Proposición 2.4.7, tenemos la siguiente identificación natural

$$A^G = \prod_{c\in G/H} A^c.$$

Con está identificación, tenemos

$$\widetilde{x} = (\widetilde{x}|_c)_{c\in G/H},\ \text{para cada } \widetilde{x} \in A^G,$$

donde el mapeo $\widetilde{x}|_c \in A^c$ denota la restricción de $\widetilde{x}$ a c. Observar que si $c \in G/H$ y $g \in c$, entonces

$$\tau(\widetilde{x})(g) = \tau(\widetilde{x}|_c)(g),\ \text{para todo}\ \ \widetilde{x}|_c \in A^c,\ \ c \in G/H\ \ \text{y}\ \ g \in c.$$

Se deduce directamente del Lema 2.1.9 ya que si S es un conjunto memoria para τ con $S \subset H$, entonces $gS \subset c$. Esto implica que τ podemos escribir como un producto

$$\tau = \prod_{c \in G/H} \tau_c, \tag{2.12}$$

donde $\tau_c : A^c \longrightarrow A^c$ es el único mapeo que satisface $\tau_c(\widetilde{x}|_c) = (\tau(\widetilde{x}))|_c$, para todo $\widetilde{x} \in A^G$.

La notación es coherente cuando $c = H$, ya que en este caso $\tau_c = \tau_H : A^H \longrightarrow A^H$ es el autómata celular obtenido por restricción de τ a H.

Proposición 2.4.8. *Sea H un subgrupo de G. Dado una clase $c \in G/H$ y un elemento $g \in c$, entonces el mapeo $\phi_g : H \longrightarrow c$ definido por $\phi_g(h) = gh$, para todo $h \in H$ es biyectivo.*

Demostración. Sean $h_1, h_2 \in H$ tal que $\phi_g(h_1) = \phi_g(h_2)$, entonces $gh_1 = gh_2$, multiplicando por izquierda por $g^{-1} \in c$, tenemos $g^{-1}gh_1 = g^{-1}gh_2$, entonces $h_1 = h_2$. Por lo tanto ϕ_g es inyectivo.

Ahora demostraremos que ϕ_g es sobreyectivo, es decir, para cualquier $y \in c$, debe existir $h \in H$ tal que $\phi_g(h) = y$. Por defición de ϕ_g tenemos $gh = y$ multiplicando por g^{-1} por izquierda, tenemos $g^{-1}gh = g^{-1}y$, entonces $h = g^{-1}y$. Luego $\phi_g(h) = \phi_g(g^{-1}y) = g^{-1}gy = y$. Así, tenemos que ϕ_g es sobreyectivo. Por lo tanto ϕ_g es biyectivo. □

Proposición 2.4.9. *El mapeo ϕ_g de la Proposición 2.4.8 induce el siguiente mapeo biyectivo $\phi_g^* : A^c \longrightarrow A^H$ definido por*

$$\phi_g^*(x) = x \circ \phi_g, \text{ para todo } x \in A^c. \tag{2.13}$$

Demostración. Sea $x_1, x_2 \in A^c$ tal que $\phi_g^*(x_1) = \phi_g^*(x_2)$, tenemos

$$x \circ \phi_g = \phi_g^*(x_1) = \phi_g^*(x_2) = x_2 \circ \phi_g, \text{ entonces } x_1 \circ \phi \circ \phi_g^{-1} = x_2 \circ \phi_g \circ \phi_g^{-1}.$$

Así, tenemos que $x_1 = x_2$. Por lo tanto ϕ_g^* es inyectivo.

Demostraremos que ϕ_g^* es sobreyectivo. Sea $y \in A^H$, existe $y \circ \phi_g^{-1} \in A^c$ tal que $\phi_g^*(y \circ \phi_g^{-1}) = (y \circ \phi_g^{-1}) \circ \phi_g = y$. Así, tenemos que ϕ_g^* es sobreyectivo. Por lo tanto ϕ_g^* es biyectivo. □

Observación 2.4.10. Sea $g \in G$ la configuración $\widetilde{x} \in A^G$ es la extensión de la configuración $x \in A^c$, entonces $x(gh) = \widetilde{x}(gh)$, para todo $h \in H$.

Si $\widetilde{x} \in A^G$ tal que $\widetilde{x}|_c = x$, entonces

$$\tau_c(x)(gh) = \tau_c(\widetilde{x}|_c)(gh) = \tau(\widetilde{x})(gh), \text{ para todo } h \in H. \tag{2.14}$$

Proposición 2.4.11. *Con la notación anterior, tenemos*

$$\tau_c = (\phi_g^*)^{-1} \circ \tau_H \circ \phi_g^*. \tag{2.15}$$

En otras palabras el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} A^c \arrow[r, "\tau_c"] \arrow[d, "\phi_g^*"'] & A^c \arrow[d, "\phi_g^*"] \\ A^H \arrow[r, "\tau_H"'] & A^H \end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $x \in A^c$ y $\widetilde{x} \in A^G$, donde $\widetilde{x}$ es la extensión de x. Para todo $h \in H$, tenemos

$$\begin{aligned} \big(\phi_g^* \circ \tau_c\big)(x)(h) &= \phi_g^*\big(\tau_c(x)\big)(h) \\ &= \big(\tau_c(x) \circ \phi_g\big)(h) \\ &= \tau_c(x)\big(\phi_g(h)\big) \\ &= \tau_c(x)(gh) \\ &= \tau\big(\widetilde{x}\big)(gh) \\ &= g^{-1}\tau\big(\widetilde{x}\big)(h) \\ &= \tau\big(g^{-1}\widetilde{x}\big)(h). \end{aligned}$$

Como la configuración $g^{-1}\widetilde{x} \in A^G$ es la extensión de $x \circ \phi_g \in A^H$, entonces tenemos

$$(\phi_g^* \circ \tau_c)(x)(h) = \tau(g^{-1}\widetilde{x})(h) = \tau_H(x \circ \phi_g)(h) = \tau_H(\phi_g^*(x))(h) = (\tau_H \circ \phi_g^*)(x)(h).$$

Así, tenemos que $\phi_g^* \circ \tau_c = \tau_H \circ \phi_g^*$, ahora componiendo por izquierda por $(\phi_g^*)^{-1}$, ya que ϕ_g^* es biyectivo. Por lo tanto tenemos (2.15). □

Proposición 2.4.12. *Sea G un grupo y sea A un conjunto. Sea H un subgrupo de G y sea $\tau \in AC(G, H; A)$. Sea $\tau_H : A^H \longrightarrow A^H$ que denota el autómata celular obtenido por la restricción de τ a H. Entonces tenemos las siguientes afirmaciones:*

(i) τ *es inyectivo si y sólo si* τ_H *es inyectivo;*

(ii) τ *es sobreyectivo si y sólo si* τ_H *es sobreyectivo;*

(iii) τ *es biyectivo si y sólo si* τ_H *es biyectivo.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata de (2.12) que τ es inyectivo (resp. sobreyectivo y resp. biyectivo) si y sólo si τ_c es inyectivo (resp. sobreyectivo y resp. biyectivo), para todo $c \in G/H$.

Ahora, de (2.15) tenemos para $c \in G/H$ y $g \in G$, los mapeos τ_c y τ_H son conjugados por la biyección ϕ_g. Deducimos que τ_c es inyectivo (resp. sobreyectivo, resp. biyectivo) si y sólo si τ_H es inyectivo (resp. sobreyectivo, resp. biyectivo). □

3

Teorema de Curtis-Hedlund

En esta sección se demostrará cuando el alfabeto es finito, cada autómata celular es continua en espacio de configuraciones, (Teorema 3.0.15). Otro hecho importante en el caso de alfabeto finito es que cada autómata celular biyectivo es invertible, en el sentido de que el mapeo inverso es también un autómata celular (Teorema 3.5.5). Se demostrará con un ejemplos que, cuando el alfabeto es infinito, el mapeo definido en el espacio de configuraciones es continua y G-equivariante y no puede ser un autómata celular. También se demostrará la generalización del Teorema de Curtis-Hedlund (Teorema 3.4.1) a un conjunto de alfabeto infinito en los espacios uniformes.

Proposición 3.0.13. *Sea A un conjunto de alfabeto finito. Sea (A, τ) un espacio topológico, donde τ es la topología discreta en A, entonces A es compacto.*

Demostración. Supongamos que A es infinito y sea C un cubrimiento de A, definimos

$$C = \big\{\{a\} : \; a \in A\big\}.$$

Como A es un conjunto infinito, entonces C también es infinito. Sea C' un subconjunto propio de C, entonces existe $a' \in A$ tal que $\{a'\} \notin C'$. Así C' no es un subcubrimiento de A y por definición de compacto A no puede ser compacto, esto es una contradicción. Por lo tanto A es compacto. □

Observación 3.0.14. Como el producto arbitrario de espacios compactos es compacto por Teorema de Tychonoff. Así, tenemos que A^G es compacto.

Teorema 3.0.15. (Curtis-Hedlund). *Sea G un grupo y A un conjunto finito.*
Sea $\tau : A^G \to A^G$ un mapeo. Entonces los siguientes incisos son equivalentes:

a) el mapeo τ es un autómata celular;

b) el mapeo τ es G-equivariante y continua en la topología prodiscreta de A^G .

Demostración. Se sigue directamente que (a) implica (b) por la Proposición 2.1.5 tenemos que τ es G-equivariante y por la Proposicón 2.1.10 tenemos que τ es continua (está implicación no requiere de la finitud del alfabeto A).

Reciprocamente, definamos el mapeo $\varphi : A^G \longrightarrow A$ por $\varphi(x) = \tau(x)(1_G)$ es continua. Por la Proposición 1.3.3, tenemos que para cada $x \in A^G$, existe un $\Omega_x \subset G$ finito e $y \in A^G$ tal que $y|_{\Omega_x} = x|_{\Omega_x}$, es decir, $y \in V(x, \Omega_x)$, entonces $\tau(y)(1_G) = \tau(x)(1_G)$. Los conjuntos $V(x, \Omega_x)$ forman un cubrimiento de A^G. Como A^G es compacto por la Observación 3.0.14, entonces existe un subconjunto finito $F \subset A^G$ tal que los conjuntos $V(x, \Omega_x)$, con $x \in F$ cubren a A^G. Sea $S = \cup_{x \in F}\Omega_x$ y supongamos que dos configuraciones $y, z \in A^G$ coinciden en S, es decir, $y|_S = z|_S$. Aplicando de nuevo la Proposición 1.3.3, tenemos que para cada $x_0 \in F$, existe $\Omega_{x_0} \subset S$ finito e $y \in A^G$ tal que $y|_{\Omega_{x_0}} = x_0|_{\Omega_{x_0}}$. Como $\Omega_{x_0} \subset S$ tenemos $y|_{\Omega_{x_0}} = z|_{\Omega_{x_0}}$. Por lo tanto

$$\tau(y)(1_G) = \tau(x_0)(1_G) = \tau(z)(1_G).$$

Así, existe un mapeo $\mu : A^S \longrightarrow A$ tal que $\tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)$, para todo $x \in A^G$. Como τ es G-equivariante, se sigue por la Proposición 2.1.8 que τ es un autómata celular con conjunto memoria S y el mapeo de definición local μ. □

Cuando el alfabeto A es infinito y el mapeo $\tau : A^G \to A^G$ es continua y G-equivariante, τ no es un autómata celular. En otras palabras en el Teorema 3.0.15 el (b) no implica (a) y se convierte en falsedad si se suprime la hipótesis de la finitud de A. Esto se demuestra con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.0.16. Sea G un grupo arbitrario infinito y sea $A = G$ como el conjunto de alfabeto. Para evitar la confusion, se denota por $g \cdot h$ el producto de dos elementos g y h en G. Consideramos el mapeo $\tau : A^G \longrightarrow A^G$ definido por

$$\tau(x)(g) = x(g \cdot x(g)), \text{ para todo } x \in A^G \text{ y } g \in G.$$

Dados $x \in A^G$ y $g, h \in G$ tenemos

$$\begin{aligned}\tau(gx)(h) &= gx(h \cdot [gx](h)) \\ &= x(g^{-1} \cdot h \cdot [gx](h)) \\ &= x(g^{-1} \cdot h \cdot x(g^{-1} \cdot h)) \\ &= \tau(x)(g^{-1} \cdot h).\end{aligned}$$

Así, tenemos que $g\tau(x) = \tau(gx)$, para todo $x \in A^G$ y $g \in G$. Por lo tanto, τ es G-equivariante.

Sea $x \in A^G$ y $V\big(\tau(x), K\big)$ una vecindad de $\tau(x)$ en A^G con $K \subset G$ finito, demostraremos que existe una vecindad $V(x, F)$ de A^G con $F \subset G$ finito tal que $\tau\big(V(x, F)\big) \subset V\big(\tau(x), K\big)$. Sea $F = H \cup \{k \cdot x(k) : k \in K\}$, entonces existe $V(x, F)$. Sea $y \in V(x, F)$, entonces $x|_F = y|_F$, y para todo $k \in K$, tenemos

$$\begin{aligned}\tau(x)(k) &= x(k \cdot x(k)) \\ &= y(k \cdot x(k)) \\ &= y(k \cdot y(k)) \\ &= \tau(y)(k),\end{aligned}$$

esto muestra que $\tau(y) \in V\big(\tau(x), K\big)$, entonces $\tau\big(V(x, F)\big) \subset V\big(\tau(x), K\big)$. Por lo tanto τ es continua. Sin embargo τ no es un autómata celular. De hecho, fijar $g_0 \in G \setminus \{1_G\}$, para todo $g \in G$, consideremos las configuraciones x_g e y_g en A^G definidos por

$$x_g(h) = \begin{cases} g, & \text{si } h = 1_G, \\ g_0, & \text{si } h = g, \\ 1_G, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

e

$$y_g(h) = \begin{cases} g, & \text{si } h = 1_G, \\ 1_G, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para todo $h \in G$.

Sea $F \subset G$ finito y elegimos $g \in G \setminus F$ (esto es posible porque G es infinito). Como

$x_g|_{G\setminus\{g\}} = y_g|_{G\setminus\{g\}}$, entonces $x_g|_F = y_g|_F$ pero

$$\begin{aligned}\tau(x_g)(1_G) &= x_g(1_G \cdot x_g(1_G)) \\ &= x_g(x_g(1_G)) \\ &= x_g(g) \\ &= g_0\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\tau(y_g)(1_G) &= y_g(1_G \cdot y_g(1_G)) \\ &= y_g(y_g(1_G)) \\ &= y_g(g) \\ &= 1_G.\end{aligned}$$

Así, tenemos que $\tau(x_g)(1_G) \neq \tau(y_g)(1_G)$. Por lo tanto no existe un $F \subset G$ finito tal que, para todo $x \in A^G$, el valor de $\tau(x)$ en 1_G solo dependa de los valores de $x|_F$. Esto muestra que τ no es un autómata celular.

3.1. Estructuras uniformes

3.1.1. Espacios uniformes

En topología y en análisis funcional, un espacio uniforme es un conjunto dotado de una estructura uniforme que permite estudiar conceptos como continuidad uniforme, completitud y convergencia uniforme.

Los espacios uniformes generalizan a los espacios métricos y abarcan las topologías de los grupos topológicos y por lo tanto son base de la mayor parte del análisis. Se deben a Henri y Cartan quienes fueron introducidos a través de Bourbaki.

Sea X un conjunto. Denotamos por Δ_X, la diagonal en $X \times X$, es decir,

$$\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\} \subset X \times X.$$

Supongamos que R es un subconjunto de $X \times X$ (en otras palabras, R es una relación binaria en X). Para $y \in X$, definamos el conjunto $R[y] \subset X$ por

$$R[y] = \{x \in X : (x, y) \in R\}.$$

El inverso $R^{-1} \subset X \times X$ de R se define por

$$R^{-1} = \{(x, y) \in X \times X : (y, x) \in R\}.$$

Se dice que R es simétrico si satisface $R^{-1} = R$.

Si R y S son subconjuntos de $X \times X$ definamos la composición $R \circ S \subset X \times X$ por

$$R \circ S = \{(x, y) : \text{existe } z \in X \text{ tal que } (x, z) \in R \text{ y } (z, y) \in S\}.$$

Definición 3.1.1. Una *estructura uniforme* sobre un conjunto X es una colección $\mathcal{U}$ no vació de subconjuntos de X que satisface las siguientes condiciones:

1) Si $V \in \mathcal{U}$, entonces $\Delta_X \subset V$;

2) Si $V \in \mathcal{U}$ y $V \subset V' \subset X \times X$, entonces $V' \in \mathcal{U}$;

3) Si $V, W \in \mathcal{U}$, entonces $V \cap W \in \mathcal{U}$;

4) Si $V \in \mathcal{U}$, entonces $V^{-1} \in \mathcal{U}$;

5) Si $V \in \mathcal{U}$, entonces existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W \circ W \subset V$.

Un conjunto X equipado con una estructura uniforme $\mathcal{U}$ se llama *espacio uniforme* y los elementos de la colección $\mathcal{U}$ se llaman *entornos* de X. El par $(X, \mathcal{U})$ se llama *espacio uniforme.*

Ejemplo 3.1.2. La *estructura uniforme indiscreta o trivial* sobre un conjunto X es

$$\mathcal{U} = \{X \times X\}.$$

El par $(X, \{X \times X\})$ se llama *espacio uniforme indiscreta o trivial.*

Ejemplo 3.1.3. La *estructura uniforme discreta* sobre un conjunto X es

$$\mathcal{U} = \{V \subset X \times X : \Delta_X \subset V\}.$$

Demostración. Claramente $\mathcal{U}$ cumple (i).
(ii) Si $V \in \mathcal{U}$ y $V \subset V'$, entonces $\Delta_X \subset V \subset V'$. Así, $V' \in \mathcal{U}$.
(iii) Si $V, W \in \mathcal{U}$, entonces

si $z \in \Delta_X \Rightarrow z \in V \wedge z \in W$

$\Rightarrow z \in V \cap W.$

Por lo tanto $\Delta_X \subset V \cap W$, de donde $V \cap W \in \mathcal{U}$.

(iv) Si $V \in \mathcal{U}$, entonces

si $(x, y) \in \Delta_X \Rightarrow x = y$

$\Rightarrow (y, y) \in V$

$\Rightarrow (y, y) \in V^{-1}.$

Por lo tanto $\Delta_X \subset V^{-1}$, de donde $V^{-1} \in \mathcal{U}$.

(v) Sea $V \in \mathcal{U}$, entonces

Caso 1. Si $V = \Delta_X$ entonces existe Δ_X tal que $\Delta_X \circ \Delta_X = \Delta_X$.

Caso 2. Si $\Delta_X \subset V$ entonces existe $(a, b) \in V$ con $a \neq b$, con lo cual existe $W = \Delta_X \cup \{(a, b)\}$ con $W \in \mathcal{U}$ tal que $W \circ W \subset V$.

Así, tenemos que $\mathcal{U}$ es uniforme y $(X, \mathcal{U})$ se llama el *espacio uniforme discreto.* □

Se deduce de (i) que la estructura uniforme discreta en X es la única estructura uniforme en X que admite a la diagonal $\Delta_X \subset X \times X$ como un entorno.

Ejemplo 3.1.4. La *estructura uniforme usual* sobre el conjunto $\mathbb{R}$ está dada por

$$\mathcal{U} = \{V \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \exists\, \varepsilon > 0 \text{ tal que si } |x - y| < \varepsilon \Rightarrow (x, y) \in V\}.$$

Demostración. (i) Si $V \in \mathcal{U}$, entonces

si $(x, y) \in \Delta_{\mathbb{R}} \Rightarrow 0 = |x - y| < \varepsilon,\quad$ para todo $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow (x, y) \in V$. Así $\Delta_{\mathbb{R}} \subset V$.

(ii) Si $V \in \mathcal{U}$ y $V \subset V' \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Sea $(x, y) \in V$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $|x - y| < \varepsilon$ y como $V \subset V'$, entonces $(x, y) \in V'$. De donde $V' \in \mathcal{U}$.

(iii) Si $V, W \in \mathcal{U}$, entonces existe $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tal que

si $|x_1 - y_2| < \varepsilon \wedge |x_2 - y_2| < \varepsilon \Rightarrow (x_1, y_1) \in V \wedge (x_2, y_2) \in W$.

Luego sea $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, entonces

$$\begin{aligned}\exists\varepsilon > 0 \ \text{ tal que si } |x-y| < \varepsilon &\Rightarrow |x-y| < \varepsilon_1 \wedge |x-y| < \varepsilon_2\\ &\Rightarrow (x,y) \in V \wedge (x,y) \in W\\ &\Rightarrow (x,y) \in V \cap W.\end{aligned}$$

De donde $V \cap W \in \mathcal{U}$.

(iv) Si $V \in \mathcal{U}$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que si $|x-y| < \varepsilon \Rightarrow (x,y) \in V$ y como $|x-y| = |-(y-x)| = |y-x|$, existe $\varepsilon > 0$ tal que si $|y-x| < \varepsilon \Rightarrow (x,y) \in V^{-1}$. Así $V^{-1} \in \mathcal{U}$.

(v) Sea $V \in \mathcal{U}$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que si $|x-y| < \varepsilon \Rightarrow (x,y) \in V$, con lo que existe

$$W = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x-y| < \varepsilon/2\} \in \mathcal{U}$$

$$\begin{aligned}\text{tal que si } (x,y) \in W \circ W &\Rightarrow \exists z \in \mathbb{R} \text{ tal que } (x,y) \in W \wedge (z,y) \in W\\ &\Rightarrow \exists z \in \mathbb{R} \text{ tal que } |x-z| < \varepsilon/2 \wedge |z-y| < \varepsilon/2\\ &\Rightarrow |x-y| = |x-z+z-y| = |(x-z)+(z-y)|\\ &\leq |x-z| + |z-y| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.\end{aligned}$$

Por lo tanto, existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W \circ W \subset V$. Así, $\mathcal{U}$ es uniforme y $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ se llama el *espacio uniforme usual.* □

3.2. Continuidad uniforme

En la teoría de espacios uniformes, los mapeos que preservan la estructura (en el sentido de la imagen inversa) son los mapeos uniformemente continuas.

Definición 3.2.1. Sean $(X,\mathcal{U})$ y $(Y,\mathcal{U}')$ dos espacios uniformes. Un mapeo $f : X \longrightarrow Y$ se dice *uniformemente continua* si para cada entorno W de Y, existe un entorno V de X tal que $\big(f \times f\big)(V) \subset W$.

Se denota $f \times f$ el mapeo $f \times f : X \times X \longrightarrow Y \times Y$ definido por

$$\big(f \times f\big)(x_1,x_2) = \big(f(x_1), f(x_2)\big), \text{ para todo } (x_1,x_2) \in X \times X.$$

Definición 3.2.2. Sean $(X,\mathcal{U})$ y $(Y,\mathcal{V})$ espacios uniformes. Un mapeo $f:(X,\mathcal{U})\to(Y,\mathcal{V})$ se llama *uniformemente continua* si

$$\big(f\times f\big)^{-1}(V)\in\mathcal{U},\quad \text{para todo } V\in\mathcal{V}.$$

Teorema 3.2.3. *Sean $(X,\mathcal{U})$ y $(Y,\mathcal{V})$ espacios uniformes y sea $f:(X,\mathcal{U})\to(Y,\mathcal{V})$ un mapeo uniformemente continua las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) Para todo W entorno de Y, existe un entorno V de X tal que $\big(f\times f\big)(V)\subset W$,

b) $\big(f\times f\big)^{-1}(W)$ es un entorno de X, para todo W entorno de Y.

Demostración. Sea W un entorno de Y, existe un entorno V de X tal que $\big(f\times f\big)(V)\subset W$, como $V\subset\Big(f\times f\Big)^{-1}\Big(\big(f\times f\big)(V)\Big)\subset\Big(f\times f\Big)^{-1}(W)$. Ya que V es un entorno de X y por condición (2) de la definición 3.2.1 tenemos que $\big(f\times f\big)^{-1}(W)$ es un entorno de X.

Recíprocamente, sea W un entorno de Y. Sea $V=\big(f\times f\big)^{-1}(W)$ por por hipótesis tenemos que es un entorno de X y $\Big(f\times f\Big)(V)=\Big(f\times f\Big)\Big(\big(f\times f\big)(W)\Big)\subset W$. $\square$

Definición 3.2.4. Si $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$) es una base de la estructura uniformemente sobre X (resp. Y), entonces un mapeo $f:X\longrightarrow Y$ es uniformemente continua si y sólo si satisface la siguiente condición:

$$\text{Para todo } W\in\mathcal{B}', \text{ existe } V\in\mathcal{B} \text{ tal que } V\subset\big(f\times f\big)^{-1}(W).$$

Ejemplo 3.2.5. Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme, el mapeo identidad

$$\begin{aligned} f: X &\longrightarrow X\\ x&\longmapsto x\end{aligned}$$

es uniformemente continua.

Demostración. Sea $W\in\mathcal{U}$, entonces

$$\begin{aligned}\big(f\times f\big)^{-1}(W)&=\big\{(x_1,x_2)\in X\times X:\big(f\times f\big)(x_1,x_2)\in W\big\}\\ &=\big\{(x_1,x_2)\in X\times X:\big(f(x_1),f(x_2)\big)\in W\big\}\\ &=\{(x_1,x_2)\in X\times X:(x_1,x_2)\in W\}\\ &=W\in\mathcal{U}.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\big(f\times f\big)^{-1}(W)\in\mathcal{U}$, para todo $W\in\mathcal{U}$. $\square$

Ejemplo 3.2.6. Sean $(X,\mathcal{U}_1)$, $(Y,\mathcal{U}_2)$ y $(Z,\mathcal{U}_3)$ espacios uniformes. Sean $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ mapeos uniformemente continuas, entonces $g \circ f : X \longrightarrow Z$ es uniformemente continua.

Demostración. Sea $W \in \mathcal{U}_3$, entonces

$$\begin{aligned}
\Big((g \circ f) \times (g \circ f)\Big)^{-1}(W) &= \Big\{(x_1, x_2) \in X \times X : \Big(\big(g \circ f\big) \times \big(g \circ f\big)\Big)(x_1, x_2) \in W\Big\} \\
&= \Big\{(x_1, x_2) \in X \times X : \Big(\big(g \circ f\big)(x_1), \big(g \circ f\big)(x_2)\Big) \in W\Big\} \\
&= \Big\{(x_1, x_2) \in X \times X : \Big(g\big(f(x_1)\big), g\big(f(x_2)\big)\Big) \in W\Big\} \\
&= \big\{(x_1, x_2) \in X \times X : \big(f(x_1), f(y_2)\big) \in \big(g \times g\big)^{-1}(W)\big\} \\
&= \Big(f \times f\Big)^{-1}\Big(\big(g \times g\big)^{-1}(W)\Big).
\end{aligned}$$

Como W es un entorno de $\mathcal{U}_3$ de Z, entonces $\big(g \times g\big)^{-1}(W)$ es un entorno de $\mathcal{U}_2$ de Y ya que g es uniformemente continua y $\Big(f \times f\Big)^{-1}\Big(\big(g \times g\big)^{-1}(W)\Big)$ es un entorno de $\mathcal{U}_1$ de X ya que f es uniformemente continua. Así, tenemos que $g \circ f$ es un mapeo uniformemente continua. □

3.3. La estructura uniforme prodiscreta

Sea G un grupo y sea A un conjunto. La estructura uniforme prodiscreta en A^G es la estructura uniforme producto obtenida de tomar la estructura uniforme discreta en cada factor A de $A^G = \prod_{g \in G} A$.

Una base de entornos para la estructura uniforme prodiscreta en A^G está dada por los conjuntos $W_\Omega \subset A^G \times A^G$, en donde

$$W_\Omega = \{(x, y) \in A^G \times A^G : x|_\Omega = y|_\Omega\}, \tag{3.1}$$

Ω varia sobre todos los subconjuntos finitos de G.

Observación 3.3.1. Usando la notación introducida en (3.1), tenemos

$$V(x, \Omega) = \{y \in A^G : (x, y) \in W_\Omega\},$$

para todo $x \in A^G$.

La siguiente afirmación da una caracterización de autómata cellular en términos de la estructura uniforme prodiscreta y el *G-desplazamiento* en A^G.

3.4. Generalización del Teorema de Curtis-Hedlund

Teorema 3.4.1. (Generalizado de Curtis-Hedlund) *Sea A un conjunto y sea G un grupo. Sea $\tau : A^G \longrightarrow A^G$ un mapeo. Entonces los siguientes incisos son equivalentes:*

a) τ es un autómata celular;

b) τ es G-equivariante y uniformemente continua con la estructura uniforme prodiscreta.

Demostración. Por hipótesis tenemos que τ es un autómata celular y por la Proposición 2.1.5 tenemos que τ es G-equivariante.

Sea S un conjunto memoria para τ. Se deduce del Lema 2.1.9 que si dos configuraciones $x, y \in A^G$ coincide en gS para algún $g \in G$, entonces $\tau(x)(g) = \tau(y)(g)$. Consecuentemente, si las configuraciones x e y coinciden en $\Omega S = \{gs : g \in \Omega \text{ y } s \in S\}$ para algún subconjunto $\Omega \subset G$, entonces $\tau(x)$ y $\tau(y)$ coinciden en Ω. Usando la notación introducida en (3.1), deducimos que

$$W_{\Omega S} \subset \big(\tau \times \tau\big)^{-1}(W_\Omega).$$

Otra forma de demostrar la inclusión anterior es de la siguiente forma.

Sea $(x, y) \in W_{\Omega S}$, entonces $x|_{\Omega S} = y|_{\Omega S}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow x(gs) = y(gs), \text{ para todo } gs \in \Omega S \\
&\Rightarrow g^{-1}x(s) = g^{-1}y(s), \text{ para todo } s \in S \\
&\Rightarrow (g^{-1}x)|_S = (g^{-1}y)|_S \\
&\Rightarrow \mu\big((g^{-1}x)|_S\big) = \mu\big((g^{-1}y)|_S\big) \\
&\Rightarrow \tau(x)(g) = \tau(y)(g), \text{ para todo } g \in \Omega \\
&\Rightarrow \tau(x)|_\Omega = \tau(y)|_\Omega \\
&\Rightarrow \big(\tau(x), \tau(y)\big) \in W_\Omega \\
&\Rightarrow \big(\tau \times \tau\big)(x, y) \in W_\Omega.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $W_{\Omega S} \subset \big(\tau \times \tau\big)^{-1}(W_\Omega)$. Para cualquier subconjunto finito Ω de G. Como los conjuntos W_Ω, donde Ω varia sobre todos los subconjuntos finitos de G, forma una base de entornos para la estructura uniforme prodiscreta en A^G. Así, tenemos que τ es uniformemente continua.

Recíprocamente, supongamos que τ es un uniformemente continua y G-equivariante. Mostraremos que τ es un autómata celular. Consideremos el subconjunto $\Omega = \{1_G\} \subset G$. Como τ es uniformemente continua, entonces existe un subconjunto finito $S \subset G$ tal que $W_S \subset \big(\tau \times \tau\big)^{-1}(W_\Omega) = \big(\tau \times \tau\big)^{-1}(W_{1_G})$. Esto significa que $\tau(x)(1_G)$ depende solo de la restricción de x a S. Así, existe un mapeo $\mu : A^S \to A$ tal que

$$\tau(x)(1_G) = \mu(x|_S), \text{ para todo } x \in A^G.$$

Usando la G-equivarianza de τ, tenemos

$$\begin{aligned}
\tau(x)(g) &= \tau(x)(g1_G) \\
&= \tau(x)(L_g(1_G)) \\
&= \tau\big(x \circ L_{(g^{-1})^{-1}}\big)(1_G) \\
&= \tau(g^{-1}x)(1_G) \\
&= \mu\big((1_G g^{-1}x)|_S\big) \\
&= \mu\big((g^{-1}x)|_S\big),
\end{aligned}$$

para todo $x \in A^G$ y $g \in G$. Esto muestra que τ es un autómata celular con conjunto memoria S y el mapeo de definición μ. Consecuentemente, (b) implica (a). $\square$

Cualquier mapeo uniformemente continua entre espacios uniformes es continua con respecto a las topologías y el recíproco es verdadera cuando los espacios fuentes son compactos. La topología definida por la estructura uniforme prodiscreta en A^G es la topología prodiscreta. En el caso en que A es finito, la topología prodiscreta en A^G es compacto por Teorema Technoff. Así el Teorema 3.4.1 se reduce al Teorema de Curtis-Hedlund (Teorema 3.0.15).

Observación 3.4.2. Supongamos que G es numerable y A es un conjunto arbitrario. Entonces la estructura uniforme prodiscreta (y por lo tanto la topología prodiscreta) en A^G es metrizable. Para esto, eligamos una sucesión creciente

$$\varnothing = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \cdots \subset E_n \subset \cdots$$

de subconjuntos finitos de G tal que $\bigcup_{n\geq 0} E_n = G$. Entonces los conjuntos W_{E_n}, con $n \geq 0$, forma una base de entornos para la estructura uniforme prodiscreta en A^G. Considerar ahora la metrica d en A^G definida por

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y, \\ 2^{-\max\{n \geq 0 \,:\, x|_{E_n} = y|_{E_n}\}}, & \text{si } x \neq y, \end{cases}$$

para todo $x, y \in A^G$. Entonces tenemos

$$W_{E_n} = \{(x,y) \in A^G \times A^G : d(x,y) < 2^{-n+1}\},$$

para todo $n \geq 0$. Consecuentemente, d define la estructura uniforme prodiscreta en A^G.

Definición 3.4.3. Sean $(X, \mathcal{U})$ y $(Y, \mathcal{V})$ espacios uniformes, el mapeo $f : X \longrightarrow Y$ es isomorfismo uniforme si f es biyectivo, f y f^{-1} son uniformemente continuas.

Sea G un grupo y sea A un conjunto. Sea H un subgrupo de G. Equiparemos a $A^{G/H}$ con su estructura uniforme prodiscreta y $Fix(H) \subset A^G$ con la estructura uniforme inducido por la estructura uniforme prodiscreta en A^G. Recordando la Proposición 1.4.10 de que existe una biyección natural $\rho^* : A^{G/H} \longrightarrow A^G$ definido por $\rho^* = y \circ \rho$, donde $\rho : A^G \longrightarrow G/H$ es el sobreyectivo canónico.

Proposición 3.4.4. *El mapeo $\rho^* : A^{G/H} \longrightarrow Fix(H)$ es un isomorfismo uniforme.*

Demostración. Para $g \in G$, sean $\pi_g : A^G \longrightarrow A$ y $\pi_g^{'} : A^{H\backslash G} \longrightarrow A$ que denotan los mapeos de proyecciones definidas por $x \longmapsto x(g)$ y $y \longmapsto y(\rho(g))$ respectivamente. Observar que $\pi_g \circ \rho^* = \pi_g^{'}$ es uniformemente continua, para todo $g \in G$. Esto muestra que ρ^* es uniformemente continua. De manera similar, la continuidad uniforme de $(\rho^*)^{-1}$ se deduce del hecho de que $\pi_g \circ (\rho^*)^{-1} = \pi_g|_{Fix(H)}$ es uniformemente continua, para cada $g \in G$. Consecuentemente, ρ^* es un isomorfismo uniforme. $\square$

3.5. Autómatas celulares invertibles

Definición 3.5.1. Sea G un grupo y sea A un conjunto. Se dice que un autómata celular $\tau : A^G \to A^G$ es *invertible* si y sólo si τ es biyectivo y el mapeo inverso $\tau^{-1} : A^G \to A^G$ es también un autómata celular.

Observación 3.5.2. La definición anterior es equivalente a la existencia de un autómata cellular $\sigma : A^G \longrightarrow A^G$ tal que

$$\tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau = Id_{A^G}.$$

Así, el conjunto de autómata celular invertible sobre el grupo G y el alfabeto A es exactamente el grupo $ACI(G; A)$ que consta de todos los elementos invertibles del monoide $AC(G; A)$.

Definición 3.5.3. Sean $(X, \mathcal{U})$ y $(Y, \mathcal{V})$ espacios uniforme, una función $f : X \longrightarrow Y$ es un *isomorfismo uniforme* si y sólo si f es biyectivo, homomorfismo y ambos f y f^{-1} son uniformemente continuas.

Teorema 3.5.4. *Sea A un conjunto y G un grupo. Sea $\tau : A^G \longrightarrow A^G$ un mapeo y equipar a A^G con su estructura uniforme prodiscreta. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) τ es un autómata celular invertible;

b) τ es un automorfismo G-equivariante uniforme de A^G.

Demostración. Definamos el mapeo $\tau : A^G \longrightarrow A^G$ por $\tau(x)(g) = x(g)$. Sea $x, y \in A^G$ y $g \in G$ tal que $\tau(x)(g) = \tau(y)(g)$, entonces $x(g) = y(g)$, para todo $g \in G$, entonces $x = y$. Así, τ es inyectivo. Para todo $x \in A^G$, existe $x \in A^G$ tal que $\tau(x)(g) = x(g)$. Así, tenemos que τ es sobreyectivo. Sea $x, y \in A^G$ y $g \in G$ tenemos $\tau(xy)(g) = (xy)(g) = x(g)y(g) = \tau(x)\tau(y)$. Así, tenemos que τ es homomorfismo. Por lo tanto τ es automorfismo. Por hipótesis tenemos τ es autómata celular, entonces τ es G-equivariante por la Proposición 2.1.5. Así, tenemos que τ es uniformemente continua por el Teorema 3.4.1. Además por hipótesis tenemos que τ es invertible, entonces el mapeo τ^{-1} es autómata celular, entonces el mapeo τ^{-1} es G-equivariante por la Proposición 2.1.5. Así, tenemos que el mapeo τ^{-1} es uniformemente continua por Teorema 3.4.1.

Recíprocamente, por hipótesis tenemos que τ es uniformemente continua y G-equivariante, entonces τ es autómata celular por Teorema 3.4.1. También tenemos por hipótesis que τ es automorfismo uniforme, entonces τ es biyectivo y τ^{-1} es uniformemente continua. Por

(1.3) tenemos que $gx(h) = x(g^{-1}h)$, para todo $x \in A^G$ y $g, h \in G$, entonces aplicando el mapeo τ^{-1}, tenemos

$$\begin{aligned}\tau^{-1}(gx)(h) &= \tau^{-1}(x)(g^{-1}h)\\ &= \tau^{-1}(x)(L_{g^{-1}}(h))\\ &= \big(\tau^{-1}(x) \circ L_{g^{-1}}\big)(h)\\ &= g\tau^{-1}(x)(h).\end{aligned}$$

Así, tenemos que $\tau^{-1}(gx) = g\tau^{-1}(x)$, para todo $x \in A^G$ y $g \in G$. Por lo tanto el mapeo τ^{-1} es G-equivariante, entonces el mapeo τ^{-1} es autómata celular por Teorema 3.4.1. Por lo tanto τ es autómata celular invertible. □

Autómatas celulares biyectivos sobre los alfabetos finitos en A son siempre invertibles.

Teorema 3.5.5. *Sea G un grupo y sea A un conjunto finito. Entonces cualquier autómata celular $\tau : A^G \longrightarrow A^G$ biyectivo es invertible.*

Demostración. Sea $\tau : A^G \longrightarrow A^G$ un autómata celular biyectivo, entonces existe el mapeo $\tau^{-1} : A^G \longrightarrow A^G$. De (1.3) tenemos que $gx(h) = x(g^{-1}h)$, para todo $x \in A^G$ $g, h \in G$, entonces aplicando el mapeo τ^{-1}, tenemos

$$\begin{aligned}\tau^{-1}(gx)(h) &= \tau^{-1}(x)(g^{-1}h)\\ &= \tau^{-1}(x)(L_{g^{-1}}(h))\\ &= \big(\tau^{-1}(x) \circ L_{g^{-1}}\big)(h)\\ &= g\tau^{-1}(x)(h).\end{aligned}$$

Así, tenemos que $\tau^{-1}(gx) = g\tau^{-1}(x)$. Por lo tanto τ^{-1} es G-equivariante. El mapeo τ^{-1} es continua con respecto a la topología prodiscreta por compacidad de A^G. Consecuentemente, τ^{-1} es un autómata celular por Teorema 3.0.15. □

El siguiente ejemplo muestra que el Teorema 3.5.5 es falso si se omite la hipótesis de la finitud del conjunto A.

Ejemplo 3.5.6. Sea $\mathbb{K}$ un campo. Se toma como conjunto de alfabeto el anillo $A = \mathbb{K}[t]$ formada por todas las series de potencia en la variable t indeterminada con coeficientes en $\mathbb{K}$. Así, un elemento de A es justamente una sucesión $a = (k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathbb{K}$ escribimos de la forma

$$a = k_0 + k_1 t + k_2 t^2 + k_3 t^3 + \cdots = \sum_{1\in\mathbb{N}} k_i t^i,$$

la adicción y la multiplicación de dos elementos $a = \sum_{i\in\mathbb{N}} k_i t^i$ y $b = \sum_{i\in\mathbb{N}} k_i^{'} t^i$ están dadas respectivamente por

$$a + b = \sum_{i\in\mathbb{N}} (k_i + k_i^{'}) t^i,$$

y

$$ab = \sum_{i\in\mathbb{N}} k_i^{''} t^i, \text{ con } k_i^{''} = \sum_{i_1+i_2=1} k_{i_1} k_{i_2}^{'}, \text{ para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Tomando $G = \mathbb{Z}$. Así, una configuración $x \in A^G$ es un mapeo $x : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{K}[t]$. Si Consideramos el mapeo $\tau : A^G \longrightarrow A^G$ definido por

$$\tau(x)(n) = x(n) - tx(n+1), \text{ para todo } x \in A^G \text{ y } n \in \mathbb{Z}.$$

Claramente τ es un autómata celular y que admite a $S = \{0, 1\}$ como un conjunto memoria y el mapeo de definición local asociado con τ es el mapeo $\mu : A^S \longrightarrow A$ definido por $\mu(x_0.x_1) = x_0 - tx_1$, para todo $x_0, x_1 \in A$.

Demostraremos que τ es biyectivo. Considerar el mapeo $\sigma : A^{G/N} \longrightarrow A^{G/N}$ definido por

$$\sigma(x)(n) = x(n) + tx(n+1) + t^2 x(n+2) + t^3(n+3) + \cdots, \text{ para todo } x \in A^G \text{ y } n \in \mathbb{Z}.$$

Claramente $\sigma(x)(n) \in \mathbb{K}[t]$ está bien definida. De hecho, si tomamos $x(n) \in \mathbb{K}[t]$ en la forma

$$x(n) = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_{n,i} t^i, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z} \text{ y } x_{n,i} \in \mathbb{K},$$

entonces

$$\sigma(x)(n) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\sum_{j=0}^{i} x_{n+j,i-j} \right) t^i.$$

Uno inmediatamente puede ver que $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma = \mathrm{Id}_{A^G}$. Además, τ es biyectivo con inverso $\tau^{-1} = \sigma$.

Mostraremos que el mapeo $\sigma : A^G \longrightarrow A^G$ no es un autómata celular. Sea $F \subset \mathbb{Z}$ finito y escogamos un entero $M \geq 0$ tal que $F \subset (-\infty, M]$. Consideremos la configuración y definido por

$$y(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \leq M, \\ 1, & \text{si } M+1 \leq n, \end{cases}$$

y la configuración z definido por $z(n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Entonces z e y coinciden en F. Además, evaluando en 0 el $\tau(y)$ tenemos

$$\sigma(y)(0) = t^{M+1} + t^{M+2} + t^{M+3} + \cdots$$

cuando el valor de $\sigma(z)$ en 0 es $\sigma(z)(0) = 0$. Se sigue que no existe un subconjunto finito $F \subset \mathbb{Z}$ tal que $\sigma(x)(0)$ que depende solo de la restricción de $x \in A^G$ a F. Esto muestra que σ no es un autómata celular. Consecuentemente, τ es un autómata celular biyectivo que no es invertible.

En la siguiente Proposición se mostrará que la invertibilidad se preserva bajo la operación de inducción y restricción.

Proposición 3.5.7. *Sea G un grupo y A un conjunto. Sea H un subgrupo de G y sea $\tau \in AC(G, H; A)$. Sea $\tau_H \in AC(H; A)$ que denota la restricción de autómata celular de τ a H. Entonces la siguientes condiciones son equivalentes:*

a) τ es invertible;

b) τ_H es invertible.

Además, si τ es invertible, entonces $\tau^{-1} \in AC(G, H; A)$ se tiene

$$(\tau^{-1})_H = (\tau_H)^{-1}. \tag{3.2}$$

Demostración. Recordemos primero de (2.12) las factorizaciones

$$A^G = \prod_{c \in G/H} A^c \quad \text{y} \quad \tau = \prod_{c \in G/H} \tau_c, \tag{3.3}$$

donde $\tau_c : A^c \longrightarrow A^c$ satisface $\tau_c(\widetilde{x}|_c) = (\tau(\widetilde{x}))|_c$, para todo $\widetilde{x} \in A^G$.

Supongamos que τ es invertible. Denotar por $\sigma \in AC(G; A)$ el autómata celular inverso de τ^{-1}. Se sigue de (3.3) que el mapeo $\tau_c : A^c \longrightarrow A^c$ es biyectivo, para cada $c \in G/H$ y que

$$\sigma = \prod_{c \in G/H} (\tau_c)^{-1}, \tag{3.4}$$

donde $(\tau)^{-1} : A^c \longrightarrow A^c$ es el mapeo inverso de τ_c. Mostraremos que $\sigma \in AC(G, H; A)$. Sea $S \subset G$ un conjunto memoria para σ. Sea $\widetilde{x} \in A^G$, se seguí de (3.4) que $(\sigma(\widetilde{x}))|_H = (\tau_H)^{-1}(\widetilde{x}|_H)$. Así, se tiene

$$\sigma(\widetilde{x})(1_G) = (\sigma(\widetilde{x}))|_H(1_G) = (\tau_H)^{-1}(\widetilde{x}|_H)(1_G).$$

Esto muestra que $\sigma(\widetilde{x})(1_G)$ depende solo de $\widetilde{x}|_H$. Por Lema 2.2.1, deducimos que $S \cap H$ es un conjunto memoria para σ. En efecto, supongamos que dos configuraciones $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in A^G$ coinciden en $S \cap H$. Considerar la configuración $\widetilde{z} \in A^G$ que coincide con $\widetilde{x}$ en S y con $\widetilde{y}$ en G/S. Se tiene $\sigma(\widetilde{x})(1_G) = \sigma(\widetilde{z})(1_G)$ ya que $\widetilde{x}$ y $\widetilde{z}$ coinciden en S. Es decir, se tiene $\sigma(\widetilde{y})(1_G) = \sigma(\widetilde{z})(1_G)$ ya que $\widetilde{z}$ e $\widetilde{y}$ coinciden en H. Esto implica $\sigma(\widetilde{x})(1_G) = \sigma(\widetilde{y})(1_G)$. Así, existe un mapeo $\mu : A^{S \cap H} \longrightarrow A$ tal que

$$\sigma(\widetilde{x})(1_G) = \mu(\widetilde{x}|_{S \cap H}),$$

para todo $x \in A^G$. Aplicando la Proposición 2.1.8 se sigue que $S \cap H$ es un conjunto de memoria para σ. Como $S \cap H \subset H$, esto muestra que $\tau^{-1} = \sigma \in AC(G, H; A)$. Además, se sigue de (3.4) que

$$(\tau^{-1})_H = \sigma_H = (\tau_H)^{-1},$$

que nos da (3.2).

La equivalencia $(a) \Leftrightarrow (b)$ es una consecuencia inmediata de la Proposición 2.4.6 que indica que la restricción del mapeo $AC(G, H; A) \longrightarrow AC(H; A)$ es un isomorfismo monoidal. $\square$

3.5.1. Aplicación del teorema de generalizado de Curtis-Hedlund

Teorema 3.5.8. *Sean $\tau, \tau' : A^G \longrightarrow A^G$ autómatas celulares, entonces el mapeo es $\tau \circ \tau'$ es uniformemente continua y G-equivariante.*

Demostración. Por la Proposición 2.1.11 tenemos que $\tau \circ \tau'$ es un autómata celular y por el Teorema 3.4.1 (Generalizado de Curtis-Hedlund) tenemos que el mapeo $\tau \circ \tau'$ es G-equivariante y uniformemente continua. $\square$

4
Conclusión y recomendación

El objetivo del presente trabajo es el estudio de autómatas celulares y la demostración de la generalización del Teorema de Curtis-Hedlund. Teorema de Curtis-Hedlund es para un conjunto alfabeto finito y se generaliza en espacios uniformes para un conjunto de alfabeto infinito.

Se recomienda para un nuevo proyecto de grado la demostración del Teorema Jardín de Edén da una condición necesaria y suficiente para la sobreyectividad de un autómata celular con un alfabeto finito sobre un grupo amenable. Afirma que un autómata de este tipo es sobreyectivo si y solo si es pre-inyectivo. Como su nombre lo sugiere, la pre-inyección es una noción más débil que la inyectividad. Esto significa que para cualesquiera de dos configuraciones que tienen la misma imagen por el autómata debe ser igual si coinciden fuera de un subconjunto finito del grupo.

Bibliografía

[1] Isbell. J. (1964). *Uniform Space.* United States of America. American Mathematical Society.

[2] Munkres. J, (2002). *Topología.* Madrid. Printice Hall.

[3] James, I. (1987). *Topological and Uniform Spaces.* New York. Springer-Verlag.

[4] John. K, (1962). *Topología General.* Buenos Aires. editorial Universidad de Buenos Aires.

[5] Silberstein, T. Coornaert, M. (2010). *Cellular Automata and Groups.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[6] Silberstein, T. Coornaert, M. (2008). *A generalization of the Curtis-Hedlund theorem.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[7] Silberstein, T. Coornaert, M. (2012). *Surjunctive and Reversibity of Cellular Automata over Concrete Categories.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[8] Silberstein, T. Coornaert, M. (2014). *On surjunctive Monoids.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg.