UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS
FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES
CARRERA DE MATEMÁTICA

PROYECTO DE GRADO PRESENTADO PARA LA OBTENCIÓN DEL TITULO DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

METRIZABILIDAD Y NORMABILIDAD DE ESPACIOS VECTORIALES TOPOLÓGICOS

(Topología y Análisis)

AUTOR: UNIV. ERIK ALVARO MAMANI CALLISAYA.
TUTOR: DR. JIMMY SANTAMARIA TORREZ.

LA PAZ – BOLIVIA
2017

A mi querida familia en especial a mis padres.
Mario y Mery.

Agradecimientos

Primeramente quiero agradecer a Dios por guiar mi camino.

Quiero dar un especial agradecimiento a mis padres por todo el apoyo brindado sin ellos no hubiese sido posible esto.

Al mismo tiempo quiero agradecer a mi tutor Dr. Jimmy Santamaria Torrez y a mis tribunales, Dr. Guillermo Fernando Vera Hurtado y el M.Sc. Willy Condori Equice, por la paciencia que tuvieron conmigo.

También agradezco a todo el plantel docente y administrativo de la carrera de Matemática.

Finalmente agradezco a mis compañeros, amigos que conocí en mi estadía como estudiante de la carrera de Matemática por su apoyo constante y desinteresado.

INTRODUCCIÓN

Los espacios vectoriales topológicos son muy importantes en el estudio de diversas estructuras topológicas no solo en el campo del análisis funcional, sino de muchas áreas, como la teoría de aproximación, la teoría ergódica , el análisis numérico, la teoría del control, el análisis económico o la teoría cuántica.

Son problemas naturales, decidir si un espacio vectorial topológico es metrizable, es decir si existe una métrica que genera su topología o si es normable, es decir si existe una norma que genera su topología. Por otra parte, disponer de un método para poder construir topologías que hagan de un Espacio Vectorial en un Espacio Vectorial Topológico es importante. Desde un punto de vista teórico es interesante preguntarse en este contexto cuales son las nociones casi inmediatas de definir los espacios vectoriales topologicos: por ejemplo qué significa que un conjunto sea acotado. Dicho esto:

En el capitulo 1 iniciaremos el trabajo definiendo que es un espacio vectorial topológico, que tipos de espacios vectoriales topológicos existen, y las propiedades mas sobresalientes de estas, de los cuales nos interesaremos más en los espacios localmente convexos, localmente acotados y localmente compactos.

En el capitulo 2 estudiaremos las aplicaciones lineales sobre estos espacios y algunas propiedades de estas. También es conocido, que dos normas cualesquiera en un espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes, esto implica que la topología inducida por cualquier norma en un espacio vectorial de dimensión finita es la misma. En este trabajo se refinará este resultado de la siguiente manera:

Teorema 1. *Si X es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces existe una única topología en X que lo hace un espacio vectorial topológico.*

La siguiente caracterización algebraica-topológica es estudiada en los espacios normados: X tiene dimensión finita si y sólo si la bola unitaria es compacta. En el contexto del trabajo se generalizará el resultado.

Teorema 2. *X tiene dimensión finita si y solo si X es localmente compacto.*

Teorema 3. *Si un espacio X localmente acotado y tiene la propiedad de Heine-Borel, entonces X tiene dimensión finita.*

El capitulo 3 es el capitulo mas extenso e importante de este trabajo. Iniciaremos caracterizando la *Metrizabilidad de un espacio vectorial topológico* construyendo una métrica compatible con la topología de X. El resultado fundamental de esta parte es:

Teorema 4. *X es metrizable si y solo si X tiene una base local numerable.*

Teorema 5. *Si X es localmente acotado entonces X es metrizable.*

Además de caracterizar la metrizabilidad, utilizaremos la noción de seminormas para dar un método de construcción de topologías en espacios vectoriales que los hacen espacios vectoriales topológicos. Para la *Normabilidad de un espacio vectorial topológico* se demostrará la caracterización:

Teorema 6. *X es normable si solo si X es localmente convexo y localmente acotado.*

En el capitulo 4 se ejemplificaran los resultados estudiados por ejemplo, $C(\Omega)$ no es localmente acotado sin embargo es metrizable, se mostrará también que $H(\Omega)$ no es normable o que $C^\infty(\Omega)$ es un espacio de Frechet.

Índice general

Capítulo 1

ESPACIOS VECTORIALES TOPOLÓGICOS.

A lo largo de el presente trabajo el termino *espacio vectorial* será referida a un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$ con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Ahora, sea X un espacio vectorial, dados $A, B \subset X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in X$. Denotemos por:

$$x + A = \{x + a : a \in A\}.$$

$$x - A = \{x - a : a \in A\}.$$

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

$$\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}.$$

En particular si $\lambda = -1$, $-A$ denota el conjunto de todos los inversos aditivos de los elementos de A.
Observemos que si $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces $\alpha(A+B) \subset \alpha A + \alpha B$; pues dado $w \in \alpha(A+B)$, $w = \alpha(a+b)$ para algunos $a \in A$ y $b \in B$, entonces $w = \alpha a + \alpha b \in \alpha A + \alpha B$.
Ademas puede ocurrir que $2A \neq A + A$.
En efecto, si consideramos

$$A = \{(x,y) : y = 0 \quad \text{y} \quad -1 \leq x \leq 1 \quad \text{ó} \quad x = 0 \quad \text{y} \quad -1 \leq y \leq 1\},$$

obtenemos que

$$A + A = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 1 \quad \text{y} \quad -1 \leq y \leq 1\} \neq 2A.$$

1.1. Espacios Vectoriales Topológicos

Al hablar de espacios vectoriales topológicos consideraremos dos estructuras; una algebraica (para hablar de transformaciones lineales) y otra topológica (para hablar de continuidad). Estas estructuras deben ser compatibles; es decir, se tiene un espacio vectorial con topológia asignada que hace que las operaciones de suma y producto por un escalar sean continuas.

Definición 1.1. Supongamos que τ es una topológia en un espacio vectorial X, tal que

(a) todo punto de X es un conjunto cerrado, y

(b) las operaciones de espacio vectorial son continuas con respecto a τ. Es decir,

$$\begin{array}{rccc} +: & X\times X & \rightarrow & X \\ & (x,y) & \mapsto & x+y \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \cdot: & \mathbb{K}\times X & \rightarrow & X \\ & (\lambda,x) & \mapsto & \lambda x \end{array}$$

son aplicaciones continuas.

Naturalmente, se considera la topología producto en los productos cartesianos de espacios topológicos.

Sobre estas condiciones, τ es llamada como una *topológia vectorial* en X, y que X es un *espacio vectorial topológico*.
Decir que la aplicación adición $(x,y)\rightarrow x+y$ del producto cartesiano $X\times X$ en X es continua, significa por definición si tomamos $x_1,x_2\in X$, ademas si V es una vecindad de x_1+x_2, así existen V_1 y V_2 vecindades de x_1 y x_2 respectivamente tal que $V_1\times V_2\subset(+)^{-1}(V)$, así

$$V_1+V_2\subset V.$$

Similarmente si asumimos que la aplicación producto por un escalar $(\lambda,x)\rightarrow\lambda x$ de $\mathbb{K}\times X$ en X es continua , tenemos por definición si $x\in X$, $\lambda\in\mathbb{K}$ y V una vecindad de λx, entonces para algún $r>0$ y alguna vecindad W de x tenemos que $\beta W\subset V$ siempre que $\left|\beta-\lambda\right|<r$.

Lema 1.1. *Sea X un espacio normado. La topológia producto τ_p de $X\times X$ es equivalente a la topológia τ' de $X\times X$ inducida por la norma*

$$\left\|(x,y)\right\|'=\|x\|+\left\|y\right\| \quad \textit{para todo} \quad x,y\in X.$$

Demostración.

- $\tau_p\subset\tau'$

  Sea $x,y\in X$ y tomemos los básicos $B_r(x)$ y $B_s(y)$, así $B_r(x)\times B_s(y)$ es un basico de la topológia producto.
  Tomemos $t=\text{mín}\{r,s\}$, entonces tomemos

$$B'_t(x,y)=\left\{(a,b):\left\|(a,b)-(x,y)\right\|'<t\right\},$$

así sea $(a,b)\in B'_t(x,y)$, entonces

$$\left\|(a,b)-(x,y)\right\|'=\|a-x\|+\left\|b-y\right\|<t$$

luego

$$\begin{cases} \|a-x\|<t & \Rightarrow \quad \|a-x\|<r \\ \left\|b-y\right\|<t & \Rightarrow \quad \left\|b-y\right\|<s \end{cases}$$

así $a\in B_r(x)$ y $b\in B_s(y)$, de este modo $(a,b)\in B_r(x)\times B_s(y)$

$$B'_t(x,y)\subset B_r(x)\times B_s(y)$$

- $\tau'\subset\tau_p$

  Sean $x,y\in X$ y sea $B_t(x,y)$ un básico de τ', ahora tomando un $r=\dfrac{t}{2}$ tenemos que

  $$B_r(x)\times B_r(y)\subset B'_t(x,y)$$

  En efecto, sea $(a,b)\in B_r(x)\times B_s(y)$, entonces

  $$a\in B_r(x) \quad \text{y} \quad b\in B_r(y)$$

  luego

  $$\|a-x\|<r \quad \text{y} \quad \left\|b-y\right\|<r$$

  así

  $$\underbrace{\|a-x\|+\left\|b-y\right\|}_{=\left\|(a,b)-(x,y)\right\|'}=<r+r=t$$

  De este modo $(a,b)\in B_r(x)\times B_r(y)\subset B'_t(x,y)$

□

Proposición 1.2. *Todo espacio normado es un espacio vectorial topológico.*

Demostración.

- Primero mostraremos la continuidad de la adición. Sea $\varepsilon>0$. Por el Lema 1.1 la topológia τ' de $X\times X$ inducida por la norma $\left\|(x,y)\right\|'=\|x\|+\left\|y\right\|$ induce la misma topología producto en $X\times X$. Donde nosotros podemos tomar $\delta=\varepsilon$ de modo que $\left\|(x,y)-(x_0,y_0)\right\|'=\|x-x_0\|-\left\|y-y_0\right\|<\delta$, y tenemos

  $$\left\|(x+y)-(x_0+y_0)\right\|\le\|x-x_0\|-\left\|y-y_0\right\|<\delta$$

- Para el producto por un escalar. Tomemos $(\alpha_0,x_0)\in\mathbb{K}\times X$ fijo y $\varepsilon>0$, hallaremos un $\delta>0$ tal que $|\alpha-\alpha_0|<\delta$ y $\|x-x_0\|<\delta$, entonces $\|\alpha x-\alpha_0x_0\|<\varepsilon$. ahora tenemos que

  $$\begin{aligned} \|\alpha x-\alpha_0x_0\| &= \|\alpha x-\alpha x_0+\alpha x_0-\alpha_0x_0\| \\ &= \|\alpha(x-x_0)+(\alpha-\alpha_0)x_0\| \\ &\le |\alpha|\,\|x-x_0\|+|\alpha-\alpha_0|\,\|x_0\| \\ &= |\alpha-\alpha_0+\alpha_0|\,\|x-x_0\|+|\alpha-\alpha_0|\,\|x_0\| \\ &\le |\alpha-\alpha_0|\,\|x-x_0\|+|\alpha_0|\,\|x-x_0\|+|\alpha-\alpha_0|\,\|x_0\| \\ &= |\alpha-\alpha_0|(\|x_0\|+\|x-x_0\|)+|\alpha_0|\,\|x-x_0\|. \end{aligned}$$

así tomando δ de modo que $\delta^2+\delta(|\alpha_0|+\|x_0\|)<\varepsilon$ de este modo el producto por un escalar es continuo.

$\square$

Ejemplo 1. (a) $(\mathbb{C}^n,\|\cdot\|_2)$ donde $\|\cdot\|_2$ es la norma

$$\left[\|x\|_2=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

es un espacio vectorial topológico. Para probarlo basta utilizar las propiedades de norma. Estos espacios con cualquier otra norma equivalente a la anterior, por ejemplo

$$\|x\|=\max_{1\leq k\leq n}|x_k|,$$

son espacios vectoriales topológicos.

(b) Sea K un conjunto compacto y denotemos por

$$C(K)=\{f:K\to\mathbb{C}\mid f \quad \text{es continua}\},$$

$C(K)$ es un espacio vectorial y le podemos dar la topología generada por

$$\left\|f\right\|=\sup_{x\in K}\left|f(x)\right|.$$

Con la cual $C(K)$ resulta ser un espacio vectorial topológico.

(c) Denotemos por (X,Ω,μ) un espacio de medida. Para $1\leq p<\infty$ consideremos

$$\mathfrak{L}_p(\mu)=\left\{f:X\to\mathbb{C}\mid f \quad \text{es} \quad \Omega-\text{medible} \quad \text{y} \quad \int_X\left|f\right|^p d\mu<\infty\right\}$$

con la norma definida por

$$\left\|f\right\|=\left(\int_X\left|f\right|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definimos por $L_p(\mu)$ al espacio cociente obtenido de $\mathfrak{L}_p(\mu)$ identificando a las funciones iguales casi en todas partes $f_1=f_2$ c.t.p ($f_1(x)\neq f_2(x)\Leftrightarrow x\in B$ y B tiene medida 0). A este conjunto le podemos dar la topología generada por la norma: $\left\|\hat{f}\right\|_p:=\left\|f\right\|_p \quad (f\in[f]=\hat{f})$ inducida por la seminorma anterior. con esta topología normada, $L_p(\mu)$ es un espacios vectorial topológico.

Notemos que muchos de los espacios de funciones habitualmente manejados en Ánalisis son espacios vectoriales topológicos.

Definición 1.2.

(a) Un conjunto $C \subset X$ se dice que es convexo si $tC + (1-t)C \subset C$ para todo $0 \leq t \leq 1$.

(b) Un conjunto $B \subset X$ se dice que es balanceado si $\alpha B \subset B$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ con $|\alpha| \leq 1$.

(c) Un conjunto $A \subset X$ es absorbente si para cada $x \in X$ existe $\alpha > 0$ tal que $\lambda x \in A$ para todo $\in \mathbb{K}$ con $|\lambda| \leq \alpha$ (de otra manera, para todo $x \in X$, existe $s > 0$ tal que para todo $|t| > s$ se tiene que $x \in tA$).

(d) Un subconjunto E de un espacio vectorial topológico se dice es acotado si para toda vecindad V de 0 en X existe un $s > 0$ tal que $E \subset tV$ para todo $t > s$

Proposición 1.3. *Sea X un espacio vectorial. Se sobre entiende que los conjuntos mencionados a continuación son subconjuntos de X. Probar los siguientes enunciados.*

(a) A es convexo si, solo si, $(s+t)A = sA + tA$ *para todo* $s, t > 0$.

(b) Toda unión (e intersección) de conjuntos balanceados es balanceada.

(c) Si A y B son convexos, también lo es A + B

(d) Si A y B son balanceados, también lo es A + B

Demostración. (a) $\Rightarrow$) Sea A convexo.

Sea $u \in (s+t)A$, entonces $u = (s+t)v$ para algún $v \in A$ luego

$$u = sv + tv \in sA + tA$$

Así $(s+t)A \subseteq sA + tA$.
Ahora sea $w \in sA + tA$, así $w = su + tv$ con $u, v \in A$
Luego

$$\left(\frac{1}{s+t}\right) w = \left(\frac{s}{s+t}\right) u + \left(\frac{t}{s+t}\right) v$$

como A es convexo y ademas $\left(\frac{s}{s+t}\right) + \left(\frac{t}{s+t}\right) = 1$, entonces

$$\left(\frac{1}{s+t}\right) w \in A \quad \text{de este modo} \quad w \in (s+t)A.$$

Así $sA + tA \subseteq (s+t)A$.
$\Leftarrow$) Sea $u, v \in A$, luego si $0 \leq t \leq 1$

$$tu + (1-t)v \in tA + (1-t)A = (t+1-t)A = A$$

esto por hipótesis, de este modo A es convexo.

(b) Sea la colección de subconjuntos balanceados $\{W_i\}_{i \in I}$.

Sea λ tal que $|\lambda| \leq 1$ y $u \in \lambda \left(\bigcup_{i \in I} W_i \right)$, entonces existe W_i tal que

$$u \in \lambda W_i \subseteq W_i$$

por ser W_i balanceado, así

$$u \in \bigcup_{i\in I} W_i \quad \text{luego} \quad \lambda\left(\bigcup_{i\in I} W_i\right) = \bigcup_{i\in I}\lambda(W_i) \subseteq \bigcup_{i\in I} W_i.$$

Sea λ tal que $|\lambda| \leq 1$ y $u \in \lambda\left(\bigcap_{i\in I} W_i\right)$, entonces

$$u \in \lambda W_i \quad \text{para todo} \quad i \in I$$

por ser W_i balanceado, así

$$u \in \lambda W_i \subseteq W_i \quad \text{para todo} \quad i \in I.$$

Así

$$u \in \lambda\left(\bigcap_{i\in I} W_i\right) = \bigcap_{i\in I}\lambda(W_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} W_i.$$

(c) Sean $u, v \in A+B$, luego $u = a_1 + b_1$ y $v = a_2 + b_2$ con $a_1, a_2 \in A$ y $b_1, b_2 \in B$. Como A y B son convexos, y si $0 \leq t \leq 1$, entonces

$$tu+(1-t)v = t(a_1+b_1)+(1-t)(a_2+b_2) = (ta_1+(1-t)a_2)+(tb_1+(1-t)b_2) \in A+B.$$

Así $A+B$ es convexo.

(d) Sea A y B balanceados, si λ es tal que $|\lambda| \leq 1$, entonces

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B \subseteq A+B$$

Así $A+B$ es balanceado.

□

1.1.1. Invarianza

Sea X un espacio vectorial topológico. Asociando a cada $a \in X$ y cada $\lambda \neq 0$ el operador traslación T_a y el operador multiplicación M_λ, por las formulas

$$T_a(x) = x + a \qquad y \qquad M_\lambda(x) = \lambda x \qquad (x \in X)$$

La siguiente simple proposición es muy importante:

Proposición 1.4. *T_a y M_λ son homeomorfismos de X en X*

Demostración. Notemos primeramente que las funciones T_{-a} y $M_{\lambda^{-1}}$ definidas como:

$$T_{-a}(y) = y - a \qquad \text{y} \qquad M_{\lambda^{-1}}(y) = \lambda^{-1}y$$

son las inversas de $T_a(x)$ y $M_\lambda(x)$ respectivamente.
Luego tomemos las aplicaciones inclusión $\imath : X \to X \times X$ definida como $\imath(x) = (x_0, x)$ y también $\jmath : X \to \mathbb{K} \times X$ definida como $\jmath(x) = (\lambda, x)$, estas aplicaciones son continuas. Ahora notemos también que $T_a = ((+) \circ \imath)$ y $M_\lambda = ((\cdot) \circ \jmath)$ como las operaciones adición y producto por un escalar son continuas lo son también T_a y M_λ, del mismo modo ocurre con T_{-a} y $M_{\lambda^{-1}}$, entonces T_a y M_λ son homeomorfismos. □

Una consecuencia de esta propocisión es que toda topología vectorial τ es invariante bajo traslaciones: Un conjunto $A \subset X$ es abierto si y sólo si $a + A$ es abierto. Así τ es completamente determinada por alguna base local.

1.1.2. Tipos de Espacios Vectoriales Topológicos

En las siguientes definiciones, X siempre denota un espacio vectorial topológico

Definición 1.3. (a) X es localmente convexo si existe una base local $\mathscr{B}$ de 0 donde sus miembros son convexos.

(b) X es localmente acotado si 0 tiene una vecindad acotada.

(c) X es localmente compacto si 0 tiene una vecindad cuya cerradura es compacta.

(d) X es metrizable si τ es compatible con alguna métrica d.

(e) X es un F-espacio si su topología τ es inducida por una métrica completa e invariante d.

(f) X es un espacio de Fréchet si X es un F-espacio localmente convexo.

(g) X es normable si existe una norma definida en X tal que la métrica inducida por la norma es compatible con τ.

(h) Los Espacios normados y de Banach que ya fueron mencionados anteriormente.

(i) X tiene la propiedad de Heine-Borel si todo subconjunto cerrado y acotado de X es compacto.

1.2. Propiedades de Separación.

Observemos que $K+V$ es una unión de las traslaciones abiertas $x+V$ de $V \quad (x \in K)$. Nosotros empezamos con la siguiente proposición que también será útil en otros contextos.

Proposición 1.5. *Si W es una vecindad de 0 en X, entonces existe una vecindad de U de 0 cual es simétrica (en el sentido $U=-U$) y cual satisface $U+U \subset W$.*

Demostración. Para ver esto, si W es una vecindad de 0, notemos que $0+0=0$, como la adición es continua y 0 de este modo tiene vecindades V_1, V_2 tal que $V_1+V_2 \subset W$. Ahora si tomamos

$$U = V_1 \cap V_2 \cap (-V_1) \cap (-V_2),$$

así tenemos que $U+U \subset W$ y $U=-U$. En efecto sea

$$x \in U \quad \Leftrightarrow \quad x \in V_1 \quad \text{y} \quad x \in -V_1 \quad \text{y} \quad x \in V_2 \quad \text{y} \quad x \in -V_2$$

Como $x \in -V_1$, existe $y \in V_1$ tal que $x=-y$, $y=-x \in V_1$. Del mismo modo en el otro caso así,

$$\begin{aligned} x \in U \quad &\Leftrightarrow \quad -x \in V_1 \quad \text{y} \quad -x \in -V_1 \quad \text{y} \quad -x \in V_2 \quad \text{y} \quad -x \in -V_2 \\ &\Leftrightarrow \quad -x \in U \\ &\Leftrightarrow \quad x \in -U. \end{aligned}$$

□

Teorema 1.6. *Supongamos K y C son subconjuntos de un espacio vectorial topológico X, K es compacto, C es cerrado, y $K \cap C = \emptyset$. Entonces existe V una vecindad de 0 tal que*

$$(K+V) \cap (C+V) = \emptyset.$$

Demostración. Si $K=\emptyset$, tenemos que $K+V=\emptyset$ de este modo se cumple el teorema. Ahora, supongamos que $K \neq \emptyset$ y sea $x \in K$. Como C es cerrado y disjunto a K, entonces C^c es abierto y $x \in C^c$, pero $x+0=x$, así existen V_1 y V_2 vecindades de x y 0 respectivamente, de modo que $V_1+V_2 \subseteq C^c$ dado que la topología es invariante bajo traslaciones $-x+V_1$ y V_2 son vecindades de 0, así tomando $U=(-x+V_1) \cap V_2$ y por la anterior proposición existe U_x vecindad simétrica de 0 tal que $U_x+U_x \subset U$ de este modo

$$x+U_x \subseteq V_1 \quad \text{y} \quad U_x+U_x \subset V_2,$$

entonces

$$x+U_x+U_x+U_x \subset V_1+V_2 \subseteq C^C,$$

i.e.,

$$(x+U_x+U_x+U_x) \cap C = \emptyset$$

y la simetría de U_x implican que

$$(x+U_x+U_x)\cap(C+U_x)=\emptyset$$

Consideremos las vecindades U_x para cada $x\in K$ como arriba, y por ser K un conjunto compacto de X y $\{x+U_x : x\in X\}$ es un cubrimiento de K, existen un número finito de elementos $x_1,x_2\ldots,x_n\in K$ tales que

$$K\subset(x_1+U_{x_1})\cup(x_2+U_{x_2})\cup\ldots\cup(x_n+U_{x_n}).$$

Sea

$$V=U_{x_1}\cap U_{x_2}\cap\ldots\cap U_{x_n}.$$

Entonces,

$$K+V\subset\bigcup_{i=1}^{n}(x_i+U_{x_i}+V)\subset\bigcup_{i=1}^{n}(x_i+U_{x_i}+U_{x_i}).$$

Además $C+V\subset C+U_{x_i}$, luego $C+V$ no interseca a la ultima unión.
Por lo que

$$(K+V)\cap(C+V)=\emptyset.$$

□

Remarca 1. Como $K+V$ y $C+V$ son disjuntos, se sigue que

$$\overline{K+V}\quad\text{no interseca a}\quad C+V$$

En efecto, si $x\in C+V$, entonces existe U vecindad de x tal que

$$U\subset C+V.$$

Pero si $x\in\overline{K+V}$, toda vecindad de x, en particular U interseca a $K+V$,
i.e., existe un $y\in U$ que satisface

$$y\in(K+V)\cap(C+V),$$

lo cual es una contradicción.

Teorema 1.7. *Si $\mathscr{B}$ es una base local para un espacio vectorial topológico X, entonces todo miembro de $\mathscr{B}$ contiene la clausura de algún miembro de $\mathscr{B}$.*

Demostración. Sea $U\in\mathscr{B}$. Sea $K=0$ (compacto) y $C=U^C$ (cerrado). Por el Teorema 1.6 existe una vecindad simétrica, talque

$$V\cap(U^c+V)=\emptyset.$$

De esto se sigue que

$$V\subset(U^c+V)^c\subset U.$$

Por la definición de base local existe una vecindad $W \in \mathscr{B}$ tal que,

$$W \subset V \subset (U^c + V)^c \subset U.$$

Donde $(U^c + V)^c$ es cerrado, así

$$\overline{W} \subset (U^c + V)^c \subset U.$$

$\square$

Teorema 1.8. *Todo espacio vectorial topológico es un espacio de **Hausdorff**.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. por definición los conjuntos $\{x\}, \{y\}$ son cerrados y compactos. Por el Teorema 1.6 tomando a $K = \{x\}$ y a $C = \{y\}$, entonces existe una vecindad de 0 tal que

$$(x + V) \cap (y + V) = \emptyset.$$

Así X es de Hausdorff. $\square$

El siguiente teorema establece algunas relaciones entre conjuntos, su clausura y su interior.

Teorema 1.9. *Sea X un espacio vectorial topológico.*

(a) Si $A \subset X$, entonces $\overline{A} = \bigcap (A + V)$ donde los V son todas las vecindades de 0.

(b) $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B}$.

(c) Si $Y \subset X$ es un subespacio vectorial, entonces lo es $\overline{Y}$.

(d) Si C es un subconjunto convexo de X, entonces lo son también $\overline{C}$ y C^o.

(e) Si B es un subconjunto balanceado de X, lo es $\overline{B}$; si ademas $0 \in B^o$, entonces B^o es balanceado.

(f) Si E es un conjunto acotado de X, entonces $\overline{E}$ es acotado.

(g) Si A y B son acotados, también lo es $A + B$.

(h) Si A y B son compactos, también lo es $A + B$.

(i) Si A es compacto y B es cerrado, entonces $A + B$ es cerrado.

Demostración. (a) Sea $x \in \overline{A}$, entonces $(x + V) \cap A \neq \emptyset$ para toda vecindad de 0. Sea $y \in (x + V) \cap A$, entonces $y = x + v \in A$ con $v \in V$. Así $x = y - v \in A - V$ para V vecindad de 0. Así

$$x \in \bigcap (A - V) = \bigcap (A + V), \text{ para } V \text{ vecindad de } 0.$$

A la inversa, supongamos que $x \notin \overline{A}$, entonces existe V una vecindad de 0 tal que $(x+V)\cap A = \emptyset$, i.e., $x \notin A - V$, luego

$$x \notin \bigcap (A+V)$$

para V vecindad de 0.

(b) Sea $a \in \overline{A}$ y $b \in \overline{B}$. Sea W una vecindad de $a+b$, por la continuidad de la adición existen W_1 y W_2 vecindades de a y b respectivamente tal que

$$W_1 + W_2 \subset W.$$

Ademas como $a \in \overline{A}$ y $b \in \overline{B}$ entonces $W_1 \cap A \neq \emptyset$ y $W_2 \cap B \neq \emptyset$ i.e., existe $x \in W_1 \cap A$ y $y \in W_2 \cap B$, entonces

$$x \in A \quad \text{y} \quad y \in B \quad \text{implica} \quad x+y \in A+B$$

y

$$x \in W_1 \quad \text{y} \quad y \in W_2 \quad \text{implica} \quad x+y \in W_1 + W_2 \subset W$$

De otro modo, toda vecindad de $a+b \in \overline{A}+\overline{B}$ se interseca con $A+B$, lo cual implica que $a+b \in \overline{A+B}$, y de este modo

$$\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A+B}.$$

(c) Sea Y un subespacio de X, entonces

$$\alpha Y + \beta Y \subset Y \text{ para todo } \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Como la multiplicación por escalar es homeomorfismo, $\alpha\overline{Y} = \overline{\alpha Y}$, y por el anterior inciso,

$$\alpha\overline{Y} + \beta\overline{Y} = \overline{\alpha Y} + \overline{\beta Y} \subset \overline{\alpha Y + \beta Y} \subset \overline{Y}.$$

(d) Sea C un subconjunto convexo, sea t tal que $0 \leq t \leq 1$, entonces

$$t\overline{C} = \overline{tC} \quad \text{y} \quad (1-t)\overline{C} = \overline{(1-t)C}.$$

Por el inciso (b) :

$$t\overline{C} + (1-t)\overline{C} = \overline{tC} + \overline{(1-t)C} \subset \overline{tC + (1-t)C} \subset \overline{C}.$$

Así $\overline{C}$ es convexo.
Ahora para ver que C^o es convexo, como $C^o \subset C$ tenemos que

$$tC^o + (1-t)C^o \subset C$$

para $0 < t < 1$. Pero tC^o y $(1-t)C^o$ son abiertos, así que $tC^o + (1-t)C^o$ también lo es y por lo tanto

$$tC^o + (1-t)C^o \subset C^o.$$

Así C^o es convexo.

(e) Como la multiplicación por un escalar es homeomorfismo,

$$\alpha\overline{B} = \overline{\alpha B}$$

Si B es balanceado , entonces para $|\alpha| \leq 1$,

$$\alpha\overline{B} = \overline{\alpha B} \subset \overline{B}.$$

Ası$\overline{B}$ es balanceado.
Ahora para todo $0 < |\alpha| \leq 1$,

$$\alpha B^o = (\alpha B)^o \subset B^o.$$

Si $\alpha = 0$ y $0 \in B^o$, entonces $\alpha B^o \subset B^o$ y así B^o es balanceado.

(f) Sea V una vecindad de 0, entonces por el teorema 1.5. existe W una vecindad de 0 tal que $\overline{W} \subset V$. Como E es acotado, existe $s > 0$ tal que $E \subset tW \subset t\overline{W} \subset tV$ para todo $t > s$ de esto se sigue que

$$\overline{E} \subset t\overline{W} \subset tV.$$

Así $\overline{E}$ es acotado.

(g) Sea V vecindad de 0, entonces existe W vecindad balanceada de 0 tal que $W + W \subseteq V$, como A y B son acotados existen $s_1, s_2 > 0$ tal que para $t > s_1$ y $r > s_2$

$$A \subseteq tW \text{ y } B \subseteq rW,$$

sea $s = \text{máx}\{s_1, s_2\}$, entonces

$$A \subseteq tW \text{ y } B \subseteq tW, \text{ para } t > s$$

luego

$$A + B \subseteq tW + tW = t(W + W) \subseteq tV$$

Así $A + B$es acotado.

(h) Como A y B son compactos, entonces $A \times B$ es compacto y como la adición es continua, entonces $+(A \times B) = A + B$ es compacto.

(i) Sea $x \notin (A + B)$, entonces $x \neq a + b$ para todo $a \in A$ y $b \in B$, $a \neq x - b$ para todo $a \in A$ y $b \in B$, luego $A \cap (x - B) = \emptyset$ y ademas como B es cerrado y T_{-x} es homeomorfismo, $x - B$ es cerrado.
Por el Teorema 1.6 existe V una vecindad de 0 tal que

$$(A + V) \cap (x - B + V) = \emptyset$$

luego tenemos que

$$a + v \neq x - b + v' \text{ para todo } a \in A, b \in B \text{ y } v, v' \in V$$

$$a+b+v \neq x+v' \text{ para todo } a \in A, b \in B \text{ y } v, v' \in V$$

de este modo

$$(A+B+V) \cap (x+V) = \emptyset$$

y en particular obtenemos que

$$(A+B) \cap (x+V) = \emptyset$$

como $(x+V)$ es una vecindad de x, así $x \notin \overline{A+B}$.

□

Teorema 1.10. *En un espacio vectorial topológico X*

(a) Toda vecindad de 0 contiene una vecindad balanceada de 0.

(b) toda vecindad convexa de 0 contiene una vecindad convexa y balanceada de 0.

Demostración. (a) Como el producto por escalares es continua y $(0,0) \mapsto 0$, entonces sea U una vecindad de 0 , entonces existen $B_\epsilon(0) = \{\alpha \in \mathbb{K} : |\alpha| < \epsilon\}$ y V tal que

$$B_\epsilon(0) \times V \subseteq U$$

i.e.,

$$\alpha V \subseteq U \quad \text{para} \quad |\alpha| < \epsilon.$$

Tomemos

$$W = \bigcup_{|\alpha|<\epsilon} \alpha V$$

Como V es abierto y M_α es homeomorfismo, αV es abierto, luego W también lo es .
Como $\alpha V \subseteq U$ para $|\alpha| < \epsilon$, entonces $W \subseteq U$, ademas $0 \in V$ así $0 \in \alpha V \subseteq U$.
Ahora si $|\lambda| \leq 1$

$$\lambda W = \lambda \bigcup_{|\alpha|<\epsilon} \alpha V = \bigcup_{|\alpha|<\epsilon} \lambda \alpha V$$

como $\left|\beta\right| = |\lambda\alpha| = |\lambda||\alpha| < \epsilon$, así

$$\lambda W \subseteq \bigcup_{|\beta|<\epsilon} \beta V = W.$$

Luego W es balanceado.

(b) Sea U una vecindad convexa de 0. Sea

$$W = (\bigcap_{|\alpha|=1} \alpha U)^o$$

Como U es convexo, también lo es αU . Así

$$W_0 = \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha U \quad \text{es convexo}$$

Ahora si $|\lambda| = 1$

$$\lambda W_0 = \lambda \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha U = \bigcap_{|\alpha|=1} \overbrace{\lambda\alpha}^{\beta} U \subseteq \bigcap_{|\beta|=1} \beta U = W_0$$

Pues $\left|\beta\right| = |\lambda\alpha| = |\lambda||\alpha| = 1$
y sea ahora $\lambda \neq 0$, $|\lambda| \leq 1$

$$\lambda W_0 = |\lambda| \left[\frac{\lambda}{|\lambda|}\right] W_0 \subseteq |\lambda|\, W_0 = |\lambda|\, W_0 + (1-|\lambda|)0$$

pero como W_0 es convexo y el $0 \in W_0$

$$\lambda W_0 \subseteq |\lambda|\, W_0 + (1-|\lambda|)0 \subseteq W_0$$

Si $\lambda = 0$, entonces $0W_0 = \{0\} \subseteq W_0$ luego W_0 es balanceado.
como U es vecindad de 0 existe U' abierto tal que $0 \in U' \subset U$, y por (a) vimos que $0 \in \bigcup_{|\beta|<\epsilon} \beta U' \subseteq U' \subseteq U$ como $\bigcup_{|\beta|<\epsilon} \beta U'$ es balanceado, entonces

$$\alpha^{-1}\left(\bigcup_{|\beta|<\epsilon} \beta U'\right) \subseteq \left(\bigcup_{|\beta|<\epsilon} \beta U'\right) \subseteq U \quad \text{para todo} \quad \alpha \quad \text{con} \quad |\alpha| = 1$$

y por tanto

$$\bigcup_{|\beta|<\epsilon} \beta U' \subseteq \alpha U$$

y al ser $\bigcup_{|\beta|<\epsilon} \beta U'$ abierto, entonces $0 \in (\alpha U)^{\circ}$ para todo α con $|\alpha| = 1$, entonces como

$$W = \left(\bigcap_{|\alpha|=1} \alpha U\right)^{\circ} = \bigcap_{|\alpha|=1} (\alpha U)^{\circ}$$

así $0 \in W$ y se tiene que W es abierto, convexo y balanceado.

□

Corolario 1.11. *(a) Todo espacio vectorial topológico tiene una base local balanceada.*

(b) Todo espacio localmente convexo tiene una base local convexa y balanceada.

Teorema 1.12. *Supongamos que V es una vecindad de 0 en un espacio vectorial topológico X.*

(a) Si $0 < r_1 < r_2 < \cdots$ y $r_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$, entonces

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V.$$

(b) Todo subconjunto compacto K de X es acotado

(c) Si $\delta_1 > \delta_2 > \cdots$ y $\delta_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, y si V es acotado, entonces la colección

$$\Delta = \{\delta_n V : n = 1, 2, 3 \cdots\}$$

es una base local para X.

Demostración. (a) sea $x \in X$, consideremos la sucesión $\frac{x}{r_n}$ esta sucesión converge a 0, por la continuidad de $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$.
Para V vecindad de 0 existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n > N$

$$\frac{x}{r_n} \in V$$

luego

$$x \in r_n V \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V.$$

(b) Sea V vecindad de 0 , luego existe W vecindad balanceada de 0 tal que $W \subset V$, por el inciso anterior

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} nW$$

como K es es compacto, existen enteros $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ tal que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{k} n_i W = \bigcup_{i=1}^{k} n_k \left[\frac{n_i}{n_k}\right] W = n_k \bigcup_{i=1}^{k} \left[\frac{n_i}{n_k}\right] W$$

como W es balanceado

$$K \subset n_k \bigcup_{i=1}^{k} \left[\frac{n_i}{n_k}\right] W \subset n_k W.$$

Así para $t > n_k$

$$K \subset n_k W = t \left[\frac{n_k}{t}\right] W \subset tW \subset tV$$

(c) Sea U una vecindad de 0 en X. Si V es acotado, existe $s > 0$ tal que para todo $t > s$ $V \subset tU$. Si n es suficientemente grande de modo que el producto $s\delta_n < 1$, así $\dfrac{1}{\delta_n} > s$, entonces

$$V \subset \left(\frac{1}{\delta_n}\right) U$$

luego tenemos que

$$\delta_n V \subset U \quad \text{para} \quad n \quad \text{suficientemente grande.}$$

Así en efecto la colección $\Delta = \{\delta_n V : n = 1, 2, 3 \cdots\}$ es una base local para X

□

Ejemplo 2. Sea $B = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C} : |z_1| \leq |z_2|\}$. Veamos que B es balanceado pero su interior no lo es.
Sea λ de modo que $|\lambda| \leq 1$, sea $(x, y) \in \lambda B)$, entonces $(x, y) = \lambda(z_1, z_2)$ con $(z_1, z_2) \in B$

$$|x| = |\lambda z_1| = |\lambda||z_1| \leq |\lambda||z_2| = |\lambda z_2| = \left|y\right|$$

asi $\lambda B \subseteq B$.
Notemos que $B^o = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C} : |z_1| < |z_2|\}$ el 0 no pertenece a este conjunto, así B^o no es balanceado.

Observación 1. Consideremos la definición de **conjunto acotado** dada. Sí alteramos el contenido de esta definición a que para cada entorno V de 0 exista algún $t > 0$ tal que $E \subseteq tV$. Ambas definiciones son equivalentes.
En efecto.
$d1 \Rightarrow d2]$ Es obvio .
$d2 \Rightarrow d1]$ Sea E un subconjunto acotado de X, sea V una vecindad de 0, entonces existe W vecindad balanceada de 0 tal que $W \subseteq V$.
Como E es acotado existe $s > 0$ tal que

$$E \subseteq sW$$

si $t > s$ tenemos que

$$sW = t\left[\frac{s}{t}\right] W \subseteq tW$$

pues $\dfrac{s}{t} < 1$ y W es balanceado, así

$$E \subseteq sW \subseteq tW \subseteq tV.$$

Capítulo 2

APLICACIONES LINEALES Y DIMENSIÓN FINITA.

2.1. Aplicaciones Lineales.

Definición 2.1. Sean X y Y conjuntos no vacíos y $f: X \to Y$ una Aplicación definida de X en Y. Si $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$, denotamos como siempre por $f(A)$ a la imagen de A bajo f, y por $f^{-1}(B)$ a la preimagen de B:

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}, \qquad f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Supongamos ahora que X y Y son espacios vectoriales sobre un mismo campo de escalares . Decimos que una Aplicación $\Lambda : X \to Y$ es lineal si

$$\Lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha \Lambda(x) + \beta \Lambda(y)$$

para todo $x, y \in X$ y todo escalar α y β.
A las Aplicaciones lineales definidas de X en su campo de escalares las llamamos **funcionales lineales**.

Sean $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$, algunas propiedades de las aplicaciones lineales , y cuyas demostraciones omitiremos en el presente trabajo son las siguientes:

(i) $\Lambda(0) = 0$.

(ii) Si A es un subespacio de X, entonces $\Lambda(A)$ es un subespacio de Y.

(iii) Si A es un conjunto convexo (balanceado), entonces $\Lambda(A)$ también lo es.

(iv) Si B es un subespacio de X, entonces $\Lambda^{-1}(B)$ es un subespacio de X.

(v) Si B es un conjunto convexo (balanceado), entonces $\Lambda(B)$ también lo es.

(vi) En particular, el conjunto

$$\Lambda^{-1}(0) = \{x \in X : \Lambda(x) = 0\} = \ker(\Lambda)$$

es un subespacio de X, al que llamamos el **espacio nulo de** Λ

Ahora, veamos algunos resultados sobre continuidad de aplicaciones lineales.

Teorema 2.1. *Sean X y Y espacio vectorial topológico. Si $\Lambda : X \to Y$ es una aplicación lineal y continua en 0, entonces Λ es continua. de hecho, Λ es uniformemente continua, en el sentido: a cada vecindad de cero W en Y le corresponde una vecindad de cero V en X tal que*

$$x - y \in V \Rightarrow \Lambda(x) - \Lambda(y) \in W$$

Demostración. Sea W una vecindad de 0 en Y, como Λ es continua en 0, existe V una vecindad de 0 en X tal que $\Lambda(V) \subseteq W$.
Ahora tomemos x, y en V de modo que $x - y \in V$, como Λ es lineal tenemos que $\Lambda(x) - \Lambda(y) = \Lambda(x - y) \in W$. De esto tenemos que Λ lleva a la vecindad $x + V$ en la vecindad $\Lambda(x) + W$ de $\Lambda(x)$, así Λ también es continua en x. □

Teorema 2.2. *Sea X un espacio vectorial topológico. Si $\Lambda : X \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal, con $\Lambda x \neq 0$ para algún $x \in X$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(a) Λ *es continua.*

(b) $\ker(\Lambda)$ *es cerrado.*

(c) $\ker(\Lambda)$ *no es denso en* X.

(d) Λ *es acotado en alguna vecindad de 0.*

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$. Como $\ker(\Lambda) = \Lambda^{-1}(0)$ y el $\{0\}$ es cerrado en $\mathbb{C}$, entonces por la continuidad de Λ $\ker(\Lambda)$ es cerrada.
$(b) \Rightarrow (c)$. Como $\Lambda x \neq 0$ para algún $x \in X$,así $\Lambda \neq 0$ y como $\ker(\Lambda)$ es cerrada, tenemos que

$$\ker(\Lambda) = \overline{\ker(\Lambda)} \neq X.$$

Así $\ker(\Lambda)$ no es denso en X.
$(c) \Rightarrow (d)$. Como $\ker(\Lambda)$ no es denso, $X \setminus \ker(\Lambda)$ tiene interior no vacío.
Sea $x_0 \in (X \setminus \ker(\Lambda))^o$, así por el Teorema 1.10 existe V una vecindad balanceada de 0 de modo que

$$x_0 + V \subset X \setminus \ker(\Lambda)$$

así

$$(x_0 + V) \cap (\ker(\Lambda)) = \emptyset,$$

entonces $\Lambda(V)$ es balanceado en $\mathbb{C}$,
ademas $\Lambda(x_0 + y) \neq 0$ para todo $x \in V$ y como Λ es lineal $\Lambda x_0 \neq -\Lambda y$.

Afirmación $|\Lambda x_0|$ es una cota para $\Lambda(V)$
Por contradicción. Supongamos que $|\Lambda x_0|$ no es una cota para $\Lambda(V)$, entonces existe $z \in V$ tal que
$|\Lambda z| > |\Lambda x_0| > 0$, luego $0 < \frac{|\Lambda x_0|}{|\Lambda z|} < 1$, como V es balanceado $\left[\frac{\Lambda x_0}{\Lambda z}\right] V \subseteq V$.
Sea $y \in \left[\frac{\Lambda x_0}{\Lambda z}\right] V$ con $y = (\frac{\Lambda x_0}{\Lambda z})z$, luego tenemos que $\Lambda y = (\frac{\Lambda x_0}{\Lambda z})\Lambda z = \Lambda x_0$.
Así $\Lambda x_0 = \Lambda z$ para algún $z \in V$, lo cual es una contradicción.
Por lo tanto $\Lambda(V)$ es acotado.
$(d) \Rightarrow (a)$. Supongamos que $\Lambda(V)$ es acotado para alguna vecindad V de 0, i.e., existe un M tal que

$$|\Lambda x| \leq M \qquad \text{para todo } x \in V.$$

Sea $\varepsilon > 0$ dado. El conjunto $W = (\frac{\varepsilon}{M+1})V$. Entonces para todo $y \in W$, así $y = (\frac{\varepsilon}{M+1})x$ para algún $x \in V$

$$\left|\Lambda y\right| = \left|(\frac{\varepsilon}{M+1})\Lambda x\right| = \frac{\varepsilon}{M+1}|\Lambda x| < (\frac{\varepsilon}{M})M = \varepsilon.$$

Lo cual prueba que Λ es continua en 0. Por el teorema anterior Λ es continua. $\square$

2.2. Espacios de Dimensión Finita.

Si X es un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{C}$, y $\dim X = n$, entonces cada base de X induce un isomorfismo de X hacia $\mathbb{C}^n$.El Teorema 2.4 demostrará que este isomorfismo debe ser un homeomorfismo. En otros términos, esto dice que la topología de $\mathbb{C}^n$ es la única topología vector que un espacio vectorial topológico complejo n-dimensional puede tener.
También veremos que los subespacios finito-dimensionales siempre están cerrados y que ningún espacio vectorial topológico infinito-dimensional es localmente compacto. Todo en la discusión anterior sigue siendo cierto con escalares reales en lugar de los complejos.

Lema 2.3. *Si X es un espacio vectorial topológico, complejo y $f : \mathbb{C}^n \to X$ es lineal, entonces f es continua.*

Demostración. Sea $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ una base de $\mathbb{C}^n$, entonces la dimensión k de $f(\mathbb{C}^n)$ es menor o igual a n. Sea $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ una base de $f(\mathbb{C}^n)$ luego para $z \in \mathbb{C}^n$ podemos escribir

$$f(z) = \sum_{i=1}^{k} a_i(z)v_i$$

tal que cada a_i es una aplicación lineal.
Ahora mostraremos que cada $f_i : \mathbb{C}^n \to X$ definida como $f_i(z) = a_i(z)v_i$ es continua. Por la definición de espacio vectorial topológico el producto por un escalar es continuo solo basta probar que la aplicación $z \mapsto a_i(z)$ es continua
Así si $z \in \mathbb{C}^n$, existen $z_1, z_2, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$ tal que

$$z = z_1e_1 + z_2e_2 + \cdots + z_ne_n$$

como en $\mathbb{C}^n$ todas las normas son equivalentes tomaremos la norma

$$\|z\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} z_i e_i \right\| := \sum_{i=1}^{n} |z_i|$$

Sea $\varepsilon > 0$ tomando $\delta < \frac{\varepsilon}{M}$ con $M = \sum_{j=1}^{n} \left| a_i(e_j) \right|$ si $\left\| x - y \right\| < \delta$ luego

$$\begin{aligned}
\left| a_i(x) - a_i(y) \right| &= \left| a_i(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j) - a_i(\sum_{j=1}^{n} y_j e_j) \right| \\
&= \left| \sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j) a_i(e_j) \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \left| x_j - y_j \right| \sum_{j=1}^{n} \left| a_i(e_j) \right| \\
&= \left\| x - y \right\| \sum_{j=1}^{n} \left| a_i(e_j) \right| \\
&< \delta \sum_{j=1}^{n} \left| a_i(e_j) \right| < \varepsilon
\end{aligned}$$

Así a_i es continua, luego cada f_i es continua, entonces

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_k(z)$$

como la adición es continua, f es continua. □

Teorema 2.4. *Si n es un entero positivo y Y un subespacio n-dimensional de un espacio vectorial topológico complejo X, entonces*

(a) Todo isomorfismo de $\mathbb{C}^n$ en Y es un homeomorfismo, y

(b) Y es cerrado.

Demostración. (a) Sea S la esfera unitaria y B la bola abierta unitaria de $\mathbb{C}^n$

$$S = \{x \in \mathbb{C}^n : \|x\| = 1\} \quad \text{y} \quad B = \{x \in \mathbb{C}^n : \|x\| < 1\}$$

Supongamos que $f : \mathbb{C}^n \to Y$ es un isomorfismo
Así tenemos que f es lineal, inyectiva, y $f(\mathbb{C}^n) = Y$, pero $K = f(S)$ es compacto pues f es continua, luego $f(0) = 0$ y como f es inyectiva $0 \notin K$ y de este modo existe una vecindad balanceada V de 0 en X, de modo que $V \cap K = \emptyset$. El conjunto

$$E = f^{-1}(V) = f^{-1}(V \cap Y)$$

es de este modo disjunto de S, como f es lineal, E es balanceado, luego $E \subseteq B$, porque $0 \in E$, y en consecuencia $f^{-1}(V \cap Y) \subseteq B$. Pero

$$f^{-1}(x) = (f_1^{-1}(x), f_2^{-1}(x), \cdots, f_n^{-1}(x))$$

donde

$$f_i^{-1} : Y \to \mathbb{C} \quad \text{es funcional lineal para cada } i = 1, 2, \cdots, n.$$

Y así f_i^{-1} es acotado en una vecindad de 0 $V \cap Y$, para cada $i = 1, 2, \cdots, n$, de este modo f_i^{-1} es continua para cada $i = 1, 2, \cdots, n$. Por lo tanto f es un homeomorfismo de $\mathbb{C}^n$ en Y.

(b) Sean $y \in \overline{Y}$, $f : \mathbb{C}^n \to Y$ y V como en el inciso anterior. Para algún $t > 0$ tenemos que $y \in tV$, entonces

$$Y \cap tV \subseteq f(tB) \subseteq f(t\overline{B}),$$

como $t\overline{B}$ es compacto, tenemos que $f(t\overline{B})$ es cerrado en X. De donde $y \in f(t\overline{B}) \subseteq Y$, y esto prueba $\overline{Y} = Y$. □

Corolario 2.5. *Si X es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces existe una única topología en X que lo hace un espacio vectorial topológico.*

Teorema 2.6. *Todo espacio vectorial topológico localmente compacto X tiene dimensión finita.*

Demostración. Como X es localmente compacto, existe V una vecindad de 0, de modo que $\overline{V}$ es compacto.

Por el teorema 1.12 $\overline{V}$ y V son acotados y los conjuntos $2^{-n}V$ con $n = 1, 2, 3, \cdots$ forman una base local para X.

Sea $y \in \overline{V}$, por definición $(y - \frac{1}{2}V) \cap V \neq \emptyset$, i.e., $y \in V + \frac{1}{2}V$, de donde inferimos que

$$\overline{V} \subseteq V + \frac{1}{2}V = \bigcup_{x \in V} (x + \frac{1}{2}V)$$

Como $\overline{V}$ es compacto, existen $x_1, x_2, \cdots, x_k \in X$ tal que

$$\overline{V} \subseteq (x_1 + \frac{1}{2}V) \cup (x_2 + \frac{1}{2}V) \cup \cdots \cup (x_k + \frac{1}{2}V)$$

Sea Y el espacio generado por $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$, este es un subespacio finito-dimensional de X, donde Y es cerrado por el teorema 2.4. Donde $V \subseteq Y + \frac{1}{2}V$ y como $\lambda Y = Y$ para todo escalar $\lambda \neq 0$, esto muestra que

$$\frac{1}{2}V \subseteq \frac{1}{2}Y + \frac{1}{4}V \subseteq Y + \frac{1}{4}V$$

Así obtenemos que

$$V \subseteq Y + \frac{1}{2}V \subseteq Y + Y + \frac{1}{4}V = Y + \frac{1}{4}V$$

si continuamos en este camino, podemos ver que

$$V \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty}(Y + \frac{1}{2^n}V)$$

como $\{\frac{1}{2^n}V\}$ es una base local, entonces por el teorema 1.7 (a)

$$V \subseteq \overline{Y} = Y$$

luego

$$kV \subseteq kY = Y$$

$$kV \subseteq Y \qquad \text{para todo } k = 1, 2, \cdots$$

Así

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} kV \subseteq Y.$$

□

Teorema 2.7. *Si X es un espacio vectorial topológico localmente acotado con la propiedad de Heine-Borel, entonces X tiene dimensión finita.*

Demostración. Por hipótesis, el 0 tiene una vecindad acotada V, también lo es $\overline{V}$ por teorema 1.9 (f), como X tiene la propiedad de Heine-Borel, todo cerrado y acotado es compacto, así $\overline{V}$ es compacto, luego X es localmente compacto y por el teorema anterior X tiene dimensión finita.

□

2.3. Espacios Cocientes.

Hasta ahora hemos visto algunos resultados importantes para espacios vectoriales topológicos; pero si tenemos un espacio cociente X, con respecto a alguno de sus subespacios, nos podemos preguntar si le podemos asignar una topología que esté relacionada con la estructura de X.
Sean X un espacio vectorial y N un subespacio vectorial de X. Denotemos, como se hace usualmente, al espacio cociente de X sobre N como $\frac{X}{N}$ y definamos

$$\begin{array}{rccc} \pi: & X & \longrightarrow & \dfrac{X}{N} \\ & x & \longmapsto & [x] = x + N, \end{array}$$

la funciíon cociente. A $[x] = x + N$ la llamamos la clase de x modulo N. La suma y la multiplicación por escalares se definen como

$$\pi(x+y) = \pi(x) + \pi(y), \qquad \pi(\lambda x) = \lambda\pi(x) \qquad (1)$$

Observemos que $\lambda\pi(x) = N$ si $\lambda = 0$, pues el vector cero de $\frac{X}{N}$ es $\pi(0) = N$. Dado que N es un espacio vectorial, las operaciones definidas arriba están bien definidas. Además, notemos que $\pi(x) = \pi(x_0)$ siempre que $x - x_0 \in N$ y si $\pi(y) = \pi(y_0)$ entonces

$$\pi(x) + \pi(y) = \pi(x_0) + \pi(y_0), \qquad \lambda\pi(x) = \lambda\pi(x_0) \qquad (2).$$

Por (1), π es una función lineal con espacio nulo N.
Supongamos ahora que $X = (X, \tau)$ es un espacio vectorial topológico y $N \subseteq X$ un subespacio cerrado, esto es, un subespacio lineal y cerrado con respecto a la topología τ. Denotemos por τ_N a la colección de todos los conjuntos $A \subseteq \frac{X}{N}$ tales que $\pi^{-1}(A) \in \tau$; es decir, $U \subseteq \frac{X}{N}$ es τ_N-abierto si y sólo si, por definición, $\pi^{-1}(U)$ es abierto en (X, τ). Entonces, τ_N es una topología en $\frac{X}{N}$ llamada la topología cociente. De las propiedades de espacio vectorial topológico de X, y de la estructura algebraica de $\frac{X}{N}$ se tiene que la topología cociente τ_N en $\frac{X}{N}$ también es vectorial topológica. Además, π manda conjuntos abiertos en conjuntos abiertos. Estas propiedades se demuestran en el siguiente teorema.

Definición 2.2. Sean X y Y espacios topológicos. Decimos que una función $f : X \to Y$ es abierta si mapea conjuntos abiertos de X en conjuntos abiertos de Y.

De esta manera, una función lineal entre espacios vectoriales topológicos es abierta si y sólo si mapea vecindades de 0 en vecindades de 0

Teorema 2.8. *Sea N un subespacio de un espacio vectorial topológico X. Sea τ la topología de X y defina τ_N como arriba, entonces:*

(a) τ_N es una topología vectorial en $\frac{X}{N}$; la función cociente $\pi : X \to \frac{X}{N}$ es lineal, continua y abierta.

(b) Si $\mathscr{B}$ es una base local para τ, entonces la colección de todos los conjuntos $\pi(V)$, con $V \in \mathscr{B}$, forman una base local para τ_N.

(c) Cada una de las siguientes propiedades de X son heredadas a $\frac{X}{N}$: ser localmente convexo, localmente acotado.

Demostración. (a) Como la imagen inversa respeta uniones e intersecciones tenemos que:

$$\pi^{-1}(A \cap B) = \pi^{-1}(A) \cap \pi^{-1}(B) \quad \text{y} \quad \pi^{-1}\left(\bigcup E_\lambda\right) = \bigcup \pi^{-1}(E_\lambda)$$

así dados $A, B, E_\lambda \in \tau$, para cada λ, obtenemos que $\pi^{-1}(A \cap B), \pi^{-1}(\bigcup E_\lambda) \in \tau_N$; $\emptyset = \pi^{-1}(\emptyset) \in \tau_N$, $X = \pi^{-1}(\frac{X}{N}) \in \tau_N$ Por lo que τ_N en efecto es una topología para $\frac{X}{N}$. Además, ya que la imagen inversa respeta las diferencias entre conjuntos, un conjunto $A \subseteq \frac{X}{N}$ es τ_N-cerrado si y sólo si $\pi^{-1}(A)$ es τ-cerrado. En particular, todo punto $\pi(x) \in \frac{X}{N}$ es cerrado; pues por hipótesis N es cerrado, las traslaciones por

un vector son continuas y $\pi^{-1}(\pi(x)) = N + x$ es cerrado.
Para la continuidad de π se da gracias a la definición de τ_N (la imagen inversa de abiertos es abierta).
Ahora, sabemos que $V \subseteq \frac{X}{N}$ es τ_N-abierto si y sólo si $\pi^{-1}(V) \subseteq X$ es τ-abierto. Así, si $U \subseteq X$ es τ-abierto, tenemos que $\pi(U)$ es τ_N-abierto en $\frac{X}{N}$, ya que $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{y \in N}(y + U)$. Por lo tanto π es abierta.
Para la continuidad de la multiplicación por escalares y la suma de vectores tomemos W una vecindad de cero en $\frac{X}{N}$, entonces existe una vecindad V de cero en X tal que $V + V \subseteq \pi^{-1}(W)$, el cual es abierto. De aquí que $\pi(V) + \pi(V) \subseteq \pi(\pi^{-1}(W))$, y dado que π es abierta $\pi(V)$ es una vecindad de cero en $\frac{X}{N}$. Con esto hemos probado que la suma de vectores es continua. Por otro lado, ya que $\pi^{-1}(W)$ es vecindad de cero y la multiplicación por escalares es continua en X, dado $\alpha \in \mathbb{C}$ existe $B_\varepsilon(\alpha)$; una bola de radio $\varepsilon > 0$ alrededor de α en $\mathbb{C}$, y U una vecindad de cero en X tal que $\beta y \in \pi^{-1}(W)$ para cada $y \in U$ y $\beta \in B_\varepsilon(\alpha)$. Entonces,

$$\beta U \subseteq \pi^{-1}(W) \Rightarrow \beta \pi(U) \subseteq \pi(W)$$

y $\pi(U)$ es vecindad de cero. Con esto, la multiplicación por escalares también es continua en $\pi(0)$ y por tanto continua en $\frac{X}{N}$.

(b) De *(a)*, si $\mathscr{B}$ es una base local para τ, entonces la colección de todos los conjuntos $\{\pi(V) : V \in \mathscr{B}\}$, forman una base local para τ_N por definición de π ademas de ser abierta, esto hace que se satisfaga (b).

(c) Si X es localmente acotado, existe V una vecindad de cero acotada , ya que π es lineal y continua es acotada, $\pi(V)$ también es una vecindad acotada de $\pi(0)$ en $\frac{X}{N}$. Entonces, $\frac{X}{N}$ también es localmente acotado.
Si X es localmente convexo, existe V una vecindad de cero convexa , ya que π es lineal y continua, $\pi(V)$ también es una vecindad convexa de $\pi(0)$ en $\frac{X}{N}$. Entonces, $\frac{X}{N}$ también es localmente acotado.

□

Teorema 2.9. *Supongamos que N y F son subespacios de un espacio vectorial topológico de X tales que N es cerrado y F tiene dimensión finita. Entonces, $N + F$ es cerrado.*

Demostración. Sea π la función cociente definida de X en $\frac{X}{N}$ anteriormente y consideremos a $\frac{X}{N}$ con su topología cociente. Ya que π es lineal, $\pi(F)$ es un subespacio vectorial de dimensión finita de $\frac{X}{N}$; pues $\frac{X}{N}$ es un espacio vectorial. Por el Teorema 2.4, $\pi(F)$ es cerrado en $\frac{X}{N}$. Dado que $N + F = \pi^{-1}(\pi(F))$ y π es continua, concluimos que $N + F$ es cerrado. □

Capítulo 3

METRIZABILIDAD Y NORMABILIDAD.

3.1. Metrización

Recordemos que una topología τ sobre un conjunto X es metrizable si existe una métrica d en X tal que es compatible con τ. En este caso, todas las bolas de radio $\frac{1}{n}$ con centro en x forman una base local para x. Esto da una condición necesaria para la metrizabilidad de espacios vectoriales topológicos. Antes de enunciar el teorema veamos primero los siguientes resultados:

Observación 2. Sea $\mathscr{B}'$ una base local numerable de X, por el Teorema 1.10 existe $\mathscr{B} = \{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base local numerable cuyos miembros son todos balanceados, y de este modo

$$V_{n+1} + V_{n+1} + V_{n+1} + V_{n+1} \subseteq V_n$$

(cuando X es localmente convexo, esta base también puede ser elegida de esta manera que cada V_n sea convexa).
Esto implica que para todo n y k

$$V_{n+1} + V_{n+2} + \cdots + V_{n+k} \subseteq V_n$$

Ahora sea D el conjunto de los números racionales dyadic:

$$D = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^n} : c_n \in \{0,1\}, \quad \text{y} \quad c_n = 0 \quad \text{para} \quad n > N, N \in \mathbb{N} \right\}.$$

D es denso en $[0,1]$. Definamos la función $\varphi : D \cup \{r \geq 1\} \to \mathscr{P}(X)$:

$$\varphi(r) = \begin{cases} X & \text{si } r \geq 1 \\ c_1 V_1 + c_1 V_1 + \cdots & \text{si } r \in D \end{cases}$$

La suma en esta definición es siempre finita.
Por ejemplo $\varphi(1{,}2) = X$ y $c = \varphi(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = V_1 + V_2$.

Por la propiedad de la base $\mathscr{B} = \{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\varphi\left(\sum_{n=N_1}^{N_2} \frac{c_n}{2^n}\right) = \sum_{n=N_1}^{N_2} c_n V_n \subseteq V_{N-1}.$$

Entonces definimos el funcional $f : X \to \mathbb{R}$ de modo

$$f(x) = \text{ínf}\{r : x \in \varphi(r)\}$$

y definimos

$$d(x, y) = f(y - x)$$

Mostraremos que d es efectivamente una métrica en X que satisface todas las propiedades requeridas.

Esto dependerá de los siguientes lemas.

Lema 3.1. *Para $r, s \in D$*

$$\varphi(r) + \varphi(s) \subset \varphi(r + s)$$

Demostración. Si $r + s \geq 1$, entonces esto es obvio pues $\varphi(r + s) = X$
supongamos entonces que $r, s \in D$ y $r + s \in D$. La primera posibilidad es que $c_n(r) + c_n(s) = c_n(r+s)$ para todo n. Esto ocurre si $c_n(r)$ y $c_n(s)$ no son ambos igual a 1. Entonces

$$\varphi(r + s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r + s)V_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r)V_n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(s)V_n = \varphi(r) + \varphi(s).$$

De lo contrario, existe un n para el cual

$$c_n(r) + c_n(s) \neq c_n(r + s).$$

Sea N el mas pequeño n donde esto ocurre, entonces

$$c_N(r) = c_N(s) = 0 \quad \text{y} \quad c_N(r + s) = 1.$$

De esto tenemos que

$$\begin{aligned}
\varphi(r) &\subset c_1(r)V_1 + c_2(r)V_2 + \cdots + c_{N-1}(r)V_{N-1} + V_{N+1} + V_{N+2} + \cdots \\
&\subset c_1(r)V_1 + c_2(r)V_2 + \cdots + c_{N-1}(r)V_{N-1} + V_{N+1} + V_{N+1}, \\
\varphi(s) &\subset c_1(s)V_1 + c_2(s)V_2 + \cdots + c_{N-1}(s)V_{N-1} + V_{N+1} + V_{N+1},
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
\varphi(r) + \varphi(s) &\subset c_1(r + s)V_1 + c_2(r + s)V_2 + \cdots + c_{N-1}(r + s)V_{N-1} + V_{N+1} + V_{N+1} + V_{N+1} + V_{N+1} \\
&\subset c_1(r + s)V_1 + c_2(r + s)V_2 + \cdots + c_{N-1}(r + s)V_{N-1} + V_N \\
&\subset \varphi(r + s).
\end{aligned}$$

□

Lema 3.2. *Para todo* $r \in D \cup [1, \infty)$ *:*
$$0 \in \varphi(r)$$

Demostración. Para todo $r \in D \cup [1, \infty)$, $\varphi(r)$ es no vacío y este contiene una vecindad de 0 □

Lema 3.3. *El conjunto* $\{\varphi(r) : r \in D\}$ *es totalmente ordenado, i.e.,*
$$r < s \quad \textit{implica que} \quad \varphi(r) \subset \varphi(s).$$

Demostración. Sea $r, s \in D$ de modo que $r < s$
$$\varphi(r) \subset \varphi(r) + \varphi(s - r) \subset \varphi(s).$$
□

Lema 3.4. *Para todo* $x, y \in X$
$$f(x + y) \leq f(x) + f(y)$$

Demostración. Sea $x, y \in X$, notemos que el rango de f es $[0, 1]$, por lo tanto podemos limitarnos a el caso donde el lado derecho es inferior a 1. Fijemos $\varepsilon > 0$ existen $r, s \in D$ tal que
$$f(x) < r \quad f(y) < s \quad \text{y} \quad r + s < f(x) + f(y) + \varepsilon$$
como $\{\varphi(r)\}$ están totalmente ordenados, de esto concluimos que $x \in \varphi(r)$, $y \in \varphi(s)$, de donde
$$x + y \in \varphi(r) + \varphi(s) \subset \varphi(r + s).$$
Así
$$f(x + y) \leq r + s < f(x) + f(y) + \varepsilon$$
lo cual ocurre para cada $\varepsilon > 0$. □

Lema 3.5. *La función* f *satisface las adicionales propiedades:*

(a) $f(x) = f(-x)$.

(b) $f(0) = 0$.

(c) $f(x) > 0$ *para* $x \neq 0$.

Demostración. Como los $\varphi(r)$ son uniones de conjuntos balanceados, ellos también son balanceados, de los cuales tenemos que $f(x) = f(-x)$. $f(0) = 0$ pues $0 \in \varphi(r)$ para todo $r \in D$. Finalmente si $x \neq 0$ existe algún n tal que $x \notin V_n$, entonces $V_n = \varphi(\frac{1}{2^n})$ para algún n. Así $f(x) \geq 2^{-n} > 0$. □

Teorema 3.6. *Si* X *es un espacio vectorial topológico con una base local numerable, entonces se puede definir una métrica* d *en* X *tal que* *(a)* d *es compatible con la topología de* X.

(b) *las bolas abiertas con centro en 0 son balanceadas, y*

(c) d *es invariante:* $d(x+z, y+z) = d(x, y)$ *para todo* $x, y, z \in X$.

Si, además, X *es localmente convexo, entonces la podemos elegir* d *de tal manera que satisface (a), (b), (c) y*

(d) *todas las bolas abiertas son convexas.*

Demostración. De la observación 2 y de los lemas 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 Las propiedades de f implican que $d(x, y) = f(x-y)$ es una métrica en X. Esta es simétrica , se anula si solo si $x = y$, esta es traslacionalmente invariante, y cumple la desigualdad triangular:

$$\begin{aligned} d(x,y) &= f(x-y) = f(x-z-(y-z)) \\ &\leq f(x-z) + f(y-z) \\ &= d(x,z) + d(y,z). \end{aligned}$$

Ahora mostraremos que esta métrica es compatible con la topología de X. Consideremos las d-bolas abiertas

$$B_\delta(0) = \{x : d(x,0) < \delta\} = \{x : f(x) < \delta\} = \bigcup_{r<\delta} \varphi(r).$$

(Nosotros usamos el hecho que $f(x) < t$ implica que $x \in \varphi(t)$) en particular, si $\delta < \dfrac{1}{2^n}$, entonces $B_\delta(0) \subset V_n$, lo cual prueba que las bolas abiertas $B_{\frac{1}{2^n}}(0)$, forman una base local . Esto prueba *(a)*.
Las bolas abiertas son balanceadas porque cada $\varphi(r)$ es balanceada y la unión de conjuntos balanceados es balanceado, esto prueba *(b), (c)*.
Si los V_n son convexos entonces los $\varphi(r)$ son convexos, esto prueba *(d)*. □

Teorema 3.7. *Todo espacio vectorial topológico localmente acotado es metrizable.*

Demostración. Como X es localmente acotado por el Teorema 1.12 este tiene una base local numerable y por el Teorema 3.6 este es metrizable.

□

Usualmente diremos que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de d-Cauchy ó τ-Cauchy si lo es para la topología inducida por la métrica d ó para τ , respectivamente.

Observación 3. Observemos que la definición de sucesión de Cauchy la tenemos aún fuera del marco de una métrica, pero para ver en general que un espacio vectorial topológico es completo no nos basta considerar sólo a las sucesiones. Notemos además que, de bases locales distintas para una misma topología obtenemos las mismas sucesiones de Cauchy.

Sea X un espacio vectorial topológico cuya topología τ es compatible con la topologá generada por una métrica invariante d. Entonces, tenemos que $d(x_n, x_m) = d(x_n - x_m, 0)$ y como las d-bolas con centro en el origen forman una base local para τ , entonces :
Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es d-**Cauchy** si sólo si es τ-**Cauchy**.
En consecuencia, cualesquiera dos métricas invariantes en X, tales que son equivalentes con τ , tienen las mismas sucesiones de Cauchy y las mismas sucesiones convergentes. Así que tenemos lo siguiente:

Afirmación 3.8. *Sea X un espacio vectorial topológico. Si d_1 y d_2 son métricas invariantes tales que inducen la misma topologiá en X, entonces:*

(a) d_1 y d_2 tienen las mismas sucesiones de Cauchy,

(b) d_1 es completa si y sólo si d_2 es completa.

Es importante notar que la condición de ser invariante es necesaria,como lo veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3. Consideremos a $\mathbb{R}$ el conjunto de números reales y definamos las siguientes dos métricas:

$$d_1(x,y) = \left|x - y\right| \qquad \text{y} \qquad d_2(x,y) = \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+\left|y\right|}\right|$$

La primera métrica es la usual de R, mientras que las segunda, de las propiedades de $\mathbb{R}$ es claro que toma valores no negativos, es simétrica y satisface la desigualdad triangular. Veamos que $d_2(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$. Para esto, consideremos las funciones

$$g_1 : [0,+\infty) \to [0,1), \quad g_1(x) = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x},$$

$$g_2(x) : (-\infty, 0] \to (-1, 0], \quad g_2(x) = \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1+x}$$

las cuales son biyectivas. Lo cual quiere decir que si $d_2(x,y) = 0$, x y y deben tener el mismo signo, inclusive $x = y$ por la inyectividad de g_1 y g_2.
Por otro lado, d_1 y d_2 inducen la misma topología en $\mathbb{R}$. Pero d_2 no es invariante pues $d_2(1,0) = \frac{1}{2}$ y $d_2(2,1) = \frac{1}{6}$. Ahora, sea $\{n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es d_2-Cauchy pero no converge.

Teorema 3.9. *Sean (X, d_1) y $(X, d2)$ espacios métricos, con (X, d_1) completo. Si $E \subseteq X$ es cerrado, $f : E \to Y$ es continua y*

$$d_2(f(x_1), f(x_2)) \geqslant d_1(x_1, x_2) \quad \textit{para todo} \quad x_1, x_2 \in E,$$

entonces $f(E)$ es cerrado.

Demostración. Sea $y \in \overline{f(E)}$, entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ tal que $y = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Por lo que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en Y. Así que de la hipótesis tenemos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en X. Pero X con d_1 es completo, lo cual implica que existe $x \in X$ tal que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ en (X, d_1). Como E es cerrado en X, entonces $x \in E$ y de la continuidad de f

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y \in f(E)$$

y así $f(E)$ es cerrado. $\square$

Teorema 3.10. *Supongamos que Y es un subespacio de un un espacio vectorial topológico X y supongamos que Y es un F-espacio (bajo la topología heredada de X). Entonces, Y es un subespacio cerrado de X.*

Demostración. Recordemos que para ser F-espacio la topología debe ser inducida por una métrica invariante completa. Sea d una métrica invariante en Y compatible con la topología inducida $\tau|_Y$. Sea

$$B_{\frac{1}{n}} = \left\{ y \in Y : d(y,0) < \frac{1}{n} \right\},$$

Sea U_n una vecindad de 0 en X tal que $Y \cap U_n = B_{\frac{1}{n}}$ y V_n una vecindad de 0 en X simétrica tal que $V_n + V_n \subseteq U_n$ y $V_{n+1} \subseteq V_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
Sea $x \in \overline{Y}$, y definamos

$$E_n = Y \cap (x + V_n) \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}$$

Si $y_1, y_2 \in E_n$, entonces $y_1 - y_2 \in Y$, por ser Y un subespacio vectorial de X. Además, $y_1 - y_2 \in V_n + V_n \subseteq U_n$ y por tanto $y_1 - y_2 \in B_{\frac{1}{n}}$. Además, los diámetros de los conjuntos E_n tienden a cero. Como cada E_n es no vacío y dado que Y es completo, tenemos que las clausuras relativas a Y de los conjuntos E_n coinciden en exactamente un punto $y_0 \in Y$.
Sea W una vecindad de cero en X, y definamos

$$F_n = Y \cap (x + W \cap V_n)$$

Al igual que arriba, ya que cada F_n es no vacío, las clausuras relativas a Y de los conjuntos F_n tienen un punto en común y_w. Pero $F_n \subseteq E_n$ para cada n, por lo que $y_w = y_0$. Por otro lado, como $F_n \subseteq x + W$ tenemos que $y_0 \in \overline{x + W}$, y esto para todo W. Entonces, tenemos que $y_0 = x$ y así $x \in Y$. Por lo tanto $\overline{Y} = Y$: $\square$

El siguiente lema nos sera muy útil

Lema 3.11. *(a) Si d es una métrica invariante bajo traslaciones en un espacio vectorial X, entonces*

$$d(nx, 0) \leq n d(x, 0) \quad \textit{para todo} \quad x \in X \quad \textit{y todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

(b) Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en un espacio vectorial topológico metrizable, tales que $x_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces existen escalares positivos λ_n tales que $\lambda_n \to \infty$ y $\lambda_n x_n \to 0$.

Demostración. (a) La primera parte es obvia por la aplicación sucesiva de la desigualdad triangular

$$\begin{aligned} d(nx,0) &\leq d(nx,(n-1)x)+d((n-1)x,0) \\ &\leq d(nx,(n-1)x)+d((n-1)x,(n-2)x)+d((n-2)x,0) \\ &\vdots \\ &\leq d(nx,(n-1)x)+d((n-1)x,(n-2)x)+\cdots+d(2x,x)+d(x,0) \\ &\leq nd(x,0) \end{aligned}$$

(b) Sea d una métrica invariante bajo traslaciones, compatible con la topología de X. Como $d(x_n,0)\to 0$, existe una sucesión divergente de enteros positivos n_k tales que

$$d(x_k,0) < n_k^{-2}$$

de donde se cumple lo siguiente

$$d(n_k x_k,0) \leq n_k d(x_k,0) \leq n_k d(x_k,0) < \frac{1}{n_k} \to 0$$

Por lo que $n_k x_k \to 0$ cuando $k \to \infty$.

□

3.2. Acotación y continuidad.

3.2.1. Conjuntos Acotados

Cabe señalar que si d es una métrica compatible con la topologá τ en X un espacio vectorial tenemos que los conjuntos τ-acotados y los conjuntos d-acotados no necesariamente son los mismos, aún si d es invariante. Sin embargo, si X es un espacio normado y d es una métrica inducida por una norma, entonces las dos nociones de acotación coinciden.
Por otro lado, si (X,d) es una métrica y d es reemplazada por $d_1=\frac{d}{1+d}$ una métrica invariante la cual induce la misma topologá que d, no coinciden los conjuntos acotados: en el ejemplo 2 $(0,\infty)$ es d_2-acotado en $\mathbb{R}$, pero no es d_1-acotado.
También, del Teorema 1.12, tenemos que todo subconjunto compacto de un espacio vectorial topológico es acotado. Pero, por ejemplo si $x\neq 0$ y $A=\{nx : n\in\mathbb{N}\}$, entonces A no es acotado: esto se debe a que si V es una vecindad de cero tal que $x\notin V$, entonces $nx\notin nV$ para todo n, lo cual implica que $A \not\subseteq nV$. Observemos que esto nos da como resultado que cualquier subespacio no trivial de X no puede ser acotado.

Afirmación 3.12. *Toda sucesión de Cauchy en un espacio vectorial topológico es acotada*

.

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X un espacio vectorial topológico. Sean V y W dos vecindades balanceadas de 0 tales que $V+V\subseteq W$, entonces existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $x_n - x_m \in V$ para todo $n, m > N$. Esto implica que $x_n \in x_N + V$ para todo $n > N$.
Sea $s > 1$ tal que $x_N \in sV$. De aquí que

$$x_n \in sV + V \subseteq sV + sV \subseteq sW$$

para todo $n \geq N$. Por lo que $x_n \in tW$ para todo n y para t suficientemente grande, ya que V y W son balanceadas y $\{x_1, x_2, \cdots, x_{N-1}\}$ un conjunto finito. □

Además, del Teorema 1.9 tenemos que las clausuras de conjuntos acotados también son acotados.
El siguiente teorema caracteriza conjuntos acotados en términos de sucesiones.

Teorema 3.13. *Sean X un espacio vectorial topológico. A es acotado si y solo si para cualquier sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A y cualquier sucesión $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de escalares que tiende a cero, la sucesión $\{\lambda_n x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al origen en X.*

Demostración. Supongamos que A es acotado y que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión contenida en A. Sea $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares que tiende a cero y sea V una vecindad de 0. Entonces existe W vecindad balanceada de 0, tal que $W\subseteq V$. Sea $t\in\mathbb{R}^+$ tal que $A\subseteq tW$, dicho t existe por ser A acotado. Para $\beta\in\mathbb{R}^+$ tal que $\beta \geq t$ existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $|\lambda_n| < \frac{1}{\beta}$ para $n \geq n_0$ por ser $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a cero. Entonces, como $\left|\lambda_n\beta\right| = |\lambda_n|\beta < 1$ y W es balanceado,

$$\lambda_n\beta W \subseteq W \subseteq V$$

para todo $n_0 \leq n$ por lo tanto $\lambda_n x_n \in V$, siempre que $n_0 \leq n$; es decir, $\{\lambda_n x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al origen en X.
Supongamos ahora que A no es acotado, entonces existe U vecindad de 0 tal que $\beta A \subsetneq U$ para toda $\beta\in\mathbb{R}^+$. Sea n un entero positivo y $\beta = \frac{1}{n}$. Entonces existe $x_n \in A$ tal que $\frac{1}{n}x_n \notin U$. De esta manera, para cada $n \in N$ obtenemos x_n y podemos formar la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos en A tales que $\{\frac{1}{n}x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge al origen en A y sin embargo$\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero. □

3.2.2. Aplicaciones lineales acotadas

Sean X y Y espacios vectoriales topológicos y $\Lambda : X \to Y$ una aplicación lineal.

Definición 3.1. Decimos que Λ es acotada si mapea conjuntos acotados en conjuntos acotados; es decir, $\Lambda(E)$ es acotado para cada subconjunto acotado E de X.

Teorema 3.14. *Sean X y Y espacios vectoriales topológicos y $\Lambda : X \to Y$ una aplicación lineal. Entonces:*

$$(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c),$$

Además, si X es metrizable,

$$(c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a),$$

entonces las cuatro afirmaciones son equivalentes.

(a) *Λ es continua.*

(b) *Λ es acotada.*

(c) *Si $x_n \to 0$, entonces $\{\Lambda(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado.*

(d) *Si $x_n \to 0$, entonces $\Lambda(x_n) \to 0$.*

Demostración.

1. $(a) \Rightarrow (b)$ Sea $E \subseteq X$ acotado y W una vecindad de 0 en Y. Como Λ es continua (y $\Lambda 0 = 0$) existe V vecindad de cero en X tal que $\Lambda(V) \subseteq W$. Pero, por ser E es acotado existe $s > 0$ tal que $E \subseteq tV$ para cada $t > s$. Por lo que

$$\Lambda(E) \subseteq \Lambda(tV) = t\Lambda(V) \subseteq tW$$

para todo $t > s$. Así que $\Lambda(E)$ es acotado.

2. $(b) \Rightarrow (c)$ Es claro ya que si $x_n \to 0$, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotado y como Λ es acotada también $\{\Lambda(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado.
Si X es metrizable obtenemos las siguientes implicaciones:

3. $(c) \Rightarrow (d)$ Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_n \to 0$; entonces, por el teorema 3.13, existe una sucesión $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $\lambda_n \to \infty$ y $\lambda_n x_n \to 0$. Como $\{\Lambda(\lambda_n x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado en Y. Por el teorema 3.13 $\Lambda(x_n) = \lambda_n^{-1}\Lambda(\lambda_n x_n) \to 0$ como queríamos.

4. $(d) \Rightarrow (a)$ Supongamos que Λ no es continua, entonces existe W una vecindad de cero en Y tal que $\Lambda^{-1}(W)$ no contiene ninguna vecindad de 0 en X. Como X es metrizable tiene una base local numerable, esto implica que podemos encontrar una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_n \to 0$ pero $\Lambda(x_n) \notin W$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto último contradice (d), y tenemos lo que se pide.

□

3.3. Seminormas y Convexidad Local. (Normabilidad)

Como sabemos, las propiedades que tienen los espacios métricos facilitan el trabajo en muchas cuestiones; además, si se generalizan algunos resultados a veces es necesario que los espacios en los que estamos trabajando conserven propiedades similares a las de los espacios métricos.
Los espacios localmente convexos están estrechamente ligados con las seminormas, que son funciones que conservan, excepto una, las propiedades que tiene una norma, por lo que mantienen cierta relación con los espacios métricos.

Definición 3.2. Una **seminorma** en un espacio vectorial X es una función

$$\rho : X \to [0, \infty)$$

tal que:

(i) $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y), \quad \text{con} \quad x, y \in X$ (subaditiva).

(ii) $\rho(\lambda x) = |\lambda| \rho(x), \quad \text{con} \quad x \in X, \quad \text{y} \quad \lambda \in \mathbb{C}$ (lineal positiva).
Entonces, una seminorma ρ es una norma si

(iii) $\rho(x) \neq 0 \quad \text{si} \quad x \neq 0$.

Definición 3.3. Una familia $\mathscr{P}$ de seminormas es separante en X si para cada $x \neq 0$ existe $\rho \in \mathscr{P}$ tal que $\rho(x) \neq 0$. Veamos ahora una seminorma que es de gran utilidad en la teoría de espacios localmente convexos.

Sea un conjunto convexo $A \subseteq X$ el cual es absorbente, en el caso que todo $x \in X$ esta en tA para algún $t > 0$. Por ejemplo, toda vecindad de cero en un espacio vectorial topológico es absorbente y todo subconjunto absorbente contiene al origen. La "**Funcional subaditiva de Minkowski de A**" está dada por

$$\mu_A(x) = \text{ínf}\left\{t > 0 : t^{-1}x \in A\right\} = \text{ínf}\{t > 0 : x \in tA\}$$

para cada $x \in X$. Notemos que la funcional de Minkowski de A está bien definida ya que, al ser A absorbente $\left\{t > 0 : t^{-1}x \in A\right\} \neq \emptyset$ por otro lado, por definición $0 \leq \mu_A(x) < \infty$ para todo $x \in X$.
Ahora, veremos que las seminormas en X, un espacio vectorial topológico, son precisamente las funcionales de Minkowski de conjuntos absorbentes, convexos y balanceados. Además, las seminormas son relativamente cerradas en convexidad local, esto se debe a que: en todo espacio localmente convexo existe una familia separante de seminormas continuas. A la inversa, si $\mathscr{P}$ es una famila separante de seminormas en X un espacio vectorial topológico, entonces a $\mathscr{P}$ la podemos utilizar para definir una topología localmente convexa en X, con la propiedad de que toda seminorma $\rho \in \mathscr{P}$ es continua.

Proposición 3.15. *Sea ρ una seminorma en un espacio vectorial X. Entonces* *(a)* $\rho(0) = 0$.

(b) $\left|\rho(x) - \rho(y)\right| \leq \rho(x - y)$ *para todo* $x, y \in X$.

(c) $\rho(x) \geq 0$ *para todo* $x \in X$.

(d) $\{x : \rho(x) = 0\}$ *es un subespacio de* X.

(e) El conjunto $B = \{x : \rho(x) < 1\}$ *es convexo, balanceado, y* $\rho = \mu_B$

Demostración. (a) Esto se cumple pues $\rho(\lambda x) = |\lambda|\rho(x)$, tomando $\lambda = 0$.

(b) Por la subaditividad de ρ

$$\rho(x) = \rho(x - y + y) \leq \rho(x - y) + \rho(y)$$

por tanto

$$\rho(x) - \rho(y) \leq \rho(x - y).$$

Por otro lado

$$\rho(y) = \rho(-x + y + z) \leq \rho(-(x - y)) + \rho(x) = \rho(x - y) + \rho(x)$$

así

$$-\rho(x - y) \leq \rho(x) - \rho(y).$$

Por lo tanto $\left|\rho(x) - \rho(y)\right| \leq \rho(x - y)$

(c) Como $0 \leq \left|\rho(x) - \rho(y)\right| \leq \rho(x - y)$, si $y = 0$ tenemos que $0 \leq \left|\rho(x)\right| \leq \rho(x)$.

(d) Sean $x, y \in \{x : \rho(x) = 0\}$ de modo que $\rho(x) = \rho(y) = 0$ y sean α, β escalares, entonces

$$0 \leq \rho(\alpha x + \beta y) \leq |\alpha|\rho(x) + \left|\beta\right|\rho(y) = 0 + 0 = 0$$

Así $\rho(\alpha x + \beta y) = 0$, entoces $\alpha x + \beta y \in \{x : \rho(x) = 0\}$

(e) Sea $w \in \lambda B, w = \lambda y$ con $y \in B$ y $|\lambda| \leq 1$, entonces

$$\rho(w) = \rho(\lambda y) = |\lambda|\rho(y) \leq \rho(y) < 1$$

Asi $\rho(w) < 1$.
Si $x, y \in B$ y $0 < t < 1$, entonces

$$\rho(tx + (1 - t)y) \leq t\rho(x) + (1 - t)\rho(y) < t + (1 - t) = 1$$

Así $tx + (1 - t)y \in B$ para $0 \leq t \leq 1$. Luego B es convexo
Sea $x \in X$ y $s > \rho(x)$, entonces

$$\rho(s^{-1}x) = s^{-1}\rho(x) < 1,$$

Así B es absorbente
Consideremos

$$\mu_B(x)=\text{ínf}\left\{t>0: t^{-1}x\in B\right\}=\text{ínf}\left\{t>0:\rho(t^{-1}x)<1\right\}=\text{ínf}\left\{t>0:\rho(x)<t\right\}.$$

Si $\rho(x)<r$, entonces $\mu_B(x)\leq r$. De aquí que $\mu_B\leq\rho$, ahora $\lambda B=\{x:\rho(x)<\lambda\}$ si $\rho(x)=t$, entonces $x\in\lambda B$ para todo $\lambda>t$ de donde. Esto implica que $\rho(x)\leq\mu_B(x)$.

□

Proposición 3.16. *Suponga que A es un conjunto absorbente y convexo en un espacio vectorial X. Entonces*

(a) $\mu_A(x+y)\leq\mu_A(x)+\mu_A(y)$.

(b) $\mu_A(tx)=t\mu_A(x)$ *si* $t>0$.

(c) *Si A es balanceado, μ_A es una seminorma.*

(d) *Si* $B=\{x:\mu_A(x)<1\}$ *y* $C=\{x:\mu_A(x)\leq 1\}$ *, entonces* $B\subseteq A\subseteq C$ *y* $\mu_B=\mu_A=\mu_C$.

Demostración. (a) Como A es convexo, se tiene que $(s+t)A=sA+tA$, para todo $s,t>0$. Ademas ,

$$\mu_A(x)=\text{ínf}\left\{t>0:t^{-1}x\in A\right\}=\text{ínf}\{t>0:x\in tA\}$$

y entonces , sea $\varepsilon>0$ existen α,β tal que

$$\alpha\leq\mu_A(x)+\frac{\varepsilon}{2}\quad\text{con}\quad\alpha^{-1}x\in A\quad(x\in\alpha A,$$

$$\beta\leq\mu_A(y)+\frac{\varepsilon}{2}\quad\text{con}\quad\beta^{-1}y\in A\quad(y\in\beta A,$$

ya que A es absorbente. Se sigue que

$$\alpha+\beta\leq\mu_A(x)+\mu_A(y)+\varepsilon\quad\text{y}\quad x+y\in\alpha A+\beta A=(\alpha+\beta)A,$$

lo cual implica que $(\alpha+\beta)^{-1}(x+y)\in A$.
Teniendo en cuenta que $\mu_A(x+y)=\text{ínf}\{t>0:t^{-1}(x+y)\in A\}$, entonces $\mu_A(x+y)\leq\alpha+\beta$, obtenemos así

$$\mu_A(x+y)\leq\alpha+\beta\leq\mu_A(x)+\mu_A(y)+\varepsilon\quad\text{para todo}\quad\varepsilon>0$$

De aquí $\mu_A(x+y)\leq\mu_A(x)+\mu_A(y)$ para todo $x,y\in X$.

(b) Si $t=0$, $tx=0$, con lo que $\mu_A(tx)=\mu_A(0)=0=t\mu_A(x)$. Tomandom $t\neq 0$.

$$\begin{aligned} t\mu_A(x) &= t\,\text{ínf}\left\{s>0:s^{-1}x\in A\right\}=\text{ínf}\left\{ts>0:s^{-1}x\in A\right\}\\ &= \text{ínf}\left\{ts>0:s^{-1}t^{-1}tx\in A\right\}=\text{ínf}\left\{ts>0:(ts)^{-1}tx\in A\right\}\\ &= \text{ínf}\left\{k>0:k^{-1}(tx)\in A\right\}\\ &= \mu_A(tx).\end{aligned}$$

(c) Supongamos que A es balanceado, la subaditividad se da por *(a)*, ahora si $\alpha \neq 0$, entoces $|\alpha| > 0$ y

$$\begin{aligned} |\alpha|\mu_A(x) &= |\alpha| \operatorname{ínf}\left\{s > 0 : s^{-1}x \in A\right\} = \operatorname{ínf}\left\{|\alpha| s > 0 : s^{-1}x \in A\right\} \\ &= \operatorname{ínf}\left\{|\alpha| s > 0 : s^{-1}|\alpha|^{-1}\alpha x \in |\alpha|^{-1}\alpha A\right\} \\ &= \operatorname{ínf}\left\{|\alpha| s > 0 : (s^{-1}|\alpha|^{-1})\alpha x \in A\right\} \\ &= \operatorname{ínf}\left\{t > 0 : t^{-1}\alpha x \in A\right\} \\ &= \mu_A(\alpha x). \end{aligned}$$

si $\alpha = 0$ se cumple por *(b)*. Así μ_A es una seminorma

(d) Si $\mu_A(x) < 1$, entonces $x \in A$ pues para $\mu_A(x) < t < 1$, como $0 \in A$ por ser absorbente y $t^{-1}x \in A$,

$$x = t(t^{-1}x) - (1-t)0 \in A.$$

Así, $B \subseteq A$
Si $x \in A$, tenemos que $\mu_A(x) \leq 1$ por lo que $B \subseteq A \subseteq C$
Para la igualdad $\mu_B = \mu_A = \mu_C$, dadas las contenciones $B \subseteq A \subseteq C$ tenemos que

$$t^{-1}x \in B \Rightarrow t^{-1}x \in A \Rightarrow t^{-1}x \in C$$

Por lo tanto $\mu_B(x) \leq \mu_A(x) \leq \mu_C(x)$. Ahora sea $x \in X$ y $\mu_C(x) < s < t$, entonces, $\mu_C(\frac{x}{s}) < 1$ y así $\frac{x}{s} \in C$, $\mu_A(\frac{x}{s}) \leq 1$, $\mu_A(\frac{x}{t}) \leq \frac{s}{t} < 1$. De aquí $\frac{x}{t} \in B$ y $\mu_B 8x) \leq t$ y todo esto pasa para todo $t > \mu_C(x)$, por lo tanto $\mu_B(x) \leq \mu_C(x)$.

□

Observemos que en esta demostración, para garantizar que μ_A sea una seminorma, solamente se necesitó que A fuera un conjunto absorbente, balanceado y convexo. Así, para cualquier conjunto absorbente, absolutamente convexo se puede definir una seminorma en X.

Proposición 3.17. *Supongamos que V es una vecindad convexa y balanceada de 0 en un espacio vectorial topologico X, entonces existe una única seminorma ρ en X tal que*

$$V = \{x \in X : \rho(x) < 1\}.$$

Demostración. Sea V una vecindad convexa y balanceada de 0, y $\rho = \mu_V$ donde

$$\begin{array}{rccc} \rho = \mu_V : & X & \longrightarrow & [0, +\infty) \\ & x & \longmapsto & \operatorname{ínf}\{t > 0 : t^{-1}x \in V\} \end{array}$$

esta función es la "Funcional de Minkowski de V" ρ está bien definida. Por el resultado anterior ρ es una seminorma.
Sólo falta verificar que $V = \{x \in X : \rho(x) < 1\}$ y que ρ es única.
Primero demostremos que $V = \{x \in X : \rho(x) < 1\}$:

Para esto, sea $x \in X$ tal que $\rho(x) < 1$, entonces se puede elegir $0 < t < 1$ con $t^{-1}x \in V$, pero por la convexidad de V, como $x = t(t^{-1}x)+(1-t)0$,entonces $x \in V$. De donde,$\{x \in X : \rho(x) < 1\} \subseteq V$.
A la inversa, sea $y \in V$ arbitraria. Para esta y fija consideremos

$$\varphi : (0,\infty) \to X$$

definida por $\varphi(t) = t^{-1}y$ para cada $t > 0$. La continuidad de φ la tenemos de que la función $t \mapsto t^{-1}$ es continua en $(0,+\infty)$ y de las propiedades de espacio vectorial topológico. Por estas razones, al ser V abierto

$$\varphi^{-1}(V) = \{t > 0 : t^{-1}y \in V\}$$

también es abierto. Por otro lado, dado que $y \in V$, tenemos $1 \in \varphi^{-1}(V)$; por tanto existe $\varepsilon > 0$ tal que $1-\varepsilon \in \varphi^{-1}(V)$ (es decir, $1-\varepsilon \in \{t > 0 : t^{-1}y \in V\}$) y como $\rho(y) = \text{ínf}\{t > 0 : t^{-1}y \in V\}$; obtenemos que $\rho(y) \leq 1-\varepsilon < 1$. De aquí concluimos que $y \in \{x \in X : \rho(x) < 1\}$. Así, $V \subseteq \{x \in X : \rho(x) < 1\}$; en consecuencia $V = \{x \in X : \rho(x) < 1\}$, como se quería.
Por último, veamos que ρ es única con la característica anterior. Supongamos que existe $\psi : X \to [0,+\infty)$ tal que

$$\{x \in X : \rho(x) < 1\} = \{y \in X : \psi(y) < 1\} :$$

Entonces,

$$\{x \in X : \rho(x) < r\} = \{y \in X : \psi(y) < r\} \tag{3.1}$$

para cualquier $r > 0$. Sea $x \in X$ y $t = \rho(x)$. Por definición de $\rho(x)$, tenemos que para todo $\varepsilon > 0$, $\rho(x) < t+\varepsilon$, y por [1] $\psi(x) < t+\varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$. En consecuencia $\psi(x) \leq t = \rho(x)$.
De la misma manera se puede concluir que $\rho(x) \leq \psi(x)$, para todo $x \in X$. Por lo tanto $\rho(x) = \psi(x)$, para todo $x \in X$. □

Remarca 2. La proposición anterior es de suma importancia, ya que en cualquier espacio vectorial se puede definir una topología usando una familia de seminormas, de la siguiente manera:
Sea X un espacio vectorial y $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de seminormas en X, donde I es un conjunto de índices. Definimos $B_{\alpha,r} = (r^{-1}\rho_\alpha)^{-1}(-1,1) = (\rho_\alpha)^{-1}(-r,r) = \{x : \rho_\alpha(x) < r\}$ para todo $\alpha \in I$ y para todo $r > 0$ y tomamos vecindades de cero V si y sólo si existen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in I$ y $r_1, r_2, \cdots, r_n \in \mathbb{R}^+$ tales que $\bigcap_{i=1}^{n} B_{\alpha_i,r_i} \subseteq V$. Notemos que $\bigcap_{i=1}^{n} B_{\alpha_i,r_i}$ es una vecindad de cero. De esta forma, es fácil determinar vecindades de x.

Teorema 3.18. *Supongamos que $\mathscr{B}$ es una base local convexa y balanceada en un espacio vectorial topológico X, A cada $V \in \mathscr{B}$ le asociamos su funcional de Minkoswski μ_V. Entonces,* *(a)* $V = \{x \in X : \mu_V(x) < 1\}$*, para cada* $V \in \mathscr{B}$*, y*

(b) $\{\mu_V : V \in \mathscr{B}\}$ *es una familia separante de seminormas continuas de* X*.*

Demostración. Es claro que *(a)* se cumple por la proposición anterior y por la Proposición 3.16, para cada $V \in \mathscr{B}$, μ_V es una seminorma. Para ver que $\{\mu_V : V \in \mathscr{B}\}$ es una familia separante y cada seminorma μ_V es continua en X, si $r > 0$, se sigue de (a) de la Proposición 3.16 que

$$\left|\mu_V(x) - \mu_V(y)\right| < r$$

siempre que $x - y \in rV$. Por lo tanto μ_V es continua. Por otro lado, si $x \notin X \setminus \{0\}$ entonces $x \neq V$ para algún $V \in \mathscr{B}$. Para esta V, $\mu_V(x) \geq 1$, lo cual implica que $\{\mu_V : V \in \mathscr{B}\}$ es separante. □

Teorema 3.19. *Supongamos que* $\mathscr{P}$ *es una familia separante de seminormas en un espacio vectorial* X*. Para cada* $\rho \in \mathscr{P}$ *y* $n \in \mathbb{N}$*, consideremos los conjuntos*

$$V(\rho, n) = \left\{ x \in X : \rho(x) < \frac{1}{n} \right\}$$

Sea $\mathscr{B}$ *la colección de todas las intersecciones finitas de conjuntos* $V(\rho, n)$*: Entonces* $\mathscr{B}$ *es una base local convexa y balanceada para alguna topología* τ *en* X*. Además* $\mathscr{B}$ *determina una topología localmente convexa en* X *tal que*

(a) Cada $\rho \in \mathscr{P}$ *es continua.*

(b) $E \subseteq X$ *acotado si y sólo si cada* $\rho \in \mathscr{P}$ *es acotada en* E*.*

Demostración. (a) Definimos a los subconjuntos abiertos $A \subseteq X$ como todas las uniones arbitrarias de las traslaciones de elementos de $\mathscr{B}$ o de otro modo A es abierto si para todo $x \in A$ existe $V \in \mathscr{B}$ de modo que $x + V \subset A$; los cuales claramente forman una topología:

(i) $\emptyset = (x + V(\rho, n)) \cap V(\rho, n)$, donde $\rho \in \mathscr{P}$ es tal que $\rho(x) \neq 0$, y $n \in \mathbb{N}$ es tal que $\dfrac{2}{n} < \rho(x)$. Esto se debe a que, si $y \in V(p, n)$ y tomamos $\rho(x + y)$ se tiene que, por ser ρ seminorma,

$$\rho(x) - \rho(y) = \rho(x) - \rho(-y) \leq \rho(x + y), \ldots (*)$$

por lo que

$$\frac{2}{n} \leq \rho(x) \leq \rho(x + y) + \rho(y),$$

y como $\rho(y) \leq \frac{1}{n}$ obtenemos que $\frac{1}{n} \leq \rho(x + y)$. Por otro lado, $X = \bigcup\limits_{x \in X} (x + (V(p, n))$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Es claro que uniones arbitrarias e intersecciones finitas de elementos tales que son uniones arbitrarias de traslaciones de elementos en $\mathscr{B}$ vuelven a ser de esta forma.

Al mismo tiempo, estos conjuntos abiertos definen una topología τ en X que es invariante bajo traslaciones; además, cada elemento de $\mathscr{B}$ es convexo, balanceado y $\mathscr{B}$ es base local para τ.
Sea $x \in X \setminus \{0\}$, entonces $\rho(x) > 0$ para algún $\rho \in \mathscr{P}$. Sea $n \in N$ tal que $\frac{2}{n} < \rho(x)$, $x \notin V(p,n)$, por tanto $0 \notin x - V(p,n)$ (mismo argumento que en (*)) y $x \notin \overline{\{0\}}$. Como la topología τ es invariante bajo traslaciones, todo subconjunto formado por un sólo punto $x \in X$ es cerrado, así que $\{0\} = \overline{\{0\}}$.
Ahora, probemos que la suma de vectores y la multiplicación por escalares son continuas. Sea U una vecindad de cero en X. Entonces,

$$V(\rho_1, n_1) \cap V(\rho_2, n_2) \cap \cdots \cap V(\rho_m, n_m) \subseteq U$$

para algunos $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_m \in \mathscr{P}$ y $n_1, n_2, \cdots, n_m \in \mathbb{N}$. Sean

$$V = V(\rho_1, 2n_1) \cap \cdots \cap V(\rho_m, 2n_m).$$

Como cada $\rho \in \mathscr{P}$ es subaditiva,

$$\begin{aligned} V(\rho_1, 2n_1) + V(\rho_1, 2n_1) &= \left\{x : \rho_1(x) < \frac{1}{2n}\right\} + \left\{x : \rho_1(x) < \frac{1}{2n}\right\} \\ &= \left\{x + y : \rho_1(x) < \frac{1}{2n}, \rho_1(y) < \frac{1}{2n}\right\} \\ &\subseteq \left\{x + y : \rho_1(x+y) < \frac{1}{n}\right\} \\ &= V(\rho_1, n_1), \end{aligned}$$

con esto concluimos que

$$V + V \subseteq U.$$

Esto prueba que la suma es continua.
Supongamos ahora que $x \in X$, λ un escalar, tomando U y V como arriba. Entonces, $x \in sV$ para algún $s > 0$. Sea $t = \frac{s}{1+|\lambda|s}$, y si $y \in x + tV$ y $|\lambda - \alpha| < \frac{1}{s}$, entonces

$$\alpha y - \lambda x = \alpha(y - x) + (\alpha - \lambda)x$$

lo cual implica que

$$\alpha t V + (\alpha - \lambda) s V \subseteq V + V \subseteq U$$

donde $|\alpha| t \leq 1$ y V es balanceado. Con esto, la multiplicación por escalares es continua.
Así, X es un espacio localmente convexo, y de la definición de $V(\rho, n)$ tenemos que toda $\rho_m \in \mathscr{P}$ es continua en cero y por tanto continua en todo $x \in X$ por *(b)* de la Proposición 3.16.

(b) Finalmente, supongamos que $E \subseteq X$ acotado y $\rho_m \in \mathscr{P}$. Como $V(\rho, 1)$ es vecindad de cero, $E \subseteq kV(\rho, 1)$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Por lo que $\rho(x) < k$ para todo $x \in E$, y así ρ es acotada en E.
A la inversa, supongamos que cada $\rho_m \in \mathscr{P}$ es acotada en E y sea U una vecindad de cero en X. Entonces,

$$V(\rho_1, n_1) \cap V(\rho_2, n_2) \cap \cdots \cap V(\rho_m, n_m) \subseteq U$$

para algunos $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_m \in \mathscr{P}$ y $n_1, n_2, \cdots, n_m \in \mathbb{N}$. Como cada $\rho_m \in \mathscr{P}$ es acotada en E existen $M_i > 0$ tales que $\rho_i(x) < M_i$ para todo $x \in E$ y $1 \leq i \leq m$. Si tomamos $n = \max\limits_{1 \leq i \leq m} \{M_i n_i\}$,así sea $t > n$ y $x \in E$ entonces $\rho_i(\frac{x}{t}) < \frac{M_i}{t} < \frac{M_i}{M_i n_i} < \frac{1}{n_i}$ así para todo i $\dfrac{x}{t} \in V(\rho_i, n_i)$, de esto

$$\frac{x}{t} \in V(\rho_1, n_1) \cap V(\rho_2, n_2) \cap \cdots \cap V(\rho_m, n_m) \subseteq U$$

entonces $E \subseteq tU$ y por tanto E es acotado.
Los espacios localmente convexos se caracterizan por medio de las seminormas. Esto lo veremos en el siguiente Teorema, donde utilizamos las seminormas de Minkowski asociadas a los conjuntos abiertos, balanceados y convexos como se construyó en la Proposición 3.16 y la Proposición 3.17.

□

Teorema 3.20. *Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico. X es un espacio localmente convexo si y sólo si existe $\{\rho_j\}_{j \in I}$ una familia de seminormas que determinan a τ.*

Demostración. Veamos primero que dado un espacio localmente convexo podemos dar una familia de seminormas que determinan la topología. Como X es un espacio localmente convexo. sea $\mathscr{B}_0$ una base de vecindades de 0 en X formada por conjuntos abiertos, balanceados y convexos, por tanto absorbentes. Por la Proposición 3.17, dada $V \in \mathscr{B}_0$ existe una única seminorma ρ_V tal que

$$B = \{x : \rho_V(x) < 1\}.$$

Consideremos $\{\rho_V\}_{V \in \mathscr{B}_0}$; esta es una familia de seminormas es separante tales que determinan la topología original en X.
Por otro lado, si $\{\rho_j\}_{j \in I}$ es una familia de seminormas en X que determinan su topología, tomemos a $B_{\rho_j} = \{x : \rho_j(x) < 1\} = \rho_j^{-1}(-1, 1)$ para cada $j \in I$. Estos conjuntos son abiertos, balanceados y convexos. Pero la familia de seminormas anterior define la topología en X; es decir,

$$\mathscr{R} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} \varepsilon_i B_{j_i} : j_i \in I, \varepsilon_i > 0, 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N} \right\}$$

es una base para la topología τ en X. Notemos que cada uno de los elementos de $\mathscr{R}$ son también abiertos, balanceados y convexos. Por tanto X es un espacio localmente convexo. □

Remarca 3. Los Teoremas 3.18 y 3.19 originan un problema natural: Si $\mathscr{B}$ es una base local balanceada y convexa para la topología τ de un espacio localmente convexo X, entonces $\mathscr{B}$ genera una familia separante de seminormas continuas $\mathscr{P}$ en X, como en el Teorema 3.18. Este $\mathscr{P}$ induce a su vez a la topología τ_1 en X, por el proceso descrito en Teorema 3.20. Es $\tau_=\tau$? La respuesta es afirmativa. Para ver esto, note que cada $\rho \in \mathscr{P}$ es τ-continua, así que los conjuntos $V(\rho, n)$ de el Teorema 3.20 estan en τ. Donde $\tau_1 \subset \tau$. inversamente, Si $W \in \mathscr{B}$ y $\rho = \mu_W$, entonces

$$W = \{x : \mu_W(x) < 1\} = V(\rho, 1)$$

Así $W \in \tau_1$ para todo $W \in \mathscr{B}$, esto implica que $\tau \subset \tau_1$.
Si $\mathscr{P} = \{\rho_i : i = 1, 2, 3, ...\}$ es una familia numerable de seminormas separantes en X, El Teorema 3.18 muestra que $\mathscr{P}$ induce una topología τ con una base local numerable. Por el Teoremas 3.6, τ es metrizable. En esta situación una métrica invariante bajo traslaciones puede ser definida directamente en términos de $\{\rho_i\}$ mediante

$$d(x, y) = \max_{i \in \mathbb{N}} \frac{c_i \rho_i(x-y)}{1+\rho_i(x-y)}$$

donde $\{c_i\}$ es alguna sucesión fija que converge a 0 cuando $i \to \infty$
Es fácil de verificar que ese d es un métrica en X.
Nosotros afirmamos que las bolas

$$B_r = \{x : d(x, 0) < r\} \qquad (0 < r < \infty)$$

forman una base local balanceada y convexa para τ. Fijemos r. Si $c_i \leq r$ (cual tiene para todos pero un numero finito de i, ya que $c_i \to \infty$), entonces $\dfrac{c_i \rho_i}{1+\rho_i} < r$ donde B_r es la intersección de un numero finito de conjuntos de la forma

$$\left\{x : \rho_i < \frac{r}{c_i - r}\right\},$$

a saber para aquellos $c_i > r$. Estos conjuntos son abiertos, donde cada ρ_i es continua .
Así B_r es abierto y también es balanceado y convexo.
Seguimos. sea W una vecindad de 0 en X. La definición de τ muestra que W contiene la intersección de conjuntos apropiadamente escogidos

$$V(\rho_i, \delta_i) = \{x : \rho_i(x) < \delta_i < 1\} \qquad (1 \leq i \leq k).$$

Si $2r < \min\{c_1\delta_1, c_2\delta_2, \cdots, c_k\delta_k\}$ y $x \in b_r$, entonces

$$\frac{c_i \rho_i(x)}{1+\rho_i(x)} < r < \frac{c_i \delta_i}{2} \qquad (1 \leq i \leq k),$$

lo cual implica que $\rho_i(x) < \delta_i$. Así $B_r \subseteq W$
Así probamos nuestra afirmación y ademas mostramos que d es compatible con τ.

Teorema 3.21. *Sea X un espacio vectorial topológico. Entonces, X es normable si y sólo si 0 tiene una vecindad convexa y acotada.*

Demostración. □

Si X es normable y $\|\cdot\|$ es su norma tal que es compatible con su topología, entonces la bola unitaria es convexa y acotada. A la inversa, sea V una vecindad convexa y acotada de 0, entonces V contiene una vecindad de cero balanceada, convexa y acotada U. Definamos $\|x\| = \mu_U(x)$, $x \in X$, donde μ_U es la funcional de Minkowski de U. Por (c) del Teorema 1.12, $\{rU : r > 0\}$ forman una base local para la topología de X. Además, de la definición de la funcional de Minkowski y dado que U es abierto tenemos

$$rU = \{x : \|x\| < r\} = \{x : \mu_U(x) < r\} \quad \text{para todo} \quad r > 0.$$

Si $x \neq 0$, entonces existe $r > 0$ tal que $x \notin rU$ y así $\|x\| > r$. Esto implica que $\|x\| = \mu_U(x)$ es una norma. Y con esto, en efecto la topología de la Norma coincide con la topología original por ser U una vecindad acotada.

Proposición 3.22. *Sea N un subespacio de un espacio vectorial topológico X. Sea τ la topología de X y τ_N la topologia cociente de $\frac{X}{N}$, entonces:*

(a) Si X es metrizable $\frac{X}{N}$ también lo es.

(b) Si X admite una norma $\frac{X}{N}$ también.

(c) Si X es un F-espacio, ó un espacio de Fréchet, ó un espacio de Banach, $\frac{X}{N}$ también lo es.

Demostración. (a) Sea d una metrica invariante en X. Definamos $\widehat{d} : \frac{X}{N} \to [0, \infty)$ como

$$\widehat{d}(\pi(x), \pi(y)) = \inf_{z \in N} d(x - y, z)$$

Sean $x, x', y, y' \in X$ tales que $\pi(x) = \pi(x')$ y $\pi(y) = \pi(y')$, entonces $x - x', y - y' \in N$. De donde

$$\begin{aligned} \widehat{d}(\pi(x), \pi(y)) &= \inf_{z \in N} d(x - y, z) = \inf_{z \in N} d(0, z + x - y) \\ &= \inf_{z \in N} d(x' - y', z + x - y + x' - y') = \inf_{z \in N} d(x' - y', z + (x - x') - (y - y') \end{aligned}$$

por ser d invariante bajo traslaciones, pero $z + (x - x') - (y - y') + N = N$ pues N es subespacio y $x - x', y - y' \in N$, así

$$\begin{aligned} \widehat{d}(\pi(x), \pi(y)) &= \inf_{z \in N} d(x' - y', z) \\ &= \widehat{d}(\pi(x'), \pi(y')). \end{aligned}$$

luego $\widehat{d}$ esta bien definida. Veamos que $\widehat{d}$ es una metrica en $\frac{X}{N}$

(i) $0=\widehat{d}(\pi(x),\pi(y))=\inf_{z\in N} d(x-y,z)=\inf_{z\in N} d(x,y+z)$, entonces tenemos que $x\in y+N$, como $y+N$ es cerrado en X. Sea la sucesión $\{y+z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $y+N$ tal que $d(x,y+z_n)<\frac{1}{n}$, así

$$0=\widehat{d}(\pi(x),\pi(y))\Leftrightarrow \pi(x)=\pi(y)$$

.

(ii) $\widehat{d}(\pi(x),\pi(y))=\inf_{z\in N} d(x-y,z)=\inf_{z\in N} d(y-x,z)=\widehat{d}(\pi(y),\pi(x))$.

(iii) Sean $x,y,w\in X$

$$\begin{aligned}
\widehat{d}(\pi(x),\pi(y)) &= \inf_{z\in N} d(x-y,z)=\inf_{z\in N} d(x-y,2z)\\
&= \inf_{z\in N} d(x-z,z+y)\\
&\leq \inf_{z\in N} d(x-z,w)+\inf_{z\in N} d(w,z+y)\\
&= \inf_{z\in N} d(x-w,z)+\inf_{z\in N} d(w-y,z)\\
&= \widehat{d}(\pi(x),\pi(w))+\widehat{d}(\pi(w),\pi(y)).
\end{aligned}$$

Así $\widehat{d}$ es una métrica ademas $\widehat{d}$ es invariante.

$$\begin{aligned}
\widehat{d}(\pi(x),\pi(y)) &= \inf_{z\in N} d(x-y,z)=\inf_{z\in N} d((x+w)-(y+w),z)\\
&= \widehat{d}(\pi(x+w),\pi(y+w))=\widehat{d}(\pi(x)+\pi(w),\pi(y)+\pi(w)).
\end{aligned}$$

.

(b) Sea $\|\cdot\|$ una norma en X, podemos definir

$$\|\pi(x)\|'=\inf_{z\in N}\|x-z\|$$

la cual es una norma en $\frac{X}{N}$:

(i) Sea $\pi(x)\in\frac{X}{N}$ tal que $0<\|\pi(x)\|'=\inf_{z\in N}\|x-z\|$, entonces $0<\|x-0\|=\|x\|$ ya que $0\in N$ y N es subespacio cerrado de X . Como $\|\cdot\|$ una norma en X, $x\neq 0$. Ahora, $x\neq N$ pues en caso contrario $0<\|\pi(x)\|'\leq\|x-x\|$.

(ii) Es claro que

$$\begin{aligned}
\|\alpha\pi(x)\|' &= \|\pi(\alpha x)\|'=\inf_{z\in N}\|\alpha x-z\|\\
&= \inf_{z\in N}\|\alpha(x-z)\|=\inf_{z\in N}|\alpha|\,\|x-z\|\\
&= |\alpha|\inf_{z\in N}\|x-z\|=|\alpha|\,\|\pi(x)\|'.
\end{aligned}$$

(iii) Para mostrar la desigualdad del triangular, sean $x, y, w \in X$ y consideremos

$$\begin{aligned}
\left\|\pi(x)+\pi(y)\right\|' &= \left\|\pi(x+y)\right\|' = \inf_{z\in N}\left\|x+y-z\right\| \\
&= \inf_{z\in N}\left\|x+y-2z\right\| \\
&\leq \inf_{z\in N}\left\{\|x-z\|+\left\|y-z\right\|\right\} \\
&\leq \inf_{z\in N}\|x-z\|+\inf_{z\in N}\left\|y-z\right\| \\
&= \|\pi(x)\|'+\left\|\pi(y)\right\|'
\end{aligned}$$

Así $\|\cdot\|'$ la cual es una norma en $\frac{X}{N}$.

(c) Nos resta probar que $\widehat{d}:\frac{X}{N}\to[0,\infty)$ dada por $\widehat{d}(\pi(x),\pi(y))=\inf_{z\in N} d(x-y,z)$ como en *(a)* es una métrica completa si d es completa.
Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $\widehat{d}$-Cauchy en $\frac{X}{N}$. Entonces, podemos elegir una subsucesión $\{u_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $\widehat{d}(u_{n_i},u_{n_{i+1}})<\frac{1}{2^i}$ para todo $i\in\mathbb{N}$. Sea $x_1\in X$ tal que $\pi(x_1)=u_{n_1}$; como $\widehat{d}(u_{n_1},u_{n_2})<\frac{1}{2}$ y N es un subespacio cerrado, existe $x_2\in X$ tal que $\pi(x_2)=u_{n_2}$ y $d(x_1,x_2)<\frac{1}{2}$. Inductivamente, supongamos que $x_k\in X$ y es tal que $\pi(x_k)=u_{n_k}$. Sea $x_{k+1}\in X$ tal que $\pi(x_{k+1})=u_{n_{k+1}}$ y $d(x_k,x_{k+1})<\frac{1}{2^k}$, el cual existe pues $\widehat{d}(u_{n_i},u_{n_{i+1}})<\frac{1}{2^k}$ para todo $i\in\mathbb{N}$, y por ser N un subespacio cerrado. La sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ así construida es una sucesión de Cauchy en X, por tanto converge para algún $x\in X$. Esto quiere decir que $\widehat{d}(\pi(x),u_{n_i})\leq d(x,x_i)\to 0$,cuando $i\to\infty$. Concluimos que en efecto $\{u_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es $\widehat{d}$-convergente en $\frac{X}{N}$ y $\widehat{d}$ es una métrica completa. Un argumento similar se puede hacer para espacios de Fréchet y espacios de Banach.

□

3.3.1. Seminormas y Espacios Cocientes

Supongamos que ρ es una seminorma en un espacio vectorial topológicode X y

$$N=\{x:\rho(x)=0\}.$$

Entonces N es un subespacio de X por el teorema 3.15. Sea π la aplicación cociente de X en $\frac{X}{N}$, y define

$$\widehat{\rho}(\pi(x))=\rho(x)$$

Si $\pi(x)=\pi(y)$, entonces $\rho(x-y)=0$ y como

$$\left|\rho(x)-\rho(y)\right|\leq\rho(x-y)=0$$

de esto seguimos que $\widehat{\rho}(\pi(x))=\widehat{\rho}(\pi(x))$. Asi $\widehat{\rho}$ esta bien definida en $\frac{X}{N}$. Ademas, es una seminorma por como se definió, y se cumple que $\rho(x)=0$ si y solamente si $x\in N$, lo cual pasa si y solo si $[x]=[0]$. Por lo tanto $\widehat{\rho}$ es una norma en $\frac{X}{N}$

Proposición 3.23. *Sea τ la topología de X un espacio localmente convexo y N un subespacio cerrado de X. Sea $\mathscr{P}$ una familia separante de seminormas en X que definen la topología τ. Entonces la familia $\widehat{\mathscr{B}}$ de todas las seminormas*

$$\begin{array}{rccc} \widehat{\rho}: & \frac{X}{N} & \to & [0,\infty) \\ & [x] & \mapsto & \inf_{y\in N} \rho(x+y), \end{array}$$

definen la topología cociente τ_N. Por lo que $\frac{X}{N}$ con la topología cociente es localmente convexo.

Demostración. Veamos que en efecto la función $\widehat{\rho}$ vía la regla $\pi(x)=[x]\mapsto \inf_{y\in N}\rho(x+y)$, donde $\rho\in\mathscr{P}$, es una seminorma:

(1) Mostremos que $\widehat{\rho}$ saca escalares positivos. Sean $[x]\in\frac{X}{N}$ y $\lambda\in\mathbb{C}$. Para el caso en que $\lambda=0$, se da trivialmente pues $0\in N$, y así

$$0=\widehat{\rho}([0])=\widehat{\rho}(\lambda[x])=\inf_{y\in N}\rho(\lambda x+y)=\inf_{y\in N}\rho(y)=0=\lambda\widehat{\rho}([x]).$$

En otro caso tenemos

$$\widehat{\rho}(\lambda[x])=\inf_{y\in N}\rho(\lambda x+y)=\inf_{y\in N}\rho(\lambda x+\lambda y)=\inf_{y\in N}\rho(\lambda(x+y))=\lambda\widehat{\rho}([x]).$$

pero por ser ρ una seminorma en X, se sigue que

$$\inf_{y\in N}\rho(\lambda(x+y))=\inf_{y\in N}|\lambda|\rho(x+y)=|\lambda|\inf_{y\in N}\rho(x+y)=|\lambda|\widehat{\rho}([x])$$

Por lo que $\widehat{\rho}(\lambda[x])=|\lambda|\widehat{\rho}([x])$, para todo $[x]\in\frac{X}{N}$ y todo $\lambda\in\mathbb{C}$.

(2) Nos falta ver que $\widehat{\rho}$ es subaditiva, es decir, satisface la desigualdad triangular. Sean $[x],[y]\in\frac{X}{N}$, y $\lambda\in\mathbb{C}$, así:

$$\begin{aligned} \widehat{\rho}([x]+[z]) &= \widehat{\rho}([x+z])=\inf_{y\in N}\rho((x+z)+(y+z))=\inf_{z\in N}\rho(x+y+2z) \\ &= \inf_{y\in N}\rho((x+z)+(y+z))=(*); \end{aligned}$$

pero, como $\widehat{\rho}$ es una seminorma en X, siempre se da

$$\rho(x+z+y+z)\leq\rho(x+z)+\rho(y+z), \quad \text{para todo} \quad y\in N.$$

Entonces

$$\begin{aligned} (*) &= \inf_{y\in N}\rho((x+z)+(y+z))\leq\inf_{y\in N}\rho(x+z)+\inf_{y\in N}\rho(y+z) \\ &\leq \widehat{\rho}([x])+\widehat{\rho}([z]) \end{aligned}$$

De esto obtenemos que

$$\widehat{\rho}([x]+[z]) \leq \widehat{\rho}([x])+\widehat{\rho}([z]).$$

Ademas, por definicíon, al ser ρ una seminorma, $\widehat{\rho}$ es no negativa. Con esto concluimos que $\widehat{\rho}$ definida así es una seminorma en $\frac{X}{N}$. Llamemos $\tau_{\widehat{\mathscr{P}}}$ a la topología generada por la familia de seminormas $\widehat{\mathscr{P}}$ obtenida como arriba. Ahora, observemos que $\widehat{\rho}\circ\pi : X \to \mathbb{R}$ y que tenemos $\widehat{\rho}(\pi(x)) \leq \rho(x)$, para todo $x \in X$, para todo $\rho \in \mathscr{P}$. Entonces para $\varepsilon > 0$ arbitrario se cumple:

$$\rho^{-1}(B_\varepsilon(0)) \subseteq (\widehat{\rho}\circ\pi)^{-1}(B_\varepsilon(0)).$$

De modo que

$$\pi(\rho^{-1}(B_\varepsilon(0))) \subseteq \pi((\widehat{\rho}\circ\pi)^{-1}(B_\varepsilon(0))) = \widehat{\rho}^{-1}(B_\varepsilon(0)).$$

Con esto $\tau_N \subseteq \tau_{\widehat{\mathscr{P}}}$ en $\frac{X}{N}$.

Para la otra contensión, sea $W \in \mathscr{B}_N$. Elegimos $\rho \in \mathscr{P}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $[x] \in W$ si $\rho(x) < \varepsilon$; usando que $\mathscr{P}$ es una familia de seminormas dirigida. Consideramos ahora, V una vecindad de cero en $(\frac{X}{N}, \tau_{\widehat{\mathscr{P}}}$,

$$V := \left\{ [x] \in \frac{X}{N} : \widehat{\rho}([x]) < \varepsilon \right\}.$$

Dado $[x] \in V$, $\rho(x+y) < \varepsilon$ para algún $y \in N$; es decir, $[x] = [x+y] \in W$, para algún $y \in N$. Esto es, $V \subseteq W$, y W es una vecindad de 0 en $(\frac{X}{N}, \tau_{\widehat{\mathscr{P}}}$. En consecuencia $\tau_N = \tau_{\widehat{\mathscr{P}}}$ en $\frac{X}{N}$. $\square$

Capítulo 4

APLICACIONES

El objetivo de este capitulo es ejemplificar los resultados obtenidos en los capítulos precedentes a este. Muchos de los espacios de funciones más conocidos son los espacios de Banach. Vamos a mencionar solo unos pocos tipos: Los espacios de funciones continuas en espacios compactos, los L^p-Espacios que se producen en la teoría de la medida, los espacios de Hilbert, ciertos espacios de funciones diferenciables y los espacios de las aplicaciones lineales continuas cuando el codominio es de Banach. Pero también hay muchos espacios importantes que no encajan en este marco,como:

1. a)$C(\Omega)$, el espacio de todas las funciones continuas en un conjunto abierto Ω en un espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$.

2. b)$H(\Omega)$, el espacio de todas las funciones holomorfas en algún conjunto abierto Ω en el plano complejo.

3. c) $C^\infty(\Omega)$, el espacio e todas las funciones infinitamente diferenciables .

Estos espacios llevan topologías naturales que no pueden ser inducidas por las normas como veremos más adelante. Ellos, al igual que los espacios normados, son ejemplos de espacios vectoriales topológicos

4.1. Espacio $C(\Omega)$

Si Ω es un conjunto abierto en un espacio euclidiano, entonces Ω es la unión de una cantidad numerable de conjuntos compactos $K_n \neq \emptyset$ los cuales podemos elegir de tal manera que K_n está contenida en el interior de K_{n+1} $(n = 1,2,3,\cdots)$. Esto se cumple ya que si $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{K}^m$ es abierto, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$F_n = \left\{ x \in \Omega : d(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{n} \right\},$$

donde cada F_n es cerrado. Como $B_n(0) = \{x \in \mathbb{K}^m : \|x\| \leq n\}$ es compacto, entonces $K_n = B_n(0) \cap F_n \subset \Omega$ también es compacto. Ademas, se cumplen las siguientes propiedades:

(i) $K_n \subset K^o_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$

(iii) Si $E \subset \Omega$ es compacto, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $E \subset K_n$:
Dado que E es compacto, $d(E, \Omega^c) > 0$ y E es acotado, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(E, \Omega^c) > \frac{1}{n_0}$ y $E \subset B_{n_0}(0)$. Esto implica que $E \subset K_{n_0}$.

Definamos ahora a $C(\Omega)$ como el espacio vectorial de todas las funciones continuas de en el campo de los números complejos, a $C(\Omega)$ le asignamos la topologiá generada por la familia separante de seminormas

$$\rho_n(x) = \sup\left\{ \left| f(x) \right| : x \in K_n \right\}.$$

Por como construimos a los conjuntos K_n, $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $\rho_1 \leq \rho_2 \leq \rho_3 \leq \cdots$ los conjuntos

$$V_n = \left\{ f \in C(\Omega) : \rho_n(f) < \frac{1}{n} \right\}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

forman una base local convexa para $C(\Omega)$. Recordemos que como $\mathscr{P} = \{\rho_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una familia separante numerable de seminormas en $C(\Omega)$, $C(\Omega)$ es metrizable; y ademas, podemos definir una métrica invariante bajo traslación y compatible con esta topología; esto es, directamente de $\{\rho_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ podemos definir la métrica

$$\frac{2^{-n}\rho_n(f-g)}{1+\rho_n(f-g)} \leq d(f,g) = \max_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{2^{-n}\rho_n(f-g)}{1+\rho_n(f-g)} \right\} \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}$$

Veamos que esta métrica es completa:
Sea $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión d-Cauchy en $C(\Omega)$. Así tenemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$, tal que para $i, j \in \mathbb{N}$,

$$\max_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{2^{-n}\rho_n(f_i - f_j)}{1+\rho_n(f_i - f_j)} \right\} < \varepsilon$$

y de esto tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{2^{-n}\rho_n(f_i - f_j)}{1+\rho_n(f_i - f_j)} < \varepsilon$$

lo que significa que $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en cada K_n dotado con la norma del supremo, y donde converge uniformemente a una función f.
Dado un $\varepsilon > 0$ sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-N} < \varepsilon$, entonces

$$\max_{n > N} \left\{ \frac{2^{-n}\rho_n(f_i - f)}{1+\rho_n(f_i - f)} \right\} < \varepsilon$$

y existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que para $i > k$

$$\max_{n<N}\left\{\frac{2^{-n}\rho_n(f_i - f)}{1+\rho_n(f_i - f)}\right\} < \varepsilon$$

lo cual implica que $f_i \to f$,

esto significa que d es una métrica completa. Con esto concluimos que $C(\Omega)$ es un espacio de Fréchet.

Por (b) del Teorema 3.19, un subconjunto $E \subset C(\Omega)$ es acotado si y solo si existen $0 < M_n < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, tales que $\rho_n(f) \leq M_n$ para toda $f \in E$; así entonces $\left|f(x)\right| \leq M_n$ si $f \in E$ y $x \in K_n$. Por construcción, cada V_n contiene una función f para la cual ρ_{n+1} es tan grande como se quiera, tenemos que V_n no es acotada. Entonces $C(\Omega)$ no es localmente acotado y por tanto no normable.

4.2. Espacio $H(\Omega)$

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto no vacío definamos $C(\Omega)$ y consideremos el subespacio vectorial

$$H(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f \quad \text{es holomorfa en} \quad \Omega\}.$$

Recordemos que una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa (esto es, $\mathbb{C}$-diferenciable en cada punto de Ω) si y solo si es analítica (es decir, desarrollable en serie de potencias en un entorno de cada punto de Ω). Como los limites de sucesiones de funciones holomorfas son holomorfas, $H(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $C(\Omega)$. Por lo tanto $H(\Omega)$ es un espacio de Fréchet. Probaremos ahora que $H(\Omega)$ tiene la propiedad de Heine-Borel.

Sea $E \subseteq H(\Omega)$ cerrado y acotado, como E es acotado existen $0 < M_n < \infty$ tal que

$$\rho_n(f) \leq M_n, \quad f \in E, K_n$$

$$\left|f(x)\right| \leq M_n, \quad f \in E, \quad x \in K_n$$

Luego E es uniformemente acotada en cada compacto de Ω, por el teorema de Montel E es una familia normal.

Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en E, entonces existe una subsucesión $\{f_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $f_{n_i} \to f$ cuando $i \to \infty$ i,e,.$\{f_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f sobre los subconjuntos compactos de Ω, entonces $f_{n_i} \to f$ cuando $i \to \infty$ en la topologia de $H(\Omega)$ y $f \in H(\Omega)$, como E es cerrado $f \in E$. Así E es compacto.

Ahora $H(\Omega)$ no es localmente acotado, pues si lo fuera y como $H(\Omega)$ tiene la propiedad de Heine-Borel, entonces $H(\Omega)$ tendría dimensión finita, lo cual es falso pues $H(\Omega)$ tiene dimensión infinita. Por lo tanto $H(\Omega)$ no es normable.

4.3. Espacio $C^\infty(\Omega)$

Comenzamos esta sección introduciendo alguna terminología que utilizaremos más adelante en nuestro trabajo

Llamamos *multi-indice* a la n-upla ordenada

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$$

de enteros no negativos α_i. A cada multi-indice α se le asocia el operador diferencial

$$D^{\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

cuyo orden es $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$. Si $|\alpha| = 0$, $D^{\alpha} f = f$.
Una función compleja f definida en algún conjunto no vacío $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice que pertenece a $C^{\infty}(\Omega)$ si $D^{\alpha} f \in C(\Omega)$ para todo multi-indice α.
El soporte de una función compleja f supp(f) (sobre un espacio topológico) es la clausura de $\{x : f(x) \neq 0\}$.
Si K es un conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, entonces $\mathscr{D}_K$ denota el espacio de todas las $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ cuyo soporte esta contenido en K. Si $K \subset \Omega$ entonces $\mathscr{D}_K$ es un subespacio de $C^{\infty}(\Omega)$.
Vamos a definir ahora una topología en $C^{\infty}(\Omega)$ que convierte a $C^{\infty}(\Omega)$ en un espacio de Fréchet con la propiedad de Heine-Borel, tal que $\mathscr{D}_K$ es un subespacio cerrado de $C^{\infty}(\Omega)$ cuando $K \subset \Omega$.
Para esto, elijamos conjuntos compactos K_i $(i = 1, 2, 3, \cdots)$ tales que $K_n \subset K^o_{n+1}$ y $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Definamos seminormas

$$\rho_m(f) = \text{máx}\left\{\left|D^{\alpha} f(x)\right| : x \in K_m, \quad |\alpha| \leq m\right\}.$$

Estas seminormas definen una topología metizable localmente convexa sobre $C^{\infty}(\Omega)$. Esto se sigue de el teorema 3.19 y la remarca 3.c.
Ahora definamos el funcional $T_x : C^{\infty}(\Omega) \to \mathbb{C}$ con $x \in \mathbb{C}$ de modo que $f \mapsto f(x)$, este funcional es continua. En efecto.
Sea $\varepsilon > 0$ luego existe $\delta > 0$ de modo que para $m \in \mathbb{N}$ $\rho_m(f) < \delta$ entonces, tomando $\delta = \varepsilon$

$$\left|f(x)\right| \leq \rho_m(f) < \varepsilon.$$

Luego el ker(T_x) es cerrado en $C^{\infty}(\Omega)$ con esta topología. Mostraremos ahora que

$$\mathscr{D}_K = \bigcap_{x \in K^c} \ker(T_x)$$

Sea $f \in \mathscr{D}_K$, entonces supp$(f) \subseteq K$, $\quad \overline{\{x : f(x) \neq 0\}} \subseteq K$, entonces tenemos que $f(x) = 0$ para todo $x \in K^c$, luego $f \in \ker(T_x)$ para todo $x \in K^c$, así

$$f \in \bigcap_{x \in K^c} \ker(T_x).$$

Del mismo modo

$$\bigcap_{x\in K^c} \ker(T_x) \subseteq \mathscr{D}_K.$$

Luego concluimos que $\mathscr{D}_K$ es cerrado.
Una base local para $C^\infty(\Omega)$ esta dada por los conjuntos

$$V_n = \left\{ f \in C^\infty(\Omega) : \rho_n(f) < \frac{1}{n} \right\} \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

Si $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $C^\infty(\Omega)$ y si fijamos un $N > 0$ para $i, j > N$ tenemos que $f_i - f_j \in V_N$, entonces

$$\rho_N(f_i - f_j) = \text{máx}\left\{ \left| D^\alpha f_i(x) - D^\alpha f_j(x) \right| : x \in K_N, \quad |\alpha| \leq N \right\} < \frac{1}{N},$$

así $\left| D^\alpha f_i(x) - D^\alpha f_j(x) \right| < \frac{1}{N}$ en K_N, si $|\alpha| \leq N$, de esto tenemos que $D^\alpha f_i$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω a una función g_α. en particular $f_i(x) \to g_0(x)$, luego $g_0 \in C^\infty(\Omega)$, $\quad g_\alpha = D^\alpha g_0$ y $f_i \to g_0$ en la topología de $C^\infty(\Omega)$.
Así $C^\infty(\Omega)$ es un espacio de Frechet. lo mismo ocurre con para cada subespacio cerrado de $\mathscr{D}_K$.
Para probar que $C^\infty(\Omega)$ cumple la propiedad de Heine-Borel probaremos primero los siguientes resultados:

Lema 4.1. *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, si $k < \infty$ algún subconjunto acotado de $C^{k+1}(\Omega)$ es relativamente compacto en $C^k(\Omega)$.*

Demostración. Sea $K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_i \subset \cdots$ la usual secuencia de de subconjuntos compactos, cuya unión es Ω, y tal que $K_i \subset (K_{i+1})^0$. Sea $E \subset C^{k+1}(\Omega)$ acotado, sea S una sucesión en E. Sera suficiente mostrar que esta sucesión contiene una subsucesión convergente.
Sea $i \geq 1$, Como E es acotado y por el teorema 3.19, la acotaciónde E es equivalente a la existencia de números $M_i < \infty$ tal que

$$\rho_i(f) \leq M_i \quad \text{para todo} \quad f \in E.$$

La desigualdad $\left| D^\alpha f \right| \leq M_i$ valida en K_{i+1} cuando $|\alpha| \leq k+1$ implican la equicontinuidad de $\{D^\beta f : f \in E\}$ en K_i si $\left|\beta\right| \leq k$, así también la sucesión S es equicontinua y acotada en K_i. En vista del teorema de Arzelá Ascoli's, hallamos una subsucesión $S_1 \subset S$ tal que restricción

$$D^\alpha f\,|_{(K_i)^0} \quad \text{con} \quad f \in S_1 \tag{4.1}$$

converge en $C^1(K_i)$, resulta inmediatamente que si f_0 es el limite de las restricciones (4.1)en $C^0(K_i)$ cuando $|\alpha| = 0$, entonces, para cada α, $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha f_0$ es el limite de la restricción de (4.1) en ese mismo espacio, así S_1 converge en $C^k(K_i)$.
Nosotros probamos el siguiente hecho:

(a) *Dado algún $i \geq 1$, y alguna sucesión acotada S en $C^{k+1}(K_i)$, existe una subsucesión S_1 de S tal que la restricción de las funciones $f \in S_1$ a $(K_{i+1})^0$ forman una sucesión convergente en $C^k(K_i)$.*

Sea ahora sea S una sucesión en E. Por restricción a $(K_1)^0$. da lugar a una sucesión acotada en $C^{k+1}(K_1)$ por (*a*),podemos encontrar una subsucesión S_1 de S tal que las restricciones $S_1 |_{(K_0)^0}$ a $(K_0)^0$ convergen en $C^k(K_0)$. Pero S_1 también es acotado en $C^{k+1}(\Omega)$; por la restricción a $(K_2)^0$ define a una sucesión acotada en $C^{k+1}(K_2)$ por (*a*),podemos encontrar una subsucesión S_2 de S_1 tal que las restricciones $S_2 |_{(K_1)^0}$ convergen en $C^k(K_1)$. etc. de este modo obtenemos una sucesión de sucesiones totalmente ordenadas

$$S = S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_i \supset \cdots$$

tal que, para cada $i \geq 1$, $\quad S_i |_{(K_{i-1})^0}$ convergen en $C^k(K_{i-1})$. Para cada $i \geq 1$, sea f_i' el limite de la sucesión $S_i |_{(K_{i-1})^0}$ en $C^k(K_{i-1})$. Sea $f_i \in S_i$ tal que

$$\rho_{i-1}(f_i - f_i') \leq \frac{1}{i} \quad \text{con} \quad x \in (K_{i-1})^0.$$

Es obvio que la sucesión $S' = \{f_1, f_2, f_3, \cdots\}$ converge en $C^k(\Omega)$, este limite es la función $f \in \Omega$ cuya restricción a $(K_i)^0$ es f_i' para cada $i \geq 1$. $\square$

Lema 4.2. *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$,. Algún subconjunto acotado de $C^\infty(\Omega)$ es relativamente compacto en $C^\infty(\Omega)$.*

Demostración. Sea $E \subset C^\infty(\Omega)$ acotado, con mayor razón E es acotado en cada $C^k(\Omega)$ $\quad k = 1, 2, \cdots$ de este modo E es relativamente compacto en cada $C^{k-1}(\Omega)$. Sea S una sucesión de E, ahora sea S_0 una subsucesión de S que converge en $C^0(\Omega)$ y sea f este limite. Sea S_1 una subsucesión de S_0 que converge en $C^1(\Omega)$, el limite de S_1 también debe ser f (que, a modo de consecuencia, es $C^1(\Omega)$); sea S_2 una subsucesión de S_1 que converge a f en $C^2(\Omega)$, procediendo de este modo, vemos que f es C^∞ en Ω, y tenemos ahora una sucesión de sucesiones

$$S \supset S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_i \supset \cdots,$$

esta vez con la propiedad que, para cada $i \geq 1$, S_i converge a f en $C^i(\Omega)$. Para cada i,seleccionamos un elemento $f_i \in S_i$ tal que

$$\rho_i(f_i - f) \leq \frac{1}{i} \quad \text{con} \quad x \in (K_i)^0.$$

La subsucesión de S, $\{f_1, f_2, \cdots\}$ claramente convergen a f en $C^\infty(\Omega)$. $\square$

Ahora volviendo a nuestro problema. Sea E cerrado y acotado en $C^\infty(\Omega)$, como E es acotado en $C^\infty(\Omega)$,tenemos que E es relativamente compacto ,i.e., $\overline{E}$ es compacto en $C^\infty(\Omega)$, como E es cerrado en $C^\infty(\Omega)$, entonces E es compacto.

Bibliografía

[1] WALTER RUDIN. Functional Analysis, McGraw-Hill, 1991.

[2] LAWRENCE NARICI, EDWARD BECKENSTEIN. Topological Vector Spaces, CRCPress, 2011.

[3] HELMUT H. SCHAEFER. Topological Vector Spaces, Springer-Verlag, 1971.

[4] FRANÇOIS TREVES. Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels. Academic Press, Inc., 1967.

[5] JAMES R. MUNKRES. Topología, Prentice Hall, 2002.

[6] ELON LAGES LIMA. Elementos de Topologia Geral, IMPA, 1970.

[7] ELON LAGES LIMA. Espaços Metricos, IMPA, 2005.

[8] ELON LAGES LIMA. Curso de Análise volumen 2, IMPA, 1980, Projeto Euclides.

[9] KENNETH HOFFMAN AND RAY KUNZE. Álgebra Lineal,Prentice-Hall Hispanoamericana, 1973.