Universidad Mayor de San Andrés
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Carrera de Matemática

TEOREMA DE INCRUSTACIÓN DE WHITNEY

(GEOMETRÍA DIFERENCIAL)

Hernán Laime Zanga

PROYECTO DE GRADO
PARA OBTENER EL GRADO DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

TUTOR: Dr. Efrain Cruz Mullisaca

La Paz–Bolivia
2011

TEOREMA DE INCRUSTACIÓN DE WHITNEY

(Geometría Diferencial)

Por

Hernán Laime Zanga

Remitido en cumplimiento parcial de los requisitos para la obtención del grado de licenciado en matemática en la Universidad Mayor de San Andrés.

La Paz–Bolivia

Diciembre de 2011

Dedicatoria

Con mucho cariño a mi madre
Juana Zanga Chacapacha.

Agradecimientos

Agradezco a Dios, mi familia, quienes hicieron posible mis estudios superiores. Agradezco a la Institución que me formo como Matemático; y, a quienes supieron enseñarme en todo tiempo. Agradezco al profesor Efraín Cruz Mullisaca mi profesor tutor por todas sus sugerencias y apoyo durante la elaboración de este trabajo, del mismo modo agradecer al Seminario de Teoría de Control de la Carrera de Matemática que está a cargo del Prof. Willy Condori, por brindarme la oportunidad de poder desarrollarme matemáticamente, expresar también mi gratitud al Mgr. Charlie Lozano y Mgr. Luis Tordoya.

Por supuesto realizar, este trabajo nunca hubiera sido posible, sin el apoyo, paciencia, confianza y amor de mi familia, muy especialmente a mi madre Juana Zanga, que mi deuda siempre será infinita.

También quiero agradecer a todos mis amigos, que siempre confiaron en mi. Hugo, Iver, Freddy, Vither, Alejandro, Ramiro, Elvis, Angela, Alizon, Susan, Magaly y otros que seria imposible citarlos aquí, que jamas olvidaré.

Me gustaría terminar con un agradecimiento muy especial a mi hermano Erick.

Índice general

Introducción

El concepto de variedad (que involucra conceptos de análisis, diferencial, algebraica y topología) ha jugado un papel fundamental en el desarrollo y dirección de las matemáticas modernas, podemos citar por ejemplo la geometría diferencial local, geometría proyectiva, geometría algebraica y otros.

Este proyecto de grado estudia la manera de incrustar cualquier variedad diferenciable de dimensión n a cierto espacio euclidiano de dimensión $2n+1$, donde, esto quiere decir, que no toda variedad de dimensión n puede incrustarse en un espacio euclidiano de dimensión $n, n+1, ..., 2n$ tal como mostramos, ejemplos en el tercer capítulo. Además también estudiamos que cualquier variedad de dimensión n es inmersa a un espacio euclidiano de dimensión $2n$.

El propósito del presente trabajo es realizar la prueba del Teorema, debido a Hassler Whitney. Es decir, incrustar una variedad diferenciable en un espacio euclidiano mediante una aplicación regular e inyectiva, esto es, que la aplicación es una incrustación.

El presente trabajo esta dividido en tres capítulos.

En el primer capítulo damos los conceptos de variedad diferenciable y definimos una variedad diferenciable también construimos variedades diferenciables mediante aplicaciones inyectivas, con esto mostramos que la Variedad de Grassmann $G_r(\mathbb{R}^{n+r})$ que es el conjunto de todos los subespacios vectoriales de dimensión r del espacio euclidiano $\mathbb{R}^{n+r}$, es una variedad diferenciable de dimensión r. Además las aplicaciones diferenciables que inducen transformaciones lineales del espacio tangente y también que inducen transformaciones lineales del espacio cotangente se comportan como adjunta. Concluimos este capítulo con los teoremas (1.3) y (1.4) que caracterizan a aplicaciones regulares, que son útiles en el siguiente capítulo.

En el segundo capítulo, desarrollamos los conceptos necesarios para definir una subvariedad regular. Presentamos que la variedad en la que trabajamos es un espacio paracompacto, para tal espacio encontramos un cubrimiento por conjuntos abiertos, tal que es un refinamiento localmente finito normalizado. Es decir a todas las vecindades coordenadas mediante su aplicación coordenada hacemos corresponder una bola abierta de centro cero y radio tres. Finalizando este capitulo, mostramos la existencia de funciones bump, definidas en un espacio euclidiano y luego las extendemos a variedades diferenciables. Estas funciones bump son útiles para demostrar el Teorema de Incrustación de Whitney.

En el tercer capítulo, que es el tema central de este trabajo, desarrollamos, conjuntos de medida cero en una variedad diferenciable, luego mostramos, dos teoremas, (3.1) y (3.2) que son de mucha importancia para concluir el propósito del trabajo. Por otro lado definimos el *conjunto limite* (página 74) y también mostramos el Lema 3.7, que es importante para concluir el propósito del trabajo. Con todo esto, desarrollado, llegamos a mostrar el Teorema de Incrustación de Whitney (Teorema 3.3) y También mostramos el Teorema de Inmersión de Whitney (Corolario 3.3).

1

Variedades Diferenciables

En este capítulo extenderemos el cálculo diferencial de espacios euclidianos a espacios que son una generalización de superficies. Estudiaremos las variedades y los teoremas cuando la derivada de una aplicación es inyectiva o sobreyectiva.

1.1. Variedades Diferenciables

A grosso modo, una variedad diferenciable, es como una superficie, que no precisa estar en un espacio euclidiano. Diremos que la variedad M es diferenciable, a una variedad de clase C^∞.

Sea M un espacio topológico de Hausdorff con una base numerable, con una colección indizada de pares $\{W_\alpha, \eta_\alpha\}_{\alpha\in I}$, donde W_α es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\eta_\alpha : W_\alpha \to M$ es un homeomorfismo de W_α hacia un subconjunto abierto $U_\alpha = \eta(W_\alpha)$ de M que satisface las siguientes condiciones:

1. Si p es un punto en M, existe un índice α en I tal que U_α contiene a p.
2. Para cada par ordenado de índices α, β de I tal que

   $$U = U_\alpha \cap U_\beta$$

   no vacío, la restricción de $\eta_\beta^{-1} \circ \eta_\alpha$ a $\eta_\alpha^{-1}(U)$ es una aplicación diferenciable de este conjunto hacia $\mathbb{R}^n$.
3. Si $\eta : W \to U$ es un homeomorfismo de un subconjunto abierto W de $\mathbb{R}^n$ hacia un subconjunto abierto U de M tal que para cada índice α, y que $U \cap U_\alpha$ es no vació la restricción de $\eta^{-1} \circ \eta_\alpha$ a $\eta_\alpha^{-1}(U \cap U\alpha)$ y la restricción de $\eta_\alpha^{-1} \circ \eta$ a $\eta^{-1}(U \cap U\alpha)$ son aplicaciones diferenciables, existe un índice β tal que $(W, \eta) = (W_\beta, \eta_\beta)$.

El entero n es el mismo para todos los índices y se llama la ***dimensión*** de la variedad $\boldsymbol{M}$. Los conjuntos U_α $(\alpha \in I)$ son llamados ***vecindades coordenadas*** de $\boldsymbol{M}$. La aplicación $\varphi_\alpha = \eta_\alpha^{-1} : U_\alpha \to W_\alpha$ será llamado ***aplicación coordenada*** correspondiente a la vecindad coordenada U.

La condición 1, garantiza que M es cubierto por sus vecindades coordenada.

La condición 2, nos dice, si α, β son índices tales que $U_\alpha \cap U_\beta = U$ es no vació entonces $\eta_\beta^{-1} \circ \eta_\alpha$ y $\eta_\alpha^{-1} \circ \eta_\beta$, están restringidas en $\eta_\alpha^{-1}(U)$ y $\eta_\beta^{-1}(U)$ respectivamente, donde ambas son aplicaciones diferenciables. Como estas aplicaciones son inversas uno del otro, se sigue que sus matrices jacobianas tiene rango n. La aplicación $\eta_\beta^{-1} \circ \eta_\alpha = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ será denotado por ψ_α^β y se llamará la ***transformación coordenada*** sobre $U_\alpha \cap U_\beta$ (ver Figura 1-3).

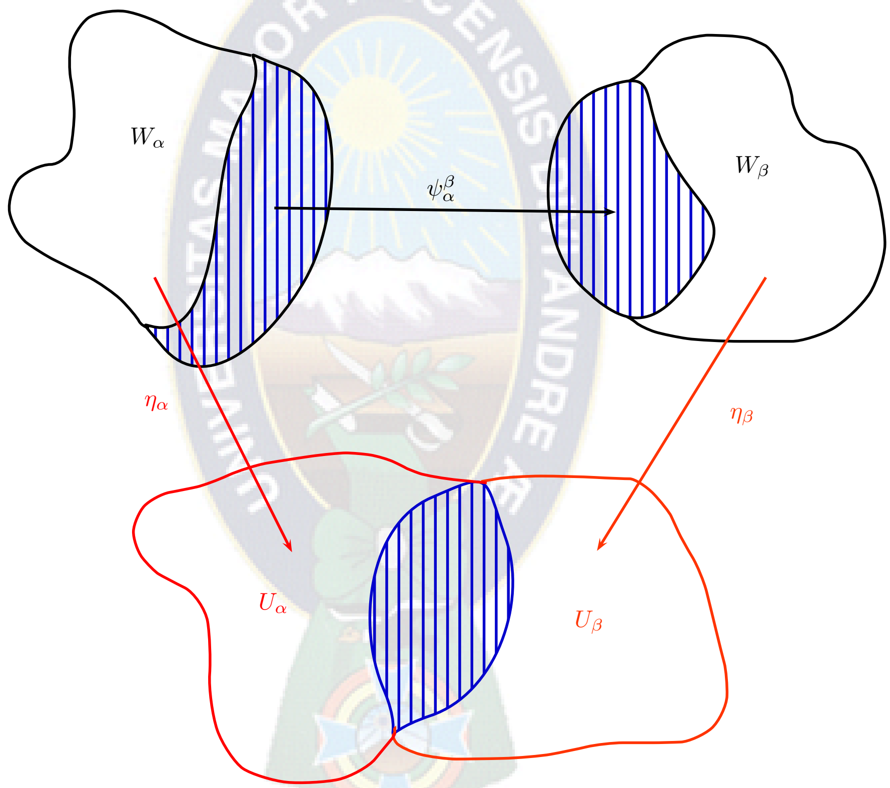


Figura 1-3

La condición 3, expresa que la familia $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ contiene cada vecindad coordenada posible de la variedad M. En el Teorema 1.1 mostraremos que, si asumimos las condiciones 1 y 2, es posible extender la familia $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ haciendo satisfacer la condición 3.

Sea M un espacio de Hausdorff con una base numerable y con una familia $\mathcal{W} = \{W_\alpha, \eta_\alpha\}_{\alpha \in I}$ sujeto a las condiciones 1 y 2. Bajo estas circunstancias, llamaremos a $\boldsymbol{M}$ una ***variedad coordenada***. Un par (W, η) donde W es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\eta : W \to \eta(W) = U$ un homeomorfismo sobre un subconjunto abierto U de M, se dirá que es ***compatible*** con $\mathcal{W}$ si, para cada índice $\alpha \in I$ tal que $U \cap U_\alpha$ es no vació, las aplicaciones $\eta^{-1} \circ \eta_\alpha$ y $\eta_\alpha^{-1} \circ \eta$ son diferenciable cuando las restringimos a los conjuntos $\eta_\alpha^{-1}(U \cap U_\alpha)$ y $\eta^{-1}(U \cap U_\alpha)$ respectivamente. Con esta definición es posible extender la familia $\mathcal{W}$ a la condición 3, para que M se vuelva en una variedad diferenciable.

Teorema 1.1. *Sea M una variedad coordenada con la familia $\mathcal{W} = \{W_\alpha, \eta_\alpha\}_{\alpha \in I}$ satisfaciendo las condiciones 1 y 2. Entonces la familia $\mathcal{W}^*$ que consiste de todos los pares que son compatible con $\mathcal{W}$, satisface las condiciones 1, 2 y 3, por tanto hace a M una variedad diferenciable.*

Demostración. Esta claro que, si probamos la condición 2 para $\mathcal{W}^*$, tenemos probado el teorema. Sean (W, η) y (W', η') dos pares que son compatible con $\mathcal{W}$. Sean $U = \eta(W)$, $U' = \eta'(W')$ y asumamos que $U \cap U'$ es distinto de vacío.

Sea x un punto de $\eta'^{-1}(U \cap U')$. Por demostrar que $\eta^{-1} \circ \eta'$ es diferenciable en x. Por la condición 1, existe un índice α tal que $\eta'(x)$ esta contenido en $U_\alpha = \eta_\alpha(W_\alpha)$. De aquí el conjunto $U_\alpha \cap U \cap U' \neq \emptyset$, y sobre este conjunto $\eta^{-1} \circ \eta' = (\eta^{-1} \circ \eta_\alpha) \circ (\eta_\alpha^{-1} \circ \eta')$. Por la compatibilidad de (W, η) con $\mathcal{W}$, sabemos que las aplicaciones $\eta^{-1} \circ \eta_\alpha$ y $\eta_\alpha^{-1} \circ \eta'$, son diferenciables en $\eta_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U \cap U')$ y $\eta'^{-1}(U_\alpha \cap U \cap U')$ respectivamente. De aquí $\eta^{-1} \circ \eta'$ es diferenciable en x. □

Vemos del Teorema 1.1 que es suficiente describir las vecindades coordenadas de una variedad coordenada para ***definir una variedad diferenciable***.

Definición 1.1 (Carta). *Una **carta o sistema de coordenadas n-dimensional** en M es un par, (U, φ), donde $U \subset M$ es un conjunto abierto y $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo de U sobre el subconjunto abierto $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.*

Ahora justificaremos de por que el nombre de vecindad coordenada al conjunto U, que es el dominio de la aplicación coordenada φ. Todos los puntos de U tienen asignadas, via φ, unas coordenadas. En efecto, si $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ denota la función proyección en la i-esima coordenada, entonces se definen las funciones coordenadas asociadas a la carta (U, φ) como $x_i = p_i \circ \varphi$. Entonces, las coordenadas de un punto p en la aplicación coordenada φ son $(x_1(p), ..., x_n(p))$.

Definición 1.2 (Cartas Compatibles). *Dos cartas n-dimensional (U, φ) y (V, ψ) en M son compatibles si $U \cap V \neq \emptyset$ o bien los conjuntos $\varphi(U \cap V)$ y $\psi(U \cap V)$ son abiertos en $\mathbb{R}^n$ y las aplicaciones $\psi \circ \varphi^{-1}$ y $\varphi \circ \psi^{-1}$ son difeomorfismos.*

Ahora definiremos un concepto fundamental de esta sección.

Definición 1.3 (Estructura Diferenciable). *Un atlas diferenciable n-dimensional sobre M es una familia de cartas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ satisfaciendo las siguientes condiciones:*

a) $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha = M$

b) *Para todo índice* α *y* β*, si* $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ *las cartas* $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ *y* (V_β, ψ_β) *son compatibles.*

Diremos que el atlas $\mathcal{A}$ *determina una estructura diferenciable sobre* M *si es maximal para las condiciones anteriores. Más explícito, decimos maximal cuando contiene todos los sistemas coordenados que son compatibles en relación a* $\mathcal{A}$*.*

Definición 1.4. *Una* ***variedad diferenciable*** *de dimensión* n *es un par* $(M, [\mathcal{A}])$ *formado por un espacio topológico de Hausdorff* M *y una estructura diferenciable* $[\mathcal{A}]$ *sobre* M*.*

Para indicar la dimensión n, en algunas ocasiones escribiremos M^n en lugar de M, y cuando la estructura diferenciable sea conocida omitiremos cualquier referencia a ella.

Ejemplo [El espacio de las Matrices]

Sea $\mathbb{M}(m\times n,\mathbb{R})$ el conjunto de todas las matrices reales de tamaño $m \times n$. Entonces $\mathbb{M}(m\times n,\mathbb{R})$ admite estructura de variedad diferenciable. En efecto, si $A \in \mathbb{M}(m\times n,\mathbb{R})$ podemos escribir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

entonces definimos la aplicación $\varphi : \mathbb{M}(m\times n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{mn}$ por:

$$\varphi(A) = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}, a_{21}, ..., a_{2n}, ..., a_{m1}, ..., a_{mn}).$$

Se afirma que φ constituye una carta global sobre $\mathbb{M}(m\times n,\mathbb{R})$, pues φ es un isomorfismo con inversa continua. Esta determinará la estructura diferenciable estándar sobre el espacio de las matrices $\mathbb{M}(m\times n,\mathbb{R})$.

Ejemplo Sea $(M, [\mathcal{A}])$ una variedad diferenciable de dimensión n. Sea $U \subset M$ un conjunto abierto. Denotemos por $\mathcal{A}/U$ el conjunto $\{(W_i, \varphi_i|_{W_i}) \;/\; W_i = U \cap U_i,\ (U_i, \varphi_i) \in \mathcal{A}\}$, entonces $\mathcal{A}/U$ es un atlas de dimensión n, llamada estructura diferencial de U *inducida por la estructura diferencial* de M.

1.2. Aplicaciones Diferenciables

En esta sección vamos a introducir el concepto de aplicación diferenciable, herramienta básica para extender el calculo diferencial a las nuevas estructuras que acabamos de definir. Vamos a decir con la palabra función, a todas las funciones de valor real. Entenderemos por aplicación (función) diferenciable, a una aplicación (función) de clase C^∞ a menos que se diga lo otro.

Comenzaremos por el caso más sencillo, cuando el conjunto de llegada es el espacio euclídeo $\mathbb{R}$. Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función, sea p un punto de su dominio y consideremos (U, φ) una carta en M cuyo dominio contiene a p. Entonces la aplicación $F = f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ se denomina la *representante local* o *representante en coordenadas* de f (respecto de la carta (U, φ)).

Definición 1.5 (Función Diferenciable)**.** *Una función $f : M \to \mathbb{R}$ es **diferenciable en un punto** $p \in M$ si una representante local $F = f \circ \varphi^{-1}$ (y, por tanto, todas) es diferenciable en $\varphi(p)$. La función se dice **diferenciable** si lo es en todos los puntos de su dominio.*

Esta definición no depende de la elección, de cartas coordenadas. Entonces, sean (U, φ) y (V, ψ) dos cartas en M cuyos dominios contienen al punto p, y consideremos $F = f \circ \varphi^{-1}$ y $G = f \circ \psi^{-1}$ las representantes locales respectivas. Entonces, utilizando el cambio de cartas, podemos comprobar que $F = G \circ (\psi \circ \varphi^{-1})$, por lo que F es diferenciable en $\varphi(p)$ si y sólo si G es diferenciable en $\psi(p)$.

Introduzcamos ahora el caso general. Sea $f : M^m \to N^n$ una aplicación, sea p un punto de su dominio y consideremos (U, φ) una carta en M cuyo dominio contiene a p y (V, ψ) una carta en N tal que $f(U) \subset V$. Entonces la aplicación $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ se denomina la *representante local* o *representante en coordenadas* de f (respecto de las cartas (U, φ) y (V, ψ)).

Definición 1.6 (Aplicación Diferenciable)**.** *Una aplicación $f : M^m \to N^n$ es **diferenciable en un punto** $p \in M$ si una representante local $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ (y, por tanto, todas) es diferenciable en $\varphi(p)$. La aplicación se dice **diferenciable** si lo es en todos los puntos de su dominio.*

Definición 1.7. *La aplicación $f : M \to N$ se dice que es un **difeomorfismo** si es biyectiva, diferenciable y con inversa diferenciable. En tal caso, las variedades M y N se dice que son **difeomorfas**.*

Ejemplo [Aplicación Determinante]

Sea $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ el conjunto de las matrices cuadradas reales de orden n con su estructura diferenciable y consideremos la aplicación $\det : \mathbb{M}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Veamos que det es una aplicación diferenciable. Sea $\varphi : \mathbb{M}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n^2}$ la carta estándar sobre las matrices cuadradas (ver el ejemplo de espacio de matrices) y sea $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la carta identidad. Así consideremos $F = \psi \circ \det \circ \varphi^{-1} = \det \circ \varphi^{-1}$ tal que $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es la representante local de la aplicación determinante det, es decir,

$$F(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}, x_{21}, ..., x_{2n}, ..., x_{m1}, ..., x_{mn}) = \det \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}.$$

Usando la definición del determinante deducimos que

$$F(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}, x_{21}, ..., x_{2n}, ..., x_{m1}, ..., x_{mn}) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma x_{1\sigma(1)} \cdots x_{n\sigma(n)},$$

donde S_n es el grupo de las permutaciones de n letras y ε_σ denota la signatura de la permutación σ. Al ser F un polinomio de n^2 variables, es diferenciable y en consecuencia, la aplicación es también diferenciable.

1.3. Variedades definidas por una colección de inyectivas

Sea X un conjunto. Si X posee estructura de variedad diferenciable, entonces su topología esta perfectamente determinada por el atlas. De modo más preciso:

Lema 1.1. *Sea X un conjunto (sin estructura topológica) y $\mathcal{A}$ una colección de inyectivas $\varphi : U \subset X \to \mathbb{R}^n$ que satisface las siguientes condiciones:*

(1) *Para cada $\varphi \in \mathcal{A}$, $\varphi : U \subset X \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(U)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$.*

(2) *Los dominios U de las aplicaciones $\varphi \in \mathcal{A}$ cubren X.*

(3) *Si $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ pertenecen a $\mathcal{A}$ y $U \cap V \neq \emptyset$, entonces $\varphi(U \cap V)$ y $\psi(U \cap V)$ son abiertos en $\mathbb{R}^n$ y la aplicación $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ es un difeomorfismo.*

Con estas condiciones, existe una y solamente una topología en X relativamente a $\mathcal{A}$ que es un atlas diferenciable en X.

Demostración. **Unicidad**. Sea τ una topología en X tal que $\mathcal{A}$ es un atlas diferenciable sobre (X, τ). Entonces los dominios U de los homeomorfismos $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. son elementos de τ y cubren X. Si $A \subset X$ es abierto entonces $A \cap U \in \tau$ luego $\varphi(A \cap U)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$. Por otro lado, si $A \subset X$ es tal que $\varphi(A \cap V)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$ para todo $\varphi \in \mathcal{A}$, entonces $A = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}} \varphi^{-1}(\varphi(A \cap V))$ es abierto en X. Conclusion: $A \in \tau$ si y sólo si $\varphi(A \cap U)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$ para cada $\varphi \in \mathcal{A}$. Esto muestra la unicidad de τ y nos da una pista para demostrar la

Existencia. Declaramos un subconjunto $A \subset X$ abierto si, y solamente si, $\varphi(A \cap U) \subset \mathbb{R}^n$ es abierto para todo $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathcal{A}$.

Afirmamos, que con las condiciones (1), (2) y (3), define realmente una topología en X, según al cual cada conjunto $U \subset X$ es abierto y cada $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo. En efecto, consideremos tres casos:

- Como $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ con U_α abierto y φ biyectiva entonces,

$$\begin{aligned}\varphi(X) &= \varphi(\bigcup_\alpha U_\alpha)\\ &= \bigcup_\alpha \varphi(U_\alpha)\\ &\subset \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

  de donde $\varphi(X)$ en un abierto en $\mathbb{R}^n$. Por otra parte $\varphi(X \cap U) = \varphi(X)$ pues $U \subset X$, entonces por definición de τ, se tiene que $X \in \tau$. También $\emptyset \in \tau$ por vacuidad (pues todo falso implica verdad).

- Sea $A_\alpha \in \tau$. Tenemos $A_\alpha \in \tau$ si y sólo si $\varphi(A_\alpha \cap U)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$. Luego como φ es biyectiva se tiene $\varphi(A_\alpha \cap U) = \varphi(A_\alpha) \cap \varphi(U)$ es un abierto en $\mathbb{R}^n$. Por tanto $\varphi(\bigcup_\alpha A_\alpha \cap U) = \bigcup_\alpha(\varphi(A_\alpha) \cap \varphi(U))$ es un abierto en $\mathbb{R}^n$. Así por definición $\bigcup_\alpha A_\alpha \in \tau$.

- Sean $A_1, ..., A_n \in \tau$. Tenemos $A_i \in \tau$ para $i = 1, ..., n$ si y sólo si $\varphi(A_i \cap U)$ es un abierto en $\mathbb{R}^n$ para $i = 1, ..., n$. Luego como φ es biyectiva $\varphi(A_i \cap U) = \varphi(A_i) \cap \varphi(U)$ es un abierto en $\mathbb{R}^n$. Por tanto $\varphi(\bigcap_{i=1}^n A_\alpha \cap U) = \bigcap_{i=1}^n(\varphi(A_i) \cap \varphi(U))$ es un abierto en $\mathbb{R}^n$. Así por definición $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau$.

$\square$

Debemos adicionar más hipótesis al Lema 1.1 si deseamos que la topología de X tenga base numerable.

Lema 1.2. *La topología X, definida por el "atlas" $\mathcal{A}$ satisfaciendo (1), (2) y (3) tiene base numerable si, y solamente si*

(4) *La cobertura de X por medio de los dominios U de aplicaciones $\varphi \in \mathcal{A}$ admite una subcobertura numerable.*

Demostración. Supongamos que (4) se verifica entonces X es unión numerable de abiertos U, cada uno de los cuales tiene base numerable siendo homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$. Luego X tiene base numerable.

Recíprocamente supongamos que X satisface (1), (2), (3) y tiene una base numerable, entonces resulta del Teorema de *Lindelöf* (En un espacio topológico con base numerable, toda cobertura abierta admite una subcobertura numerable). $\square$

Observación: La topología de X, obtenida de acuerdo con el Lema 1.1, es localmente de Hausdorff. Quiere decir, si $p \neq q$ son puntos de X pertenecientes al mismo dominio U de una aplicación $\varphi \in \mathcal{A}$, entonces p y q poseen vecindades disjuntas pues U es abierto en X y es homeomorfo al espacio de Hausdorff $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

Una colección $\mathcal{B}$ de abiertos de un espacio topológico X se llama un *sistema fundamental de vecindades* abiertas de un punto $x \in X$ cuando:

i Todo $V \in \mathcal{B}$ contiene x.

ii Todo abierto A en X que contiene a x debe contener algún $V \in \mathcal{B}$.

En cada caso concreto, la aplicación de los Lemas 1.1 y 1.2 con el propósito de definir una estructura de variedades diferenciables debe hacerse una investigación sobre Hausdorffcidad de la topología de X. Esta investigación esta abreviada usando el siguiente lema.

Lema 1.3. *La topología de X, definida por un "atlas" $\mathcal{A}$ satisfaciendo (1),(2) y (3) es de Hausdorff si, y solamente si, cumple:*

(5) *Para cualquier par de sistemas de coordenadas $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ con $U \cap V \neq \emptyset$, no existe una sucesión $z_i \in \varphi(U \cap V)$ tal que*

$$z_i \to z \in \varphi(U - V) \text{ y } (\psi \circ \varphi^{-1})(z_i) \to z' \in \psi(V - U).$$

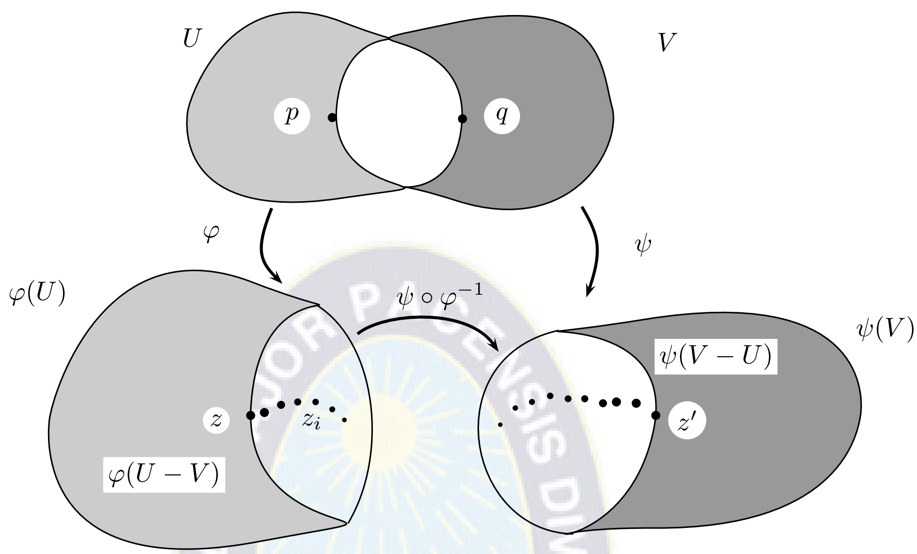
Demostración. Supongamos (5) y que la topología de X no es de Hausdorff entonces existen puntos $p, q \in X$ tal que $p \neq q$, con la propiedad: Toda vecindad de p y toda vecindad de q tiene intersección no vacía. Consideremos las aplicaciones coordenadas $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ en p y $\psi : V \to \varphi(V) \subset \mathbb{R}^n$ en q. Entonces $U \cap V \neq \emptyset$. Como la topología de X es localmente de Hausdorff, necesariamente $p \notin V$ y $q \notin U$. Sea $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \ldots$ un sistema fundamental de vecindades de p y $V_1 \supseteq V_2 \supseteq \ldots$ un sistema fundamental de vecindades de q. Escojamos, para cada $i, p_i \in V_i \cap U_i$. Entonces,

$$\varphi(p_i) = z_i \to \varphi(p) \in \varphi(U - V) \text{ y } \psi \circ \varphi^{-1}(z_i) = \psi(p_i) \to \psi(q) \in \psi(V - U).$$

Recíprocamente, si existen aplicaciones coordenadas $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ con $U \cap V \neq \emptyset$ y una sucesión de puntos $z_i \in \varphi(U \cap V)$ tales que $z_i \to z \in \varphi(U - V)$ y $(\psi \circ \varphi^{-1})(z_i) \to z' \in \psi(V - U)$ entonces,

$$\varphi^{-1}(z_i) \to p = \varphi^{-1}(z) \in U - V \text{ y } \psi^{-1}(\psi \circ \varphi^{-1}(z_i)) = \varphi^{-1}(z_i) \to q = \psi^{-1}(z') \in V - U.$$

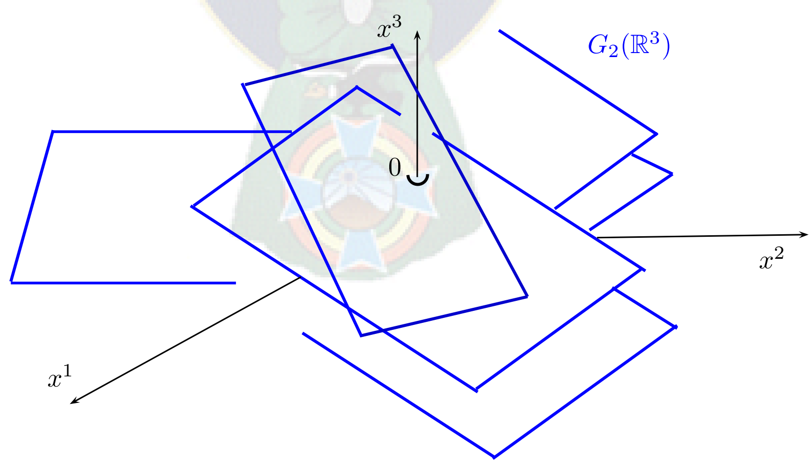
Como $p \neq q$ la sucesión $\varphi^{-1}(z_i)$ tiene dos "límites". Luego X no es de Hausdorff. Esto se ilustra en la siguiente figura.



$\square$

Ejemplo [Variedad de Grassmann]

La variedad de Grassmann $G_2(\mathbb{R}^3)$ es el conjunto de todos los subespacios vectoriales de dimensión 2 del espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$. Ver su ilustración en la siguiente gráfica.



Los elementos de $H \in G_2(\mathbb{R}^3)$ pueden ser descritos por *coordenadas homogéneas* (relación de equivalencia), dadas por una matriz de tamaño 3×2, $Y = (y^i_j) = \begin{pmatrix} y^1_1 & y^1_2 \\ y^2_1 & y^2_2 \\ y^3_1 & y^3_2 \end{pmatrix}$ de rango 2, cuyas columnas;

$$v_1 = (y_1^1, y_1^2, y_1^3), \qquad v_2 = (y_2^1, y_2^2, y_2^3)$$

forman una base de H. Por algebra lineal es conocido que todas las otras bases de H son de la forma:

$$w_1 = a_1^1 v_1 + a_1^2 v_2, \qquad w_2 = a_2^1 v_1 + a_2^2 v_2$$

donde $A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}_{2\times 2}$ es una matriz invertible.

Entonces las coordenadas homogéneas YA, con $A \in GL(2,\mathbb{R})$(el conjunto de todas las matrices invertible de 2×2), del elemento $H \in G_2(\mathbb{R}^3)$, están definidas por una matriz invertible 2×2, multiplicado a derecha. Es decir: Sean dos matrices de tamaño de 3×2, Y y Z. Entonces la coordenada homogénea del subespacio H es lo mismo que decir Y es equivalente a Z o que representan el mismo subespacio H si existe una matriz $A \in GL(\mathbb{R}^2)$ tal que $Z = YA$.

Podemos introducir en $G_2(\mathbb{R}^3)$ un sistema de coordenadas, porque estamos trabajando localmente. Antes, establezcamos algunas notaciones:

Dado un subconjunto $\alpha = \{i_1 < i_2\} \subset \{1, 2, 3\}$ con dos elementos y $Y \in \mathbb{M}(3 \times 2)$, denotemos por $\alpha(Y)$ la submatriz de tamaño 2×2 de Y formada por las líneas de orden $i_1 < i_2$.

Análogamente, indicamos por α^* el complemento de α en $\{1, 2, 3\}$ y $\alpha^*(Y)$ la submatriz de tamaño 1×2 de Y formada por las líneas que no fueran usadas en $\alpha(Y)$. Las siguientes ecuaciones son validas:

$$\alpha(Y \cdot A) = \alpha(Y) \cdot A \qquad \alpha^*(Y \cdot A) = \alpha^*(Y) \cdot A$$

por ejemplo, vamos a pensar que el índice α esta subíndizado por los elementos de α, así tenemos:

$$\alpha_{1,2}(Y) = \begin{pmatrix} y_1^1 & y_2^1 \\ y_1^2 & y_2^2 \end{pmatrix}_{2\times 2} \quad \alpha_{1,3}(Y) = \begin{pmatrix} y_1^1 & y_2^1 \\ y_1^3 & y_2^3 \end{pmatrix}_{2\times 2} \quad \alpha_{2,3}(Y) = \begin{pmatrix} y_1^2 & y_2^2 \\ y_1^3 & y_2^3 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

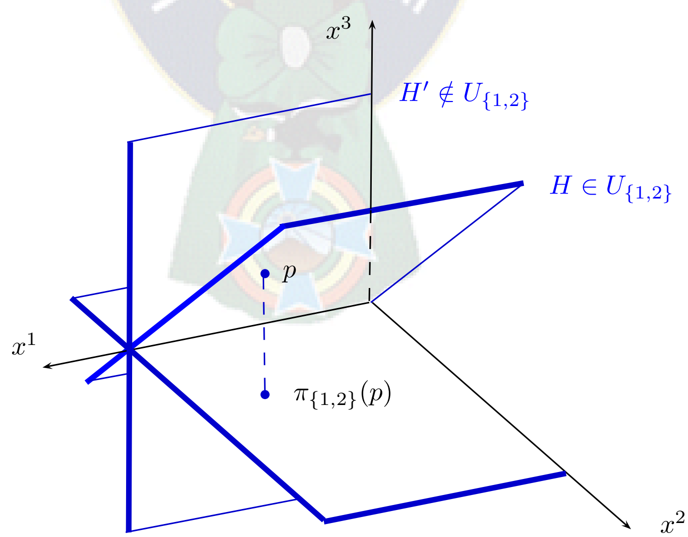
$$\alpha_{1,2}^*(Y) = \begin{pmatrix} y_1^3 & y_2^3 \end{pmatrix}_{1\times 2} \quad \alpha_{1,3}^*(Y) = \begin{pmatrix} y_1^2 & y_2^2 \end{pmatrix}_{1\times 2} \quad \alpha_{2,3}^*(Y) = \begin{pmatrix} y_1^1 & y_2^1 \end{pmatrix}_{1\times 2}$$

Para un caso particular, probaremos las anteriores ecuaciones que son validas. En efecto:

$$\begin{aligned}
\alpha_{1,2}(Y\cdot A) &= \alpha_{1,2}\left(\begin{pmatrix} y_1^1 & y_2^1 \\ y_1^2 & y_2^2 \\ y_1^3 & y_2^2 \end{pmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}_{2\times 2}\right) \\
&= \alpha_{1,2}\left(\begin{pmatrix} y_1^1a_1^1+y_2^1a_1^2 & y_1^1a_2^1+y_2^1a_2^2 \\ y_1^2a_1^1+y_2^2a_1^2 & y_1^2a_2^1+y_2^2a_2^2 \\ y_1^3a_1^1+y_2^2a_1^2 & y_1^3a_2^1+y_2^2a_2^2 \end{pmatrix}_{3\times 2}\right) \\
&= \begin{pmatrix} y_1^1a_1^1+y_2^1a_1^2 & y_1^1a_2^1+y_2^1a_2^2 \\ y_1^2a_1^1+y_2^2a_1^2 & y_1^2a_2^1+y_2^2a_2^2 \end{pmatrix}_{2\times 2} \\
&= \begin{pmatrix} y_1^1 & y_2^1 \\ y_1^2 & y_2^2 \end{pmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}_{2\times 2} \\
&= \alpha_{1,2}(Y)\cdot A
\end{aligned}$$

Por tanto se cumple $\alpha_{1,2}(Y\cdot A) = \alpha_{1,2}(Y)\cdot A$. De la misma manera se prueba los demás casos.

Para cada $\alpha = \{i_1, i_2\}$ como anterior, sea $U_\alpha \subset G_2(\mathbb{R}^3)$ el conjunto de todos los 2-planos $H \in G_2(\mathbb{R}^3)$ tales que la proyección ortogonal $\pi_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2_\alpha$ sobre el subespacio generado por los vectores básicos e_{i_1}, e_{i_2}, que lleva H isomorficamente sobre $\mathbb{R}^2_\alpha$. Esto significa que para cada matriz Y de coordenadas homogéneas de H, $\alpha(Y)$ es invertible. Ver su ilustración en la siguiente gráfica.



Vamos a definir ahora una biyección $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^{1\cdot 2}$ que sea un sistema de coordenadas locales en $G_2(\mathbb{R}^3)$. Los valores de φ_α sean dados como matrices de tamaño 1×2, como se sigue: Dado un subespacio $H \in U_\alpha$, sea Y una matriz cualquiera de coordenadas homogéneas de H. Entonces definamos a φ_α por : $H \mapsto \varphi_\alpha(H) = \alpha^*(Y)\cdot\alpha(Y)^{-1}$.

Notemos que $Y_0 = Y \cdot \alpha(Y)^{-1}$ es la única matriz de coordenadas homogéneas de H tal que $\alpha(Y_0) = \alpha(Y)\cdot\alpha(Y)^{-1} = I_2$ (I_2 es la matriz identidad 2×2). Entonces φ_α esta bien definida.

Afirmamos que φ_α es uno a uno. En efecto, sean $H, K \in U_\alpha$ representados por las matrices Y_0 y Z_0 respectivamente, tal que $\alpha(Y_0) = \alpha(Z_0) = I_2$ y sea $\varphi_\alpha(H) = \varphi_\alpha(K)$. Por otro lado tenemos que $H = \begin{pmatrix} \alpha(Y_0) \\ \alpha^*(Y_0) \end{pmatrix}$ y $K = \begin{pmatrix} \alpha(Z_0) \\ \alpha^*(Z_0) \end{pmatrix}$. También tenemos que

$$\varphi_\alpha(H) = \alpha^*(Y_0)\cdot\alpha(Y_0)^{-1} = \alpha^*(Y_0) \text{ y } \varphi_\alpha(K) = \alpha^*(Z_0)\cdot\alpha(Z_0)^{-1} = \alpha^*(Z_0).$$

De aquí se tiene $H = K$.

Afirmamos que φ_α es sobreyectiva, es decir $\varphi_\alpha(U_\alpha) = \mathbb{R}^{1\cdot 2} = \mathbb{R}^2$. En efecto, dada una matriz $W \in \mathbb{R}^2$, sea $\tilde{W}$ la única matriz (3×2) tal que $\alpha^*(\tilde{W}) = W$ y $\alpha(\tilde{W}) = I_2$, de aquí se tiene $\tilde{W} = \begin{pmatrix} I_2 \\ W \end{pmatrix}$. Es claro que $\tilde{W}$ tiene rango 2. Sea H el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por las columnas de $\tilde{W}$. Entonces $H \in U_\alpha$ y $\varphi_\alpha(H) = \alpha^*(\tilde{W})\cdot\alpha(\tilde{W})^{-1} = W$.

Ahora sea $\Lambda = \{\alpha = \{i_k\}_{k=1}^2 \ / \ i_k \in \{1,2,3\} \ y \ 1 \le i_1 \le i_2 \le 3\}$ el conjunto de indices para cada vecindad coordenada. Entonces se tiene que $G_2(\mathbb{R}^3) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$.

Apliquemos los tres Lemas de esta sección para mostrar que $G_2(\mathbb{R}^3)$ es una variedad diferenciable y de dimensión 2. Las primeras dos afirmaciones ya están demostradas:

(1) Cada $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^2$ es una biyección.

(2) Los dominios U_α cubren $G_2(\mathbb{R}^3)$.

(3) Sean α y β dos subconjuntos de $\{1,2,3\}$ con dos elementos, tal que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Consideremos las aplicaciones continuas, $\widetilde{\alpha} : \mathbb{M}(1\times 2) \to \mathbb{M}(3\times 2)$ definido por $W \mapsto \widetilde{\alpha}(W) = \tilde{W}$ donde $\alpha^*(\tilde{W}) = W$, $\alpha(\tilde{W}) = I_{2\times 2}$ (identidad) y $\beta : \mathbb{M}(3\times 2) \to \mathbb{M}(2\times 2)$ definido por $Y \mapsto \beta(Y)$. Entonces $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) = (\beta\circ\widetilde{\alpha})^{-1}[GL(2,\mathbb{R})]$, de aquí $\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$ es abierto en $\mathbb{R}^2$, pues φ_α es continua. Además dado $W \in \mathbb{M}(3\times 2)$, el subespacio $H = \varphi_\alpha^{-1}(W)$ tiene por bases las columnas de la matriz $\tilde{W} = \widetilde{\alpha}(W)$. Luego,

$$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}(W) = \varphi_\beta(H) = \beta^*(\tilde{W})\cdot\beta(\tilde{W})^{-1} = \beta^*(\widetilde{\alpha}(W))\cdot\beta(\widetilde{\alpha}(W))^{-1},$$

entonces $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$ es diferenciable, de manera análoga $\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}$ es diferenciable, por tanto $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$ es un difeomorfismo (por supuesto de clase C^∞).

Como ejemplo, sea $H \in U_{\{1,2\}}$ que es representado por la matriz $Y_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$.

Entonces la matriz representativa de H es;

$$H_{\{1,2\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Si $H \in U_{\{1,3\}}$, es decir, sus filas 1 y 3 son linealmente independiente, se tiene que $y \neq 0$ y la matriz representativa de H en $U_{\{1,3\}}$ es dada por la matriz:

$$H_{\{1,3\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & y \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

donde la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & y \end{pmatrix}_{2\times 2}$ tiene que ser invertible, así $y \neq 0$ y tendrá la forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{-x}{y} & \dfrac{1}{y} \end{pmatrix}_{2\times 2}$ entonces

$$H_{\{1,3\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{-x}{y} & \dfrac{1}{y} \end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{-x}{y} & \dfrac{1}{y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 2}.$$

Luego, $\varphi_{\{1,3\}} \circ \varphi^{-1}_{\{1,2\}}(x,y) = \left(\dfrac{-x}{y}, \dfrac{1}{y}\right)$, el cual es diferenciable, puesto que $y \neq 0$.

(4) Por el Lema 1.1, las $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ biyecciones $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^2$ define una topología en $G_2(\mathbb{R}^3)$, en relación al cual forma un atlas $\mathcal{A}$ diferenciable. Y el atlas esta dado por:

$$\mathcal{A} = \{(U_{\{1,2\}}, \varphi_{\{1,2\}}), (U_{\{1,3\}}, \varphi_{\{1,3\}}), (U_{\{2,3\}}, \varphi_{\{2,3\}})\}$$

es finito, entonces su topología posee una base numerable (por Lema 1.2).

(5) $G_2(\mathbb{R}^3)$ es un espacio de Hausdorff.

En efecto, sean $\alpha \neq \beta$ y $W_i \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ una sucesión que tiende para $W \in \varphi_\alpha(U_\alpha - U_\beta)$. Entonces $\beta(\widetilde{\alpha}(W))$ no es invertible, pues $W \notin \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ si, y solamente si $\beta(\widetilde{\alpha}(W)) \notin GL(\mathbb{R}^2)$. Luego la sucesión $[\beta(\widetilde{\alpha}(W_i))]^{-1}$ no converge y por tanto $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(W_i) = \beta^*(\widetilde{\alpha}(W_i)) \cdot [\beta(\widetilde{\alpha}(W_i))]^{-1}$ no converge. Ahora aplicando el Lema 1.3, $G_2(\mathbb{R}^3)$ es de Hausdorff.

En conclusión la variedad de Grassmann $G_2(\mathbb{R}^3)$ tiene dimensión 2.

Este ejemplo se puede generalizar, es decir la Variedad de Grassmann $G_r(\mathbb{R}^{n+r})$ es el conjunto de todos los subespacio vectoriales de dimensión r del espacio euclidiano $\mathbb{R}^{n+r}$. Además con la misma técnica de la prueba del ejemplo anterior se llega a probar que $G_r(\mathbb{R}^{n+r})$ es una variedad diferenciable de dimensión r.

1.4. El Espacio Tangente y Cotangente

Sea M una variedad diferenciable y p un punto de M. Sea $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ una familia indizada de todas las vecindades coordenadas de M que contiene al punto p y sus correspondientes aplicaciones coordenadas.

Para cada par de índices α y β podemos introducir la transformación coordenada $\psi_\alpha^\beta = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ definido sobre $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$. De esta manera obtenemos la familia $\{\psi_\alpha^\beta\}$ de aplicaciones doblemente indizada. (ver Figura 1-4)

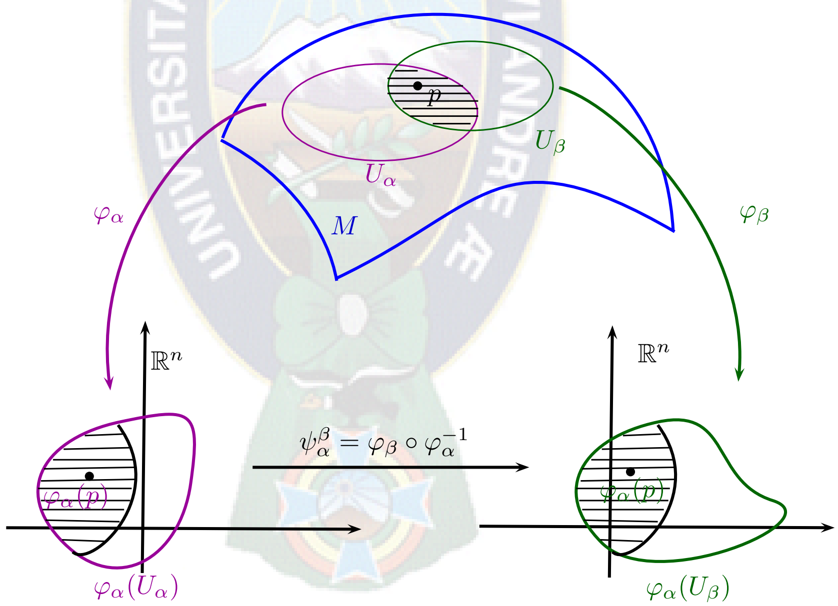


Figura 1-4

Si γ es un tercer índice, entonces

$$\psi_\beta^\gamma \circ \psi_\alpha^\beta = \varphi_\gamma \circ \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} = \varphi_\gamma \circ \varphi_\alpha^{-1} = \psi_\alpha^\gamma$$

sobre $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma)$. Las relaciones $\psi_\beta^\gamma \circ \psi_\alpha^\beta = \psi_\alpha^\gamma$ sera llamada ***relaciones de compatibilidad*** de la familia de transformaciones coordenada en p.

Se debe notar que el dominio y el rango de la aplicación ψ_α^β son subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, de tal manera que ψ_α^β tenga la forma explícita (ver Figura 1-5)

$$\psi_\alpha^\beta(x_1,...,x_n) = (g_1(x_1,...,x_n),...,g_n(x_1,...,x_n)) = (y_1,...,y_n)$$

donde $(x_1,...,x_n)$ recorre los puntos del conjunto $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$. Los números $x_1,...,x_n$ puede ser visto como las coordenadas de los puntos $\varphi_\alpha^{-1}(x_1,...,x_n)$ en U_α y los números $y_1,...,y_n$ como coordenadas del *mismo punto* $\varphi_\beta^{-1}(y_1,...,y_n)$ en U_β si $(y_1,...,y_n) = \psi_\alpha^\beta(x_1,...,x_n)$.

Entonces hay dos sistemas de coordenadas para los puntos de $U_\alpha \cap U_\beta$, y ψ_α^β describe las relaciones de un sistema de coordenadas al otro.

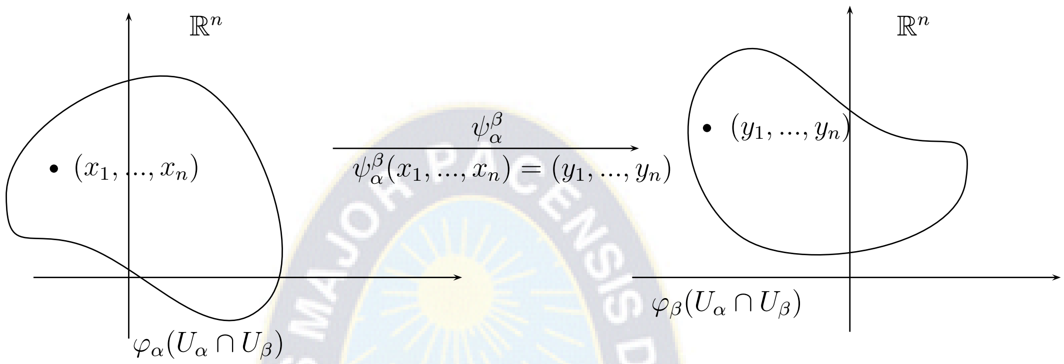


Figura 1-5

Sean $x^0 = \varphi_\alpha(p)$ y $y^0 = \varphi_\beta(p)$, tal que $y^0 = \psi_\alpha^\beta(x^0)$. La transformación coordenada $\psi_\alpha^\beta : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ induce la aplicación lineal $\psi_{\alpha*}^\beta : T_{x^0}\mathbb{R}^n \to T_{y^0}\mathbb{R}^n$ del espacio tangente para $\mathbb{R}^n$ en x^0 hacia el espacio tangente en $\psi_{\alpha*}^\beta(x^0) = y^0$. Por simplicidad se esta tomando la notación $\psi_{\alpha*}^\beta = D\psi_\alpha^\beta(x^0)$. Las relaciones de compatibilidad $\psi_\beta^\gamma \circ \psi_\alpha^\beta = \psi_\alpha^\gamma$ implica las relaciones de compatibilidad $\psi_{\beta_*}^\gamma \circ \psi_{\alpha*}^\beta = \psi_{\alpha*}^\gamma$ para inducir aplicaciones lineales. Además, $\psi_{\alpha*}^\alpha$ es la aplicación identidad, de modo que $\psi_{\alpha*}^\beta$ es no singular pues su inversa es $\psi_{\beta_*}^\alpha$. La familia de vecindades coordenadas de p produce una familia de espacios vectoriales n-dimensional que se une de acuerdo a las relaciones de compatibilidad.

$$\psi_{\beta_*}^\gamma \circ \psi_{\alpha*}^\beta = \psi_{\alpha*}^\gamma$$

De modo similar, ψ_α^β también induce una aplicación no singular $\psi_\alpha^{\beta^*}$ del espacio cotangente $T_{y^0}^*\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^n$ hacia el espacio cotangente $T_{x^0}^*\mathbb{R}^n$. La familia resultante de espacios vectoriales n-dimensionales se interrelaciona por las relaciones de compatibilidad $\psi_\alpha^{\beta^*} \circ \psi_\beta^{\gamma^*} = \psi_\alpha^{\gamma^*}$.

Sea $\mathfrak{J}(p)$ el conjunto de todos los pares (x,α), donde $x = \varphi(p)$ para alguna aplicación coordenada φ y α es un vector tangente para $x \in \mathbb{R}^n$. El símbolo α que denota un vector tangente para $\mathbb{R}^n$, no debe confundirse con el índice α para vecindades coordenadas. Por tanto:

$$\mathfrak{J}(p) = \{(x,\alpha)\ /\ x = \varphi(p),\ \ para\ algún\ \varphi, x \in T_x\mathbb{R}^n\}$$

Definición 1.8. *Sean (x, α) y (x', α') dos pares de $\mathfrak{J}(p)$. Decimos que (x, α) es equivalente a (x', α'), o, mas precisamente, que α y α' representa el mismo vector tangente en p, cuando $x' = \psi(x)$ y $\alpha' = \psi_*(\alpha)$ para alguna transformación coordenada ψ en p. En Símbolo:*

$$(x, \alpha) \sim (x', \alpha') \text{ si, y solamente si } x' = \psi(x) \wedge \alpha' = \psi_*(\alpha)$$

Lo anterior definido, es una relación de equivalencia en $\mathfrak{J}(p)$. En efecto, para su demostración se debe mostrar que es Reflexiva, Simétrica y Transitiva:

Reflexiva: Sea $(x, \alpha) \in \mathfrak{J}(p)$ [por demostrar que $(x, \alpha) \sim (x, \alpha)$]. Sea $\psi(x) = \varphi \circ \varphi^{-1}(x) = Id(x)$ entonces su aplicación lineal $\psi_*(x)$ es la aplicación identidad tal que $\psi_*(\alpha) = D\psi(\alpha) = dId(\alpha) = \alpha$. Por tanto, el par (x, α) es equivalente a (x, α).

Simétrica: Sea $(x, \alpha), (x', \alpha') \in \mathfrak{J}(p)$ [por demostrar, que si $(x, \alpha) \sim (x', \alpha')$ entonces $(x', \alpha') \sim (x, \alpha)$]. En efecto, como $(x, \alpha) \sim (x', \alpha')$ entonces por definición de equivalencia $x' = \psi(x)$ y $\alpha' = \psi_*(\alpha)$. Por otro lado, la transformación coordenada ψ es no singular, entonces existe su inversa ψ^{-1} que también es una transformación coordenada, tal que $x = \psi^{-1}(x')$ y $\alpha = \psi_*^{-1}(\alpha')$, esto significa que $(x', \alpha') \sim (x, \alpha)$.

Transitiva: Sean $(x, \alpha), (x', \alpha'), (x'', \alpha'') \in \mathfrak{J}(p)$. Por demostrar que si $(x, \alpha) \sim (x', \alpha')$ y $(x', \alpha') \sim (x'', \alpha'')$ entonces $(x, \alpha) \sim (x'', \alpha'')$. En efecto, como $(x, \alpha) \sim (x', \alpha')$ entonces por definición de equivalencia $x' = \psi(x)$, $\alpha' = \psi_*(\alpha)$ y también como $(x', \alpha') \sim (x'', \alpha'')$ entonces $x'' = \phi(x')$, $\alpha'' = \phi_*(\alpha')$. Entonces reemplazando y utilizando la definición de composición tenemos, $x'' = \phi \circ \psi(x)$ y $\alpha'' = \phi_* \circ \psi_*(\alpha)$, así $\alpha'' = (\phi \circ \psi)_*(\alpha)$, luego existe una transformación coordenada $\phi \circ \psi$ que cumple la anterior condición, así concluimos que el par (x, α) es equivalente a (x'', α'').

La *clase de equivalencia* de pares es llamado ***vector tangente*** en el punto $\boldsymbol{p \in M}$. Denotemos la clase de equivalencia que contiene al par (x, α) por $\{\alpha\}$, es decir $\{\alpha\} = [(x, \alpha)]$. Donde $[(x, \alpha)] = \{(x', \alpha') \in \mathfrak{J}(p) \ / \ (x, \alpha) \sim (x', \alpha')\}$.

Ahora podemos introducir operaciones vectoriales entre los vectores tangentes para $p \in M$. Supongamos que (x, α) y (x', α') son elementos equivalentes de $\mathfrak{J}(p)$, tal que $x' = \psi(x)$ y $\alpha' = \psi_*(\alpha)$. Sea β un segundo vector tangente en $x \in E^n$ y $\beta' = \psi_*(\beta)$. Puesto que ψ_* es una aplicación lineal, entonces

$$a\alpha' + b\beta' = \psi_*(a\alpha + b\beta).$$

donde a y b son escalares, y en consecuencia $(x, a\alpha + b\beta)$ es equivalente para $(x', a\alpha' + b\beta')$. Por tanto podemos legítimamente definir:

$$a\{\alpha\} + b\{\beta\} = \{a\alpha + b\beta\}$$

Bajo esta definición, el conjunto T_pM de todos los vectores tangentes para $p \in M$, se vuelve un espacio vectorial, con la misma estructura algebraica que el espacio tangente para $x \in \mathbb{R}^n$. T_pM es llamado el *espacio tangente* para $p \in M$.

El espacio cotangente T_p^*M para $p \in M$, puede definirse similar mente, y tendrá la estructura algebraica del espacio cotangente para $x \in \mathbb{R}^n$. Tal como se definió los vectores tangentes podemos de un modo similar, definir diferenciales sobre $p \in M$. Es decir, *sea $\mathfrak{J}^*(p)$ el conjunto de todos los pares (x, λ), donde $x = \varphi(p)$ para alguna aplicación coordenada φ y λ es una diferencial en x.* En símbolo:

$$\mathfrak{J}^*(p) = \{(x, \lambda)/x = \varphi(p), \ \ \textit{para algún } \varphi, \lambda \in T_x^*\mathbb{R}^n\}$$

Definición 1.9. *Dos pares (x, λ) y (x', λ') de $\mathfrak{J}^*(p)$ son equivalente, o que λ y λ' representa la misma diferencial en p, cuando $x' = \psi(x)$ y $\lambda = \psi^*(\lambda')$ para alguna transformación coordenada ψ en p. En símbolo:*

$$(x, \lambda) \sim (x', \lambda') \ \textit{si, y solamente si } x' = \psi(x) \wedge \lambda = \psi^*(\lambda')$$

Afirmamos que la definición 1.9 es una relación de equivalencia, su demostración es lo mismo que se hizo para la definición 1.8, con este comentario queda demostrado.

Denotemos la clase de equivalencia que contiene al par (x, λ) por $\{\lambda\}$, se llamara la diferencial de $p \in M$, que significa $\{\lambda\} = [(x, \lambda)]$. Donde $[(x, \lambda)] = \{(x', \lambda') \in \mathfrak{J}^*(p)/(x', \lambda') \sim (x, \lambda)\}$.

Introduciendo las operaciones vectoriales en las diferenciales para $p \in M$. Supongamos que (x, λ) es equivalente a (x', λ'), entonces por la definición 1.9, existe una transformación coordenada ψ tal que $x' = \psi(x)$, $\lambda = \psi^*(\lambda')$. Sea μ una diferencial para $\mathbb{R}^n$ en x tal que $\mu = \psi^*(\mu')$. Por otro lado tenemos que ψ^* es una transformación lineal, entonces

$$a\lambda + b\mu = a\psi^*(\lambda') + b\psi^*(\mu') = \psi^*(a\lambda' + b\mu')$$

de aquí $(x, a\lambda + b\mu)$ es equivalente a $(x', a\lambda' + b\mu')$. Luego definamos, $a\{\lambda\} + b\{\mu\} = \{a\lambda + b\mu\}$, con esta definición el conjunto T_p^*M de todos las diferenciales para $p \in M$ se vuelve en un espacio vectorial.

1.5. Aplicaciones Diferenciables y sus Transformaciones Lineales Inducidas

Sea M y $\bar{M}$ dos variedades diferenciables, de dimensiones n y m respectivamente. Sean $\sigma : M \to \bar{M}$ una aplicación diferenciable, $p \in M$, T_pM el espacio tangente en $p \in M$ y $\bar{T}_q\bar{M}$ el espacio tangente en $q \in \bar{M}$ con $q = \sigma(p)$. Deseamos obtener una transformación lineal

$\sigma_* : T_pM \to \bar{T}_q\bar{M}$ de la aplicación $\sigma : M \to \bar{M}$. Donde $\sigma_* = D\sigma(p)$. Para esto trabajaremos en la transformación lineal del espacio tangente a $\mathbb{R}^n$ que es inducido por σ, cuando introduzcamos vecindades coordenadas de p y q.

Sean U una vecindad coordenada del punto $p \in M$ y $\bar{U}$ una vecindad coordenada de $q \in \bar{M}$. Sean φ y $\bar{\varphi}$ las aplicaciones coordenadas correspondientes. Entonces $\sigma : M \to \bar{M}$ induce una aplicación diferenciable $\sigma_1 : \varphi(U) \to \bar{\varphi}(\bar{U})$ dado por $\sigma_1 = \bar{\varphi} \circ \sigma \circ \varphi^{-1}$ que a su vez, induce una transformación lineal $\Sigma(U, \bar{U}) = \sigma_{1*}$ del espacio tangente $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ hacia el espacio tangente $\bar{T}_{\bar{\varphi}(q)}\mathbb{R}^m$. En resumen, cada par $U, \bar{U}$ de vecindades coordenadas da lugar, de una manera natural a una transformación lineal $\Sigma(U, \bar{U}) : T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n \to \bar{T}_{\bar{\varphi}(q)}\mathbb{R}^m$ (ver Figura 1-6).

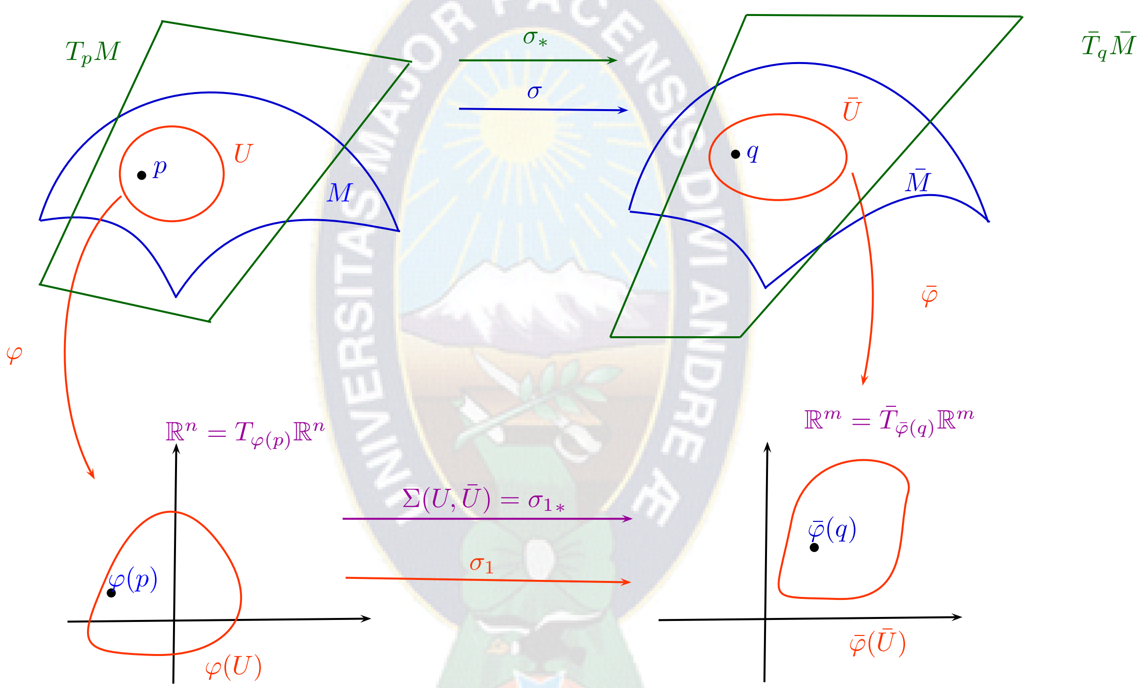


Figura 1-6

Trabajaremos, en las relaciones entre las transformaciones lineales $\Sigma(U, \bar{U})$. Sea $U', \bar{U}'$ otro par de vecindades coordenadas y φ', $\bar{\varphi}'$ las aplicaciones coordenadas correspondientes. Sean $\psi = \varphi' \circ \varphi^{-1}$ y $\bar{\psi} = \bar{\varphi}' \circ \bar{\varphi}^{-1}$ las transformaciones coordenadas correspondiente. De $\sigma_1' = \bar{\varphi}' \circ \sigma \circ \varphi'^{-1} = \bar{\psi} \circ \sigma_1 \circ \psi^{-1}$ obtenemos,

$$\Sigma(U', \bar{U}') = \bar{\psi}_* \circ \Sigma(U, \bar{U}) \circ \psi_*^{-1} \tag{1.7.1}$$

Ahora encontramos una transformación lineal bien-definida $\sigma_* : T_pM \to \bar{T}_p\bar{M}$ de la familia de aplicaciones $\Sigma(U, \bar{U})$.

Sea $\theta_* = D\varphi^{-1}(\varphi(p))$ el isomorfismo natural de $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ hacia T_pM dado por $\theta_*(\alpha) = \{\alpha\}$ (para demostrar que θ_* es un isomorfismo se debe mostrar que es inyectiva, sobreyectiva y que sea una transformación lineal).

θ_* **es Inyectiva:** Sean $\alpha \in T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ y $\theta_*(\alpha) = \{0\}$ entonces $[(x,\alpha)] = [(x,0)]$, esta igualdad de clases significa que (x,α) es equivalente a $(x,0)$ entonces por la definición 1.8, $x = \psi(x)$ y $0 = \psi_*(\alpha)$, entonces como ψ_* es inyectiva se tiene que $\alpha = 0$.

θ_* **es Sobreyectiva:** Tomando cualquier vector tangente $\{\alpha\} \in T_pM$, existe un elemento $\theta_*^{-1}(\{\alpha\})$ tal que $\theta_*(\theta_*^{-1}(\{\alpha\})) = \theta_*(\theta_*^{-1}(\theta_*(\alpha))) = \theta_*(\alpha) = \{\alpha\}$. Se utilizó la definición de θ_*, la inyectividad o inversa a izquierda de θ_* y por último la definición de θ_*.

θ_* **es Transformación Lineal:** Sea $\{\alpha\}, \{\beta\} \in T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces,

$$\theta_*(a\alpha + b\beta) = \{a\alpha + b\beta\} = a\{\alpha\} + b\{\beta\} = a\theta_*(\alpha) + b\theta_*(\beta)$$

Se utilizó la definición de θ_*, la definición de suma de clases o suma de vectores tangentes y luego la definición de θ_*.

Dado el par (U,φ) en M, y sea $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$, entonces la base para el Espacio Tangente T_pM es dado por $B_p = \{\frac{\partial}{\partial \varphi_1}, ..., \frac{\partial}{\partial \varphi_n}\}$ que es aplicada por el isomorfismo θ_* con $\theta = \varphi^{-1}$ en la base canónica $\{e_1, ..., e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ es decir:

$$\theta_*(e_i) = \partial\varphi^{-1}(\varphi(p))(e_i) = \frac{\partial}{\partial \varphi_i}(p)$$

para $i = 1, ..., n$.

Sea $\bar{\theta}_* : \bar{T}_{\bar{\varphi}(p)}\mathbb{R}^m \to \bar{T}_p\bar{M}$ un isomorfismo, para su prueba se procede de la misma manera que el isomorfismo θ_* que se probo anteriormente. Entonces obtenemos una transformación lineal $\sigma_* : T_pM \to \bar{T}_q\bar{M}$ definido por $\sigma_* = \bar{\theta}_* \circ \Sigma(U,\bar{U}) \circ \theta_*^{-1}$. Si cambiamos el par $U, \bar{U}$ por el par $U', \bar{U}'$ el isomorfismo $\theta'_* : T_{\varphi'(p)}\mathbb{R}^n \to T_pM$ y $\bar{\theta}_* : \bar{T}_{\bar{\varphi}'(q)}\mathbb{R}^m \to \bar{T}_q\bar{M}$ satisfacen $\theta'_* = \theta_* \circ \psi_*^{-1}$ y $\bar{\theta}'_* = \bar{\theta}_* \circ \bar{\psi}_*^{-1}$. Ahora, usando la relación (1.7.1), obtenemos lo siguiente:

$$\bar{\theta}'_* \circ \Sigma(U',\bar{U}') \circ \bar{\theta}'^{-1}_* = \bar{\theta}_* \circ \Sigma(U,\bar{U}) \circ \bar{\theta}_*^{-1}$$

y vemos que la definición de σ_* es independiente de la elección del par $U, \bar{U}$ de vecindades coordenadas. Por lo tanto hemos probado que $\sigma : M \to \bar{M}$ induce en una manera natural una transformación lineal en el espacio tangente para cada $p \in M$.

De la misma manera, $\sigma : M \to \bar{M}$ induce una transformación lineal $\sigma^* : \bar{T}_q^*\bar{M} \to T_p^*M$, donde $\bar{T}_q^*\bar{M}$ es el *espacio cotangente* para $q \in \bar{M}$ y T_p^*M es el *espacio cotangente* para $p \in M$. Los detalles de la construcción de σ^* son análogos al anterior.

En la prueba del proximo teorema veremos como se comporta la aplicación diferenciable $\sigma : M \to \bar{M}$ con su aplicación lineal inducida $\sigma_* : T_pM \to \bar{T}_q\bar{M}$ localmente sobre una vecindad de $p \in M$. Es decir, $\sigma : M \to \bar{M}$ es uno a uno en una vecindad coordenada de p si y sólo si $\sigma_* : T_pM \to \bar{T}_q\bar{M}$ es uno a uno, y además σ aplica adecuadamente vecindades locales de p hacia conjuntos abiertos si y sólo si σ_* es sobreyectiva.

Definición 1.10. *Si la transformación lineal inducida $\sigma_* : T_pM \to \bar{T}_q\bar{M}$ es uno a uno en un punto $p \in M$, la aplicación diferenciable $\sigma : M \to \bar{M}$ se dice que es* **regular** *en el punto p. Si σ es regular en cada punto de M, diremos que σ es regular.*

Teorema 1.2. *Sean M y $\bar{M}$ variedades diferenciables de dimensiones n y r respectivamente, y sea $\sigma : M \to \bar{M}$ una aplicación diferenciable. Sea p un punto de M. Entonces σ es regular en p si y sólo si existen una vecindad W de $\sigma(p)$ y una aplicación diferenciable $\tau : W \to M$ tal que $\tau(W)$ es un conjunto abierto y $\tau \circ \sigma$ es la aplicación identidad en $\tau(W)$.*

Demostración. Supongamos que σ es regular en p. Como σ es diferenciable en M, en particular σ es diferenciable en $p \in M$, entonces existen cartas locales (U, φ) en M y (V, ψ) en $\bar{M}$ con $p \in U$ y $\sigma(U) \subset V$ tales que $\psi \circ \sigma \circ \varphi^{-1} = \sigma_1 : \varphi(U) \to \psi(V)$ es diferenciable en el punto $\varphi(p) \in \mathbb{R}^n$. Por otro lado como σ_* es uno a uno, en el punto p, entonces σ_{1*} es uno a uno, en el punto $\varphi(p)$. En el espacio euclidiano se cumple el Teorema 1.2, entonces existen una vecindad W_1 del punto $\sigma_1(\varphi(p))$ y una aplicación diferenciable $\tau_1 : W_1 \to \mathbb{R}^n$ tal que $\sigma_1(W_1)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$ y $\sigma_1 \circ \tau_1 = I$ (identidad) en $\tau_1(W_1)$. Sea $W = \psi^{-1}(\tau_1(W_1))$, entonces W es una vecindad del punto $\psi^{-1}(\sigma_1(\varphi(p)))$ y sea $\tau = \varphi^{-1} \circ \tau_1 \circ \psi$ definido en W, entonces $\tau(W) = \tau(\psi^{-1}(\sigma_1(W_1)) = \varphi^{-1}(\tau_1(W_1))$ es un conjunto abierto. Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\tau \circ \sigma &= (\varphi^{-1} \circ \tau_1 \circ \psi) \circ (\psi^{-1} \circ \sigma_1 \circ \varphi) \\
&= \varphi^{-1} \circ \tau_1 \circ \sigma_1 \circ \varphi \\
&= \varphi^{-1} \circ \varphi \\
&= I \quad en\ \tau(W)
\end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que $\tau \circ \sigma = I$ en $\tau(W)$ con $p \in \tau(W)$, entonces $\tau_* \circ \sigma_* = I_*$ (I_* aplicación lineal identidad), de aquí se deduce que σ_* es uno a uno, por tanto σ es regular en p. □

Teorema 1.3. *Sean M y $\bar{M}$ variedades diferenciables de dimensiones n y r respectivamente, y sea $\sigma : M \to \bar{M}$ una aplicación diferenciable. Sean $p \in M$, y $\sigma_* : T_pM \to \bar{T}_{\sigma(p)}\bar{M}$ la transformación lineal que σ induce en el espacio tangente para $p \in M$. Entonces σ_* es sobre si y sólo si existe un vecindad W de $\sigma(p)$ y una aplicación diferenciable $\tau : W \to M$ tal que $\sigma \circ \tau$ es la aplicación identidad en W.*

Demostración. Supongamos que $\sigma_*: T_pM \to \bar{T}_{\sigma(p)}\bar{M}$ es sobre. Como σ es diferenciable en M, en particular es diferenciable en $p \in M$, entonces existen cartas locales (U, φ) en M y (V, ψ) en $\bar{M}$ con $p \in U$ y $\sigma(U) \subset V$ tales que $\psi \circ \sigma \circ \varphi^{-1} = \sigma_1 : \varphi(U) \to \psi(V)$ es diferenciable en el punto $\varphi(p) \in \mathbb{R}^n$. En espacios euclidianos se cumple el Teorema 1.3 entonces existe una vecindad W_1 del punto $\sigma_1(\varphi(p))$ y una aplicación diferenciable $\tau_1 : W_1 \to M$ tal que $\sigma_1 \circ \tau_1 = I$ (identidad) en W_1.

Sea $W = \psi^{-1}(W_1)$ entonces W es una vecindad del punto $\psi^{-1}(\sigma_1(\varphi(p)) = \sigma(p)$. Sea $\tau = \varphi^{-1} \circ \tau_1 \circ \psi$. Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\sigma \circ \tau &= (\psi^{-1} \circ \sigma_1 \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \tau_1 \circ \psi) \\
&= \psi^{-1} \circ \sigma_1 \circ \tau_1 \circ \psi \\
&= \psi^{-1} \circ \psi \\
&= I \quad en\, W = \psi^{-1}(W_1)
\end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que $\sigma \circ \tau = I$ (identidad) en W, entonces $\sigma_* \circ \tau_* = I_*$, de aquí se deduce que τ_* es sobre. $\square$

Como observación, el espacio tangente T_pM y el cotangente T_p^*M que son duales entre si. Sea $F : M \to N$ la aplicación definida en la variedad diferenciable M. Además las aplicaciones lineales digamos $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ y $F^* : T^*_{F(p)}N \to T_p^*M$ se comporta como adjunta, es decir:

$$\langle F_*(\alpha), \lambda \rangle = \langle \alpha, F^*(\lambda) \rangle \tag{1.1}$$

donde $\alpha \in T_pM$ y $\lambda \in T_{F(p)}N$.

2

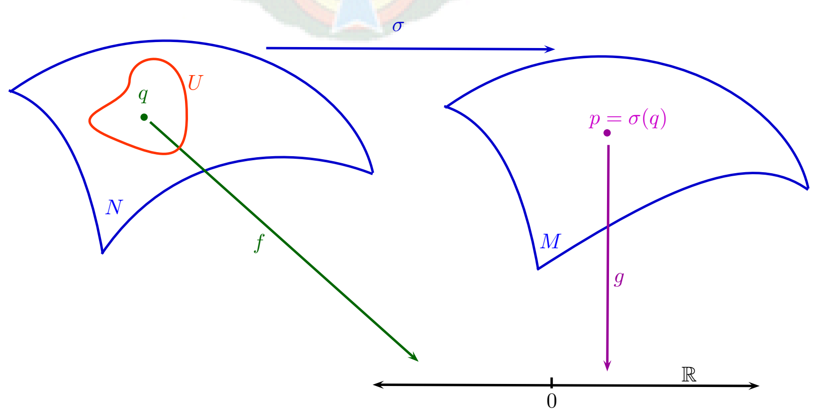
Subvariedades y Espacios Paracompactos

2.1. Subvariedades

La noción general de subvariedad en una variedad diferenciable es pensar por ejemplo en una variedad diferenciable en $\mathbb{R}^n$. En términos generales, *un subconjunto M' de una variedad diferenciable M es una subvariedad si este es una variedad diferenciable cuya estructura es obtenido de la estructura diferenciable de M.* Esto significa que las funciones diferenciables en M' deben ser localmente las restricciones de funciones diferenciables en M.

Teorema 2.1. *Sea M y N variedades diferenciables de dimensiones m y r respectivamente. Sean $\sigma : N \to M$ una aplicación diferenciable y $q \in N$. Si para cada función $f : N \to \mathbb{R}$ diferenciable en q, existen una vecindad U de q y una función $g : M \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\sigma(q)$, tal que $g \circ \sigma(q') = f(q')$ para todo $q' \in U$, entonces σ es regular en q.*

Demostración. Interpretando geométricamente el Teorema 2.1



Sean $p = \sigma(q)$, V una vecindad coordenada de q con su respectiva aplicación coordenada ψ, y $(x_1, ..., x_r)$ las coordenadas en V, es decir, las coordenadas del punto q en la aplicación coordenada ψ son $(x_1(q), ..., x_r(q))$. Existen funciones $f_1, ..., f_r : V \to \mathbb{R}$ diferenciables, tal que $dx_i = df_i$ en q, para $i = 1, ..., r$. Por la hipótesis, existe una vecindad U de q y existen funciones $g_1, ..., g_r : M \to \mathbb{R}$ diferenciables en p, tal que $f_i(q') = g_i \circ \sigma(q')$ para $q' \in U$, $i = 1, ..., r$. Luego si $\sigma^* : T_p^*M \to T_q^*N$ es una transformación lineal, inducido por σ, entonces $dx_i(q) = \sigma^*(dg_i(\sigma(q)))$ para $i = 1, ..., r$, por simplicidad pongamos $dx_i = \sigma^*(dg_i)$ en q.

Para demostrar que la transformación lineal $\sigma_* : T_qN \to T_pM$ inducida por σ sea inyectiva, supongamos que $\alpha \in T_qN$ con $\sigma_*(\alpha) = 0$. Entonces $\langle \sigma_*(\alpha), dg_j \rangle = 0$ para $j = 1, \ldots, r$. Así $\langle \alpha, \sigma^*(dg_j) \rangle = 0$ entonces $\langle \alpha, dx_j \rangle = 0$ para $j = 1, ..., r$ pues $\langle \alpha, \sigma^*(dg_j) \rangle = \langle \sigma_*(\alpha), dg_j \rangle$ por (1.1). Luego $\alpha = 0$, pues dx_j es elemento de la base del espacio cotangente T_q^*N. De aquí se deduce que σ_* es una aplicación uno a uno en α, por tanto σ es regular en q. $\square$

Definición 2.1. *Sean M una variedad diferenciable y M' un subconjunto de M. Se dice que M' es una **subvariedad** de M si existen una variedad diferenciable N y una aplicación diferenciable $\sigma : N \to M$ tal que las siguiente condiciones satisfacen:*

1. *σ es uno a uno.*
2. *$\sigma(N) = M'$.*
3. *Para cada función diferenciable $f : N \to \mathbb{R}$ en N y cada punto $q \in N$ existe una vecindad U de q y una función diferenciable $g : M \to \mathbb{R}$ en $\sigma(q)$, tal que $g \circ \sigma(x) = f(x)$ para todo $x \in U$.*

Ahora enunciamos el recíproco del Teorema 2.1.

Teorema 2.2. *Si M y N son variedades diferenciables y $\sigma : N \to M$ es una aplicación diferenciable regular, entonces para cada punto $q \in N$ y cada función $f : N \to \mathbb{R}$ diferenciable en N, existe una vecindad U de q y una función diferenciable $g : M \to \mathbb{R}$ tal que $g \circ \sigma = f$ en U.*

Demostración. Se sabe que $\sigma : N \to M$ es una aplicación diferenciable y regular en N, en particular σ es regular en $q \in N$, entonces por el Teorema 1.2 existe una vecindad W del punto $\sigma(q)$ y una aplicación $\tau : W \to N$ tal que $\tau(W)$ es un conjunto abierto y $\tau \circ \sigma = I$ identidad en $\tau(W)$. Consideremos que $\tau(W) = U$.

Tomando la función f diferenciable en $q \in N$. Sea $g = f \circ \tau : W \to \mathbb{R}$, entonces g es una función diferenciable en $\sigma(q)$. Por otro lado, $g \circ \sigma = f \circ \underline{\tau \circ \sigma} = f \cdot \underline{I}$ en $\tau(W) = U$ que es una vecindad de q. Por tanto $g \circ \sigma = f$ en U.

$\square$

De acuerdo a los Teoremas 2.1 y 2.2 decimos que, sí un subconjunto M' de M es una subvariedad de la variedad diferenciable M, si existe una variedad diferenciable N y una aplicación diferenciable regular, uno a uno $\sigma : N \to M$ tal que $M' = \sigma(N)$. Notemos que la estructura de una subvariedad M' que esta contenido en una variedad diferenciable M es únicamente determinado por la estructura diferenciable de M.

Sean M' una subvariedad de M y $\sigma : M' \to M$ definido por $\sigma(p) = p$. Entonces σ es una aplicación diferenciable regular. Si $p \in M'$, existe una vecindad V de $\sigma(p)$ en M y una aplicación diferenciable $\tau : V \to M'$ tal que $U = \tau(V)$ es una vecindad de q en M' y $\tau \circ \sigma = I$ identidad en U. Se sigue que $\tau(p) = p$ para los puntos $p \in V$ y $U = V \cap M'$. Si g es una función diferenciable en V, entonces $f = g \circ \sigma$ es la restricción de g a M'. En términos de transformación lineal inducida $\sigma^* : T_p^*M \to T_p^*M'$ de espacios cotangentes en $\sigma(p) = p$, tenemos $df = \sigma^*(dg)$.

2.2. Ejemplo

En esta sección mostraremos que $\mathbb{S}^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^3$, haciendo cumplir las tres condiciones de la definición de subvariedad. Además la dimensión de $\mathbb{S}^2$ es menor que la dimensión de $\mathbb{R}^3$. Por otro lado, mostraremos que $\mathbb{S}^n$ y $\mathbb{R}^n$ son variedades diferenciables.

Sea $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1\}$ la esfera unitaria n-dimensional. Consideremos las aplicaciones

$$\varphi_{kj} : U_{kj} \to \mathbb{R}^n, \qquad \varphi_{kj}(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) = (x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_{n+1})$$

donde $U_{kj} = \{(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n / (-1)^j x_k > 0\}$, $j = 0, 1$ y $k = 1, 2, ..., n+1$. Entonces $\{(U_{kj}, \varphi_{kj})\}$ es un atlas para $\mathbb{S}^n$ (denominado *atlas de los hemisferios*).
Veamos, en primer lugar, que (U_{kj}, φ_{kj}) es una carta n-dimensional para todo k y todo j. Un punto $t = (t_1, t_2, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n$ esta en la imagen U_{kj} si existe un valor $t_0 \in (-1, 1)$ tal que $(t_1, t_2, ..., t_{k-1}, t_0, t_{k+1}, ..., t_n) \in U_{kj}$. Entonces $t_1^2 + t_2^2 + ... + t_n^2 = 1 - t_0^2 < 1$ por lo que t está en la bola abierta unitaria $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$. Además, se afirma que φ_{kj} es inyectiva, pues si, $\varphi_{kj}(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) = \varphi_{kj}(w_1, w_2, ..., w_{n+1})$ entonces $x_i = w_i$ para todo $i \neq k$, lo que también implica que $x_k = (-1)^j(1 - \sum_{i \neq j} x_i^2) = (-1)^j(1 - \sum_{i \neq j} w_i^2) = w_k$. En segundo lugar mostraremos, $\bigcup_{k,j} U_{kj} = \mathbb{S}^n$, ya que si $x = (x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n$ entonces $x \neq 0$ por lo que tiene alguna componente $x_k \neq 0$. Si $x_k > 0$ se tiene que $x \in U_{k0}$, mientras que $x_k < 0$ entonces $x \in U_{k1}$.

Notemos también que su aplicación inversa esta dado por

$$\varphi_{kj}^{-1} : B_0^n(1) \to U_{kj} \subset \mathbb{S}^n$$

definido cuando la coordenada $k - esima$ es igual a

$$(-1)^j \left(1 - \sum_{i \neq k} (x_i)^2\right)^{1/2}.$$

Finalmente, para analizar las transformaciones coordenadas (cambios de coordenadas), vamos a considerar, sin pérdida de generalidad, las cartas (U_{10}, φ_{10}) y (U_{20}, φ_{20}), cuya intersección es el subconjunto de la esfera $\mathbb{S}^n$ dado por $U_{10} \cap U_{20} = \{x \in \mathbb{S}^n / \ x_1 > 0, x_2 > 0\}$. La transformación coordenada, $\varphi_{20} \circ \varphi_{10}^{-1} : \varphi_{10}(U_{10} \cap U_{20}) \to \varphi_{20}(U_{10} \cap U_{20})$, donde su dominio es, $\varphi_{10}(U_{10} \cap U_{20}) = \varphi_{20}(U_{10} \cap U_{20})$ es el conjunto $\{(t_1, ..., t_n) \in B(0,1)/ \ t_1 > 0\}$, esta definido por:

$$\varphi_{20} \circ \varphi_{10}^{-1}(t_1, ..., t_n) = \left(\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} t_i^2}, t_2, ..., t_n\right),$$

que es claramente diferenciable, pues $\sum_{i=1}^{n} t_i^2 < 1$. Por tanto $\varphi_{20} \circ \varphi_{10}^{-1}$ es un difeomorfismo. Resulta entonces que este atlas considerado es diferenciable y $\mathbb{S}^n$ tiene dimensión n. Así en particular $\mathbb{S}^2$ es una variedad diferenciable de dimensión 2.

También se sabe que $\mathbb{R}^n$ es una variedad diferenciable de dimensión n en efecto, basta tomar $\mathfrak{A}$ la estructura diferenciable maximal que contiene a $\mathfrak{A}_0 = \{(\mathbb{R}^n, Id)\}$. Es decir, un atlas constituido por una sola carta formada por el abierto $U = \mathbb{R}^n$ y el homeomorfismo coordenado $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ identidad en $\mathbb{R}^n$. Entonces en particular $\mathbb{R}^3$ es una variedad diferenciable de dimensión 3.

Ahora considero una aplicación $\sigma : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^3$ definido por $\sigma(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{S}^2$ que es la aplicación inclusión, entonces esta aplicación cumple las siguientes condiciones:

1. σ es inyectiva, pues σ es una aplicación inclusión.

2. $\sigma(\mathbb{S}^2) = \mathbb{S}^2$, pues σ es la inclusión, definido por $\sigma(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{S}^2$.

3. σ es regular, pues $\sigma_* : T_p\mathbb{S}^2 \to T_p\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ es la aplicación lineal identidad, así σ_* es inyectiva.

Por tanto $\mathbb{S}^2$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^3$.

2.3. Productos de Variedades

Sea $(M, \mathfrak{A})$ y $(M', \mathfrak{A}')$ variedades diferenciables de dimensión n y n', respectivamente. La *topología producto* $M \times M'$ es un espacio de Hausdorff con una base numerable. Veremos que $M \times M'$ puede ser dotado una estructura de variedad diferenciable de una manera natural.

Sea $\{U_\alpha\}$ la familia de todas las vecindades coordenadas de M y $\{U'_\alpha\}$ la familia de todas las vecindades coordenadas de M'. Sea $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ y $\varphi'_{\alpha'} : U'_{\alpha'} \to \mathbb{R}^{n'}$ las aplicaciones coordenadas correspondientes. Los subconjuntos abiertos $\{U_\alpha \times U'_{\alpha'}\}$ cubre $M \times M'$, y la aplicación $\varphi_\alpha \times \varphi'_{\alpha'} : U_\alpha \times U'_{\alpha'} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n'} = \mathbb{R}^{n+n'}$ definido por

$$(\varphi_\alpha \times \varphi'_{\alpha'})(m, m') = (\varphi_\alpha(m), \varphi'_{\alpha'}(m'))$$

es un homeomorfismo de $U_\alpha \times U'_{\alpha'}$ sobre un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{n+n'}$. Además, ya que

$$(\varphi_\beta \times \varphi'_{\beta'})^{-1} \circ (\varphi_\alpha \times \varphi'_{\alpha'}) = {\varphi_\beta}^{-1} \circ \varphi_\alpha \times {\varphi'_{\beta'}}^{-1} \circ \varphi'_{\alpha'}$$

se sigue que esta aplicación es diferenciable en el conjunto $\mathbb{R}^{n+n'}$ sobre el que se define. En consecuencia los conjuntos $U_\alpha \times U'_{\alpha'}$ se vuelven en vecindades coordenadas de $M \times M'$ con las aplicaciones coordenadas correspondientes $\varphi_\alpha \times \varphi'_{\alpha'}$. Así consideremos un atlas

$$\mathfrak{A}_\circ = \{(U_\alpha \times U'_{\alpha'}, \varphi_\alpha \times \varphi'_{\alpha'}) / \ (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathfrak{A} \ \ y \ \ (U'_{\alpha'}, \varphi'_{\alpha'}) \in \mathfrak{A}'\}$$

Con este atlas $M \times M'$ es una variedad diferenciable de dimensión $n + n'$.

Ejemplo Si $\mathbb{S}^1$ es la 1-esfera entonces $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es una variedad diferenciable, de dimensión 2.

Sea M una variedad diferenciable y N un conjunto distinto de vacío, y sea la aplicación $f : M \to N$ un homeomorfismo (un homeomorfismo es una aplicación biyectiva continua y con inversa continua). También podemos tener una estructura diferenciable de N inducida por f de la estructura de M. En el siguiente ejemplo lo mostramos:

Ejemplo [Estructura de Variedad Inducida]
Sea $(M, [\mathcal{A}])$ la variedad diferenciable de dimensión n. Dado el homeomorfismo $f : M \to N$. El atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \ / \ i \in I\}$ de M induce de modo natural un atlas de dimensión n, $\mathcal{A}_f$, en N, el cual es definido como $\mathcal{A}_f = \{(f(U_i), \varphi_i \circ f^{-1}) \ / \ i \in I\}$. Con esta estructura N es una variedad diferenciable de dimensión n.

2.4. Espacios Paracompacto

El concepto de paracompacto, es una de las generalizaciones mas útiles del concepto de compacidad que ha sido descubierta en los últimos años. Es particularmente útil para aplicaciones en topología y geometría diferencial.

Paracompactos implica la existencia de particiones de unidad.

Definición 2.2.

- *Sea X un espacio topológico. Una cubierta de X es llamado* ***localmente finito*** *si cada punto de X tiene una vecindad que interseca en un número finito de elementos del cubrimiento.*

  Mas precisamente, la cubierta $\mathfrak{C} = \{U_{\alpha\in I}\}$ de subconjuntos de un espacio topológico X es localmente finito si y solamente si, para todo punto $x \in X$, existe una vecindad $V \ni x$ y un subconjunto finito $\{\alpha_1, ..., \alpha_r\} \subset I$ tal que

  $$V \cap U_\alpha \neq \emptyset \Rightarrow \alpha \in \{\alpha_1, ..., \alpha_r\}$$

  Notación: *Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha \subset X/\alpha \in I\}$ una cubierta o un cubrimiento de X.*

  $\mathcal{U}$ es localmente finito, si y sólo si para todo $p \in X$ existe una vecindad U_p de p tal que $U_p \cap U_\alpha \neq \emptyset$ para $\alpha \in \{\alpha_1, ..., \alpha_r\}$.

- *Sean $\mathfrak{C} = \{U_{\alpha\in I}\}$ y $\mathfrak{C}' = \{U'_{\beta\in I}\}$ dos cubrimientos de X. $\mathfrak{C}'$ es llamado un* ***refinamiento*** *de $\mathfrak{C}$ si cada elemento de $\mathfrak{C}'$ esta contenido en un elemento de $\mathfrak{C}$.*

  Notación:

  $\mathfrak{C}'$ es un refinamiento de $\mathfrak{C}$, si y sólo si para todo $U'_\beta \in \mathfrak{C}'$ existe $U_\alpha \in \mathfrak{C}$ tal que $U'_\beta \subset U_\alpha$.

- *Un espacio de Hausdorff X es llamado* ***paracompacto*** *si para cada cubrimiento de X por conjuntos abiertos existe un refinamiento localmente finito que consiste de conjuntos abiertos, que cubre X.*

Ejemplo La colección de intervalos

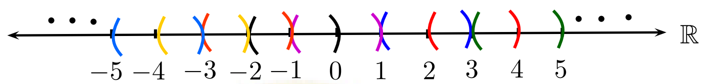
$$\mathfrak{C} = \{(n, n+2)/n \in \mathbb{Z}\}$$

es localmente finita en el espacio topológico $\mathbb{R}$. En efecto, dado cualquier $x \in \mathbb{R}$, entonces existe una vecindad $V = (p, p+1)$ del punto x, donde $p \in \mathbb{Z}$. Notemos que la vecindad

$(p, p+1)$ interseca a dos elementos de $\mathfrak{C}$. Esto es:

$$(p, p+1) \cap (p, p+2) \neq \emptyset, \quad (p, p+2) \in \mathfrak{C}$$
$$(p, p+1) \cap (p-1, p+1) \neq \emptyset, \quad (p-1, p+1) \in \mathfrak{C}.$$

De aquí concluimos que la vecindad (p,p+1) no interseca a mas elementos de $\mathfrak{C}$. Así la vecindad interseca a un número finito de elementos de $\mathfrak{C}$. El conjunto $\mathfrak{C}$ es ilustrado en la siguiente gráfica.



Por otro lado, la colección

$$\mathfrak{D} = \{(0, 1/n)/n \in \mathbb{Z}_+\}$$

es localmente finita en $(0, 1)$ pero no en $\mathbb{R}$.

Ejemplo Sea X un espacio de Hausdorff. Si X es compacto entonces X es paracompacto. En efecto, sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha/\alpha \in I\}$ un cubrimiento de X, entonces como X es compacto existe un subcubrimiento finito $U_{\alpha_1}, ..., U_{\alpha_r}$ tal que $X = U_{\alpha_1} \cup, \cdots, \cup U_{\alpha_r}$. Si definimos que $\mathfrak{B} = \{U_{\alpha_i}/i = 1, ..., r\}$, entonces $\mathfrak{B}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$. Además $\mathfrak{B}$ es localmente finito, pues tomando cualquier $x \in X$ existe un $\beta \in I$ tal que U_β es una vecindad de x, $(U_\beta \in \mathcal{U})$ entonces $U_\beta \cap U_{\alpha_i} \neq \emptyset$ para $i = 1, ..., r$, es decir que U_β interseca un numero finito de elementos de $\mathfrak{B}$. Así he probado que $\mathcal{U}$ tiene un refinamiento localmente finito $\mathfrak{B}$ que cubre X.

Observación 2.1. *Para un espacio paracompacto X, la existencia del refinamiento de una familia que cubre al espacio X y con el cubrimiento del espacio X, se puede hacer que la inclusión de los elementos de los dos cubrimientos se preserva con el mismo índice.*

En efecto. Sea X un espacio paracompacto. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha/\alpha \in I\}$ un cubrimiento de X por conjuntos abiertos. Entonces existe un cubrimiento $\mathcal{W} = \{W_\beta/\beta \in J\}$ por conjuntos abiertos que es un refinamiento localmente finito de $\mathcal{U}$. Sin embargo, podemos hacer que preservan con el mismo índice. Es decir colocamos el conjunto de índices para $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ el mismo, $W_\alpha \subset U_\alpha$ para cada índice α. Esto es, sea $U_{\alpha(\beta)}$ un elemento fijo de $\mathcal{U}$ que contiene a W_β. Para cada índice α_0 del conjunto de índices para $\mathcal{U}$ se define:

$$V_{\alpha_0} = \bigcup_{\alpha(\beta)=\alpha_0} W_\beta$$

donde $\alpha_0 : J \to I$ definido por $\beta \mapsto \alpha_0(\beta)$ (llamada "función de elección "). Sea $\mathfrak{B} = \{V_\alpha\}$. Entonces $\mathfrak{B}$ es un cubrimiento de X por conjuntos abiertos tal que $V_\alpha \subset U_\alpha$ para cada índice α. Además, cualquier vecindad que interseca a un número finito de elementos de $\mathcal{W}$ también interseca a un número finito de elementos de $\mathfrak{B}$. En consecuencia $\mathfrak{B}$ es localmente finito. $\square$

Teorema 2.3. *Si X es un espacio de Hausdorff localmente compacto con una base numerable, entonces X es paracompacto.*

Demostración. Primeramente mostraremos que existe una sucesión $\{W_j/j = 1, 2, ...\}$ de conjuntos abiertos de X tal que cumple las siguientes condiciones:

(i) $\overline{W_j}$ es compacto.

(ii) $\overline{W}_{j-1} \subset W_j$.

(iii) $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} W_j$.

Como X tiene una base numerable y es localmente compacto, entonces podemos asumir que $\{U_j/j = 1, 2, ...\}$, sea una base numerable tal que los conjuntos $\overline{U_1}$, $\overline{U_2}$, . . . son compactos. En efecto, supongamos que $\{U_i/i = 1, 2, ...\}$ sea una base numerable cualquiera de X. Luego dado $x \in X$ y una vecindad U_i de x, como X es localmente compacto, existe una vecindad W de x tal que $\overline{W}$ es compacto y $\overline{W} \subset U_i$. Por otro lado $\{U_j/j = 1, 2, ...\}$ es una base numerable, entonces tomando en particular la vecindad W de x, existe un j tal que $x \in U_j \subset W$. Así se concluye que $\overline{U_j}$ es un compacto, pues $\overline{W}$ es compacto. Ahora eliminando aquellos conjuntos $U_1, U_2, ...$ cuya clausura no son compactos, y el resto de los conjuntos que son compactos forma una base para X, tal conjunto podemos definir $\{U_j/j = 1, 2, ...\}$.

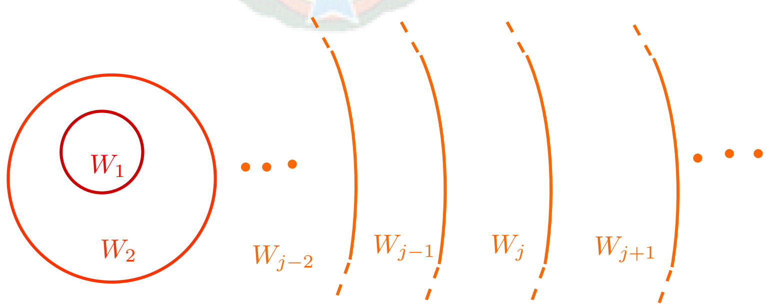
Luego definimos $W_1 = U_1$. Como $\overline{W}_{j-1}$ es compacto y cubierto por $\{U_j\}$, entonces existe un k_{j-1} tal que

$$\overline{W}_{j-1} \subset U_1 \cup \cdots \cup U_{k_{j-1}} \qquad j \geq 2.$$

Entonces asumiendo que $k_{j-1} < k_j$, definamos

$$W_j = U_1 \cup \cdots \cup U_{k_{j-1}} \cup U_{k_j}.$$

Todo esto define inductivamente la sucesión $\{W_j/j = 1, 2, ...\}$ que satisface las condiciones $(i), (ii)$ y (iii).



Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha/\alpha \in I\}$una cobertura abierta arbitraria de X. Sea $j = 2, 3, ...$, entonces el conjunto

$$\bar{W}_{j+1} - W_j \subset W_{j+2} - \bar{W}_{j-1}$$

donde $\bar{W}_{j+1} - W_j$ es compacto y $W_{j+2} - \bar{W}_{j-1}$ es abierto. Entonces para el conjunto $\bar{W}_{j+1} - W_j$ existen $U_{\alpha_1}, ..., U_{\alpha_r}$ elementos de $\mathcal{U}$ tal que $\bar{W}_{j+1} - W_j \subset U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_r}$.

Sea $V_i^j = U_{\alpha_i} \bigcap (W_{j+2} - \bar{W}_{j-1})$ que es un abierto, y sea $\mathfrak{B}_j = \{V_1^j, ..., V_r^j\}$ donde $j \geq 2$. Como falta para $\mathfrak{B}_1$, entonces para $j = 1$, la cubierta de $\bar{W}_2$ es un numero finito de elementos de $\mathcal{U}$ y sea $\mathfrak{B}_1$ la familia de estos conjuntos, es decir $\mathfrak{B}_1 = \{V_1^1, ..., v_r^1\}$ donde podemos definir, $V_i^1 = U_{\alpha_i} \in \mathcal{U}$. Ahora definiendo $\mathfrak{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{B}_i$.

Además se tiene $\bar{W}_2 \cup \bigcup_{i=2}^{\infty} (\bar{W}_{j+1} - W_j) = X$. Luego como $\bar{W}_{j+1} - W_j \subset V_1^j \cup \cdots \cup V_r^j$ se cumple que:

$$\bar{W}_2 \cup \bigcup_{i=2}^{\infty} (\bar{W}_{j+1} - W_j) = \bigcup_{j=1}^{\infty} (V_1^j \cup \cdots \cup V_r^j)$$

así,

$$\begin{aligned} X &= \bigcup_{j=1}^{\infty} (V_1^j \cup \cdots \cup V_r^j) \\ &= \bigcup_{j=1}^{\infty} (\bigcup_{i=1}^{r} V_i^j) \\ &= \bigcup_{j=1, i=1}^{\infty, r} V_i^j \end{aligned}$$

Con esto se demuestra que $\mathfrak{B}$ es un cubrimiento de X.

Luego es claro que $\mathfrak{B}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$, pues cualquier elemento de $\mathfrak{B}$, V_i^j esta contenido en un elemento de $U_{\alpha_i} \in \mathcal{U}$ para $i = 1, ..., r$ y $j \geq 1$.

También $\mathfrak{B}$ es localmente finito de X, en efecto dado $x \in X$, existe un k tal que $x \in W_k$. Entonces W_k interseca solo en un número finito de los conjuntos de $\mathfrak{B}$, es decir $W_k \bigcap V_i^j \neq \emptyset$ para $i = 1, ..., r$ y algún $k - 2 < j < k$, entonces W_j interseca a un numero finito de elementos de $\mathfrak{B}$. Así hemos probado que $\mathfrak{B}$ es localmente finito, y de aquí $\mathcal{U}$ tiene un refinamiento localmente finito.

$\square$

Observación 2.2. *La variedad diferenciable M que estamos considerando, es un espacio topológico de Hausdorff, con base numerable y además es localmente compacto, entonces por el Teorema 2.3 se deduce que la variedad M es paracompacto.*

En efecto, mostraremos que la variedad diferenciable M es localmente compacto. Para esto, sea $p \in M$ y un conjunto abierto W de p, entonces existe una vecindad coordenada U de p con su correspondiente aplicación coordenada φ. De aquí $U \cap W \ni p$ es un abierto, entonces $\varphi(U \cap W)$ es un abierto en $\mathbb{R}^n$ del punto $\varphi(p)$. Entonces como el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ es localmente compacto, existe una vecindad V de $\varphi(p)$ tal que $\overline{V}$ es compacto y $\overline{V} \subset \varphi(U \cap W)$. Por otro lado φ^{-1} es continua, así $\varphi^{-1}\left(\overline{V}\right)$ es compacto. Por tanto, existe un abierto $\varphi^{-1}\left(\overline{V}\right)$ de p tal que $\varphi^{-1}\left(\overline{V}\right) = \overline{\varphi^{-1}(V)}$ es compacto y $\varphi^{-1}\left(\overline{V}\right) \subset W$. Esto quiere decir que M es localmente compacto. $\square$

Denotamos por B_r la bola abierta de centro 0 y radio r, es decir:

$$B_r = B(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n / x_1^2 + \cdots + x_n^2 < r^2\}.$$

Teorema 2.4. *Sean M^n una variedad diferenciable y $\mathcal{U} = \{U_\alpha / \alpha \in I\}$ un cubrimiento de M por conjuntos abiertos. Entonces existe una familia numerable $\mathfrak{B}$ de vecindades coordenadas de M tales que cumplen las siguientes condiciones:*

(i) *$\mathfrak{B}$ es un refinamiento localmente finito de $\mathcal{U}$.*

(ii) *Si $V \in \mathfrak{B}$ y $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ es la aplicación coordenada asociado con $V \ni p$, entonces $\varphi(V) = B_3$ y $\varphi(p) = 0$.*

(iii) *Si para cada vecindad coordenada V,φ en $\mathfrak{B}$ definimos*

$$V' = \varphi^{-1}(B_1)$$

entonces la familia $\mathfrak{B}'$ de los conjuntos V' cubren M.

Demostración. Supongamos la sucesión $\{W_j / j = 1, 2, ...\}$ de conjuntos abiertos de M que se definió en la prueba del Teorema 2.3 (En vez del espacio X estamos tomando M). Entonces M se expresa como la unión de conjuntos disjuntos de $W_1, W_2, ..., W_j, ...$ Es decir;

$$M = W_2 \cup (W_3 - W_2) \cup (W_4 - W_3) \cup \cdots = W_2 \cup \bigcup_{j=2}^{\infty} (W_{j+1} - W_j)$$

- Si $p \in M$ entonces existe un j tal que $p \in W_{j+1} - W_j$.
- Además como $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de M, esto significa que;

$$M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$$

Dado $p \in M$, entonces existe $\alpha(p) \in I$ tal que $p \in U_{\alpha(p)}$.

- También existe una vecindad coordenada N_p con su correspondiente aplicación coordenada $\varphi_p : N_p \to \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi_p(p) = (0, ..., 0)$ y $\varphi_p(N_p) = B_3$ y $N_p \subset U_{\alpha(p)} \bigcap (W_{j+2} - \bar{W}_{j-1})$.

  En efecto, como $p \in W_{j+1} - W_j \subset W_{j+2} - \bar{W}_{j-1}$, supongamos $U_1 = U_{\alpha(p)} \bigcap (W_{j+2} - \bar{W}_{j-1})$ sea una vecindad coordenada del punto p y su aplicación coordenada correspondiente sera $\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^n$. Si $\varphi_1(p) \neq 0$, tomando la traslación $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T(x) = x - \varphi_1(x)$, entonces $T(\varphi_1(p)) = 0$. Luego $\varphi_2 = T \circ \varphi_1$, $\varphi_2 : U_1 \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación coordenada en M con $\varphi_2(p) = 0$. Ahora $\varphi_2(U_1) \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto que contiene al 0, existe un $r > 0$ tal que $B_r = B(0, r) \subset \varphi_2(U_1)$.

  Sea $N_p = \varphi_2^{-1}(B(0, r)) \subset U_1$, entonces $\varphi_3 = \varphi_2 |_{N_p}$, donde $\varphi_3 : N_p \to B(0, r) \subset \mathbb{R}^n$ es una aplicación coordenada en M. Ahora sea $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la homotecia definida por $h(x) = 3x/r$. Finalmente definimos $\varphi_p : N_p \to B(0, 3) = B_3 \subset \mathbb{R}^n$ por $\varphi_p = h \circ \varphi_3$ tal que $\varphi_p(p) = (0, ..., 0)$ y $\varphi_p(N_p) = B_3$.

- Si $p \in W_2$ entonces se puede requerir que $N_p \subset U_{\alpha(p)} \bigcap W_3$.

Sea $\mathfrak{R} = \{N_p\}$ la familia de todas las vecindades coordenadas N_p para cada $p \in M$. Luego como $N_p \subset U_{\alpha(p)} \bigcap (W_{j+2} - \bar{W}_{j-1})$ entonces $\mathfrak{R} = \{N_p\}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$.

Sean $N'_p = {\varphi_p}^{-1}(B_1)$ y $\mathfrak{R}' = \{N'_p\}$ así, esto es un cubrimiento de M, Luego para $j \geq 2$, $\bar{W}_{j+1} - W_j$ es cubierto por un número finito de ${N'}_{p_1}, ..., {N'}_{p_r} \in \mathfrak{R}'$ con $p_1, ..., p_r \in \bar{W}_{j+1} - W_j$. Como $\bar{W}_{j+1} - W_j \subset W_{j+2} - \bar{W}_{j-1}$, entonces $p_1, ..., p_r \in W_{j+2} - \bar{W}_{j-1}$ se sigue que $N_{p_1}, ..., N_{p_r}$ están todos contenidos en $W_{j+2} - \bar{W}_{j-1}$ es decir;

$$\begin{aligned} N_{p_1} &\subset U_{\alpha(p_1)} \cap (W_{j+2} - \bar{W}_{j-1}) \\ N_{p_2} &\subset U_{\alpha(p_2)} \cap (W_{j+2} - \bar{W}_{j-1}) \\ &\vdots \\ N_{p_r} &\subset U_{\alpha(p_r)} \cap (W_{j+2} - \bar{W}_{j-1}) \end{aligned}$$

Sea $V_i^j = N_{p_i} = {\varphi_{p_i}}^{-1}(B_3)$ para $i = 1, ..., r$ y $j = 2, 3, ...$, así definimos $\mathfrak{B}_j = \{V_1^j, ..., V_r^j\}$. Ahora para $j = 1$, $\bar{W}_2$ es cubierto con un número finito de los conjuntos de $\mathfrak{R}'$ esto es $N_{p_i} = V_i^1 \subset U_{\alpha(p_i)} \cap W_3$ con $i = 1, ..., r$. Por tanto definamos $\mathfrak{B} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathfrak{B}_j$.

Como se cumple que $\bar{W}_2 \cup \bigcup_{i=2}^{\infty} (\bar{W}_{j+1} - W_j) = M$. También $\bar{W}_{j+1} - W_j \subset V_1^j \cup \cdots \cup V_r^j$, pues $\bar{W}_{j+1} - W_j \subset N'_{p_1} \cup \cdots \cup N'_{p_r} \subset N_{p_1} \cup \cdots \cup N_{p_r} = V_1^j \cup \cdots \cup V_r^j$ se cumple que:

$$\bar{W}_2 \cup \bigcup_{i=2}^{\infty} (\bar{W}_{j+1} - W_j) = \bigcup_{j=1}^{\infty} (V_1^j \cup \cdots \cup V_r^j)$$

así,

$$
\begin{aligned}
M &= \bigcup_{j=1}^{\infty}(V_1^j \cup \cdots \cup V_r^j) \\
&= \bigcup_{j=1}^{\infty}(\bigcup_{i=1}^{r} V_i^j) \\
&= \bigcup_{j=1,i=1}^{\infty,r} V_i^j
\end{aligned}
$$

Con esto se muestra que $\mathfrak{B}$ es un cubrimiento de M.

Luego es claro que $\mathfrak{B}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$, pues cualquier elemento de $\mathfrak{B}$, V_i^j $(\forall j \in I)$ esta contenido en algún elemento de $U_{\alpha_i} \in \mathcal{U}$ para $i = 1, ..., r$ y $j \geq 1$.

También $\mathfrak{B}$ es localmente finito de M, en efecto dado $p \in M$, existe un k tal que $p \in W_k$. Entonces W_k interseca solo en un número finito de los conjuntos de $\mathfrak{B}$, es decir $W_k \bigcap V_i^j \neq \emptyset$ para $i = 1, ..., r$ y algún $k - 2 < j < k$, entonces W_k interseca a un número finito de elementos de $\mathfrak{B}$. Así hemos probado que $\mathfrak{B}$ es localmente finito, y de aquí $\mathcal{U}$ tiene un refinamiento localmente finito $\mathfrak{B}$.

Además, también la familia $\mathfrak{B}$ satisface las condiciones (ii) y (iii).

□

Un cubrimiento numerable $\mathfrak{B}$ de una variedad diferenciable M por vecindades coordenadas que satisfacen las condiciones (ii) y (iii) del Teorema 2.4 se lo denominara ***normalizador***. El Teorema 2.4 dice que cada cubrimiento de M por conjuntos abierto tiene un refinamiento localmente finito normalizado.

2.5. Funciones Bump

En la proxima sección definiremos la partición de la unidad. La noción de partición de la unidad es una de las herramientas más importantes en el estudio de variedades, ellas permiten **pegar** resultados locales y obtener así resultados globales. Para mostrar la existencia de particiones de la unidad, nuestras variedades diferenciable, tienen que ser un espacios topológicos de Hausdorff y con base numerable, sin embargo las variedades que trabajamos son de ese tipo. Pero antes necesitamos la existencia de una clase especial de funciones, llamadas **funciones bump**.

Sea la bola abierta $B_r = \{x \in \mathbb{R}^m / |x| = d(0,x) < r\}$ de centro $0 \in \mathbb{R}^m$ y radio r, y $\bar{B}_r = \{x \in \mathbb{R}^m / |x| = d(0,x) \leq r\}$ la bola cerrada de centro $0 \in \mathbb{R}^m$ y radio r.

En esta parte definiremos una función diferenciable $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ (recordemos que la función diferenciable se esta tomando en cuenta que es de clase C^∞)que cumpla las siguientes condiciones:

1. $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$
2. $f(\bar{B}_1) = 1$ y $f(x) = 0$ si $x \notin B_2$
3. Cuando $1 < |x| < 2$ se tiene $0 < f(x) < 1$

a esta función f que cumple estas tres condiciones se llama **función bump**.

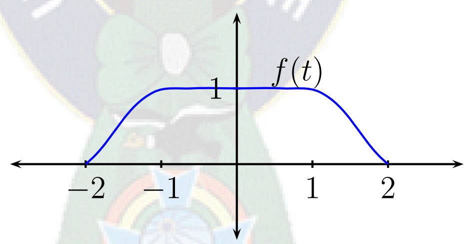
Observación 2.3. *La condición 3, cuando se tiene $1 < |x| < 2$ es equivalente a $B_2 - \bar{B}_1$.*

En efecto,

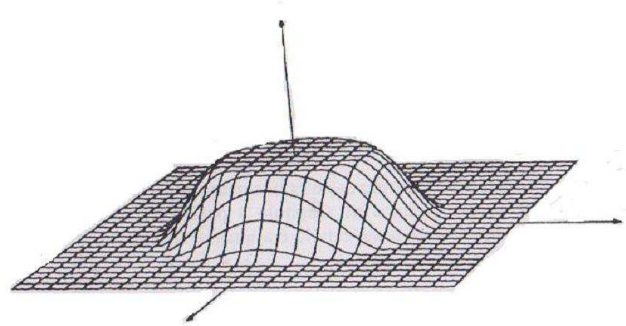
$$\begin{aligned}
1 < |x| < 2 \quad & \Leftrightarrow 1 < |x| \quad \wedge \quad |x| < 2 \\
& \Leftrightarrow (\mathbb{R}^m \cap \bar{B}_1^c) \cap B_2 \\
& \Leftrightarrow (\mathbb{R}^m \cap \bar{B}_1^c) \cap B_2 \\
& \Leftrightarrow B_2 \cap \bar{B}_1^c \\
& \Leftrightarrow B_2 - \bar{B}_1
\end{aligned}$$

$\square$

Interpretando geométricamente la función bump.
Para $m = 1$.



Para $m = 2$.

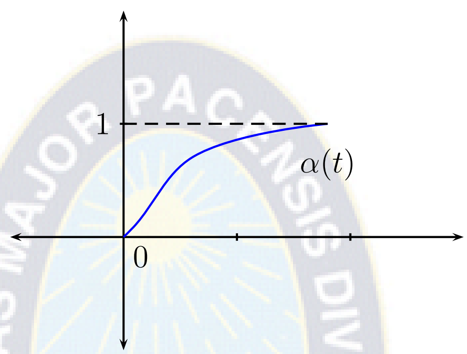


Para la prueba, definiremos la función f por etapas:

1^{ro}. Comencemos definiendo la función de Cauchy.

$$\begin{array}{rcl} \alpha : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \alpha(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \leq 0; \\ e^{-\frac{1}{t}}, & \text{si } t > 0. \end{cases} \end{array}$$

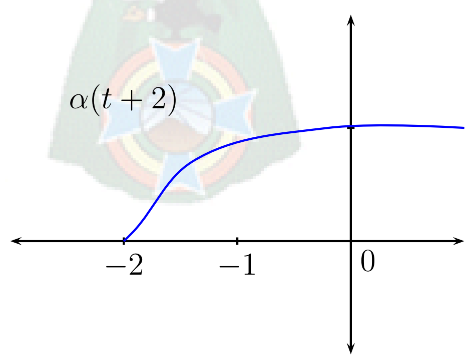
La función de Cauchy α es diferenciable, y además siempre esta acotado por 1, es decir $| e^{-\frac{1}{t}} | \leq 1$ para todo $t > 0$. Su gráfica esta dado por:



Si la función de Cauchy esta trasladado dos unidades a la izquierda, entonces se define de la manera siguiente:

$$\begin{array}{rcl} \alpha : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \alpha(t+2) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \leq -2; \\ e^{-\frac{1}{t+2}}, & \text{si } t > -2. \end{cases} \end{array}$$

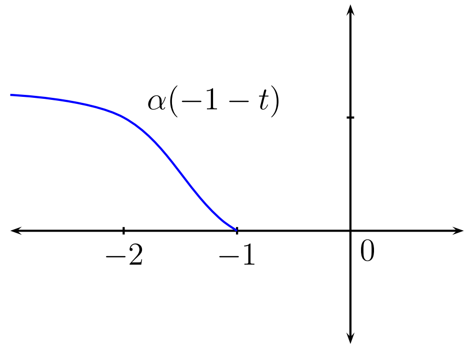
Su gráfico es:



Si la función de Cauchy esta trasladado una unidad, a la izquierda más el inverso de la variable t, se define de la manera siguiente:

$$\begin{array}{rcl} \alpha : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \alpha(-t-1) = \begin{cases} 0, & \text{si } -1 \leq t; \\ e^{\frac{1}{t+1}}, & \text{si } -1 > t. \end{cases} \end{array}$$

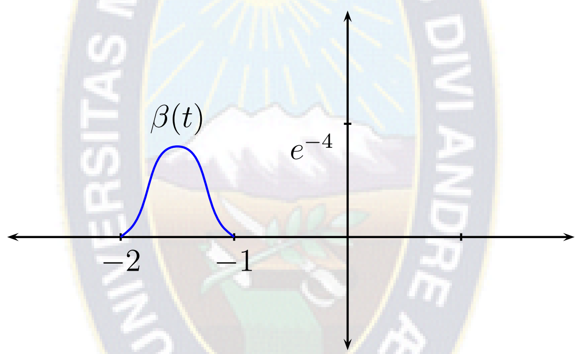
Su gráfico es:



2^{do}. Ahora definimos la función:

$$\begin{array}{rccl} \beta: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \beta(-t-1) = \alpha(t+2)\cdot\alpha(-t-1). \end{array}$$

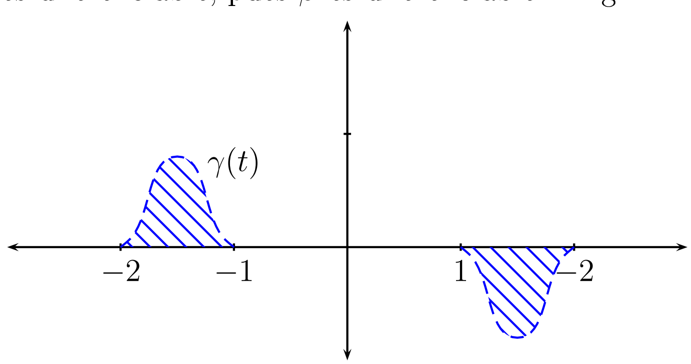
Afirmamos que β es diferenciable, pues α es diferenciable. La gráfica de β es dado por:



La altura máxima es en el punto $-\frac{3}{2}$, esto es, $\beta(-\frac{3}{2}) = e^{-4} = 0.00183$.
Sea $b = \int_{-\infty}^{\infty} \beta(t)dt = \int_{-2}^{-1} \beta(t)dt$. Entonces $\dfrac{1}{b}\int_{-2}^{-1} \beta(t)dt = 1$.
3^{ro}. Definamos ahora una nueva función:

$$\begin{array}{rccl} \gamma: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \gamma(t) = \begin{cases} \frac{\beta(t)}{b}, & \text{si } t \le 0; \\ -\frac{\beta(-t)}{b}, & \text{si } t > 0. \end{cases} \end{array}$$

Afirmamos que γ es diferenciable, pues β es diferenciable. La gráfica de γ es dado por:

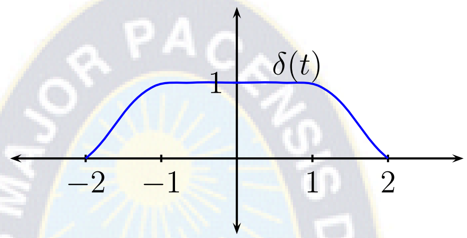


Además las regiones sombreadas tienen área 1, en efecto sea A_1 la región sombreada de la izquierda entonces $A_1 = \int_{-2}^{-1} \gamma(t)dt = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{b}\beta(t)dt = \frac{1}{b}\int_{-2}^{-1} \beta(t)dt = 1$. También si A_2 es la región sombreada de la derecha entonces $A_2 = \int_1^2 \gamma(t)dt = 1$ cuando $t > 0$.

4^{to}. Luego definimos la siguiente función:

$$\begin{array}{rccl} \delta: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \delta(t) = \int_{-\infty}^{t} \gamma(s)ds = \int_{-2}^{t} \gamma(s)ds. \end{array}$$

Afirmamos que δ es diferenciable, pues $\delta'(t) = \gamma(t)$, donde γ es diferenciable, entonces $\delta'(t)$ es diferenciable, así $\delta(t)$ es diferenciable. La gráfica δ es:



5^{to}. Finalmente definimos la función:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & f(x) = \delta \circ h(x) \end{array}$$

donde $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es definido por $h(x) = |x|$ y $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Notemos que la función h es diferenciable en $\mathbb{R}^m - \{0\}$ y $f(x) = \delta \circ h = \delta(|x|)$.

Como $f(x) = \delta(|x|) = 1$ si $x \in \bar{B}_1$ viendo la gráfica anterior, de aquí la función f es constante y así es diferenciable en $\bar{B}_1$. Luego la no diferenciabilidad de $|x|$ en el punto 0, no impide que f sea diferenciable en $\bar{B}_1$.

Además como $f(x) = \delta(|x|) = 0$ para $x \notin B_2$ viendo la gráfica anterior, entonces la función f es diferenciable en $(\mathbb{R}^m - B_2)$

También como $0 < f(x) < 1$ cuando $1 < |x| < 2$ si, sólo si $x \in (B_2 - B_1)$ y viendo la gráfica anterior, la función f es diferenciable, pues f es la composición de dos funciones δ y h que son diferenciable en $1 < |x| < 2$ donde no esta presente el 0. En conclusión la función bump f es diferenciable en $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n - B_2) \cup B_1 \cup (B_2 - B_1)$.

Ahora mostraremos la existencia de funciones bump en Variedades.

Sea M una variedad diferenciable de dimensión m. Dado un sistema de coordenadas (U, φ) tal que $\varphi : U \subset M \to B_3 \subset \mathbb{R}^m$, con $\varphi(p) = 0$ y $\varphi(U) = B_3$, asociado a el, existe una función bump diferenciable en M, $f_\varphi : M \to \mathbb{R}$ tal que satisface lo siguiente:

a) $0 \leq f_\varphi(x) \leq 1$, para todo $x \in M$.

b) $f_\varphi(W) = 1$ y $f_\varphi(M - V) = 0$.

c) $0 < f_\varphi(x) < 1$, si $x \in V - \bar{W}$.

donde $W = \varphi^{-1}(B_1)$ y $V = \varphi^{-1}(B_2)$.

Para la prueba de esta función bump en variedades, definamos la función $f_\varphi : M \to \mathbb{R}$ por:

$$f_\varphi(x) = \begin{cases} f \circ \varphi(x), & \text{si } x \in U, \\ 0, & \text{si } x \in M - V. \end{cases}$$

entonces f_φ cumple los incisos a), b) y c), siempre y cuando exista la función bump diferenciable en $\mathbb{R}^m$. Es decir existe la función: $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que cumple las siguientes condiciones:

1. $0 \leq f(x) \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}^m$
2. $f(\bar{B}_1) = 1$ y $f(x) = 0$ si $x \notin B_2$
3. Cuando $1 < |x| < 2$ se tiene $0 < f(x) < 1$

Prueba de a). Por la condición 1 de f tenemos; $0 \leq f(\varphi(x)) \leq 1$ para todo $\varphi(x) \in \mathbb{R}^m$, y además como $x \in \varphi^{-1}(B_3) = U \subset M$, luego por definición de $f_\varphi(x) = f \circ \varphi(x)$ para $x \in U$ concluimos que $0 \leq f_\varphi(x) \leq 1$ para todo $x \in M$.

Prueba de b). Por la condición 2, de f cuando cumple $f(\bar{B}_1) = 1$

$$\begin{aligned} f(\varphi(x)) = 1 \ \ si \ \ \varphi(x) \in B_1 \subset \bar{B}_1 \quad & \Leftrightarrow f \circ \varphi(x) = 1 \ \ si \ \ x \in \varphi^{-1}(B_1) \\ & \Leftrightarrow f_\varphi(x) = 1 \ \ si \ \ x \in W \\ & \Leftrightarrow f_\varphi(W) = 1 \end{aligned}$$

Por la condición 2 de f cuando cumple $f(x) = 0$ si $x \notin B_2$

$$\begin{aligned} f(\varphi(x)) = 0 \ \ si \ \ \varphi(x) \notin B_2 \quad & \Leftrightarrow f \circ \varphi(x) = 0 \ \ si \ \ x \notin \varphi^{-1}(B_2) \\ & \Leftrightarrow f_\varphi(x) = 0 \ \ si \ \ x \notin V \\ & \Leftrightarrow f_\varphi(x) = 0 \ \ si \ \ x \notin M - V \\ & \Leftrightarrow f_\varphi(M - V) = 0 \end{aligned}$$

Prueba de c). Por la condición 3 de f tenemos; $0 < f(\varphi(x)) < 1$ para todo $\varphi(x) \in \mathbb{R}^m$, y además como $x \in \varphi^{-1}(B_3) = U \subset M$, luego por definición de $f_\varphi(x) = f \circ \varphi(x)$ para $x \in U$ concluimos que $0 < f_\varphi(x) < 1$ para todo $x \in M$.

2.6. Partición de la Unidad

Como ya definimos funciones bump en la anterior sección, ahora definiremos partición de la unidad en una variedad diferenciable.

Definición 2.3. *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ definida sobre un espacio topológico X. El soporte de f es el conjunto $sop(f) = \texttt{clausura}\{x \in X/\ f(x) \neq 0\}$.*

Observación 2.4. *Dado $x \in X$, entonces $x \notin sop(f)$ si, y sólo si, existe una vecindad V_x del punto x tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in V_x$.*

En efecto, Supongamos que $x \notin sop(f)$. Sea $A = \{x \in X/\ f(x) \neq 0\}$, luego $x \notin \overline{A}$, entonces existe un conjunto abierto V_x de x, tal que $V_x \cap A = \emptyset$, de aquí $f(x) = 0$ para todo $x \in V_x$

Recíprocamente, supongamos que existe una vecindad V_x del punto x tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in V_x$. Por otro lado $x \in V_x \subset X$, entonces $x \in X$ con $f(x) = 0$, por tanto $x \notin sop(f)$.

Ejemplo Sean $V = \varphi^{-1}(B_2)$ y $\varphi : U \to B_3$ una aplicación coordenada, entonces las funciones bump en variedades $f_\varphi : M \to \mathbb{R}$ tiene como soporte el conjunto;

$$\overline{V} = \overline{\varphi^{-1}(B_2)} = \varphi^{-1}(\overline{B_2}).$$

Definición 2.4. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión m. Una partición de la unidad diferenciable sobre M es una familia $\{(U_i, \psi_i)/\ i \in I\}$, donde los $U_i \subset M$ son abiertos y $\psi_i : M \to \mathbb{R}$ son funciones diferenciables que satisfacen las siguientes propiedades:*

p1 *$\psi_i(x) \geq 0$ para todo $x \in M$ y todo $i \in I$,*

p2 *$sop(\psi_i)$ esta contenido en U_i,*

p3 *$\mathcal{U} = \{U_i/\ i \in I\}$ es un cubrimiento localmente finito de M.*

p4 *para cada $x \in M$, $\sum_{i \in I} \psi_i(x) = 1$.*

La suma en $p4$ tiene sentido, pues para cada $x \in M$, solo un número finito de los $\psi_i(x)$ son no cero. Además, esta suma es una función diferenciable, pues por $p3$, podemos encontrar una vecindad abierta U de $x \in M$ la cual interseca sólo un numero finito de los conjuntos $U_i s$ y por $p2$ sólo las funciones ψ_i asociadas a esta vecindad son no cero en x.

Teorema 2.5 (**Existencia de la Partición de Unidad**). *Sea M cualquier variedad diferenciable. Entonces para cada cubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{V_i / \ i \in I\}$ localmente finito de M, existe una partición de la unidad que refinada a $\mathcal{U}$.*

Demostración. Sea $f : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ una función bump diferenciable, tal que $f(x) = 1$ para $x \in \overline{B_1}$ y $f(x) = 0$ para $x \notin B_2$. Sea (U_k, φ_k) para $k \in \mathbb{N}$ un sistema de coordenadas, tal que $\varphi_k : U_k \to B_3$ y $W_k = \varphi_k^{-1}(B_1)$, $V_k = \varphi_k^{-1}(B_2)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos la función diferenciable, $\theta_k : M \to \mathbb{R}$, como $\theta_k(p) = 0$ para $p \in M - V_k$ y $\theta_k(p) = f \circ \varphi_k(p)$ para $p \in U_k$. Solo un número finito de θ_k son no cero en $p \in M$, pues $p \in U_k$ solo para un número finito de $k's$. Además, al menos un θ_k es uno en p, pues los conjuntos W_k forman un cubrimiento abierto de M. Luego la función $\theta : M \to \mathbb{R}$ definido $\theta(p) = \Sigma_{k=1}^{\infty} \theta_k(p)$ está bien definida, diferenciable, y además $\theta(p) \geq 1$ esto es estrictamente positiva. Finalmente, obtenemos una partición de la unidad colocando $\psi_k = \dfrac{\theta_k}{\theta}$, para cada $k \in \mathbb{N}$, es decir, ψ_k es diferenciable, toma valores en $[0,1]$ y $sop(\psi_k) = sop(\theta_k) \subset U_k$ está contenido en algún elemento $V \in \mathcal{U}$. Además, el cubrimiento $\{U_k / k \in \mathbb{N}\}$ es localmente finito y tenemos $\Sigma_{k=1}^{\infty} \psi_k = 1$. $\square$

3

EL TEOREMA DE INCRUSTACIÓN DE WHITNEY

En este capítulo el resultado principal es probar el Teorema de Hassler Whitney, que muestra que una variedad diferenciable de dimensión n, puede considerarse como una subvariedad de $\mathbb{R}^{2n+1}$ cerrado.

3.1. Conjuntos de Medida Cero

También, como ya mencionamos anteriormente, que todo lo que se diga diferenciable, es de clase C^∞.

Un *cubo* $C \subset \mathbb{R}^n$ es un producto cartesiano $C = [a_1, a_1+r] \times \cdots \times [a_n, a_n+r]$ de n intervalos cerrados de misma longitud r. El número r es llamado *arista* del cubo C. El volumen de C es definido por $vol(C) = r^n$. Con la métrica de $\mathbb{R}^n$, el diámetro de C es $r\sqrt{n}$.

Definición 3.1. *Sea $S \subset \mathbb{R}^n$. S tiene medida nula en $\mathbb{R}^n$, si para todo $\epsilon > 0$, es posible obtener una cobertura numerable de S por cubos, $S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$, tal que $\sum_{i=1}^{\infty} vol(C_i) < \epsilon$.*

Notación: med(S)$=0$ en $\mathbb{R}^n$.
Si $S_1 \subset S_2 \subset \mathbb{R}^n$ entonces $med(S_2) = 0$ en $\mathbb{R}^n$ implica $med(S_1) = 0$ en $\mathbb{R}^n$.

Lema 3.1. *Si $S_1, ..., S_i, ...$ son conjuntos de medida cero en $\mathbb{R}^n$, entonces $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Supongamos, para cada i, una cobertura numerable $S_i \subset \bigcup_j C_{ij}$ por cubos, tales que $\sum_{j=1}^{\infty} vol(C_{ij}) < \epsilon/2^i$. Resulta de aquí que $S \subset \bigcup_{ij} C_{ij}$ es una cobertura numerable de S por cubos C_{ij} tal que $\sum_{ij} vol(C_{i,j}) < \sum_i \epsilon/2^i = \epsilon$. Luego $med(S) = 0$ en $\mathbb{R}^n$. ∎

Corolario 3.1. *Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ tiene medida cero si, y solamente si, para cada punto $p \in S$ existe una vecindad V_p tal que med($S \cap V_p$)=0 en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Supongamos que S tiene medida cero en $\mathbb{R}^n$, además para cada punto $p \in S$ existe una vecindad V_p del punto p, entonces $S \cap V_p \subset S$, de aquí $S \cap V_p$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^n$.

Recíprocamente, supongamos que la cobertura $S \subset \bigcup_{p \in S} V_p$ con $med(V_p \cap S) = 0$, entonces por el Teorema de *Lindelöf* (En un espacio topológico con base numerable, toda cobertura abierta admite una subcobertura numerable), existe una subcobertura numerable $S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_{p_i}$. Por el Lema 3.1 $S = \bigcup_i (V_{p_i} \cap S)$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^n$. □

Ejemplo Sea $C = I_1 \times \cdots \times I_n$ un cubo. Para cualquier $s > 0$, $C \times \{0\}$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s = \mathbb{R}^{n+s}$. En efecto, sea $\epsilon > 0$, existe un cubo $A = C \times \prod_{i=1}^{s} [0, \delta]$ para un $\delta = \left(\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\epsilon}{vol(C)} \right)^{1/s} > 0$ tal que $C \times \{0\} \subset A$, y el $vol(A) = vol(C) \cdot \delta^s = \dfrac{\epsilon}{2} < \epsilon$.

Los conjuntos de medida cero son útiles en el estudio de las Variedades Diferenciables por dos motivos: primero porque tiene interior vacío y segundo porque sus imágenes mediante aplicaciones diferenciables, poseen también medida cero. Estos hechos serán probados luego.

Definición 3.2. *La aplicación $f : S \to \mathbb{R}^m$ definida en $S \subset \mathbb{R}^n$, se dice **lipschitziana** cuando existe una constante $k > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$ para todo $x, y \in S$.*

Definición 3.3. *Una aplicación $f : S \to \mathbb{R}^m$ definida en $S \subset \mathbb{R}^n$, se dice **localmente lipschitziana** cuando, para todo $p \in S$, existe una vecindad $V_p \subset \mathbb{R}^n$ tal que $f|V_p$ es lipschitziana. En otras palabra, existe una cobertura abierta $S \subset \bigcup_{p \in S} V_p$ tal que la restricción $f|_{(V_p \cap S)}$ es lipschitziana.*

Lema 3.2. *Sean $S \subset \mathbb{R}^m$ con medida cero y $f : S \to \mathbb{R}^m$ localmente lipschitziana, entonces $f(S)$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^m$.*

Demostración. Consideremos primero que f es lipchitziana. Entonces $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ con $k > 0$ constante y $x, y \in S$ cualesquiera. Tomemos en $\mathbb{R}^m$ la norma del máximo. Dado $\varepsilon > 0$, existe una cobertura numerable $S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$, donde cada C_i es un cubo de arista r_i y $\sum_{i=1}^{\infty} r_i^m < \dfrac{\varepsilon}{k^m}$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, tenemos $x, y \in S \cap C_i$ entonces $|x - y| < r_i$, luego $|f(x) - f(y)| < k \cdot r_i$. Se sigue que cada una de las $m-$proyecciones de $f(S \cap C_i)$ sobre los ejes, esta contenido en un intervalo de longitud $k \cdot r_i$. Luego $f(S \cap C_i)$ esta contenido en un producto cartesiano de esos intervalos, que es un cubo D_i, cuyo volumen es igual a $k^m \cdot r_i^m$. Por tanto $f(S) = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \subset D_i$ con $\sum_{i=1}^{\infty} vol(D_i) = k^m \cdot \sum_{i=1}^{\infty} r_i^m < \varepsilon$. Por tanto med$f(S) = 0$.

En el caso general, tenemos $S \subset \bigcup_{p\in S} V_p$, donde cada V_p es un abierto y la restricción $f|_{V_p\cap S}$ es lipschitziana. Por el Teorema de *Lindelöf*, tomamos una subcobertura numerable $S \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$. Por la primera parte, $f(V_j \cap S)$ tiene medida cero, para cada $j \in \mathbb{N}$. Luego $f(S) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f(V_j \cap S)$, entonces por el Lema 3.1 $f(S)$ se tiene med$f(S) = 0$.

□

Lema 3.3. *Sea $f : U \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en el abierto $U \subset \mathbb{R}^m$. Si $S \subset U$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^m$ entonces $f(S) \subset \mathbb{R}^m$ también tiene medida cero.*

Demostración. Tomando cualquier $x \in S$, sea V_x una bola abierta de centro x, con $\overline{V}_x \subset U$ (pues $\mathbb{R}^m$ es localmente compacto) y sea $k_x =$sup.$\{|f'(y)| \;/\; y \in \overline{V}_x\}$.

Por la Desigualdad del Valor Medio, $|f(y) - f(z)| \leq k_x \cdot |y - z|$ para cualesquiera $y, z \in V_x$, luego f es localmente Lipschitziana. Así, por el Lema 3.2 $f(S)$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^m$. □

Lema 3.4. *Si $m < n$ y $f : U \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable en el abierto $U \subset \mathbb{R}^m$ entonces $f(U)$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^n$.*

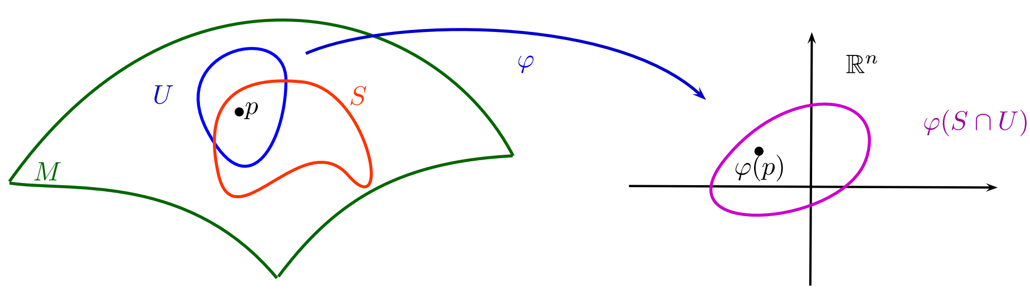
Demostración. Consideremos a $0 \in \mathbb{R}^{n-m}$. Por el ejemplo anterior se sigue que $U \times \{0\}$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^n$. En el abierto $W = U \times \mathbb{R}^{n-m} \subset \mathbb{R}^n$, definimos la aplicación $g : W \to \mathbb{R}^n$, diferenciable, por $g(x, y) = f(x)$. Luego por el Lema 3.3, el conjunto $g(U \times \{0\}) = f(U)$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^n$.

□

Ahora daremos la definición de medida cero en una variedad diferenciable.

Definición 3.4. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión m. Sea S un subconjunto de M. Entonces S se dice que tiene* medida cero *en M, si para todo punto $p \in S$ existe una vecindad coordenada (U, φ) de M con $p \in U$, tal que el conjunto $\varphi(S \cap U)$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^m$.*

Ilustración:



Corolario 3.2. *Sean M y N variedades diferenciables de dimensiones m y n respectivamente. Sea $\sigma : M \to N$ una aplicación diferenciable. Si $m < n$ entonces $\sigma(M)$ tiene medida cero.*

Demostración. Primeramente consideremos la colección numerable $\mathcal{A} = \{U_i \ / \ i = 1, 2, 3, ...\}$ que cubre M, es decir; $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = M$, pues la variedad M posee una base numerable.

Dado un punto arbitrario $q \in \sigma(M) \subset N$, entonces existe $p \in M$ tal que $\sigma(p) = q$. Como σ es diferenciable en M, en particular es diferenciable en $p \in M$, entonces fijando el índice i, existen sistemas de coordenadas locales (U_i, φ_i), (V, ψ) con $p \in U_i$ y $\sigma(U_i) \subset V$ tal que $\psi \circ \sigma \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i) \to \psi(V)$ es diferenciable en $\varphi_i(p) \in \mathbb{R}^m$. Por hipótesis $m < n$ y por el Lema 3.4 $\psi \circ \sigma \circ \varphi_i^{-1}(\varphi_i(U_i))$ tiene medida cero. Por otro lado, se tiene

$$\psi \circ \sigma \circ \varphi_i^{-1}(\varphi_i(U_i)) = \psi(\sigma(U_i)) = \psi(\sigma(U_i) \cap V).$$

Entonces por el Lema 3.1 $\bigcup_{i=1}^{\infty} \psi(\sigma(U_i) \cap V)$ tiene medida cero. Además:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \psi(\sigma(U_i) \cap V) = \psi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} [\sigma(U_i) \cap V]\right) = \psi\left(\sigma\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) \cap V\right) = \psi(\sigma(M) \cap V).$$

Por tanto $\sigma(M)$ tiene medida cero.

□

3.2. Aproximaciones por Aplicaciones Regulares

Sea $\mathbb{M}(m \times n)$ el espacio vectorial de todas las matrices de tamaño $m \times n$. Es decir;

$$\mathbb{M}(m \times n) = \{(a_{ij}) \ / \ a_{ij} \in \mathbb{R} \ \ i = 1, 2, ..., m \ \ j = 1, 2, ...n\}.$$

Además el espacio vectorial $\mathbb{M}(m \times n)$ es isomorfo a $\mathbb{R}^{mn}$ bajo la aplicación definido por:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \mapsto (a_{11}, ..., a_{1n}, a_{21}, ..., a_{mn})$$

y así se puede dar a $\mathbb{M}(m \times n)$ la estructura diferenciable de $\mathbb{R}^{mn}$. Denotando por $\mathbb{M}(m \times n, k)$ el subconjunto de $\mathbb{M}(m \times n)$ que consiste de todas las matrices de rango k.

Lema 3.5. *Si $k \leq min\{m, n\}$, entonces $\mathbb{M}(m \times n, k)$ es una subvariedad de $\mathbb{M}(m \times n)$ de dimensión $k(m + n - k)$.*

Demostración. Para la demostración escribamos las matrices $X \in M(m \times n)$ en bloques,

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

donde A es $k \times k$, B es $k \times (n-k)$, C es $(m-k) \times k$ y D es $(m-k) \times (n-k)$.

Sea $U = \{X \in \mathbb{M}(m \times n) \ / \ \det A \neq 0\}$, entonces U es abierto en $\mathbb{R}^{mn}$. En efecto, la aplicación proyección $p_A : \mathbb{M}(m \times n) \longrightarrow \mathbb{M}(k \times k)$ definida por $p_A \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = A$ es continua y la aplicación determinante $\det : \mathbb{M}(k \times k) \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua.

Como $\mathbb{R} - \{0\}$ es un conjunto abierto de $\mathbb{R}$ entonces $\det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$ es abierto en $\mathbb{M}(k \times k)$ además, $\det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\}) = \{A \in \mathbb{M}(m \times n) / \det A \neq 0\}$, luego como la aplicación p_A es continua, entonces la imagen inversa de p_A es $p_A^{-1}(\det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})) = U$ es abierto en $\mathbb{M}(m \times n)$.

Afirmamos que $U \cap \mathbb{M}(m \times n; k) = \{X \in U / \quad D = CA^{-1}B\}$. En efecto, el rango de $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ es igual al rango del producto

$$\begin{pmatrix} I_{k \times k} & 0 \\ -CA^{-1} & I_{(m-k) \times (m-k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

En consecuencia el rango de X es k si, y solamente si, $D = CA^{-1}B = 0$.

Sea el conjunto $Z = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}(m \times n) \right\}$. Afirmamos que $Z \cong \mathbb{R}^{k(m+n-k)}$. En efecto, consideremos la aplicación proyección $P : Z \to \mathbb{R}^{k^2} \times \mathbb{R}^{k \cdot (n-k)} \times \mathbb{R}^{(m-n) \cdot k}$ definido por: $P(X) = (A, B, C) = (P_A(X), P_B(X), P_C(X))$ donde P_A, P_B y P_C son las proyecciones coordenadas de P, entonces P es un isomorfismo, luego Z es isomorfo a $\mathbb{R}^{k^2} \times \mathbb{R}^{k \cdot (n-k)} \times \mathbb{R}^{(m-k) \cdot k}$. Además $\mathbb{R}^{k^2} \times \mathbb{R}^{k \cdot (n-k)} \times \mathbb{R}^{(m-k) \cdot k} \cong \mathbb{R}^{k(m+n-k)}$ entonces $Z \cong \mathbb{R}^{k(m+n-k)}$.

Sea $W = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \in Z / \det(A) \neq 0 \right\}$ entonces W es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^{k(m+n-k)}$. Para su verificación es el mismo tratamiento que se hizo para el conjunto abierto U.

Ahora consideremos la aplicación, $\sigma : W \to U \cap \mathbb{M}(m \times n, k)$ definido por:

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \sigma(X) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

entonces σ es diferenciable. En efecto, considerando las aplicaciones coordenadas de σ, como proyecciones P_A, P_B y P_C definiendo de la forma siguiente:

$$\sigma(X) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_A(X) & P_B(X) \\ P_C(X) & P_A \cdot inv \circ P_A \cdot P_B(X) \end{pmatrix}$$

donde P_A, P_B, P_C y $P_A \cdot inv \circ P_A \cdot P_B$ son aplicaciones diferenciables. Como la aplicación $inv : \mathbb{GL} \to \mathbb{M}(n \times n)$ definido por $inv(X) = X^{-1}$ es diferenciable en todo $\mathbb{GL}$, donde $\mathbb{GL} = \{A \in \mathbb{M}(n \times n) / \det(A) \neq 0\}$.

Además W es una variedad diferenciable de dimensión $k(m+n-k)$ inducida por la estructura diferenciable de $\mathbb{R}^{k(m+n-k)}$ y σ cumple las siguientes condiciones:

i σ es 1-1.

ii $\sigma(W) = U \cap \mathbb{M}(m \times n, k)$, pues tal como esta definido σ se ve que los elementos del conjunto $U \cap \mathbb{M}(m \times n, k)$ son $\begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix}$.

iii σ es regular en W. Pues considerando la aplicación $\tau : U \to W$ definida por:

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \longmapsto \tau(X) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

es diferenciable en U, es más $\tau \circ \sigma = Id$ identidad en W de aquí $\tau_* \circ \sigma_* = Id$ entonces σ_* es 1-1. Por tanto σ es regular en W.

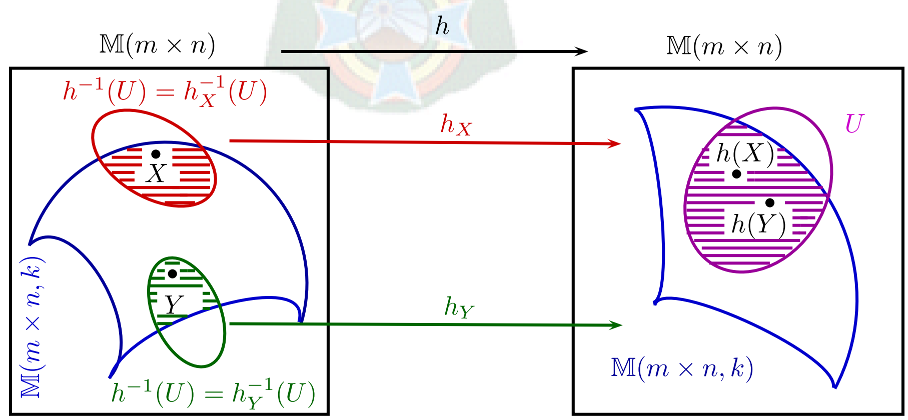
Luego como τ es una transformación lineal y biyectiva definido en $U \cap \mathbb{M}(m \times n, k)$, entonces τ es un isomorfismo y por la definición de subvariedad tal que cumple las tres condiciones anteriores, se concluye que $U \cap \mathbb{M}(m \times n, k)$ es una subvariedad de $\mathbb{M}(m \times n)$ con dimensión $k(m + n - k)$.

Sea $h : \mathbb{M}(m \times n) \to \mathbb{M}(m \times n)$ definido por $X \mapsto h(X) = PXQ$ donde $P \in \mathbb{M}(m \times m)$ y $Q \in \mathbb{M}(n \times n)$ son matrices no singulares. Entonces h es un isomorfismo diferenciable, pues h es una transformación lineal.

Si $X \in \mathbb{M}(m \times n, k)$ es arbitrario, existe el difeomorfismo $h : \mathbb{M}(m \times n) \to \mathbb{M}(m \times n)$ que deja a $\mathbb{M}(m \times n, k)$ invariante tales que $h(X) \in U \cap \mathbb{M}(m \times n, k)$ (h es, por ejemplo, un cambio conveniente de líneas y de columnas). Ver ilustración en la siguiente gráfica:

$$h : h^{-1}(U) \cap \mathbb{M}(m \times n, k) \longrightarrow U \cap \mathbb{M}(m \times n, k)$$

$$X \quad \mapsto \quad h(X) = PXQ$$



Para el entendimiento de la ilustración, damos el siguiente ejemplo:

- $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}(4\times 3, 2)$ entonces existen matrices $P \in \mathbb{M}(4\times 4)$ y $Q \in \mathbb{M}(3\times 3)$

  tales que $h(X) = PXQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}(4\times 3, 2)$ entonces existen matrices $P \in \mathbb{M}(4\times 4)$ y $Q \in \mathbb{M}(3\times 3)$

  tales que $h(X) = PXQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Notemos que la aplicación τ es un difeomorfismo, donde la inversa es $\tau^{-1} = \sigma$. Así construiremos una estructura diferenciable para que $\mathbb{M}(m \times n, k)$ sea una variedad diferenciable de dimensión $k(m + n - k)$.

Supongamos que $h_X^{-1}(U) \cap \mathbb{M}(m \times n, k)$ es una vecindad coordenada para el punto X y su aplicación coordenada $\tau \circ h_X : h_X^{-1}(U) \cap \mathbb{M}(m \times n, k) \to W \subset \mathbb{R}^{k(m+n-k)}$, pues $\tau \circ h_X$ es un homeomorfismo, es más $\tau \circ h_X$ es un difeomorfismo, donde $\tau : U \to W$ es un difeomorfismo y $h_X : h_X^{-1}(U) \cap \mathbb{M}(m \times n, k) \to U \cap \mathbb{M}(m \times n, k)$ (h_X es la restricción de h, para todo $X \in \mathbb{M}(m \times n, k)$) es un difeomorfismo. Entonces su estructura diferenciable es dado por:

$$\left[\mathcal{A}_{\mathbb{M}(m\times n,k)}\right] = \left\{ \left(h_X^{-1}(U) \cap \mathbb{M}(m \times n, k), \tau \circ h_X\right),\ \textit{para todo}\ X \in \mathbb{M}(m \times n, k)\right\}$$

Ahora consideremos la aplicación inclusión $I : \mathbb{M}(m \times n, k) \to \mathbb{M}(m \times n)$ definido por $I(X) = X$, donde I es una aplicación diferenciable que cumple las siguientes condiciones:

1. I es uno a uno.

2. $I(\mathbb{M}(m \times n, k) = \mathbb{M}(m \times n, k)$.

3. I es regular. En efecto, sea φ una aplicación coordenada con su respectiva vecindad coordenada U en $\mathbb{M}(m\times n)$ y sea ψ una aplicación coordenada, con su respectiva vecindad coordenada V en $\mathbb{M}(m \times n, k)$, entonces la aplicación

$$\varphi \circ I \circ \psi^{-1} = \varphi \circ \psi^{-1} : \psi(V) \subset \mathbb{R}^{k(m+n-k)} \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^{mn}$$

es un homeomorfismo y también regular, entonces I es regular.

En conclusión $\mathbb{M}(m \times n, k)$ es una subvariedad de $\mathbb{M}(m \times n)$ con dimensión $k(m+n-k)$.

□

Lema 3.6. *Sean U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\sigma : U \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 2n$ una aplicación diferenciable. Para cada $\epsilon > 0$ existe una matriz de tamaño $m \times n$, $\mathrm{A} = (a_{ij})$ tal que $|a_{ij}| < \epsilon$ para $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$ y $\tau : U \to \mathbb{R}^m$ definido por*

$$\tau(x) = \sigma(x) + \mathrm{A} \cdot x$$

es regular en U.

Demostración. Definiendo la siguiente aplicación $\rho_k : \mathbb{M}(m \times n, k) \times U \to \mathbb{M}(m \times n)$ por

$$\rho_k(X, x) = X - \mathcal{J}\sigma(x)$$

donde $\mathcal{J}\sigma(x)$ es la matriz jacobiana de la aplicación σ en el punto x, definido por

$$\mathcal{J}\sigma(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \sigma_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial \sigma_1}{\partial x_n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial \sigma_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial \sigma_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}_{m \times n}$$

donde $\sigma(x) = (\sigma_1(x), ..., \sigma_m(x))$.

La aplicación ρ_k esta bien definida, pues $X \in \mathbb{M}(m \times n)$ y $\mathcal{J}\sigma(x) \in \mathbb{M}(m \times n)$, además como $\mathbb{M}(m \times n)$ es un espacio vectorial entonces $X - \mathcal{J}\sigma(x) \in \mathbb{M}(m \times n)$.

Afirmamos ρ_k es aplicación diferenciable. En efecto, $\sigma : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es aplicación diferenciable, entonces su aplicación derivada $D\sigma : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es la aplicación diferenciable y $T : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{M}(m \times n)$ es transformación lineal biyectivo. Sea la aplicación diferenciable $h = T \circ D\sigma : U \to \mathbb{M}(m \times n)$ definido por $h(x) = \mathcal{J}\sigma(x)$ entonces h es diferenciable.

Sea $I : \mathbb{M}(m \times n, k) \to \mathbb{M}(m \times n, k)$ la aplicación identidad, ahora definamos la aplicación $f = (I, h) : \mathbb{M}(m \times n, k) \times U \to \mathbb{M}(m \times n, k) \times \mathbb{M}(m \times n)$ por $(X, x) \mapsto f(X, x) = (I(X), h(x))$, entonces f es una aplicación diferenciable.

Sea la aplicación $g : \mathbb{M}(m \times n, k) \times \mathbb{M}(m \times n) \to \mathbb{M}(m \times n)$ por $(X, Y) \mapsto g(X, Y) = X - Y$ esto es una transformación lineal, por tanto es una aplicación diferenciable. Luego

$$\begin{array}{ccccc} \rho_k = g \circ f : \mathbb{M}(m \times n, k) \times U & \longrightarrow & \mathbb{M}(m \times n, k) \times \mathbb{M}(m \times n) & \longrightarrow & \mathbb{M}(m \times n) \\ (X, x) & \mapsto & (X, h(x)) & \mapsto & X - h(x) = X - \mathcal{J}\sigma(x) \end{array}$$

la aplicación ρ_k es diferenciable.

Notemos que $M(m \times n, k) \times U$ y $M(m \times n)$ son variedades diferenciable de dimensiones $k(m+n-k)$ y mn respectivamente, entonces ρ_k es una aplicación diferenciable entre las variedades mencionadas.

Sea $k \leq n-1$. Como $m \geq 2n$, tenemos

$$\begin{aligned} mn - [k(m+n-k)+n] &= (m-n)(n-k) - n \\ &\geq (2n-n+1)(n-n+1) - n \\ &= 1 > 0 \end{aligned}$$

Utilizando el corolario 3.2 concluimos que la imagen del dominio de ρ_k tiene medida cero en $\mathbb{M}(m \times n)$ para $k \leq n-1$. De aquí el conjunto $\mathbb{M}(m \times n) - \rho_k(\mathbb{M}(m \times n, k) \times U)$ es denso en $\mathbb{M}(m \times n)$. Esto es, si $H = \mathbb{M}(m \times n) - \rho_k(\mathbb{M}(m \times n, k) \times U)$, entonces $\overline{H} = \mathbb{M}(m \times n)$.

Como H es denso en $\mathbb{M}(m \times n) \cong \mathbb{R}^{mn}$, entonces para toda bola abierta de radio $\varepsilon > 0$ $B(0, \varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon) \times \cdots \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ con centro $0 \in \mathbb{M}(m \times n) \cong \mathbb{R}^{mn}$ tal que $B(0, \varepsilon) \cap H \neq \emptyset$.

Como $B(0, \varepsilon) \cap H \neq \emptyset$ entonces existe $A = (a_{11}, ..., a_{mn}) \in B(0, \varepsilon) \cap H$ tal que $A \in B(0, \varepsilon)$ y $A \in H$, así que $A \in \mathbb{M}(m \times n)$ y $A \notin \rho_k(\mathbb{M}(m \times n, k) \times U)$ para $k \leq n-1$, además los elementos de A son $|a_{ij}| < \epsilon$ para cualquier $\varepsilon > 0$.

Sea $\tau : U \to \mathbb{R}^m$ definido por $\tau(x) = \sigma(x) + A \cdot x$, para $x \in U$. Entonces τ es una aplicación diferenciable, pues σ es una aplicación diferenciable y $A \cdot x$ es la aplicación de una transformación lineal.

Entonces la matriz jacobiana de la aplicación τ es $\mathcal{J}\sigma(x) + A$. Afirmamos que esta matriz jacobiana no esta en $\mathbb{M}(m \times n, k)$ para $k \leq n-1$. En efecto, supongamos lo contrario, tal que $\mathcal{J}\tau(x) \in \mathbb{M}(m \times n, k)$ para $k \leq n-1$, sea $(\mathcal{J}\tau(x), x) \in \mathbb{M}(m \times n, k) \times U$ entonces $\rho_k(\mathcal{J}\tau(x), x) = \mathcal{J}\tau(x) - \mathcal{J}\sigma(x) = \mathcal{J}\sigma(x) + A - \mathcal{J}\sigma(x) = A$. Pero la matriz A no esta en la imagen de ρ_k para $k \leq n-1$.

También afirmamos que el rango de la matriz $\mathcal{J}\sigma(x) + A$ es n, pues como A no pertenece a $\rho_k(\mathbb{M}(m \times n, k) \times U)$ para $k \leq n-1$, el rango no puede ser $1, 2, ..., n-1$ ni puede ser mayor a n, pues el rango de la aplicación $\tau : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ debe ser el $\min\{n, m\}$, por tanto el rango de la matriz jacobiana de τ es n.

Por último concluimos que $\tau : U \to \mathbb{R}^m$ es regular en U, pues la matriz $\mathcal{J}\tau(x)$ es la representación de la aplicación lineal $D\tau(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Como el $rang(\mathcal{J}\tau(x)) = n$ entonces el rango de $D\tau(x)$ es la dimensión de $\mathbb{R}^n$ y esto es equivalente que $D\tau(x)$ es inyectiva, por tanto τ es regular en U. $\square$

Si x e y son dos puntos de $\mathbb{R}^m$, denotemos por $d(x, y)$ la distancia entre x e y cuando $d(x, y) = |x - y|$.

Teorema 3.1. *Sean M una variedad diferenciable de dimensión n y C un subconjunto cerrado de M. Sea $\sigma : M \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 2n$, una aplicación diferenciable que es regular en C. Para cada función continua $\eta : M \to \mathbb{R}$ tal que $\eta(p) > 0$ para todo $p \in M$, existe una aplicación diferenciable regular $\tau : M \to \mathbb{R}^m$ tal que $\tau(p) = \sigma(p)$ para $p \in C$ y $d(\tau(p), \sigma(p)) < \eta(p)$ para $p \in M$.*

Demostración. Hipótesis, σ es una aplicación regular en C entonces afirmamos que existe un conjunto abierto $A \supset C$ tal que σ es regular en A. En efecto, sea $x \in C$ entonces σ es regular en x. Se sabe también $D\sigma(x) : T_pM \to T_{\sigma(p)}\mathbb{R}^m$ es inyectiva, entonces el rango de la aplicación lineal $D\sigma(x)$ en el punto x es n, esto es equivalente al número máximo de columnas linealmente independiente de la matriz $\mathcal{J}\sigma(x)$, que es exactamente la matriz jacobiana $\mathcal{J}\sigma(x)$ que tiene rango n en el punto x.

Para encontrar alguna vecindad U_x de x, de tal manera, para cualquier $y \in U_x$ el rango de la matriz $\mathcal{J}\sigma(y)$ es n. Hacemos el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccccccc} U_x & \xrightarrow{I} M \xrightarrow{J} & M(m \times n) & \xrightarrow{P} & M(n \times n) & \xrightarrow{\det} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathcal{J}\sigma(x) & \mapsto & \mathcal{J}\sigma_n(x) & \mapsto & \det(\mathcal{J}\sigma_n(x)) \end{array}$$

donde I es la aplicación inclusión, J es la aplicación jacobiana, P es la aplicación proyección y det la aplicación determinante, todas estas funciones son continuas, entonces tomando el conjunto abierto $\mathbb{R} - \{0\}$ en $\mathbb{R}$, y evaluando las imágenes inversas de cada aplicación, se obtiene el conjunto abierto $U_x = I^{-1}(J^{-1}(P^{-1}(\det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\}))))$ de x. Ahora tomando cualquier $y \in U_x$, entonces se tiene la matriz jacobiana $\mathcal{J}\sigma(y)$ de rango n, de aquí la submatriz $n \times n$ $\mathcal{J}\sigma_n(y)$ de la matriz $\mathcal{J}\sigma(y)$, se tiene $\det(\mathcal{J}\sigma_n(y)) \neq 0$. Así $D\sigma(x)$ es inyectiva en todo U_x, por tanto σ es regular en todo U_x. Entonces existe una vecindad $A = \bigcup_{x \in C} U_x$ para todo $x \in C$ tal que $\sigma : M \to \mathbb{R}^m$ es regular en $A \supset C$.

Como la aplicación σ es regular en el conjunto abierto A, entonces afirmamos que la aplicación σ es regular en $\overline{A}$. En efecto, en particular σ es regular en un punto $p \in A$ entonces existe una vecindad V_p para un punto p tal que $V_p \cap A \neq \emptyset$, y σ es regular para todo $p \in A$, esto es para toda vecindad V_p de p con $V_p \cap A \neq \emptyset$, entonces por definición de conjunto cerrado se tiene que $p \in \overline{A}$. De aquí σ es regular en $\overline{A}$.

Coleccionando los conjuntos abiertos A y el complemento de C en $\{A, C^c\}$ cubre M. Por el Teorema 2.4, existe un refinamiento normalizado $\mathfrak{B}$ numerable, localmente finito por vecindades coordenadas de M, tales que satisface las siguientes condiciones:

i) $\mathcal{B}$ es un refinamiento localmente finito de $\{A, C^c\}$.

ii) Si $V \in \mathcal{B}$ y $\varphi : V \to \varphi(V) \subset \mathbb{R}^m$ es la aplicación coordenada asociado con V, entonces $\varphi(x) = 0$ y $\varphi(V) = B_3$

iii) Si para cada vecindad coordenada V asociado con la aplicación coordenada φ en $\mathcal{B}$ definimos $V' = \varphi^{-1}(B_1)$, entonces la familia $\mathcal{B}'$ de los conjuntos V' cubren M.

Ahora numerando los conjuntos V_j de $\mathfrak{B}$ con enteros positivos y negativos de la forma:

$$V_j \subset A \text{ si } j < 0, \qquad V_j \subset C^c \text{ si } j > 0.$$

Donde $\varphi_j : V_j \subset M \to \varphi_j(V_j) = B_3 \subset \mathbb{R}^n$ es la aplicación coordenada de la vecindad coordenada V_j. También definimos $V'_j = \varphi_j^{-1}(B_2)$ y $V''_j = \varphi_j^{-1}(B_1)$. Por supuesto los conjuntos $\{V''_j\}$ cubren M.

Construyamos una sucesión $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$ de aplicaciones diferenciables $\sigma_k : M \to \mathbb{R}^m$ con las siguientes condiciones:

1. $\sigma_0 = \sigma$.
2. σ_k es regular en $F_k = \overline{\cup_{j<0} V''_j} \cup \overline{V''_1} \cup \cdots \cup \overline{V''_k}$ para $k = 1, 2, ...$
3. $\sigma_k(p) = \sigma_{k-1}(p)$ para $p \notin V'_k$, $k = 1, 2, ...$
4. $d(\sigma_k(p), \sigma_{k-1}(p)) < \eta(p)/2^k$ para $p \in M$, $k = 1, 2, ...$

Para la prueba de esta construcción usaremos Inducción Matemática sobre k.

<u>**Caso I:**</u> Para $k = 1$. Debe cumplirse los siguientes puntos:

1. $\sigma_o = \sigma$. (definición)
2. σ_1 es regular en $F_1 = \overline{\cup_{j<0} V''_j} \cup \overline{V''_1}$.
3. $\sigma_1(p) = \sigma_0$ para $p \notin V'_1$.
4. $d(\sigma_1(p), \sigma_0(p)) < \eta(p)/2$ para $p \in M$.

Prueba. Consideremos la función bump $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que es una función diferenciable en $\mathbb{R}^n$ tal que cumple las siguientes condiciones:

(a) $0 \leq \psi(x) \leq 1$ para $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) $\psi(x) = 1$ para $x \in \bar{B}_1$, y $\psi(x) = 0$ para $x \notin B_2$ $[x \in (\mathbb{R}^n - B_2)]$.

Sea una matriz $X \in \mathbb{M}(m \times n)$ arbitraria, entonces definamos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \Phi_X : B_3 \subset \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ x &\mapsto \Phi_X(x) = \sigma_0 \circ \varphi_1^{-1}(x) + \psi(x) X \cdot x \end{aligned}$$

afirmamos que Φ_X es una aplicación diferenciable en B_3. En efecto, por (1) tenemos $\sigma_0 = \sigma$ que es diferenciable en M y $\varphi_1^{-1} : B_3 \to V_1$ es diferenciable en B_3 entonces $\sigma_0 \circ \varphi_1^{-1}$ es diferenciable en B_3. También ψ es diferenciable en $\mathbb{R}^n$ y $X \cdot x$ es la imagen de una transformación lineal, así es diferenciable en $\mathbb{R}^n$, por tanto $\psi(x)X \cdot x$ es diferenciable en $\mathbb{R}^n$.

Sean $J(X,x)$ la matriz jacobiana de Φ_X y $J_1(x)$ la matriz jacobiana de $\sigma_0 \circ \varphi_1^{-1}$. Si $X = (x_{ij})$ entonces $J(X,x) = J_1(x) + \psi(x)X + \left[\frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x) \sum_{t=1}^{n} x_{it}x_t\right]$. En efecto,

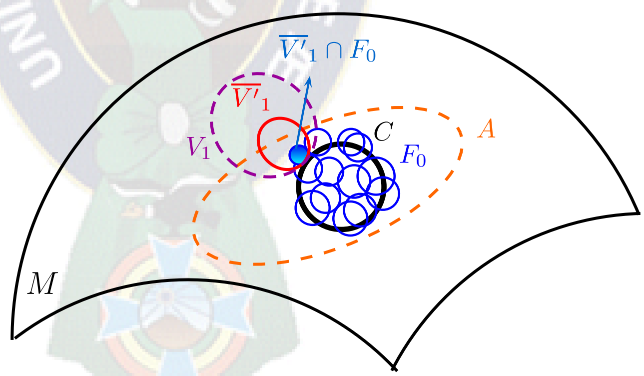
$$\Phi_X(x) = \sigma_0 \circ \varphi_1^{-1}(x) + \psi(x)X \cdot x$$
$$J(X,x) = J_1(x) + \text{Matriz Jacobiana}(\psi(x)X \cdot x)$$
$$J(X,x) = J_1(x) + \overbrace{\psi(x)X + \left[\frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x) \sum_{t=1}^{n} x_{it}x_t\right]} \qquad \text{(Para la prueba ver Caso II)}$$

Ahora consideremos la siguiente aplicación:

$$f : \mathbb{R}^{mn} \times B_3 \subset \mathbb{R}^{mn+n} \to \mathbb{R}^{mn}$$
$$(X,x) \quad \mapsto \quad f(X,x) = J(X,x)$$

afirmamos que f es diferenciable en $\mathbb{R}^{mn} \times B_3$. En efecto, tal como esta definido f, vemos que las componentes de la matriz jacobiana $J(X,x)$ son funciones diferenciables.

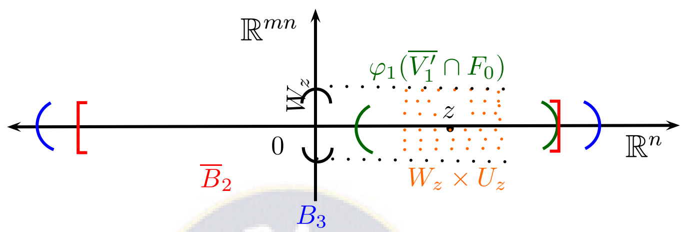
Supongamos que $V_1' \cap F_0 \neq \emptyset$, con $\varphi_1 : V_1' \to \varphi(V_1') = B_1$ y $\overline{V'}_1 \cap F_0 \subset V_1$ de tal manera que $\overline{V'}_1 \cap F_0 \subset V_1$. Notemos también que $\overline{V'}_1$ y V_1 no interseca al subconjunto cerrado C. Para la construcción de estos conjuntos, ver la ilustración en la siguiente gráfica.



Sea $z \in \varphi_1(\overline{V'}_1 \cap F_0)$. De la formula con matrices jacobianas se tiene $J(0,z) = J_1(z)$. Afirmamos que el rango de la matriz $J_1(x)$ es n. En efecto, como $\sigma = \sigma_0 : M \to \mathbb{R}^m$ es regular en $F_0 \subset \overline{A}$ y además $\sigma_0(\varphi_1^{-1}(z))$ es regular en $\varphi_1^{-1}(z) \in \overline{V'}_1 \cap F_0$ (pues $\varphi_1^{-1}(z) \in F_0$), y además φ_1^{-1} es un difeomorfismo, entonces $\sigma_0 \circ \varphi_1^{-1}(z)$ es regular en z, y esto es equivalente a su aplicación lineal $D(\sigma_0 \circ \varphi_1^{-1})(z)$ es uno a uno, así esta aplicación lineal tiene rango n, por tanto su matriz correspondiente $J_1(x)$ tiene rango n.

Luego como tenemos $J(0,z) = J_1(z)$, entonces la matriz $J(0,z)$ tiene rango n. También se tiene por definición de $f : \mathbb{R}^{mn} \times B_3 \subset \mathbb{R}^{mn+n} \to \mathbb{R}^{mn}$ que se cumple $f(0,z) = J(0,z)$, así f tiene rango n en el punto $(0,z)$, entonces por la primera afirmación, concluimos que existe un conjunto abierto $W_z\times U_z$ de $(0,z)$ tal que $(0,z)\in W_z\times U_z\subset\mathbb{R}^{mn}\times B_3$, esto es $0\in W_z\subset\mathbb{R}^{mn}$ y $z\in U_z\subset B_3$. Es más, f tiene rango n en toda la vecindad $W_z\times U_z$. De aquí cualquier punto $(X,x)\in W_z\times U_z$ próximo al punto $(0,z)$, la matriz $f(X,x)=J(X,x)$ tiene rango n.

Como $(0,z)\in\{0\}\times\varphi_1(\overline{V'}_1\cap F_0)$ y $W_z\times U_z$ es una vecindad del punto $(0,z)$. Notemos que la vecindad $W_z\times U_z$ no cubre todo $\varphi_1(\overline{V'}_1\cap F_0)$. Ver la ilustración en la siguiente gráfica.



Como $z\in\varphi(\overline{V_1'}\cap F_0)$, esto es para todo $(0,z)$ podemos cubrir el conjunto $\{0\}\times\varphi_1(\overline{V_1'}\cap F_0)$ por conjuntos abiertos de la siguiente manera;

$$\{0\}\times\varphi_1(\overline{V_1'}\cap F_0)\subset\bigcup_z W_z\times U_z$$

Afirmamos que el conjunto $\{0\}\times\varphi_1(\overline{V_1'}\cap F_0)$ es compacto. En efecto, el conjunto $\{0\}$ es compacto, y $\overline{V_1'}\cap F_0$ es compacto, pues son conjuntos de bolas cerradas bajo la imagen inversa de aplicaciones coordenadas, la intersección de dos compactos es compacto. Así la imagen de una aplicación continua sobre un compacto $\varphi_1(\overline{V_1'}\cap F_0)$ es compacto. Por tanto el producto de dos compactos $\{0\}\times\varphi_1(\overline{V_1'}\cap F_0)$ es compacto.

Como el conjunto $\{0\}\times\varphi_1(\overline{V_1'}\cap F_0)$ es compacto entonces existe un número finito de vecindades que cubren al conjunto compacto, es decir;

$$\begin{aligned}
\{0\}\times\varphi_1(\overline{V_1'}\cap F_0)&\subset W_{z_1}\times U_{z_1}\cup W_{z_2}\times U_{z_2}\cup\cdots\cup W_{z_r}\times U_{z_r}\\
\{0\}\times\varphi_1(\overline{V_1'}\cap F_0)&\subset \underbrace{(W_{z_1}\cup W_{z_2}\cup\cdots W_{z_r})}_{W}\times\underbrace{(U_{z_1}\cup U_{z_2}\cup\cdots U_{z_r})}_{U}\\
\{0\}\times\varphi_1(\overline{V_1'}\cap F_0)&\subset W\times U
\end{aligned}$$

de aquí encontramos una vecindad $W=W_{z_1}\cup W_{z_2}\cup\cdots\cup W_{z_r}$ de 0 en $\mathbb{R}^{mn}$. Es decir $0\in W\subset\mathbb{R}^{mn}$.

Luego si $X\in W$ y $z\in\varphi(\overline{V_1'}\cap F_0)$ entonces la matriz jacobiana $J(X,z)$ tiene rango n. Además la matriz jacobiana $J(X,z)$ proviene de la aplicación $\Phi_X:B_3\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, así Φ_X es regular en z.

Dado el conjunto abierto W de 0, asumimos que los conjuntos W_{z_i} con $i=1,2,...,r$ sean suficientemente pequeños, así obtenemos que el conjunto W sea suficientemente pequeño. Es decir, sea $\varepsilon>0$ el que determina el tamaño de la vecindad W, entonces cuando W

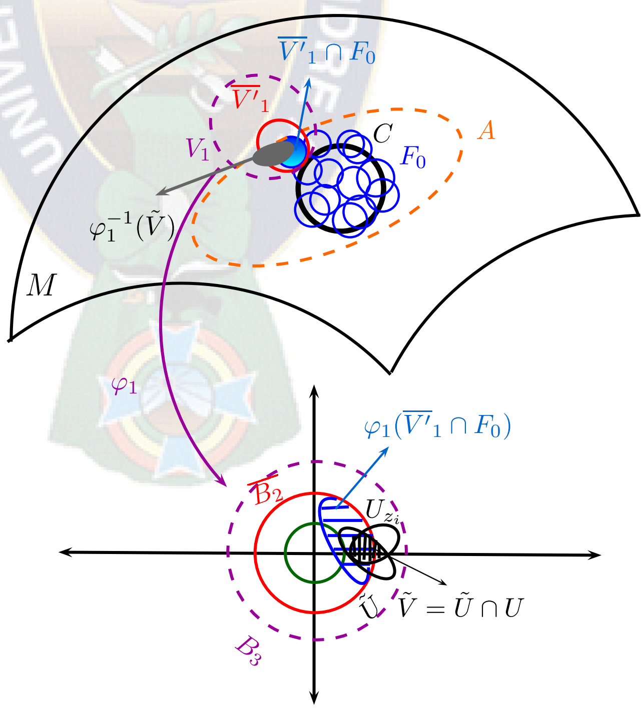
es suficientemente pequeño es equivalente decir que ε tiende al número 0. De esta manera afirmamos que:

$$d(0, X \cdot x) < \frac{\eta_1}{2} \tag{3.1}$$

para $x \in \overline{B}_2$, donde η_1 es el mínimo de $\eta : \overline{V_1'} \to \mathbb{R}^+$ en el conjunto compacto $\overline{V_1'}$. Para justificar (3.1), consideremos la siguiente función continua $F = d \circ i \circ g : \mathbb{R}^{mn} \times B_3 \to \mathbb{R}$ definido por $x \mapsto F(X, x) = d(0, X \cdot x)$. La composición de $F = d \circ i \circ g$ esta dado por el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^{mn} \times B_3 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow{d} & \mathbb{R} \\ (X, x) & \mapsto & X \cdot x & \mapsto & (0, X \cdot x) & \mapsto & d(0, X \cdot x) \end{array}$$

donde g es una aplicación bilineal, i la aplicación inclusión y la función continua d. Así $F = d \circ i \circ g$ es continua en $\mathbb{R}^{mn} \times B_3$, en particular F es continua en el punto $(0, z_0) \in W \times U$ donde $W \times U \subset \mathbb{R}^{mn} \times B_3$. Por definición de continuidad, para todo $\varepsilon = \dfrac{\eta_1}{2} > 0$ existe una vecindad $\tilde{W} \times \tilde{U}$ del punto $(0, z_0)$ con $\tilde{W} \times \tilde{U} \subset \mathbb{R}^{mn} \times B_3$, tal que para cualquier $(X, x) \in \tilde{W} \times \tilde{U} \subset \mathbb{R}^{mn} \times B_3$ entonces $|d(0, O \cdot z_0) - d(0, X \cdot x)| < \varepsilon = \frac{\eta_1}{2}$ esto es equivalente $d(0, X \cdot x) < \varepsilon = \frac{\eta_1}{2}$, para $x \in \tilde{U}$. Ahora veamos que $d(0, X \cdot x) < \varepsilon = \frac{\eta_1}{2}$, para todo $x \in \overline{B_2}$ (Su ilustración, esta en la siguiente figura).



En efecto, como $\tilde{U}$ interseca al conjunto U (pues ambos conjuntos contienen al punto z_0), a esta intersección lo denotaremos por $\tilde{V} = \tilde{U} \cap U \neq \emptyset$. Así $\overline{V_1'} \cap \varphi_1^{-1}(\tilde{V}) \neq \emptyset$ entonces,

$$\overline{V_1'} = \bigcup_{\varphi_1 \in \mathcal{B}} \varphi_1^{-1}\left(\varphi_1\left(\overline{V_1'} \cap \varphi_1^{-1}(\tilde{V})\right)\right)$$

y como $\overline{V_1'} = \varphi^{-1}(\overline{B_2})$ con esto se cumple para todo $(X, x) \in W \times \overline{B_2}$ y así para todo $x \in \overline{B_2}$ que cumple $d(0, X \cdot x) < \frac{\eta_1}{2}$.

Ahora, aplicando el Lema 3.6. Sea $U = B_2$ y $\sigma = \sigma_0 \circ \varphi_1^{-1}$. Sea $\varepsilon > 0$ que determine el tamaño de la vecindad $W \subset \mathbb{R}^{mn} \cong \mathbb{M}(m \times n)$, entonces existe un $X \in W$ ($X = (x_{ij})$ con $|x_{ij}| < \varepsilon$) tal que la aplicación;

$$\begin{aligned} \tilde{\tau} : B_2 &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x \mapsto \tilde{\tau}(x) &= \sigma_0 \circ \varphi_1^{-1}(x) + X \cdot x \end{aligned}$$

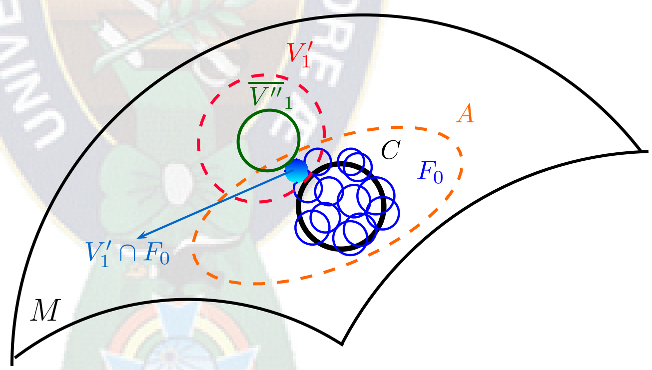
es regular en B_2.

Para $X \in W$, definimos la aplicación σ_1 por:

$$\begin{aligned} \sigma_1 : M &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ p \mapsto \sigma_1(p) &= \begin{cases} \sigma_0(p) + \psi(\varphi_1(p))X \cdot \varphi_1(p), & \text{para } p \in V_1; \\ \sigma_0(p), & \text{para } p \notin V_1'. \end{cases} \end{aligned}$$

entonces σ_1 es diferenciable en M. En efecto, notemos que los dos pedazos de la aplicación σ_1, tienen en común el conjunto abierto $V_1 - \overline{V'}_1$, donde es diferenciable, pues $\sigma_1(p) = \sigma_0(p)$ con $p \in V_1 - \overline{V'}_1$ ($\psi(\varphi_1(p)) = 0$).

Afirmamos que la aplicación σ_1 es regular en F_1. Para la prueba de esta afirmación separamos su prueba en tres casos. Para eso, nos guiaremos de la siguiente ilustración gráfica.



En efecto,

- σ_1 es regular en F_0 para $p \notin V_1'$. Pues $\sigma_1(p) = \sigma_0(p)$ para $p \notin V_1'$ (definición de σ_1) y como la aplicación $\sigma_0 = \sigma$ es regular en el conjunto abierto A entonces σ_0 es regular en $\overline{A}$ (demostrado al principio) y además se sabe que $F_0 = \cup_{j<0} V_j'' \subset \overline{A}$, de aquí σ_0 es regular en F_0, por tanto σ_1 es regular en F_0.

- Como $X \in W$ también podemos afirmar que la aplicación σ_1 es regular en $V_1' \cap F_0$. Pues como $V_1' \cap F_0 \subset F_0$, y por lo anterior se concluye que σ_1 es regular en $V_1' \cap F_0$.

- σ_1 es regular en $\overline{V_1''}$, para $p \in \overline{V_1''} \subset V_1$. Pues $\psi(\varphi_1(p)) = 1$ si $p \in \overline{V''}_1$ entonces

$\sigma_1(p) = \sigma_0(p) + X \cdot \varphi_1(p)$ y gracias a la elección de la matriz $X \in W$, que también cumple las hipótesis del Lema 3.6 se sigue que σ_1 es regular en $\overline{V_1''}$.

Finalmente observemos para $p \in V_1' \subset V_1$ tenemos;

$$\begin{aligned} d(\sigma_1(p), \sigma_0(p)) &= d(\sigma_0(p) + \psi(\varphi_1(p))X \cdot x, \sigma_0(p)) \\ &= d(0, \psi(\varphi_1(p))X \cdot x) \\ &= \psi(\varphi_1(p))d(0, X \cdot x) \\ &\leq 1 \cdot d(0, X \cdot x) & (0 \leq \psi(\varphi_1(p)) \leq 1) \\ &< \frac{\eta_1}{2} \\ &\leq \frac{\eta(p)}{2} \end{aligned}$$

Además cuando $p \notin V_1'$ entonces $d(\sigma_1(p), \sigma_0(p)) = 0$. En conclusión $d(\sigma_1(p), \sigma_0(p)) \leq \dfrac{\eta(p)}{2}$ para todo $p \in M$. Esto completa la prueba del Caso I.

<u>Caso II:</u> Supongamos que las aplicaciones σ_0, σ_1, σ_2, . . . , σ_{k-1} sean construidas, entonces lo que se tiene que demostrar, es la construcción de σ_k.

Consideremos la función bump $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que es una función diferenciable en $\mathbb{R}^n$. Para cualquier matriz $Y \in \mathbb{M}(m \times n)$ definamos la aplicación:

$$\begin{aligned} \Phi_Y : B_3 \subset \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ x \quad &\mapsto \quad \Phi_Y(x) = \sigma_{k-1} \circ \varphi^{-1}(x) + \psi(x)Y \cdot x \end{aligned}$$

donde $\varphi_k : V_k \subset M \to \varphi_k(V_k) \subset \mathbb{R}^n$ es la aplicación coordenada, asociado con la vecindad coordenada V_k, tal que $\varphi_k(V_k) = B_3$, pues $V_k \in \mathcal{B}$.

Afirmamos que Φ_Y es una aplicación diferenciable en B_3. En efecto, $\varphi_k^{-1} : B_3 \to V_k$ es diferenciable en B_3 y por hipótesis $\sigma_{k-1} : M \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en M por tanto $\sigma_{k-1} \circ \varphi_k^{-1}$ es diferenciable en B_3. Además ψ es diferenciable en $\mathbb{R}^n$ y $Y \cdot x$ es diferenciable en $\mathbb{R}^n$, pues es la imagen de una aplicación lineal, entonces $\psi(x)Y \cdot x$ es diferenciable en $\mathbb{R}^n$. En conclusión la aplicación Φ_Y es diferenciable en B_3.

Sea $\mathcal{J}(Y, x)$ la matriz jacobiana de Φ_Y y $\mathcal{J}_k(k)$ la matriz jacobiana de $\sigma_{k-1} \circ {\varphi_k}^{-1}$. Si $Y = (y_{ij})$ con $i = 1, 2, ..., m$ y $j = 1, 2, ..., n$, entonces

$$\mathcal{J}(Y, x) = \mathcal{J}_k(k) + \psi(x)Y + \left[\frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x) \sum_{t=1}^{n} y_{it} x_t \right]$$

En efecto, por definición de la aplicación Φ_Y tenemos $\Phi_Y(x) = \sigma_{k-1} \circ \varphi^{-1}(x) + \psi(x)Y \cdot x$, de esta igualdad sacamos las matrices jacobianas, desde luego la matriz jacobiana de Φ_Y es $\mathcal{J}(Y, x)$

y el otro lado de la igualdad, es suma de dos matrices jacobianas, de la primera aplicación $\sigma_{k-1} \circ \varphi^{-1}(x)$ es $\mathcal{J}_k(k)$ y de la segunda aplicación $\psi(x)Y \cdot x$ no se sabe, para eso consideremos la aplicación $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definido por $x \mapsto h(x) = \psi(x)Y \cdot x$, haciendo las cuentas tenemos $h(x) = (\psi(x)y_{11}x_1 + ... + \psi(x)y_{1n}x_n, \psi(x)y_{21}x_1 + ... + \psi(x)y_{2n}x_n, ..., \psi(x)y_{m1}x_1 + ... + \psi(x)y_{mn}x_n)$ luego para obtener la matriz jacobiana de h hacemos lo siguiente, (pero omitimos algunas cuentas);

$$
\begin{aligned}
h(x) &= \psi(x)Y + \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}(x)(y_{11}x_1 + ... + y_{1n}x_n) & \cdots & \dfrac{\partial\psi}{\partial x_n}(x)(y_{11}x_1 + ... + y_{1n}x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}(x)(y_{m1}x_1 + ... + y_{mn}x_n) & \cdots & \dfrac{\partial\psi}{\partial x_n}(x)(y_{m1}x_1 + ... + y_{mn}x_n) \end{pmatrix}_{mn} \\
&= \psi(x)Y + \sum_{t=1}^{n} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}(x)y_{1t}x_t & \cdots & \dfrac{\partial\psi}{\partial x_n}(x)y_{1t}x_t \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}(x)y_{mt}x_t & \cdots & \dfrac{\partial\psi}{\partial x_c}(x)y_{mt}x_t \end{pmatrix}_{mn} \\
&= \psi(x)Y + \sum_{t=1}^{n} x_t \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}(x)y_{1t} & \cdots & \dfrac{\partial\psi}{\partial x_n}(x)y_{1t} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}(x)y_{mt} & \cdots & \dfrac{\partial\psi}{\partial x_c}(x)y_{mt} \end{pmatrix}_{mn} \\
&= \psi(x)Y + \sum_{t=1}^{n} x_t \left[\frac{\partial\psi}{\partial x_j}(x)y_{it} \right]_{j=1,...,n}^{i=1,...,m} \\
&= \psi(x)Y + \left[\frac{\partial\psi}{\partial x_j}(x) \sum_{t=1}^{n} y_{it}x_t \right].
\end{aligned}
$$

Así obtenemos lo buscado. Ahora consideremos la siguiente aplicación:

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{R}^{mn} \times B_3 \subset \mathbb{R}^{mn+n} &\to \mathbb{R}^{mn} \\
(Y, x) \quad &\mapsto \quad f(Y, x) = J(Y, x)
\end{aligned}
$$

donde las componentes de $J(Y, x)$ son funciones diferenciables y así la aplicación f es diferenciable en el subconjunto abierto $\mathbb{R}^{mn} \times B_3$, de $\mathbb{R}^{mn+n}$.

Sea $z \in \varphi_k(\overline{V_k'} \cap F_{k-1})$. Entonces $J(0, z) = J_k(z)$ es de rango n, pues $\sigma_{k-1} \circ {\varphi_k}^{-1}$ es regular en z. De aquí concluimos que f es regular en el punto $(0, z) \in \mathbb{R}^{mn} \times B_3$ entonces existe una vecindad el punto $(0, z)$ en $\mathbb{R}^{mn} \times B_3$ de la forma $W_z \times U_z$ con $0 \in W_z \subset \mathbb{R}^{mn}$ y $z \in U_z \subset B_3$ en el cual sabiendo que f es regular en toda la vecindad $W_z \times U_z$ así tomando cualquier punto $(Y, x) \in W_z \times U_z$ la matriz jacobiana $J(Y, x)$ es de rango n. El conjunto $\{0\} \times \varphi_k(\overline{V_k'} \cap F_{k-1})$ es compacto, y así es cubierto por un número finito de estas vecindades (los detalles son análogos al Caso I). De esta manera concluimos que existe una vecindad W de 0 en $\mathbb{R}^{mn}$, tal que, si $Y \in W$ y $z \in \varphi_k(\overline{V_k'} \cap F_{k-1})$, entonces $J(Y, x)$ tiene rango n y así Φ_Y es regular en z. También podemos asumir que W es suficientemente pequeño tal como se hizo en el Caso I para $k = 1$, tal que $d(0, Y \cdot x) < \eta_k/2^k$ para $x \in \bar{B}_2$ y $Y \in W$, donde η_k es el mínimo de la función η en el conjunto compacto $\overline{V_k'}$.

Ahora aplicando el Lema 3.6 tomamos $U = B_2$, $\sigma = \sigma_{k-1} \circ {\varphi_k}^{-1}$, y $\epsilon > 0$ que determina el tamaño de la vecindad W. Entonces existe un matriz Y en W tal que la aplicación:

$$\widetilde{\tau} : B_2 \to \mathbb{R}^m$$

$$x \to \sigma_{k-1} \circ {\varphi_k}^{-1} + Y \cdot x$$

es regular en B_2.

Usando la matriz Y, definimos la aplicación $\sigma_k : M \to \mathbb{R}^m$ por:

$$\sigma_k(p) = \begin{cases} \sigma_{k-1}(p) + \psi(\varphi_k(p))Y \cdot \varphi_k(p), & \text{para } p \in V_k, \\ \sigma_{k-1}(p), & \text{para } p \notin V_k'. \end{cases}$$

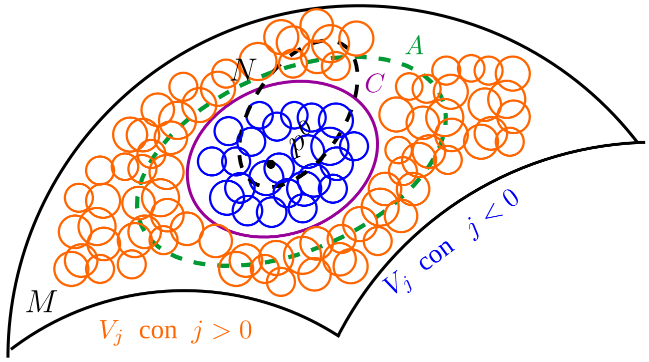
σ_k se apedaza en dos aplicaciones diferenciables y también estas dos aplicaciones tienen en común el conjunto abierto $V_k - \overline{V_k'}$ y así es diferenciable en M. Como $\psi(\varphi_k(p)) = 1$ para $p \in \overline{V_k''}$, nuestra elección de Y garantiza que $\sigma_k = \sigma_{k-1}(p) + Y \cdot \varphi_k(p)$ es regular para $p \in \overline{V_k''}$. Para $p \notin V_k'$ se tiene $\sigma_k(p) = \sigma_{k-1}(p)$ también se sabe que σ_{k-1} es regular en F_{k-1} entonces σ_k es regular en F_{k-1}. Luego como Y está en W, σ_k es regular en $V_k' \cap F_{k-1}$. De esta manera se concluye que σ_k es regular en F_k. Finalmente observemos para $p \in V_k' \subset V_k$, se tiene:

$$\begin{aligned} d(\sigma_k(p), \sigma_{k-1}(p)) &= \psi(\varphi_k(p)) d(0, Y \cdot \varphi_k(p)) \\ &\leq \frac{\eta_k}{2^k} && (0 \leq \psi(\varphi_k(p)) \leq 1) \\ &< \frac{\eta(p)}{2^k} && (\text{para } p \in V_k') \end{aligned}$$

Como la distancia es 0 para $p \notin V_k'$ (pues $d(\sigma_k(p), \sigma_{k-1}(p)) = 0$), así encontramos que $d(\sigma_k(p), \sigma_{k-1}(p)) < \eta(p)/2^k$ para todo $p \in M$. Con esto completamos la construcción de las aplicaciones σ_0, σ_1, . . .

Notemos que la familia numerable de vecindades coordenadas $\mathcal{B} = \{..., V_{-2}, V_{-1}, V_1, V_2, ...\}$ es localmente finito. Con esto encontraremos una aplicación $\tau : M \to \mathbb{R}^m$ de tal manera que sea regular en M, que mostraremos más adelante.

Sea p^0 un punto de M. Entonces existe una vecindad N del punto p^0 tal que se tiene dos opciones y para escoger la opción más correcta. Ver la ilustración en la siguiente gráfica.



1. Si $N \subset C$ esta opción no sirve, ya que el conjunto N puede intersecar a un número finito de vecindades coordenadas $V_{-1}, V_{-2}, ...$. No puede extenderse a todo τ para que sea regular en M, pues todos los conjunto $\{V_j/j < 0\}$ están acotados por C.

2. Si $N \not\subseteq C$, esta opción es la que nos sirve para encontrar la aplicación τ, pues todos los conjunto $\{V_j/j > 0\}$ no están acotados. Es decir que esto, se puede extender a todo M.

Por conveniencia podemos tomar la segunda opción (ya que existe N, pero no es único), entonces N interseca a un número finito de conjuntos $V_1, V_2, ...$ Es decir existe un conjunto $\{j_1, ..., j_r\} \subset \mathbb{N}$ tales que $N \cap V_j \neq \emptyset \Rightarrow j \in \{j_1, ..., j_r\}$.

Sea $k = \text{máx}\{j/N \cap V_j \neq \emptyset\}$, si $j > k$ entonces $N \cap V_j = \emptyset$, y como $p^0 \in N$ entonces $p^0 \notin V_j \supset V'_j$ de aquí $p^0 \notin V'_j$, luego por definición de σ_k tenemos $\sigma_k(p^0) = \sigma_j(p^0)$ con $j = k+1, k+2, k+3, ...$ entonces $\sigma_k(p^0) = \sigma_{k+1}(p^0) = \sigma_{k+2}(p^0) = \cdots$ para $p^0 \notin V'_j$ con $j = k+1, k+2, k+3, ...$

Ahora definiremos la siguiente aplicación: $\tau : M \to \mathbb{R}^m$ definido por $\tau(p^0) = \sigma_k(p^0)$ para todo $p^0 \in M$ con k fijo. Además $\tau(p) = \sigma_k(p)$ para todo $p \in N$ (pues es la restricción de σ_k), entonces podemos concluir que $\tau : M \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en M (pues σ_k es diferenciable en M). Y cuando $p \notin V_k$ entonces por definición de σ_k y el análisis anterior tenemos $\tau(p) = \sigma_k(p)$ para $k = 1, 2, ...$ es decir $\tau(p) = \sigma_1(p) = \sigma_2(p) = \cdots$. De aquí tenemos que para cada $k = 1, 2, ...$ σ_k es regular en F_k, esto es la construcción 2, así τ es regular en $\cup_{k=1}^{\infty} F_k = M$.

Sea $p \in C$. Entonces tenemos dos afirmaciones;

(a) Si $p \in V'_k$ entonces $k < 0$. En efecto, supongamos que $k > 0$, entonces $p \in V'_1, V'_k, ...$ Pero $V'_k \subset V_k \subset C^c$ si $k > 0$, entonces $p \in C^c$ así $p \notin C$ y esto es una contradicción pues $p \in C$.

(b) Si $k > 0$ entonces $p \notin V'_k$ para todo $k = 1, 2, ...$ (contra-recíproca del inciso (a)).

Del inciso (b) $\tau(p) = \sigma_0(p) = \sigma(p)$. En efecto, por definición de σ_k y la construcción 3 tenemos $\sigma_k(p) = \sigma_{k-1}(p)$ para $p \notin V'_k$ con $k = 1, 2, ...$ Es decir $\sigma_0(p) = \sigma_1(p) = \cdots = \sigma_k(p) = \cdots$, así tenemos $\sigma_k(p) = \sigma_0(p)$ entonces $\tau(p) = \sigma_0(p) = \sigma(p)$. Por tanto $\tau(p) = \sigma(p)$ para todo $p \in C$.

Finalmente observemos que $d(\tau(p),\sigma(p)) < \eta(p)$ para todo $p \in M$. En efecto, para todo $p \in M$ tenemos,

$$\begin{aligned}
d(\tau(p),\sigma(p)) &\leq d(\tau(p),\sigma_k(p)) + d(\sigma_k(p),\sigma_0(p)) \\
&\leq d(\tau(p),\sigma_k(p)) + d(\sigma_k(p),\sigma_{k-1}(p)) + \cdots + d(\sigma_1(p),\sigma_0(p)) \\
&= d(\tau(p),\tau(p)) + \sum_{j=1}^{k} d(\sigma_j(p),\sigma_{j-1}(p)) \\
&< 0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\eta(p)}{2^j}, \quad \forall p \in M \\
&= \eta(p), \quad \textit{para todo } p \in M \qquad\qquad (\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1)
\end{aligned}$$

por tanto se tiene que $d(\tau(p),\sigma(p)) < \eta(p)$ para todo $p \in M$. Así concluimos la demostración del Teorema 3.1.

$\square$

3.3. Aproximaciones por Aplicaciones Uno-Uno

Sean M, N variedades diferenciables, $\sigma : M \to N$ una aplicación diferenciable y regular en todo M. Si σ es uno a uno (o σ es inyectiva), entonces $\sigma(M)$ es una subvariedad de N, pues cumple las condiciones de la definición de subvariedad.

Observación 3.1. *Sea $\sigma : M \to N$ diferenciable. Si σ es regular e inyectiva, entonces σ es un homeomorfismo sobre su imagen. Es decir tiene que cumplir tres condiciones:*

(a) *$\sigma : M \to \sigma(M)$ es biyectiva.* ***(b)*** *$\sigma : M \to \sigma(M)$ es continua.*

(c) *$\sigma^{-1} : \sigma(M) \to M$ es continua.*

En efecto, las primeras dos condiciones se justifica, por el hecho que σ es sobreyectiva, en su imagen y σ es diferenciable .
Para el inciso (c). Supongamos un conjunto abierto arbitrario $V \subset M$ que contenga al punto $p \in M$. También supongamos que U_p es la vecindad coordenada del punto p, entonces $U_p \cap V$ es un abierto en M. Por otro lado $D\sigma(p) : T_pM \to T_{\sigma(p)}\sigma(M)$ es un isomorfismo, luego aplicando el Teorema de la función inversa se obtiene que $\sigma : M \to \sigma(M)$ es un difeomorfismo local en U_p, entonces $\sigma^{-1}(U_p \cap V)$ es abierto, de aquí $\bigcup_{p\in M} \sigma^{-1}(U_p \cap V)$ es abierto. Además $\bigcup_{p\in M} \sigma^{-1}(U_p \cap V) = \sigma^{-1}\left(\bigcup_{p\in M} U_p \cap V\right) = \sigma^{-1}(M \cap V) = \sigma^{-1}(V)$, de aquí $\sigma^{-1}(V)$ es abierto en $\sigma(M)$, así σ^{-1} es continua. Por tanto $\sigma : M \to \sigma(M)$ es un homeomorfismo.

Teorema 3.2. *Sean M una variedad diferenciable de dimensión n y $\sigma : M \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 2n+1$, una aplicación diferenciable regular. Sea σ uno a uno, en un conjunto abierto U que contiene al conjunto cerrado C. Para cada función continua positiva η en M, existe una aplicación regular e inyectiva $\tau : M \to \mathbb{R}^m$ tal que $\tau(p) = \sigma(p)$ para $p \in C$ y $d(\tau(p), \sigma(p)) < \eta(p)$ para $p \in M$.*

Demostración. Sea $p \in M$. Como σ es regular en p, existe una vecindad U_p de p tal que σ es uno a uno, en todo el conjunto abierto U_p. En efecto, σ es regular en p, se tiene que su aplicación lineal $D\sigma(p) : T_pM \to T_{\sigma(p)}\mathbb{R}^m$ es una transformación lineal inyectiva en el punto p. Consideremos la aplicación $\sigma : M \to \sigma(M)$ definida sobre su imagen, así se tiene que la aplicación lineal $D\sigma(p) : T_pM \to T_{\sigma(p)}\sigma(M)$ es un isomorfismo, entonces por el Teorema de la Función Inversa existen vecindades U_p del punto p y $W_{\sigma(p)}$ del punto $\sigma(p)$ tal que la aplicación $\sigma : U_p \to W_{\sigma(p)}$ es un difeomorfismo. Por tanto σ es uno a uno, en toda la vecindad U_p.

Asumiendo que U_p esta en U o en el complemento de C, consideremos la familia de conjuntos abiertos $\{U_p/p \in M\}$ que es un cubrimiento de M, entonces por el Teorema 2.4. Existe una familia numerable $\mathcal{B} = \{V_j\}$ tales que:

i) $\mathcal{B}$ es un refinamiento localmente finito de $\{U_p\}$.

ii) Si $V \in \mathcal{B}$ y $\varphi : V \to \varphi(V) \subset \mathbb{R}^m$ es la aplicación coordenada asociado con $V \ni p$, entonces $\varphi(p) = 0$ y $\varphi(V) = B_3$

iii) Si para cada vecindad coordenada V asociando con la aplicación coordenada φ en $\mathcal{B}$ definimos $V' = \varphi^{-1}(B_1)$, entonces la familia $\mathcal{B}'$ de los conjuntos V' cubren M.

Ahora numerando los conjuntos V_j de $\mathfrak{B}$ con enteros positivos y negativos de la forma:

$$V_j \subset U \text{ si } j < 0, \qquad V_j \subset C^c \text{ si } j > 0,$$

definamos que $V_j' = \varphi_j^{-1}(B_2)$ y $V_j'' = \varphi_j^{-1}(B_1)$ de manera que se cumple $V_j'' \subset V_j' \subset V_j$ pues $B_1 \subset B_2 \subset B_3$.

Construyamos una sucesión $\{\sigma_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\sigma_0, \sigma_1, ...\}$, de aplicaciones diferenciables y regulares en M, $\sigma_k : M \to \mathbb{R}^m$ de tal manera que cumplan las siguientes condiciones:

1. $\sigma_0 = \sigma$.

2. $\sigma_k(p) = \sigma_{k-1}(p)$ para $p \notin V_k'$, $k = 1, 2, ...$

3. Si $\sigma_k(p) = \sigma_k(p')$ entonces $\sigma_{k-1}(p) = \sigma_{k-1}(p')$ para $p, p' \in M$.

4. $d(\sigma_k(p), \sigma_{k-1}(p)) < \eta(p)/2^k$ para $p \in M$, $k = 1, 2, ...$

Para la prueba de esta construcción, usaremos Inducción Matemática sobre k.

Caso I: Para $k = 1$. Debe cumplirse los siguientes puntos:

1. $\sigma_0 = \sigma$.

2. $\sigma_1(p) = \sigma_0(p)$ para $p \notin V_1'$.

3. Si $\sigma_1(p) = \sigma_1(p')$ entonces $\sigma_0(p) = \sigma_0(p')$ para $p, p' \in M$.

4. $d(\sigma_1(p), \sigma_0(p)) < \eta(p)/2^k$ para $p \in M$.

Prueba. Primeramente consideremos la función bump $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que es una función diferenciable en $\mathbb{R}^n$ tal que cumple las siguientes condiciones:

(a) $0 \leq \psi(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) $\psi(x) = 1$ para $x \in \bar{B}_1$, y $\psi(x) = 0$ para $x \notin B_2$ $[x \in (\mathbb{R}^n - B_2)]$.

Sea $z = (z_1, ..., z_m) \in \mathbb{R}^m$ arbitraria, entonces definamos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \Phi_z : B_3 \subset \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ x \quad &\mapsto \Phi_z(x) = \sigma_0 \circ \varphi_1^{-1}(x) + \psi(x) z \end{aligned}$$

afirmamos que Φ_z es una aplicación diferenciable en B_3. En efecto, la aplicación $\sigma_0 = \sigma$ es diferenciable y la aplicación coordenada φ_1^{-1} es diferenciable en B_3, entonces $\sigma_0 \circ \varphi_1^{-1}$ es diferenciable en B_3 y también la aplicación $\psi(x)z = (\psi(x)z_1, ..., \psi(x)z_m)$ es diferenciable en $\mathbb{R}^n$ pues las coordenadas $\psi(x)z_i$ son funciones diferenciables en $\mathbb{R}^n$, entonces en particular la aplicación $\psi(x)z$ es diferenciable en B_3. Por tanto $\sigma_0 \circ \varphi_1^{-1}(x) + \psi(x)z$ es diferenciable en B_3.

Sean $J(z, x)$ la matriz jacobiana de Φ_z y $J_1(x)$ la matriz jacobiana de $\sigma_0 \circ \varphi_1^{-1}$. Si $z = (z_1, ..., z_m)$ entonces sacando la matriz jacobiana de $\Phi_z(x) = \sigma_0 \circ \varphi_1^{-1}(x) + \psi(x)z$ tenemos:

$$\begin{aligned} J(z,x) &= J_1(x) + \textit{matriz jacobiana de } (\psi(x)z) \\ &= J_1(x) + \begin{pmatrix} z_1 \dfrac{\partial \psi}{\partial x_1}(x) & \cdots & z_1 \dfrac{\partial \psi}{\partial x_n}(x) \\ z_2 \dfrac{\partial \psi}{\partial x_1}(x) & \cdots & z_2 \dfrac{\partial \psi}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_m \dfrac{\partial \psi}{\partial x_1}(x) & \cdots & z_m \dfrac{\partial \psi}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}_{m \times n} \\ &= J_1(x) + \left[z_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x) \right]_{j=1,2,\ldots,n}^{i=1,2,\ldots,m} \end{aligned}$$

donde $\psi(x)z = (\psi(x)z_1, ..., \psi(x)z_m)$ entonces su matriz jacobiana es $\left[z_i \dfrac{\partial \psi}{\partial x_j}(x)\right]$. Por tanto

$$J(z,x) = J_1(x) + \left[z_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x)\right]. \tag{3.2}$$

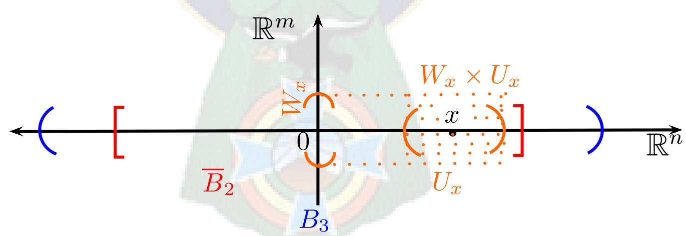
Consideremos la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^m \times B_3 \subset \mathbb{R}^{m+n} & \to & \mathbb{R}^{mn} \\ (z,x) & \mapsto & f(z,x) = J(z,x) \end{array}$$

afirmamos que f es diferenciable en $\mathbb{R}^m \times B_3$. En efecto, tal como esta definido f, vemos que las componentes de la matriz jacobiana $J(z,x)$ son funciones diferenciables.

Afirmamos que $J_1(x)$ tiene rango n. En efecto, la aplicación $\sigma_0 \circ \varphi_1^{-1} : B_3 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es regular en $x \in B_3$. Pues $\sigma_0(\varphi_1^{-1}(x))$ es regular en $\varphi_1^{-1}(x) \in M$, y como φ_1^{-1} es un difeomorfismo entonces $\sigma_0 \circ \varphi_1^{-1}(x)$ es regular en $x \in B_3$ y esto significa que la matriz jacobiana $J_1(x)$ tiene rango n.

Además si $z = (0, ..., 0) \in \mathbb{R}^m$ y utilizando (3.2) tenemos $J(0,x) = J_1(x)$. Entonces $J(0,x)$ tiene rango n. Por definición de f tenemos $f(0,x) = J(0,x)$, entonces la aplicación f tiene rango n en el punto $(0,x)$ y esto implica que f es regular en el punto $(0,x)$, de aquí existe una vecindad $W_x \times U_x$ del punto $(0,x)$ tal que $(0,x) \in W_x \times U_x \subset \mathbb{R}^m \times B_3$ significa que $0 \in W_x \subset \mathbb{R}^m$ y $x \in U_x \subset B_3$. Es más f tiene rango n en toda la vecindad $W_x \times U_x$. Así cualquier elemento $(z,x) \in W_x \times U_x$ próximos al punto $(0,x)$, la matriz $J(z,x) = f(z,x)$ tiene rango n. Como la matriz jacobiana de $J(z,x)$ proviene de la aplicación Φ_z. Entonces Φ_z es regular en $x \in U_x$. Ver la ilustración en la siguiente gráfica, de lo que se esta haciendo en este párrafo.



Luego por conjuntos tenemos $(0,x) \in \{0\} \times \overline{B_2} \subset \bigcup_{x \in \overline{B_2}} (W_x \times U_x)$ y además $\{0\} \times \overline{B_2}$ es compacto. Entonces existe un número finito de vecindades $W_{x_1} \times U_{x_1}, ..., W_{x_r} \times U_{x_r}$ tales que

$$\begin{aligned} \{0\} \times \overline{B_2} &\subset W_{x_1} \times U_{x_1} \cup \cdots \cup W_{x_r} \times U_{x_r} \\ \{0\} \times \overline{B_2} &\subset \underbrace{(W_{x_1} \cup \cdots \cup W_{x_r})}_{W} \times \underbrace{(U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_r})}_{U} \\ \{0\} \times \overline{B_2} &\subset W \times U \end{aligned}$$

así encontramos una vecindad W de 0, donde cada vecindad W_{x_i} contienen al vector $0 \in \mathbb{R}^n$ y también una vecindad U de x que cubre a $\overline{B_2}$, de aquí afirmamos que si $z \in W$ y $x \in B_2$

entonces Φ_z es regular para todo $x \in B_2$. En efecto, supongamos $z \in W = W_{x_1} \cup \cdots \cup W_{x_r}$ y $x \in B_2 \subset \overline{B_2} \subset U \subset \mathbb{R}^n$, entonces existen vecindades W_{x_i} de z y U_{x_i} de x tales que $z \in W_x = W_{x_i}$, $x \in U_x = U_{x_i}$ y así Φ_z es regular en $x \in U_x$ (por resultado anterior).

Haciendo que las vecindades W_{x_i} sean suficientemente pequeños, podemos asumir que la vecindad W sea suficientemente pequeño, así para $z \in W$ podemos hacer que:

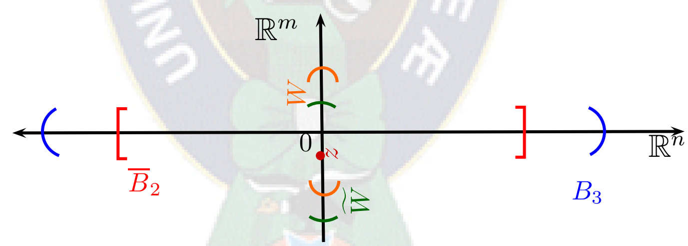
$$d(0,z) < \frac{\eta_1}{2} \tag{3.3}$$

donde $\eta_1 = \min\{\eta : \overline{V_1} \to \mathbb{R}^+ / \eta \textit{ es continua positiva}\}$. Hay otra manera para obtener (3.3) sin hacer que W sea suficientemente pequeño. Primeramente consideremos el siguiente diagrama:

$$\mathbb{R}^m \xrightarrow{i} \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \xrightarrow{d} \mathbb{R}$$

$$z \mapsto i(z) = (0,z) \mapsto d(0,z)$$

donde i es aplicación inclusión y d la función métrica, entonces la función $F = d \circ i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definido $z \mapsto F(z) = d(0,z)$ es continua en $\mathbb{R}^m$, en particular F es continua en $0 \in W \subset \mathbb{R}^m$ esto significa: Para todo $\varepsilon = \frac{\eta_1}{2} > 0$ existe una vecindad $\widetilde{W}$ del punto 0 ($0 \in \widetilde{W} \subset \mathbb{R}^m$) tal que para todo $z \in \widetilde{W}$ implica $|F(0) - F(z)| = |d(0,0) - d(0,z)| = d(0,z) < \frac{\eta_1}{2}$. Además cumple para todo $z \in W$. En efecto, hasta el momento solo tenemos para $z \in W \cap \widetilde{W}$, de aquí se tiene que $z \in \bigcup_{z \in W}(W \cap \widetilde{W}) = W$, así se cumple para todo $z \in W$. Ver la ilustración en la siguiente figura:



Definamos la siguiente función:

$$\theta_1 : M \to \mathbb{R}$$

$$p \mapsto \theta_1(p) = \begin{cases} \psi(\varphi_1(p)), & \text{para } p \in V_1; \\ 0, & \text{para } p \notin V_1. \end{cases}$$

esta función θ_1 es diferenciable en M. En efecto, la función bump $\psi \circ \varphi_1$ es diferenciable en M en particular en V_1 así la función θ_1 es diferenciable en V_1 y también para $p \notin V_1$ la función $\theta_1(p) = 0$ es diferenciable en $M - V_1$ ($p \in M - V_1$ si y sólo si $p \notin V_1$) pues es la función constante 0. Por tanto θ_1 es diferenciable en M.

Construiremos un conjunto abierto Q_1 de $M \times M$ definido de la siguiente manera:

$$Q_1 = \{(p,p') \in M \times M / \ \theta_1(p) \neq \theta_1(p')\}.$$

Como la función θ_1 es continua en M, en particular es continua en $p_0 \in M$ esto significa que: Para todo $\varepsilon > 0$ existe, una vecindad U de p_0 tal que, para cualquier $p \in U$ implica $|\theta_1(p) - \theta_1(p_0)| < \varepsilon$. Sea $\theta_1(p_0) = 0$ con $p_0 \notin V_1 \subset M$ y fijando $\varepsilon = \varepsilon_0$ existe una vecindad U_0 de p_0 tal que, para cualquier $p \in U_0$ implica $\theta_1(p) \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$. Sean $Q_1 = U_0 \times \overline{U_0}^c$ y $(p, p') \in Q_1$ entonces $p \in U_0$ y $p' \in \overline{U_0}^c$, de aquí $\theta_1(p) < \varepsilon_0$ y $\theta_1(p') > \varepsilon_0$, por tanto $\theta_1(p) \neq \theta_1(p')$. Y además $Q_1 \neq \emptyset$, pues considerando la aplicación coordenada $\varphi_1 : V_1 \to \varphi_1(V_1) = B_3$ con $\varphi_1(p) = 0$, $p \in V_1$ y sea $p' \notin V_1'$ entonces como $(p, p') \in M \times M$ se tiene;

$$\theta_1(p) = \psi(\varphi_1(p)) = \psi(0) = 1 \neq 0 = \theta_1(p'),$$

así $\theta_1(p) \neq \theta_1(p')$.

Con el conjunto abierto Q_1, definimos la aplicación:

$$\begin{aligned} \rho_1 : Q_1 \quad &\to \quad \mathbb{R}^m \\ (p, p') \mapsto \rho_1(p, p') &= \tfrac{-1}{\theta_1(p) - \theta_1(p')} \left[\sigma_0(p) - \sigma_0(p')\right]. \end{aligned}$$

Afirmamos que ρ_1 es diferenciable en Q_1. En efecto, las aplicaciones θ_1 y $\sigma_0 = \sigma$ son diferenciables en M. Además el conjunto $\rho(Q_1)$ contiene al 0, pues con la aplicación σ_0 puede ocurrir que $\sigma_0(p) = \sigma_0(p')$ (por definición de σ_0). En efecto, supongamos que $0 \notin \rho_1(Q_1)$ entonces $\sigma_0(p) \neq \sigma_0(p')$ para $p \neq p'$, de aquí la aplicación σ_0 es uno a uno en todo M, esto contradice a la hipótesis de este Teorema 3.2 pues la aplicación $\sigma_0 = \sigma$ es uno a uno en un conjunto abierto U y no en todo M.

Como $\rho_1 : Q_1 \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en Q_1 y $m \geq 2n + 1 > 2n$, entonces por el Corolario 3.2, se concluye que $\rho_1(Q_1)$ tiene medida cero. El complemento del conjunto $\rho_1(Q_1)$ es denso, es decir: $\overline{\mathbb{R}^m - \rho_1(Q_1)} = \mathbb{R}^m$ esto es equivalente para toda vecindad abierta, en particular tomando a la vecindad $W \subset \mathbb{R}^m$ que contiene al $0 \in \mathbb{R}^m$ tal que $W \cap (\mathbb{R}^m - \rho_1(Q_1)) \neq \emptyset$. Entonces existe un $z \in W \cap (\mathbb{R}^m - \rho_1(Q_1))$ tal que $z \in W$ y $z \in (\mathbb{R}^m - \rho_1(Q_1))$, de aquí $z \notin \rho_1(Q_1)$ y como $\rho_1(Q_1)$ contiene al 0, entonces $z \neq 0$.

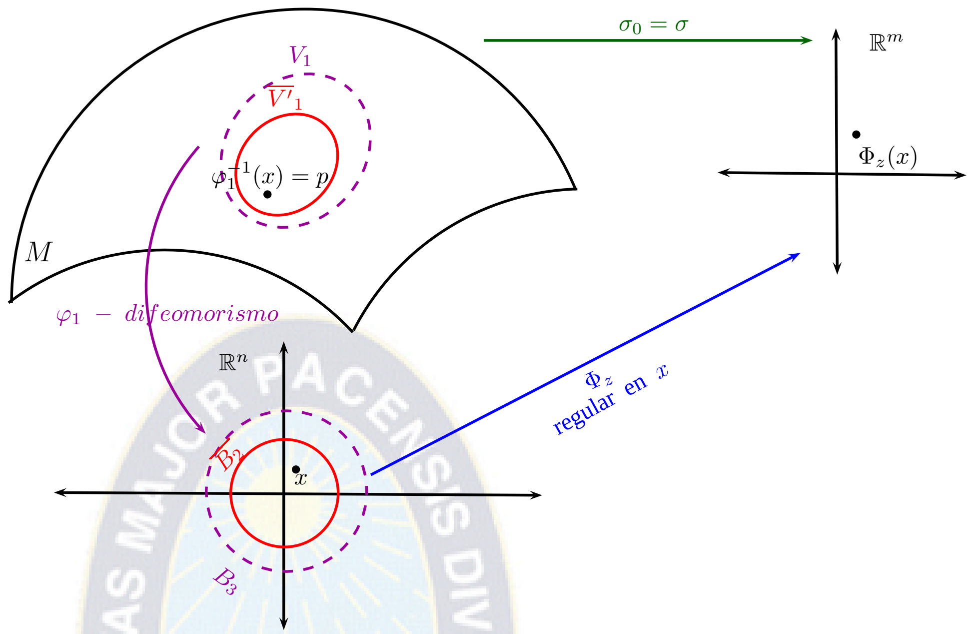
Encontrando este $z \in \mathbb{R}^m$ con $z \neq 0$. Usamos z para definir la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \sigma_1 : M &\to \mathbb{R}^m \\ p \mapsto \sigma_1(p) &= \sigma_0(p) + \theta_1(p)z \end{aligned}$$

entonces σ_1 es diferenciable en M. En efecto, la aplicación σ_0 es diferenciable en M y la función θ_1 es diferenciable en M.

Afirmamos que la aplicación $\sigma_1 : M \to \mathbb{R}^m$ es regular en M. Para su prueba consideremos dos partes:

- σ_1 es regular en V_1'. En efecto, primeramente recordamos la siguiente afirmación que si $z \in W$ y $x \in B_2$ entonces $\Phi_z : B_3 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es regular en todo $x \in B_2$ y como $\varphi_1 : V_1 \longrightarrow B_3$ es un difeomorfismo (pues es una aplicación coordenada), entonces $\Phi_z \circ \varphi_1 : V_1 \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es regular en V_1'. Ver la ilustración en la siguiente figura.



Sea $p \in V_1'$ entonces:

$$\begin{aligned}\sigma_1(p) &= \sigma_0(p) + \theta_1(p)z \\ &= \sigma_0 + \psi(\varphi_1(p))z \\ &= \Phi_z(\varphi_1(p)) \\ &= \Phi_z \circ \varphi_1(p)\end{aligned}$$

por tanto $\sigma_1(p) = \Phi_z \circ \varphi_1(p)$, entonces σ_1 es regular en todo punto $p \in V_1'$ de aquí σ_1 es regular en V_1'.

- σ_1 es regular en $M - V_1'$. En efecto, sea $p \in M - V_1'$, entonces $p \notin V_1'$, luego por definición de σ_1 tenemos $\sigma_1(p) = \sigma_0(p) + \theta_1(p)z$ y por definición de la función θ_1 tenemos $\theta_1(p) = 0$ para $p \notin V_1'$ entonces $\sigma_1(p) = \sigma_0(p) + 0z$, así $\sigma_1(p) = \sigma_0(p) = \sigma(p)$, de aquí σ_1 es regular en $p \in M - V_1'$.

En conclusión la aplicación σ_1 es regular en M.

Dados $p, p' \in M$. Si $\sigma_1(p) = \sigma_1(p')$ entonces $\sigma_0(p) - \sigma_0(p') = -[\theta_1(p) - \theta_1(p')]z$. En efecto, por definición de σ_1, tenemos: $\sigma_1(p) = \sigma_0(p) + \theta_1(p)z \quad$ y $\quad \sigma_1(p') = \sigma_0(p') + \theta_1(p')z$. Luego;

$$\begin{aligned}\sigma_0(p) - \sigma_0(p') &= \sigma_1(p) - \theta_1(p)z - [\sigma_1(p') - \theta_1(p')z] \\ &= -[\theta_1(p) - \theta_1(p')]z\end{aligned}$$

Afirmamos si $z \notin \rho_1(Q_1)$ entonces $\theta_1(p) = \theta_1(p')$. En efecto, supongamos que $\theta_1(p) \neq \theta_1(p')$, luego por la definición de ρ_1 tenemos:

$$\begin{aligned} Q_1 \ni (p, p') \mapsto \rho_1(p, p') &= \frac{-1}{\theta_1(p) - \theta_1(p')} [\sigma_0(p) - \sigma_0(p')] \\ &= \frac{-1}{\theta_1(p) - \theta_1(p')} [-[\theta_1(p) - \theta_1(p')]z] \\ &= z \end{aligned}$$

así, $\rho_1(p, p') = z$ esto significa que $z \in \rho_1(Q_1)$ que es una contradicción, pues $z \notin \rho_1(Q_1)$.

Reemplazando la igualdad $\theta_1(p) = \theta_1(p')$ en la ecuación $\sigma_0(p) - \sigma_0(p') = -[\theta_1(p) - \theta_1(p')]z$, se tiene $\sigma_0(p) = \sigma_0(p')$ para $p, p' \in M$.

Finalmente, para $p \in V_1$ se tiene $d(\sigma_1(p), \sigma_0(p)) < \dfrac{\eta(p)}{2}$. En efecto, para $p \in V_1$ tenemos:

$$\begin{aligned} d(\sigma_1(p), \sigma_0(p)) &= d(\sigma_0(p) + \theta_1(p)z, \sigma_0(p)) \\ &= d(0, \theta_1(p)z) \\ &= \theta_1(p) d(0, z) \\ &\leq 1 \cdot d(0, z) \\ &< \frac{\eta_1}{2} \\ &\leq \frac{\eta(p)}{2} \qquad (\eta_1 \text{ mínimo de } \eta) \end{aligned}$$

Afirmamos $d(\sigma_1(p), \sigma_0(p)) = 0$ para $p \notin V_1$. En efecto, para $p \notin V_1$ tenemos:

$$\begin{aligned} d(\sigma_1(p), \sigma_0(p)) &= d(\sigma_0(p) + \theta_1(p)z, \sigma_0(p)) \\ &= d(\sigma_0(p) + 0z, \sigma_0(p)) \\ &= d(\sigma_0(p), \sigma_0(p)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, por las dos ultimas afirmaciones anteriores se concluye lo siguiente:

$$d(\sigma_1(p), \sigma_0(p)) < \frac{\eta(p)}{2} \qquad \textit{para todo } p \in M$$

Esto completa la demostración para el Caso I.

<u>Caso II:</u> Supongamos que $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}$ sean construidas, entonces lo que se tiene que mostrar, es la construcción de σ_k. Los detalles de la prueba de este caso, están en el Caso I. Sea $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la función bump, que es una función diferenciable en $\mathbb{R}^n$ tal que cumple las siguientes condiciones:

(a) $0 \leq \psi(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) $\psi(x) = 1$ para $x \in \bar{B}_1$, y $\psi(x) = 0$ para $x \notin B_2$ $[x \in (\mathbb{R}^n - B_2)]$.

Sea $z \in \mathbb{R}^m$, definamos la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rcl} \Phi_z : B_3 \subset \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ x & \mapsto & \Phi_z(x) = \sigma_{k-1} \circ \varphi_k^{-1}(x) + \psi(x)z \end{array}$$

entonces Φ_z es una aplicación diferenciable en B_3.

Sean $J(z,x)$ la matriz jacobiana de Φ_z y $J_k(x)$ la matriz jacobiana de $\sigma_0 \circ \varphi_k^{-1}$. Si $z = (z_1, ..., z_m)$ entonces sacando la matriz jacobiana de $\Phi_z(x) = \sigma_0 \circ \varphi_k^{-1}(x) + \psi(x)z$ tenemos:

$$\begin{aligned} J(z,x) &= J_k(x) + matriz\ jacobiana\ de\ (\psi(x)z) \\ &= J_k(x) + \begin{pmatrix} z_1 \dfrac{\partial \psi}{\partial x_1}(x) & \cdots & z_1 \dfrac{\partial \psi}{\partial x_n}(x) \\ z_2 \dfrac{\partial \psi}{\partial x_1}(x) & \cdots & z_2 \dfrac{\partial \psi}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_m \dfrac{\partial \psi}{\partial x_1}(x) & \cdots & z_m \dfrac{\partial \psi}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}_{m \times n} \\ &= J_k(x) + \left[z_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x) \right]_{j=1,2,\ldots,n}^{i=1,2,\ldots,m} \end{aligned}$$

Por tanto

$$J(z,x) = J_k(x) + \left[z_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x) \right] \tag{3.4}$$

Consideremos la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^m \times B_3 \subset \mathbb{R}^{m+n} & \to & \mathbb{R}^{mn} \\ (z,x) & \mapsto & f(z,x) = J(z,x) \end{array}$$

afirmamos que f es diferenciable en $\mathbb{R}^m \times B_3$. En efecto, tal como esta definido f, vemos que las componentes de la matriz jacobiana $J(z,x)$ son funciones diferenciables.

Afirmamos que $J_k(x)$ tiene rango n. En efecto, la aplicación $\sigma_0 \circ \varphi_1^{-1} : B_3 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es regular en $x \in B_3$. Pues $\sigma_0(\varphi_k^{-1}(x))$ es regular en $\varphi_k^{-1}(x) \in M$, y como φ_k^{-1} es un difeomorfismo entonces $\sigma_0 \circ \varphi_1^{-1}(x)$ es regular en $x \in B_3$ y esto significa que la matriz jacobiana $J_k(x)$ tiene rango n.

Si $z = (0, ..., 0) \in \mathbb{R}^m$ y utilizando (3.4) tenemos $J(0,x) = J_k(x)$. Entonces $J(0,x)$ tiene rango n. Por definición de f tenemos $f(0,x) = J(0,x)$, entonces la aplicación f tiene rango n en el punto $(0,x)$ y esto implica que f es regular en el punto $(0,x)$, de aquí existe una vecindad $W_x \times U_x$ del punto $(0,x)$ tal que $(0,x) \in W_x \times U_x \subset \mathbb{R}^m \times B_3$ significa que $0 \in W_x \subset \mathbb{R}^m$ y $x \in U_x \subset B_3$. Es más f tiene rango n en toda la vecindad $W_x \times U_x$. Así cualquier elemento $(z,x) \in W_x \times U_x$ próximos al punto $(0,x)$, la matriz $J(z,x) = f(z,x)$ tiene rango n. Como la matriz jacobiana de $J(z,x)$ proviene de la aplicación Φ_z. Entonces Φ_z es regular en $x \in U_x$.

Luego por conjuntos tenemos $(0,x) \in \{0\} \times \overline{B_2} \subset \bigcup_{x\in\overline{B_2}}(W_x \times U_x)$ y además $\{0\} \times \overline{B_2}$ es compacto. Entonces existe una vecindad W de $0 \in \mathbb{R}^m$, y también una vecindad U de x que cubre a $\overline{B_2}$, y de aquí podemos afirmar que si $z \in W$ y $x \in B_2$ entonces Φ_z es regular para todo $x \in B_2$.

Haciendo que la vecindad $W \subset \mathbb{R}^m$ que contiene a 0, sea suficientemente pequeño, tal que sí para $z \in W$ podemos hacer que:

$$d(0,z) < \frac{\eta_k}{2} \tag{3.5}$$

donde $\eta_k = \text{mín}\{\eta : \overline{V_k} \to \mathbb{R}^+ \ / \ \ \eta \textit{ es continua positiva}\}$. Significa que η_k es el mínimo de η en el conjunto compacto $\overline{V_k}$.

Definimos la siguiente aplicación:

$$\theta_k : M \to \mathbb{R}$$
$$p \mapsto \theta_k(m) = \begin{cases} \psi(\varphi_k(m)) & \text{para } m \in V_k, \\ 0 & \text{para } m \notin V_k. \end{cases}$$

la función θ_k es diferenciable en M.

Sea Q_k el subconjunto abierto de $M \times M$ que consiste de todos los puntos (p,p') tal que $\theta_k(p) \neq \theta_k(p')$. Es decir: $Q_k = \{(p,p') \in M \times M / \ \ \theta_k(p) \neq \theta_k(p')\}$.

Con el conjunto abierto Q_k. Definimos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \rho_k : Q_k \ &\to \ \mathbb{R}^m \\ (p,p') \mapsto \rho_k(p,p') &= \frac{-1}{\theta_k(p) - \theta_k(p')}[\sigma_{k-1}(p) - \sigma_{k-1}(p')] \end{aligned}$$

para $(p,p') \in Q_k$. Entonces $\rho_k : Q_k \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación diferenciable. Como $m > 2n$, el conjunto imagen $\rho_k(Q_k)$ tiene medida cero. El complemento de $\rho_k(Q_k)$ es denso en $\mathbb{R}^m$, esto es equivalente para toda vecindad abierta, en particular tomando a la vecindad $W \subset \mathbb{R}^m$ que contiene al $0 \in \mathbb{R}^m$ tal que $W \cap (\mathbb{R}^m - \rho_k(Q_k)) \neq \emptyset$. Entonces existe un $z \in W \cap (\mathbb{R}^m - \rho_k(Q_k))$ tal que $z \in W$ y $z \in (\mathbb{R}^m - \rho_k(Q_k))$, de aquí $z \notin \rho_k(Q_k)$ y como $\rho_k(Q_k)$ no contiene al 0, entonces $z \neq 0$.

Encontrado este $z \in \mathbb{R}^m$ con $z \neq 0$. Para z, definimos la siguiente aplicación:

$$\sigma_1 : M \to \mathbb{R}^m$$
$$p \mapsto \sigma_k(p) = \sigma_{k-1}(p) + \theta_k(p)z$$

entonces σ_k es diferenciable y regular en todo M, pues $\sigma_k(p) = \Phi_z(\varphi_k(p))$ para $p \in V_k'$ y $\sigma_k(p) = \sigma_{k-1}(p)$ para $p \notin V_k'$.

Además para $p,p' \in M$, si $\sigma_k(p) = \sigma_k(p')$, entonces $\sigma_{k-1}(p) - \sigma_{k-1}(p') = -[\theta_k(p) - \theta_k(p')]z$ En efecto, por definición de σ_k, tenemos:

$$\sigma_k(p) = \sigma_{k-1}(p) + \theta_k(p)z \qquad \text{y} \qquad \sigma_k(p') = \sigma_{k-1}(p') + \theta_k(p')z$$

Luego;

$$\begin{aligned}\sigma_{k-1}(p) - \sigma_{k-1}(p') &= \sigma_k(p) - \theta_k(p)z - [\sigma_k(p') - \theta_k(p')z] \\ &= -[\theta_k(p) - \theta_k(p')]z\end{aligned}$$

Afirmamos si $z \notin \rho_k(Q_k)$ entonces $\theta_k(p) = \theta_k(p')$. En efecto, supongamos lo contrario tal que $\theta_k(p) \neq \theta_k(p')$, entonces por definición de ρ_k para $(p, p') \in Q_k$ tenemos:

$$\begin{aligned}(p, p') \mapsto \rho_k(p, p') &= \frac{-1}{\theta_k(p) - \theta_k(p')} [\sigma_{k-1}(p) - \sigma_{k-1}(p')] \\ \rho_k(p, p') &= \frac{-1}{\theta_k(p) - \theta_k(p')} [-[\theta_k(p) - \theta_k(p')]z] \\ &= z\end{aligned}$$

de aquí se tiene que $\rho_k(p, p') = z$ esto significa que $z \in \rho_k(Q_k)$ que es una contradicción, pues $z \notin \rho_k(Q_k)$.

Esta igualdad $\theta_k(p) = \theta_k(p')$ reemplazamos a $\sigma_{k-1}(p) - \sigma_{k-1}(p') = -[\theta_k(p) - \theta_k(p')]z$, entonces $\sigma_{k-1}(p) = \sigma_{k-1}(p')$ para $p, p' \in M$.

Finalmente, para $p \in V_k$ se tiene $d(\sigma_k(p), \sigma_{k-1}(p)) < \dfrac{\eta(p)}{2^k}$. En efecto, para $p \in V_k$ tenemos:

$$\begin{aligned}d(\sigma_k(p), \sigma_{k-1}(p)) &= d(\sigma_{k-1}(p) + \theta_k(p)z, \sigma_{k-1}(p)) \\ &= d(0, \theta_k(p)z) \\ &= \theta_k(p)d(0, z) \\ &\leq 1 \cdot d(0, z) \\ &< \frac{\eta_k}{2} \\ &\leq \frac{\eta(p)}{2^k}\end{aligned}$$

También afirmamos para $p \notin V_k$ entonces $d(\sigma_k(p), \sigma_{k-1}(p)) = 0$. En efecto, para $p \notin V_k$ tenemos:

$$\begin{aligned}d(\sigma_k(p), \sigma_{k-1}(p)) &= d(\sigma_{k-1}(p) + \theta_k(p)z, \sigma_{k-1}(p)) \\ &= d(\sigma_{k-1}(p) + 0z, \sigma_{k-1}(p)) \\ &= d(\sigma_{k-1}(p), \sigma_{k-1}(p)) \\ &= 0\end{aligned}$$

Por tanto, por las dos últimas afirmaciones anteriores se concluye lo siguiente:

$$d(\sigma_k(p), \sigma_{k-1}(p)) < \frac{\eta(p)}{2^k} \quad \textit{para todo } p \in M$$

Esto completa la demostración para el Caso II. En conclusion por el Caso I y el Caso II se completa la prueba de la construcción de la sucesión de $\{\sigma_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\sigma_0, \sigma_1, ...\}$, de aplicaciones diferenciables y regulares en M.

Como el Teorema 3.2 tiene las mismas hipótesis que el Teorema 3.1, entonces podemos definir a la aplicación τ como en la prueba del Teorema 3.1. Esto es:

$$\begin{aligned} \tau : M &\to \mathbb{R}^m \\ p &\mapsto \tau(p) = \sigma_k(p) \quad \textit{para todo}\, p \in M \end{aligned}$$

y que en ese Teorema 3.1 la aplicación τ es diferenciable en M y regular en todo M, además $\tau(p) = \sigma(p)$ en $p \in C$ y $d(\tau(p), \sigma(p)) < \eta(p)$ para todo $p \in M$.

Para concluir la prueba de este Teorema. Basta mostrar que τ es uno a uno. En efecto, supongamos que $\tau(p) = \tau(p')$, entonces por la construcción que se hizo para τ existe un j tal que:

$$\begin{aligned} \tau(p) = \sigma_j(p) = \sigma_{j+1}(p) = \cdots \\ \tau(p') = \sigma_j(p') = \sigma_{j+1}(p') = \cdots \end{aligned}$$

de aquí $\sigma_k(p) = \sigma_k(p')$ para $k \geq j$. Ahora por la construcción de sucesiones de aplicaciones $\{\sigma_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de la parte (3) tenemos: si $\sigma_k(p) = \sigma_k(p')$ entonces $\sigma_{k-1}(p) = \sigma_{k-1}(p')$ para $p, p' \in M$. aplicando varias veces la parte (3) de la construcción tenemos $\sigma_0(p) = \sigma_0(p')$ para $k < j$. Por tanto $\sigma_k(p) = \sigma_k(p')$ para todo $k \geq 0$. En particular, $\sigma(p) = \sigma(p')$.

Notemos que la familia $\mathcal{B} = \{V_j\}$ es un refinamiento de $\{U_p\}_{p\in M}$. Es decir: Para todo $V_k \in \mathcal{B}$, existe una vecindad $U_p \in \{U_p\}$ tal que $V_k \subset U_p$. Además se sabe que σ es uno a uno en U_p (Ver al inicio de la prueba del Teorema 3.2). Esto implica que σ es uno a uno en todas las vecindades coordenadas V_k.

Para probar que $p = p'$, mostraremos que los puntos $p, p' \in V_k$, luego utilizaremos que σ es uno a uno en V_k. Para esto hacemos lo siguiente:

- Sea $p \in V_k'' \subset V_k$. Entonces por definición de σ_k tenemos lo siguiente $\sigma_k(p) = \sigma_k(p') + \theta_p z$, y como $\theta_p = \psi(\varphi_k(p)) = 1$ para $p \in V_k''$, entonces,

$$\sigma_k(p) = \sigma_k(p') + z. \tag{ω}$$

- Si $p' \notin V_k$, entonces por la construcción de aplicaciones $\{\sigma_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de la parte 2, para $p' \in V_k$ tenemos,

$$\sigma_k(p') = \sigma_{k-1}(p'). \tag{α}$$

Y como $\tau(p) = \tau(p')$ entonces $\sigma_k(p) = \sigma_k(p') \ldots (\beta)$, entonces por la construcción de la parte 3, tenemos,

$$\sigma_{k-1}(p) = \sigma_{k-1}(p'). \qquad (\gamma)$$

Combinando las tres ecuaciones $(\alpha), (\beta)$ y (γ), tenemos $\sigma_k(p) = \sigma_{k-1}(p)$, reemplazando esto a la ecuación (ω) obtenemos que $z = 0$, y esto es una contradicción pues $z \neq 0$. Así concluimos que $p' \in V_k$. Además como $p \in V_k$ y σ es uno a uno en V_k, se tiene $p = p'$.

Por tanto la aplicación σ es diferenciable, regular en M y uno a uno. $\square$

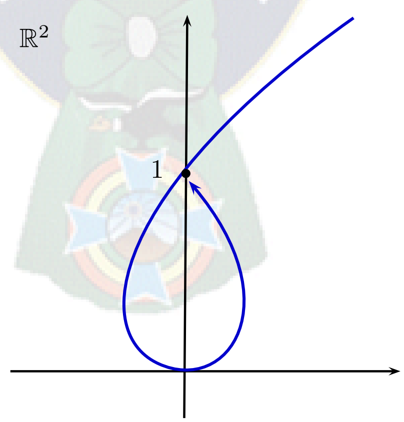
Definición 3.5. *Sean M y N variedades diferenciables. Una aplicación $f : M \to N$ es una **incrustación** si,*

(i) *f es regular en M.*

(ii) *f es un homeomorfismo de M sobre su imagen $f(M) \subset N$ considerada con la topología inducida por la de N.*

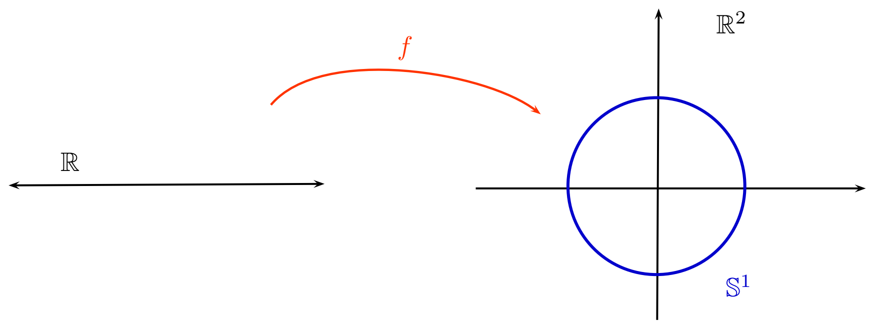
Ejemplo Si $f : M \to N$ es regular e inyectiva, entonces es una incrustación. En efecto, por la observación 3.1, f es un homeomorfismo sobre su imagen, así f es una incrustación.

Ejemplo La aplicación $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}^2$, definido por $t \mapsto f(t) = (t^3 - t, t^2)$ es regular e inyectiva. Notemos por otra parte que $\lim_{t \mapsto -1} f(t) = (0, 1) = f(1)$, por lo tanto f^{-1} no puede ser continua en $(0, 1)$ y en consecuencia f no es un homeomorfismo sobre su imagen.



por tanto f no es una incrustación. Donde $f^{-1}(x, y) = \dfrac{x}{y-1}$, con $x = t^3 - t$ y $y = t^2$.

Ejemplo Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definido por $t \mapsto f(t) = (\cos(t), \sin(t))$, entonces f es diferenciable y regular. En efecto, para cada $t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{df(t)}{dt} = (-\sin(t), \cos(t)) \neq 0$. Como $Df(t)\lambda = \lambda\dfrac{df(t)}{dt}$, llamando $v = \dfrac{df(t)}{dt}$, se tiene que $Df(t)\lambda = \lambda v$ y que la aplicación lineal $Df(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definido por $\lambda \mapsto \lambda v$, es inyectiva. Así f es regular.



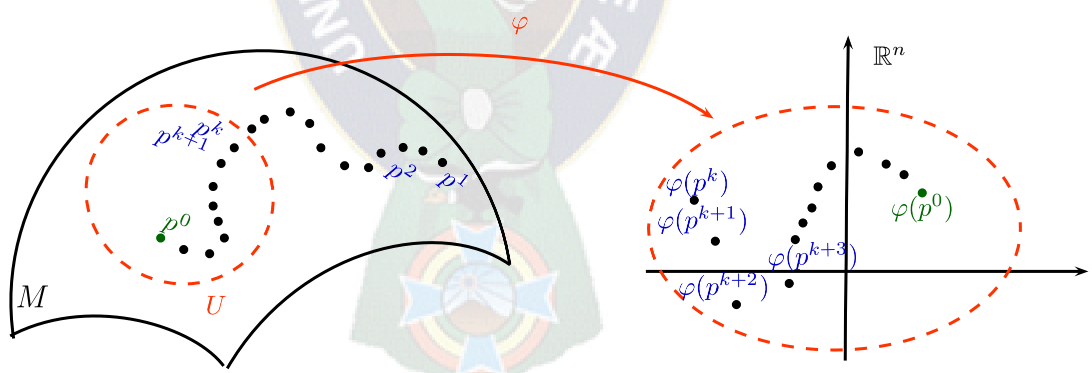
Además f no es un homeomorfismo sobre su imagen $f(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^1$, pues $\mathbb{S}^1 - (0,1)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$. Por tanto f no es una incrustación.

3.4. El Teorema de Incrustación

El resultado principal de esta sección es la prueba del Teorema de Whitney. Sean M una variedad diferenciable y $\{p^j\}_{j\in\mathbb{N}} = \{p^1, p^2, \ldots\}$ una sucesión de puntos en M.

Definición 3.6. *La sucesión $\{p^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge al punto $p^0 \in M$, si existe un sistema de coordenadas (U, φ) en M y un entero positivo k tal que $p^j \in U$ para $j \geq k$, la sucesión $\{\varphi(p^j)\}_{j\geq k} = \{\varphi(p^k), \varphi(p^{k+1}), \ldots\}$ converge al punto $\varphi(p^0) \in \mathbb{R}^n$.*

Ilustración:



Notación: Llamaremos al punto $x^0 = \varphi(p^0)$ como el *límite* de la sucesión $\{\varphi(p^j)\}_{j\geq k}$ o la sucesión $\{\varphi(p^j)\}_{j\geq k}$ converge al punto x^0. En símbolos:

$$x^0 = \lim_{j\to\infty} \varphi(p^j) \quad j \geq k.$$

El punto $p^0 = \varphi^{-1}(x^0)$ se llama *límite* de la sucesión $\{p^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ o también es conocido con el nombre de *punto adherente*. En símbolos:

$$p^0 = \lim_{j\to\infty} p^j.$$

Observación 3.2. *En la definición anterior, el punto p^0 no depende de la elección de sistema de coordenadas (U, φ).*

En efecto. Sean el sistema de coordenadas (V, ψ) y $k' \in \mathbb{Z}^+$ que cumple la definición de convergencia en M. Es decir: $p^j \in V$ para $j \geq k'$ la sucesión $\{\psi(p^j)\}_{j \geq k'} = \{\psi(p^{k'}), \psi(p^{k'+1}), \ldots\}$ es convergente en el punto $\psi(p^0) \in \mathbb{R}^n$.

Sea $\overline{k} = \text{máx}\{k, k'\}$ de tal manera que $p^j \in U \cap V$ con $j \geq \overline{k}$. De aquí encontramos una vecindad coordenada $W = U \cap V$ con su respectiva aplicación coordenada $\phi = \varphi|_W = \psi|_W$, así la sucesión $\{\phi(p^j)\}_{j \geq \overline{k}} = \{\phi(p^{\overline{k}}), \phi(p^{\overline{k}+1}), \ldots\}$ converge al punto $\phi(p^0)$. □

Ahora daremos la definición más general cuando p^0 es límite de una sucesión $\{p^j\}_{j \in \mathbb{N}}$.

Definición 3.7. *Un punto p' es llamado* ***punto límite*** *de una sucesión $\{p^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ si, p' es el límite de alguna subsucesión de $\{p^j\}_{j \in \mathbb{N}}$.*

Notemos que el *punto límite* p' es también conocido con el nombre de *valor de adherencia.*

Sea $\sigma : M \to \mathbb{R}^m$ una aplicación continua. Consideremos el conjunto de todas las sucesiones $\{p^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de puntos de M que no tiene ningún punto límite. Las sucesiones correspondientes $\{\sigma(p^j)\}$ de puntos de $\mathbb{R}^m$ que generalmente no converge, pero algunos pueden converger. Tal como se ilustra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo Sean $\mathbb{R} = M$ la variedad diferenciable de dimensión 1 y la aplicación continua $\sigma = \sin : M \to \mathbb{R}$ definido por $\sigma(p) = \sin(p)$. Sea la sucesión $\{\pi, 2\pi, 3\pi, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots\}$ en $\mathbb{R}$ que no tiene ningún Punto Límite, pues la subsucesión $\{\pi, 2\pi, \pi, 2\pi, \ldots\}$ no converge. Pero la imagen de la sucesión por aplicación continua sin es:

$$\{\sin(\pi), \sin(2\pi), \sin(3\pi), \sin(\pi), \sin(2\pi), \sin(3\pi), \ldots\} = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots\}$$

converge al punto 0.

Así teniendo en cuenta el ejemplo anterior definimos, $L(\sigma)$ que denota el conjunto de los límites de estas sucesiones $\{\sigma(p^j)\}$ que convergen. En símbolos:

$$L(\sigma) = \left\{ y = \lim_{j \to \infty} \sigma(p^j) \ / \ \ \textit{existe } \{\sigma(p^j)\}, \ \ \textit{para toda } \{p^j\}_{j \in \mathbb{N}} \textit{ no tiene punto limite} \right\}.$$

El conjunto $L(\sigma)$ es llamado *conjunto límite.*

Observación 3.3. *$\sigma(M)$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^m$ si y sólo si $L(\sigma) \subset \sigma(M)$.*

En efecto. Supongamos que $\sigma(M)$ es un subconjunto cerrado en $\mathbb{R}^m$. Sea $p^0 \in L(\sigma)$, entonces para toda sucesión $\{p^j\}$ que no tiene ningún punto límite, existe una sucesión $\{\sigma(p^j)\} \subset \sigma(M)$ tal que $p^0 = \lim_{j \to \infty} \sigma(p^j)$. De aquí $p^0 \in \overline{\sigma(M)}$ y como $\overline{\sigma(M)} = \sigma(M)$, entonces $p^0 \in \sigma(M)$.

Recíprocamente, supongamos que $L(\sigma) \subset \sigma(M)$. Sea $p^0 \in \overline{\sigma(M)}$ y cualquier sucesión $\{p^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ que no converge, entonces existe una sucesión $\{\sigma(p^j)\} \subset \sigma(M)$ tal que $p^0 = \lim_{j\to\infty} \varphi(p^j)$ entonces $p^0 \in L(\sigma)$ y por hipótesis tenemos $L(\sigma) \subset \sigma(M)$ entonces $p^0 \in \sigma(M)$. Así hemos probado que $\overline{\sigma(M)} \subset \sigma(M)$. Además es evidente que $\sigma(M) \subset \overline{\sigma(M)}$, así $\overline{\sigma(M)} = \sigma(M)$, esto quiere decir que $\sigma(M)$ es cerrado en $\mathbb{R}^m$. □

Lema 3.7. *Si M es una variedad diferenciable, entonces existe una función diferenciable $\sigma : M \to \mathbb{R}$ con $L(\sigma)$ vacío.*

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{(V_j, \varphi_j) \;/\; j = 1, 2, ...\}$, un cubrimiento localmente finito numerable normalizado de M por vecindades coordenadas. Definamos $V'_j = \varphi_j^{-1}(B_2), V''_j = \varphi_j^{-1}(B_2)$ y sea $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función bump, que se define de la siguiente manera:

(a) $0 \leq \psi(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) $\psi(x) = 1$ para $x \in \bar{B}_1$, y $\psi(x) = 0$ para $x \notin B_2$ $[x \in (\mathbb{R}^n - B_2)]$.

Si $p^0 \in M$, entonces existe una vecindad N de p^0 tal que:

$$N \cap V_j \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad j \in \{j_1, ..., j_r\}$$

así existe un entero positivo $k = \max\{j \;/ N \cap V_j \neq \emptyset\}$ tal que $p^0 \notin V_j$ para $j > k$ entonces tenemos que $\psi(\varphi_j(p^0)) = 0$ (por definición de función bump).

Ahora definimos la siguiente función:

$$\begin{aligned} \sigma &: M \to \mathbb{R} \\ p^0 &\mapsto \sigma(p^0) = \sum_{j=1}^{k} j\psi(\varphi_j(p^0)) = \sum_{j=1}^{\infty} j\psi(\varphi_j(p^0)) \end{aligned}$$

esta función esta bien definida, pues la sumatoria son imágenes de las funciones bumps, que son reales multiplicados por un escalar $j \in \mathbb{N}$.

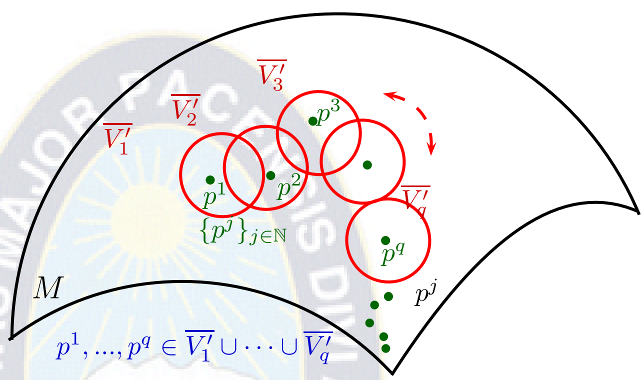
Afirmamos que la función σ es diferenciable en M. En efecto, cuando $j \leq k$, $p^0 \in N$ y $p^0 \in V_j$, así σ es diferenciable en V_j, pues ψ es diferenciable en V_j (ψ es diferenciable en M). Ahora cuando $j > k$ tenemos que $p^0 \notin V_j$, $\psi(\varphi_j(p^0)) = 0$, así σ es diferenciable en $p^0 \notin V_j$ o que es lo mismo decir σ es diferenciable en $M - V_j$. Por tanto σ es diferenciable en M.

Sea $\{p^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de M que no tiene ningún punto límite. Sea $q \in \mathbb{Z}^+$ y considerando el conjunto compacto $\overline{V'_1} \cup \cdots \cup \overline{V'_q}$. Entonces un número finito de puntos de la sucesión $\{p^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ están en el conjunto $\overline{V'_1} \cup \cdots \cup \overline{V'_q}$. (Pues si $\{p^j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \overline{V'_1} \cup \cdots \cup \overline{V'_q}$ y esto es compacto, entonces $\{p^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es convergente, esto es una contradicción, pues $\{p^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ no converge). De aquí existe un $j > q$ tal que $p^j \notin \overline{V'_1} \cup \cdots \cup \overline{V'_q}$. Entonces $\psi(\varphi_k(p^j)) = 0$ para

$k = 1, 2, ..., q$ (por definición de función bump). Es decir:

$$\begin{aligned} p^j \notin \overline{V_1'} &\quad \textit{entonces} \quad \psi(\varphi_1(p^j)) = 0, \quad j > q \\ &\vdots \\ p^j \notin \overline{V_q'} &\quad \textit{entonces} \quad \psi(\varphi_q(p^j)) = 0, \quad j > q. \end{aligned}$$

Pero notemos que cuando $j \leq q$ se tiene que $\psi(\varphi_k(p^j)) \neq 0$, pues $p^j \in \overline{V_1'} \cup \cdots \cup \overline{V_q'}$, donde su ilustración esta en la siguiente figura;



También observemos que la familia $\{(V_k, \psi_k)/\ k \in \mathbb{N}\}$ es una partición de la unidad diferenciable sobre M. Donde $\psi_k : M \to \mathbb{R}$ definido por $p \mapsto \psi_k(p) = \dfrac{\psi \circ \varphi_k(p)}{\Sigma_{i=1}^{\infty}\psi \circ \varphi_i(p)}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \sigma(p^j) &= \sum_{k=1}^{\infty} k\psi(\varphi_k(p^j)) \\ &= (q+1)\psi(\varphi_{q+1}(p^j)) + (q+2)\psi(\varphi_{q+2}(p^j)) + \cdots \\ &> q\psi(\varphi_{q+1}(p^j)) + q\psi(\varphi_{q+2}(p^j)) + \cdots \\ &= q\left[\sum_{k=1}^{\infty} \psi(\varphi_k(p^j))\right] \\ &\geq q\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi \circ \varphi_k(p^j)}{\Sigma_{i=1}^{\infty}\psi \circ \varphi_i(p^j)}\right] && (\Sigma_{i=1}^{\infty}\psi \circ \varphi_i(p^j) \geq 1) \\ &= q\left[\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(p^j)\right] && (\text{Definicion de } \psi_k) \\ &= q \cdot 1 = q \end{aligned}$$

Así $\sigma(p^j) > q$. Luego la sucesión $\{\sigma(p^j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ no esta acotado, por tanto no converge. Esto prueba que $L(\sigma)$ es vacío. $\square$

Teorema 3.3 (**Teorema de Incrustación de Whitney**). *Si M es una variedad diferenciable de dimensión n, entonces existe una incrustación $\tau : M \to \mathbb{R}^{2n+1}$ tal que $\tau(M)$ es cerrado en $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

Demostración. Por hipótesis, M es una variedad diferenciable, entonces por el Lema 3.7, existe una función diferenciable $\sigma : M \to \mathbb{R}$ con $L(\sigma) = \emptyset$. Definamos la aplicación:

$$\begin{aligned} \sigma_1 : M &\to \mathbb{R}^{2n+1} \\ p &\mapsto \sigma_1(p) = (\sigma(p), 0, ..., 0) \end{aligned}$$

por su puesto esta aplicación esta bien definida. Además σ_1 es diferenciable en M, pues cada uno de sus coordenadas de σ_1 son funciones diferenciables en M. Afirmamos que $L(\sigma_1) = \emptyset$. En efecto, supongamos $L(\sigma_1) \neq \emptyset$, entonces existe $x \in L(\sigma_1)$ luego existe una sucesión $\{p^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de M que no tiene puntos límites tal que $x = \lim_{j\to\infty} \sigma_1(p^j)$. Pero $\sigma_1(p^j) = (\sigma(p^j), 0, ..., 0)$ donde la sucesión $\{\sigma(p^j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ no tiene puntos límites, pues $L(\sigma) = \emptyset$, así la sucesión $\{\sigma_1(p^j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ no tiene puntos límites. Esto es una contradicción, pues $\lim_{j\to\infty} \sigma_1(p^j) = x$. Por tanto $L(\sigma_1) \neq \emptyset$.

Luego aplicaremos el Teorema 3.1 en la aplicación σ_1, para eso tenemos que hacer cumplir las hipótesis del Teorema 3.1, esto es:

1. M es una variedad diferenciable de dimensión n.

2. $\sigma_1 : M \to \mathbb{R}^{2n+1}$ es una aplicación diferenciable en M con $2n + 1 \geq 2n$.

3. $\sigma_1 : M \to \mathbb{R}^{2n+1}$ es regular en $C \neq \emptyset$, por vacuidad.

Ya haciendo cumplir las hipótesis del Teorema 3.1. Entonces para cualquier función continua positiva $\eta : M \to \mathbb{R}$, existe una aplicación diferenciable regular en M, $\sigma_2 : M \to \mathbb{R}^{2n+1}$ tal que:

$$d(\sigma_2(p), \sigma_1(p)) < \frac{1}{2} \quad para \;\; p \in M \tag{3.6}$$

tomando $\eta(p) = \frac{1}{2}$.

Ahora aplicaremos el Teorema 3.2 en la aplicación σ_2, para esto necesitamos hacer cumplir las hipótesis del Teorema 3.2, esto es:

1. M es una variedad diferenciable de dimensión n.

2. $\sigma_2 : M \to \mathbb{R}^{2n+1}$ es una aplicación diferenciable y regular en M con $2n + 1 = 2n + 1$.

3. σ_2 es uno a uno, en un conjunto abierto $U = \emptyset$ que contiene al conjunto cerrado $C = \emptyset$, por vacuidad. Pues el conjunto $\emptyset$ es abierto y también cerrado.

Por el Teorema 3.2, tenemos para cualquier función continua positiva $\eta : M \to \mathbb{R}$, existe una aplicación regular e inyectiva $\tau : M \to \mathbb{R}^{2n+1}$ tal que:

$$d(\tau(p), \sigma_2(p)) < \frac{1}{2} \quad \textit{para todo } \ p \in M \tag{3.7}$$

tomando $\eta(p) = \frac{1}{2}$. Por el ejemplo anterior τ es una incrustación.

Por (3.6),(3.7) y la desigualdad triangular para la función d tenemos lo siguiente:

$$d(\tau(p), \sigma_1(p)) \leq d(\tau(p), \sigma_2(p)) + d(\sigma_2(p), \sigma_1(p)) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

para todo $p \in M$. De aquí $d(\tau(p), \sigma_1(p)) < 1$ para todo $p \in M$.

Notemos, que hasta el momento probamos que existe una aplicación $\tau : M \to \mathbb{R}^{2n+1}$ que es una incrustación, falta probar que $\tau(M)$ es cerrado en $\mathbb{R}^{2n+1}$ para eso tenemos que demostrar que $L(\tau) = \emptyset$. En efecto, supongamos que $L(\tau) \neq \emptyset$ entonces existe un $x \in L(\tau)$, de aquí existe una sucesión $\{p^j\}$ de puntos de M tal que $x = \lim_{j\to\infty} \tau(p^j)$, pero $\{p^j\}$ no converge a ningún punto o no tiene ningún punto límite. Además:

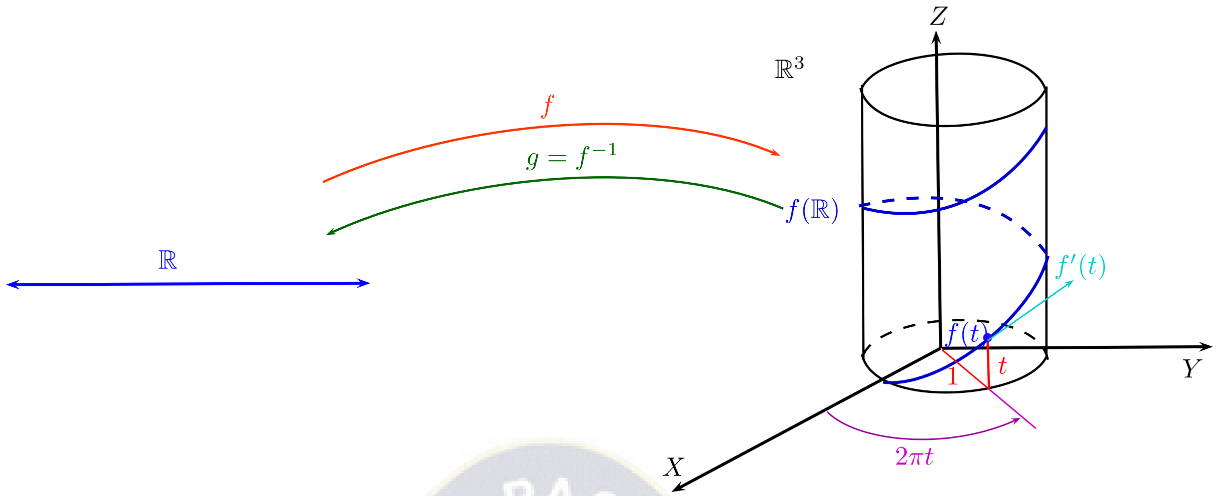
$$\begin{aligned} d(x, \sigma_1(p^j)) &\leq d(x, \tau(p^j)) + d(\tau(p^j), \sigma_1(p^j)) \\ &< d(x, \tau(p^j)) + 1 \end{aligned}$$

como la sucesión $\{\tau(p^j)\}$ es convergente entonces esta acotado y así la sucesión $\{\sigma_1(p^j)\}$ esta acotado. Luego por el Teorema de Bolzamo Weierstrass (Toda sucesión acotada en $\mathbb{R}^{2n+1}$ posee una subsucesión convergente), la sucesión $\{\sigma_1(p^j)\}$ posee una subsucesión $\{\sigma_1(p^{j_i})\}_{i\in\mathbb{N}}$ que converge. Como la subsucesión $\{p^{j_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ no tiene puntos límites (pues $\{p^j\}$ no tiene puntos límites) esto implica que $L(\sigma_1) \neq \emptyset$ esto es una contradicción pues $L(\sigma_1) = \emptyset$, por tanto $L(\tau) = \emptyset$. Así $L(\tau) = \emptyset \subset \tau(M)$ por la observación 3.3, se obtiene $\tau(M)$ es cerrado en $\mathbb{R}^{2n+1}$.

□

Ejemplo **Variedad de Grassmann**: El conjunto denotado por $G_r(\mathbb{R}^{n+r})$ es el conjunto de todos los subespacios vectoriales de dimensión r del espacio euclidiano $\mathbb{R}^{n+r}$. Este conjunto es *llamado* $G_r(\mathbb{R}^{n+r})$ *Variedad de Grassmann*, de dimensión r (esta probado en el ejemplo de la sección 1.3). Por el Teorema de Incrustación de Whitney la variedad $G_r(\mathbb{R}^{n+r})$ esta incrustado en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^{2r+1}$.

Ejemplo Demostramos en un ejemplo anterior que $\mathbb{R}$ no es una incrustación en $\mathbb{R}^2$ pero, por el Teorema de Incrustación de Whitney, $\mathbb{R}$ es una incrustación en $\mathbb{R}^3$. Tal aplicación es $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definido por $t \mapsto f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), t)$ es una incrustación. En efecto, f es regular, pues $\dfrac{df(t)}{dt} = (-2\pi \sin(2\pi t), 2\pi \cos(2\pi t), 1) \neq 0$. f es un homeomorfismo sobre su imagen, pues la función proyección $g : f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definido por $g(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), t) = t$ es la inversa de la aplicación f (vea la siguiente ilustración gráfica).



Este ejemplo muestra que $2n+1$ es la dimensión minima para la validez del Teorema de Incrustación de Whitney.

Definición 3.8. *Sean M y N variedades diferenciables de dimensión m y n respectivamente. La aplicación diferenciable $f : M \to N$ se dice una* ***inmersión****, si f es regular en todo punto $p \in M$, esto es, que la transformación lineal $Df(p) : T_pM \to T_{f(p)}N$ es inyectiva para cada $p \in M$. En particular $m \leq n$.*

Ahora enunciamos el siguiente colorario.

Corolario 3.3 (Teorema de Inmersión de Whitney). *Si M es una variedad diferenciable de dimensión n, entonces existe una inmersión $\tau : M \to \mathbb{R}^{2n}$.*

Demostración. Por hipótesis M es una variedad diferenciable, entonces por el Lema 3.7, existe una función diferenciable $\sigma : M \to \mathbb{R}$ con $L(\sigma) = \emptyset$. Definimos una aplicación:

$$\begin{aligned} \sigma_1 : M &\to \mathbb{R}^{2n} \\ p &\mapsto \sigma_1(p) = (\sigma(p), 0, ..., 0) \end{aligned}$$

por supuesto esta aplicación esta bien definida y diferenciable en M. Además $L(\sigma_1) = \emptyset$. Ahora apliquemos el Teorema 3.1 en la aplicación σ_1, para eso hagamos cumplir las hipótesis del Teorema 3.1, esto es:

1. M es una variedad diferenciable de dimensión n.

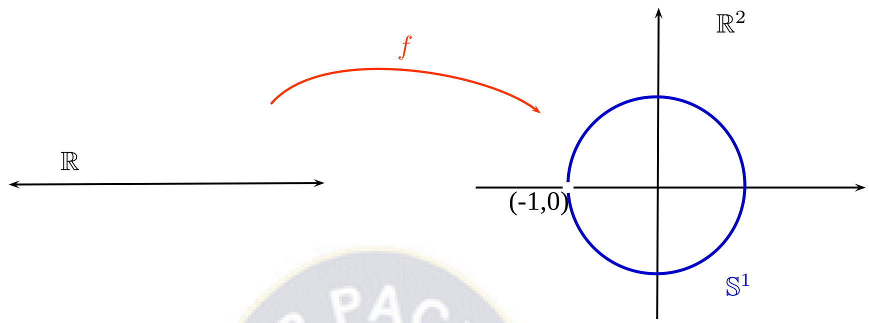
2. $\sigma_1 : M \to \mathbb{R}^{2n}$ es una aplicación diferenciable en M con $2n = 2n$.

3. $\sigma_1 : M \to \mathbb{R}^{2n}$ es regular en $C = \emptyset$. Por vacuidad.

Entonces por Teorema 3.1, existe una aplicación diferenciable y regular $\tau : M \to \mathbb{R}^{2n}$ en M, de aquí τ es una inmersión.

□

Ejemplo Consideremos la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $f(t) = \left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2} \right)$, f es una inmersión y $f(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^1 - (-1,0)$.



Bibliografía

[1] Louis auslander, Robert E. Mackenzie, *Introduction to Differentiable Manifolds*, Dover, New York, USA, 1977.

[2] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, University of Washington, Department of Mathematics, December 31, 2000.

[3] Elon Lages Lima, *Variedades Diferenciávies*, IMPA, Brasil, 2007.

[4] Elon Lages Lima, *Curso de Analise Volume 2*, IMPA, Brasil, 2000.

[5] Frank W. Warner, *Foundations of differentiable Manifolds and Lie Groups*, I. M. Singer, New York, EEUU, 1971.

[6] Sergio Plasa S., *Variedades diferenciables* Octubre 20, 2003.

[7] W.M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and riemannian Geometry*, Academic Press, Inc., New York, EEUU, 1986.

[8] James R. Munkres, *Topologia 2da Edicion*, Massachusetts Institute of Technology, Madrid. 2002.

[9] Dr. Pascual Lucas Saorín, *Geometría y Topología*, Open Course Ware-Universidad de Murcia (Internent).