Índice general

Agradecimientos

A mi esposa Ashley, mi hijo Adrian, mi madre Sonia, mi padre Renato, mi hermano Marco, mi abuelo Pepe, y toda mi familia por todo el amor brindado. A Charlie Lozano, Ramiro Lafuente y Wolf Iberkleid por guiarme y ofrecerme su amistad. A mis amigos por estar presentes en mi vida.

Resumen

El presente trabajo tiene por objetivo analizar de manera general los *z-filtros* y los *z-ideales*, además relacionarlos con los *ideales* y los *filtros*, respectivamente, del espacio topológico X que origina estos conjuntos.

Para alcanzar nuestro objetivo, primero estudiaremos los ideales y filtros de una manera general (como estructuras de orden). Consideraremos y desarrollaremos, el anillo ordenado de funciones continuas $C(X)$ y lo relacionaremos con el espacio topológico X, haciendo énfasis en la teoría de los *zero-conjuntos* de este espacio. Denotaremos al conjunto formado por todos los zero-conjuntos en X por $Z(X)$, definiremos un *z-filtro* como una subfamilia de $Z(X)$ que cumple ciertas propiedades y veremos la relación que tiene con algún *ideal* en X. De manera análoga definiremos un *z-ideal* y veremos la relación que tiene con algún *filtro* en X.

Los resultados relevantes del trabajo, de acuerdo a nuestro objetivo, están dados por los teoremas de los capítulos 3 y 4.

Introducción

Las distintas relaciones entre el anillo ordenado de funciones continuas *C(X)* y el espacio topológico X, es un campo de investigación en desarrollo que relaciona diversas áreas de la matemática así como el álgebra y la topología. Este estudio fue emprendido de manera indirecta por matemáticos como Banach, Clifford y otros. Empezó de manera directa con el análisis del anillo ordenado de funciones continuas acotadas *C*(X)*. Luego fue ampliado a *C(X)*; para que el matemático Hewitt, finalmente, dé una de las contribuciones más importantes y relevantes en la teoría de *C(X)* utilizando por primera vez los zero-conjuntos. Emergiendo, de manera natural, los conceptos de *z-filtro* y *z-ideal*, y el estudio de su relación con conjuntos del espacio topológico X.

La naturaleza de los *z-filtros* y de los *z-ideales* marca un nuevo campo de estudio; este trabajo solo pretende hacer una introducción dentro del mismo, con el fin de definir nuevos conceptos en el estudio de *C(X)*, pero dejando preguntas abiertas y mucho por explorar.

Capítulo 1

Conjuntos Reticularmente Ordenados

1.1. Retículos

Sea A un conjunto. Un *orden parcial* en A es una relación binaria $\leq$ la cual es:

(i) *Reflexiva*: para todo $a \in A$, $a \leq a$.

(ii) *Transitiva*: si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.

(iii) *Antisimétrica*: si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.

Un *poset* (conjunto parcialmente ordenado) es un conjunto equipado con un orden parcial.

Sea A un poset, S un subconjunto de A. Decimos que un elemento $a \in A$ es el *supremo* (mínima cota superior) de S, y escribimos $a = \vee S$, si:

(i) $s \leq a$, para todo $s \in S$. i.e. a es una *cota superior* de S.

(ii) Si $b \in A$ satisface $s \leq b$, para todo $s \in S$, entonces $a \leq b$.

Teorema 1.
El supremo de un conjunto, si existe, es único.

Prueba.
Sea $(A, \leq)$ un poset, supongamos que s' y s'' satisfacen la condición de ser supremos de $S \subseteq A$. Entonces, $s \leq s'$ para todo $s \in S$ y $s \leq s''$ para todo $s \in S$. Entonces, $s' \leq s''$ y $s'' \leq s'$. Así, $s' = s''$. $\square$

Si S es un conjunto de dos elementos, $\{s,\ t\}$, escribimos $s \vee t$ para $\vee\{s, t\}$. Y si S es el conjunto vacío, $\emptyset$, escribimos 0 para $\vee\emptyset$.

Teorema 2.
$0 = \vee\emptyset$ es el elemento más pequeño de A.

Prueba.
Sea $S \subseteq T$. Como $t \leq \vee T$, para todo $t \in T \supseteq S$, entonces $\vee T \geq s$, para todo $s \in S$, entonces $\vee S \leq \vee T$.
Ahora, $\emptyset \subseteq \{a\}$, para todo $a \in A$, entonces $0 = \vee\emptyset \leq \vee\{a\} = a$, para todo $a \in A$. $\square$

El siguiente resultado muestra la relación entre dos estructuras.

Teorema 3.
Sea A un poset en el que cualquier subconjunto finito tiene un supremo. Entonces la operación binaria $\vee$ y el elemento 0 satisfacen:

(i) $a \vee a = a$.

(ii) $a \vee b = b \vee a$.

(iii) $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$.

(iv) $a \vee 0 = a$.

Para todo $a, b, c \in A$.

Prueba.
Sea $(A, \leq)$ un poset.

(i) $a \vee a = \vee\{a, a\} = \vee\{a\} = a$.

(ii) $a \vee b = \vee\{a, b\} = \vee\{b, a\} = b \vee a$.

(iii) Como $b \leq (a \vee b)$ y $c \leq c$ entonces $b \vee c \leq (a \vee b) \vee c$, por otro lado $a \leq a \vee b \leq (a \vee b) \vee c$, así, $a \vee (b \vee c) \leq (a \vee b) \vee c$.

Como $a \leq a$ y $b \leq b \vee c$ entonces $a \vee b \leq a \vee (b \vee c)$, por otro lado $c \leq b \vee c \leq a \vee (b \vee c)$, así, $a \vee (b \vee c) \geq (a \vee b) \vee c$.

Por lo tanto, $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$.

(iv) $a \vee 0 = \vee\{a, 0\}$, pero $0 \leq a$, para todo $a \in A$, entonces $a \vee 0 = a$. $\square$

Podemos decir que $(A, \vee, 0)$ es un monoide conmutativo (semigrupo con unidad) donde cada elemento es idempotente. Conversamente tenemos:

Teorema 4.
Si $(A, \vee, 0)$ es un monoide conmutativo en el cual todo elemento es idempotente, entonces existe un único orden parcial en A, tal que $a \vee b$ es el supremo de a y b, y 0 es el mínimo elemento.

Prueba.
Claramente del teorema anterior, si existe un orden parcial con tales propiedades, entonces este sería $a \leq b$ si y solo si $a \vee b = b$. Recíprocamente, si tomamos esta última como definición de $\leq$ entonces:

(i) $a \vee a = a$ entonces $a \leq a$.

(ii) $a \vee b = b$ y $b \vee a = a$ entonces $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$.

(iii) Supongamos $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \vee b = b$ y $b \vee c = c$, entonces $a \vee c = a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = b \vee c = c$.

Ahora, sean $a, b \in A$, entonces $a \vee (a \vee b) = (a \vee a) \vee b = a \vee b$, entonces $a \leq a \vee b$. De manera análoga para $b \leq a \vee b$. Luego, si $a \leq c$ y $b \leq c$, entonces $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) = a \vee c = c$, entonces $a \vee b \leq c$. Así, $a \vee b$ es el supremo de a y b.
Por último, si $a \vee 0 = a \; \forall a \in A$, entonces $0 \leq a$, para todo $a \in A$. $\square$

Un conjunto con la estructura descrita en el teorema 4 se denomina semiretículo (o sup-semiretículo). El teorema dice que la noción de semiretículo puede ser descrita en términos de la relación de orden $\leq$ o en términos de la operación del supremo $\vee$. Pero existe una gran diferencia al considerar funciones que preservan estructuras (homomorfismos).

Teorema 5.
Un homomorfismo de semiretículos, $f : A \to B$, preserva orden.

Prueba.
Sea f un homomorfismo de semiretículos. (i.e. $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$).
Si $a \leq b$, entonces:
$f(a) = f(a) \vee 0 = f(a) \vee f(0) \leq f(a) \vee f(b) = f(a \vee b) = f(b)$. $\square$

El recíproco del teorema no se cumple en general. Veamos el siguiente contraejemplo:
Sea $i : (N, |) \to (N, \leq)$, tal que $i(a) = a$, una función que preserva el orden, pero no es un homomorfismo.

Dualmente, en cualquier poset podemos considerar la noción de *ínfimo*, definida invirtiendo las desigualdades en la definición de supremo, i.e.:

(i) $s \geq a$, para todo $s \in S$. i.e. a es una cota inferior de S.

(ii) Si b satisface para todo s en S, $(s \geq b)$, entonces $a \geq b$.

Escribimos $\wedge S$, $a \wedge b$, 1 para los análogos de $\vee S$, $a \vee b$, 0.

Un *retículo* es un poset A en el cual cada subconjunto finito tiene un supremo y un ínfimo. Por el teorema 4, esto es equivalente a decir que A está equipado con dos operaciones binarias $\vee$, $\wedge$ y dos elementos distinguidos 0 y 1 tales que $(A, \vee, 0)$ y $(A, \wedge, 1)$ son semiretículos y los ordenes parciales sobre A inducidos por las estructuras de los semiretículos son opuestas.

Teorema 6.
Supongamos que $(A, \vee, 0)$ y $(A, \wedge, 1)$ son semiretículos, entonces $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ es un retículo si y solo si las leyes de absorción:

(i) $a \wedge (a \vee b) = a$.

(ii) $a \vee (a \wedge b) = a$.

se cumplen, para todo $a, b \in A$.

Prueba.
$[\Leftarrow]$ Supongamos que se cumplen las leyes de absorción.
Luego, $a \leq b$ entonces $a \vee b = b$ entonces $a \wedge (a \vee b) = a \wedge b = a$ entonces $a \wedge b = a$ entonces $b \geq a$. Reciprocamente, $a \geq b$ entonces $a \wedge b = b$ entonces $a \vee (a \wedge b) = a \vee b = a$ entonces $a \vee b = a$ entonces $b \vee a$. Así, los ordenes parciales en A coinciden.
$[\Rightarrow]$ Supongamos $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ es un retículo, entonces:
$a \leq a \vee b$ entonces $a \wedge (a \vee b) = a$.
$a \geq a \wedge b$ entonces $a \vee (a \wedge b) = a$. $\square$

Entonces, nuestra definición formal de retículo es un conjunto A con dos operaciones $\vee$, $\wedge$ y dos elementos distinguidos 0, 1 tal que $\vee$ (respectivamente $\wedge$) es asociativo, conmutativo, e idempotente y tiene 0 (respectivamente 1) como elemento unitario, y $\vee, \wedge$ satisfacen las leyes de absorción.

0 y 1 no necesariamente son diferente. Por ejemplo, $A = x$ entonces $0 = 1 = x$.

En la mayoría de los retículos, las operaciones $\vee$ y $\wedge$ cumplen una propiedad, denominada *ley distributiva*.

(i) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

para todo a, b, c.

Lema 1.
Si la ley distributiva se cumple en un retículo, entonces su dual también se cumple. i.e.:

(ii) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

Prueba.
Supongamos $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.
Luego,

$$\begin{aligned}(a \vee b) \wedge (a \vee c) &= [(a \vee b) \wedge a] \vee [(a \vee b) \wedge c] \\ &= (a \wedge a) \vee (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \\ &= a \vee (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \\ &= a \vee [a \wedge (b \vee c)] \vee (b \wedge c) \\ &= a \vee (b \wedge c). \square\end{aligned}$$

Teorema 7.
Sea a, b, c tres elementos de un retículo distributivo A. Entonces existe a lo más un $x \in A$ que satisface $x \wedge a = b$ y $x \vee a = c$.

Prueba. Supongamos que x y y satisfacen las condiciones. Entonces:

$$\begin{aligned} x &= x \wedge (x \vee a) = x \wedge c \\ &= x \wedge (y \vee a) = (x \wedge y) \vee (x \wedge a) \\ &= (x \wedge y) \vee b = (x \wedge b) \vee (y \wedge b) \\ &= (x \vee (x \wedge a)) \wedge (y \vee (y \wedge a)) = x \wedge y. \end{aligned}$$

De manera análoga para $y = x \wedge y$. Así, $x = y$. $\square$

En un retículo, un elemento x que satisface $x \wedge a = 0$ y $x \vee a = 1$ se llama *complemento* de a. El teorema 7 nos dice que en un retículo distributivo los complementos, si existen, son únicos.

1.2. Ideales y Filtros

En esta sección veremos la teoría de retículos referente a ideales. Un subconjunto I de un sup-semiretículo A se dice *ideal* si:

(i) I es un *sub-sup-semiretículo* de A. i.e. $0 \in I$, y $a \in I$, $b \in I$ implica que $a \vee b \in I$.

(ii) I es un *conjunto más bajo.* i.e. $a \in I$, y $b \leq a$ implica que $b \in I$.

Ejemplo.
Para algún $a \in A$, el subconjunto $\downarrow (a) = \{b \in A/b \leq a\}$ es claramente un ideal en A y por ser un conjunto más bajo es el ideal más pequeño que contiene a a. Por analogía a la teoría de anillos, lo denominaremos *ideal principal* generado por a.

Lema 2.

(i) Sea $f : A \to B$ un homomorfismo de semiretículos. Entonces el conjunto $\{a \in A/f(a) = 0\}$ (el kernel de f) es un ideal en A.

(ii) Sea I un ideal de un sup-semiretículo A. Entonces existe un homomorfismo de semiretículos $f : A \to B$ con kernel I.

(iii) Si, en (ii), A es un retículo distributivo, entonces debemos tomar B como un retículo distributivo y f como un homomorfismo de retículo.

Prueba.

(i) Sea $I = \{a \in A/f(a) = 0\}$. Como f es un homomorfismo, $f(0) = 0$, entonces $0 \in I$. Si $a, b \in I$ entonces $0 = 0 \vee 0 = f(a) \vee f(b) = f(a \vee b)$, entonces $a \vee b \in I$. Si $a \in I$ y $b \leq a$ entonces por el teorema 5, $f(b) \leq f(a) = 0$, entonces $f(b) = 0$, i.e. $b \in I$. Así, I es un ideal en A.

(ii) Definimos una relación $\equiv_I$ en A por $a \equiv_I b$ si y solo si existen $i, j \in I$ tales que $a \vee i = b \vee j$. Como, $a \equiv_I b$ entonces $a \vee i = b \vee j$, para algún $i, j \in I$, entonces $(a \vee i) \vee c = (b \vee j) \vee c$, para cualquier c, entonces $(a \vee c) \vee i = (b \vee c) \vee j$ entonces $a \vee c \equiv_I b \vee c$, entonces es claro que $\equiv_I$ es una relación de equivalencia. Así, podemos enviar las $\equiv_I$-clases al semiretículo B, en dicha forma la proyección canónica $A \to B$ es un homomorfismo. Así, el kernel de esta proyección es la $\equiv_I$-clase del 0, el cual es claramente I.

(iii) Es suficiente ver que, $a \equiv_I b$ entonces $a \vee i = b \vee j$, para algún $i, j \in I$, entonces $(a \vee i) \wedge c = (b \vee j) \wedge c$, para cualquier c, entonces $(a \wedge c) \vee (i \wedge c) = (b \wedge c) \vee (j \wedge c)$ entonces $a \wedge c \equiv_I b \wedge c$, pues $i \wedge c, j \wedge c \in I$; i.e. I es un conjunto más bajo. $\square$

Para determinar la parte sobreyectiva de un homomorfismo de retículos $f : A \to B$, tenemos que ver las imágenes inversas de los elementos de B aparte de 0. En particular, consideremos $\{a \in A/f(a) = 1\}$, el cual satisface los axiomas duales de los que definen un ideal. i.e.:

(i) F es un *sub-inf-semiretículo* de A. i.e. $1 \in F$, y $a \in F$, $b \in F$ implica que $a \wedge b \in F$

((ii)) F es un *conjunto más alto*. i.e. $a \in F$, y $b \geq a$ implica que $b \in F$

Si $F \subseteq A$ cumple dichas condiciones lo denominaremos *filtro*.

Teorema 8.
Sea I un ideal de un retículo A. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) El complemento de I en A es un filtro.

(ii) $1 \notin I$, y $(a \wedge b \in I)$ implica que $a \in I$ o $b \in I$.

(iii) I es el kernel de un homomorfismo de retículos $f : A \to \{0, 1\}$.

Prueba.

$(i) \to (ii)$	Sea F el complemento de I. Como F es un filtro tenemos que $1 \in F$ entonces $1 \notin I$. Similarmente, $a \wedge b \in I$ entonces $a \wedge b \notin F$ entonces $\neg(a \in F$ y $b \in F)$ entonces $a \notin F$ o $b \notin F$ entonces $a \in I$ o $b \in I$.
$(ii) \to (iii)$	Definimos f por: $f(a) = 0$ si $a \in I$, $f(a) = 1$ si $a \notin I$ Y este es claramente un homomorfismo de retículos.
$(iii) \to (i)$	Como el complemento de I es el filtro $f^{-1}(1)$. $\square$

Un ideal que satisface las condiciones del teorema 8 es llamado in *ideal primo*; su complemento, que satisface la condición (ii) del teorema, es llamado *filtro primo*.

Lema 3.
Sea I un ideal de un retículo A, y F un filtro disjunto de I. Entonces existe un ideal M de A que es maximal respecto a aquellos que contienen a I y son disjuntos de F.

Prueba.
Sea $\{I\}$ un conjunto de ideales totalmente ordenados bajo inclusión. Como $0 \in I$ para todo $I \in \{I\}$, tenemos que $0 \in \bigcup I$. Si $a \in I$ y $b \in I'$ con $I, I' \in \{I\}$, tenemos que $a, b \in I \subseteq I'$ o $a, b \in I' \subseteq I$ pues los ideales están ordenados bajo inclusión, entonces $a \vee b \in I$ o $a \vee b \in I'$, luego $a \vee b \in \bigcup I$. Si $a \in \bigcup I$ y $b \leq a$, tenemos que $a \in I$ para algún $I \in \{I\}$ y $b \leq a$, entonces $b \in \bigcup I$. Así, la unión de todos los ideales que pertenezcan a $\{I\}$ es un ideal.
La unión de los ideales ordenada bajo inclusión es una cota superior de estos ideales y es disjunta de F pues cada ideal es disjunto de F. Aplicando el lema de Zorn al conjunto de los ideales ordenado bajo esta inclusión encontramos nuestro ideal maximal. $\square$

Teorema 9.
Sea $\mathbf{F}$ un filtro en un retículo distributivo A, y I un ideal el cual es maximal respecto a aquellos disjuntos de F. Entonces I es primo.

Prueba.
Como $I \bigcap F = \emptyset$, $1 \notin I$. Supongamos que $a_1 \wedge a_2 \in I$; consideremos los ideales J_1 y J_2, generados por I junto a a_1 y a_2 respectivamente. Luego, un miembro de J_i tiene la forma $i \vee (a_i \wedge b)$ con $i \in I$, $b \in A$. Supongamos que J_1 y J_2 intersectan F. Como F es un filtro, este contiene también:

$$\begin{aligned}&(i_1 \vee (a_1 \wedge b_1)) \wedge (i_2 \vee (a_2 \wedge b_2)) \\ &= (i_1 \wedge i_2) \vee (i_1 \wedge a_2 \wedge b_2) \vee (i_2 \wedge a_1 \wedge b_1) \vee (a_1 \wedge a_2 \wedge b_1 \wedge b_2),\end{aligned}$$

el cual está en I, pues cada uno de los cuatro términos está en I. Pero, esto contradice $I \bigcap F = \emptyset$; así, por lo menos uno de los J_i es disjunto de F. Como $J_i \supseteq I$, por maxibilidad tenemos que $I = J_i$, luego $a_i \in I$. Así, hemos probado la condición (ii) del teorema 8. $\square$

Normalmente aplicamos el teorema anterior en el caso que F sea el filtro minimal $\{1\}$, así I es un ideal maximal propio. Así concluimos:

Corolario 1. En un retículo distributivo, todo ideal maximal es primo.

El corolario es una consecuencia directa del teorema anterior.

Capítulo 2

El Anillo de Funciones Continuas

2.1. Funciones sobre un Espacio Topológico

El conjunto *C(X)* de todas las funciones continuas, de valor real sobre un espacio topológico X será provisto de una estructura algebraica y de una estructura de orden.

Pondremos estas estructuras en la colección R^X, de todas las funciones de X al conjunto de los números reales, R. La suma y la multiplicación están definidas por:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

Como R es un campo, es obvio que ambas operaciones son asociativas, conmutativas, y se cumple la ley distributiva.

De hecho, R^X es un anillo conmutativo con unidad, si X no es vacío. El elemento cero es la función constante 0, ($0(x) = 0$), y el elemento unidad es la función constante 1, (1(x)=1). El inverso aditivo $-f$ de f está caracterizado por la fórmula:

$$(-f)(x) = -f(x).$$

El inverso multiplicativo f^{-1}, si existe, está caracterizado por la fórmula:

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

El orden parcial de R^X está definido por:

$$f \geq g \quad \text{si y solo si} \quad f(x) \geq g(x), \quad \text{para todo} \quad x \in X.$$

Esta relación de orden parcial sigue del hecho que R está ordenado. Vemos que para cada h, $f \geq g$ si y solo si $f(x) \geq g(x), \forall x \in X$, si y solo si $f(x) + h(x) \geq g(x) + h(x)$, pues R preserva el orden, si y solo si $(f + h)(x) \geq (g + h)(x), \forall x \in X$, si y solo si $f + h \geq g + h$. Así, la relación de orden es invariante ante traslación. En la multiplicación, $f \geq 0$, $g \geq 0$ implica $fg \geq 0$. Luego, R^X es un anillo parcialmente ordenado.

Ahora, para cualquier f y g en R^X, la función $f \vee g$ definida por la fórmula:

$$(f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x).$$

es el supremo de f y g. Dualmente, tenemos:

$$(f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x).$$

que es el ínfimo de f y g. Así, R^X es anillo reticularmente ordenado.

La función valor absoluto, $|f|$, definida como $f \vee -f$, claramente satisface:

$$|f|(x) = |f(x)|.$$

El conjunto de todas las funciones *continuas* de un espacio topológico X al espacio topológico R es denotado por *C(X)*, o por *C*.

Claramente, la suma de dos funciones reales continuas es continua; y de igual forma el producto. Y si f pertenece a C, también -f pertenecerá. La función constante 1 pertenece a C y es el elemento unidad. Así, *C(X)* es un anillo conmutativo con unidad, un subanillo de R^X.

Luego, si f es continua entonces la función $|f|$ es también continua. Y, como:

$$f \vee g = \frac{f + g + |f - g|}{2}.$$

tenemos que, si $f, g \in C$ entonces $f \vee g \in C$. Así, C es un subretículo de R^X.

El símbolo f^n con $n \in N$ es usado como en cualquier anillo. Si $f \geq 0$, entonces, de manera general , f tienen una única potencia no-negativa r^{th} $(r \in R, r > 0)$, denotada por f^r y definida por:

$$f^r(x) = f(x)^r \quad x \in X.$$

y si f es continua, entonces f^r, como la composición de dos funciones, es también continua.

Si el espacio X es discreto, entonces cada función sobre X es continua, entonces R^X es el mismo que *C(X)*. Recíprocamente, si $R^X = C(X)$, entonces la función característica de cada conjunto en X es continua, por lo que el espacio es discreto.

El subconjunto $C^* = C^*(X)$ de *C(X)*, que consiste en todas las funciones acotadas de *C(X)*, son cerradas bajo las operaciones algebraicas y de orden dadas anteriormente. Así, C^* es un subanillo y un subretículo de C.

Si toda función en *C(X)* está acotada, entonces $C^*(X) = C(X)$. Cuando este es el caso, se dice que X es *pseudocompacto*. Todo espacio compacto es pseudocompacto.

Aún más, por definición, X es contable compacto si toda cubierta contable abierta de X tiene una subcubierta finita. Supongamos, ahora, que X es contable compacto y consideremos alguna función f en *C(X)*. El conjunto $\{x/|f(x)| < n\}$, para $n \in N$, constituye una cubierta contable abierta de X. Entonces una subfamilia finita cubre X; i.e. f está acotado. Así, todo espacio contable compacto es pseudocompacto.

Un espacio pseudocompacto no es necesariamente contable compacto, pues este puede ser abierto.

2.2. Homomorfismos Invariantes

Podemos observar que algunas propiedades de la familia de funciones no están determinadas por su estructura de anillo. La más importante de estas es la estructura de orden. Para describir el orden, es suficiente especificar las funciones no-negativas; pero la condición $f \geq 0$ es simplemente el requerimiento algebraico de f que sea un cuadrado, i.e. $f = k^2$

para algún k. Se sigue que, $|f|$ está determinado algebraicamente: es la única raíz cuadrada no-negativa de f^2.

Acabamos de probar que todo isomorfismo de *C(Y)* en *C(X)* preserva el orden. Más aún, si f está acotada y $f = k^2$, entonces k esta acotado; así, un isomorfismo de *C*(Y)* en *C(X)* también preserva el orden. Un resultado más general:

Teorema 1.
Todo homomorfismo de anillos, t, de *C(Y)* o *C*(Y)* en *C(X)* es un homomorfismo de retículos.

Prueba.
Como $g = l^2$ implica $tg = (tl)^2$, t envía funciones no-negativas a funciones no-negativas, i.e. t preserva el orden. Ahora:

$$(t|g|)^2 = t(|g|^2) = t(g^2) = (tg)^2,$$

y como $t|g| \geq 0$, tenemos $t|g| = |tg|$. Combinando esto con la fórmula:

$$(g \vee h) + (g \vee h) = g + h + |g - h|,$$

tenemos:

$$t(g \vee h) + t(g \vee h) = tg + th + |tg - th| = (tg \vee th) + (tg \vee th).$$

Pero $t(g \vee h)$ y $tg \vee th$ son funciones reales, así $t(g \vee h) = tg \vee th$. $\square$

La acotación de funciones es otra propiedad determinada por la estructura de orden de C. De manera general, concluimos el siguiente resultado:

Teorema 2.
Todo homomorfismo de anillos, t, de *C(Y)* o *C*(Y)* a *C(X)* lleva funciones acotadas a funciones acotadas.

Prueba.
Como en cualquier homomorfismo, $t(1) = t(1 \cdot 1) = (t1)(t1)$, así la función $t1$ en *C(X)* es una idempotencia. Luego, esta no puede asumir valores en X otros que no sean 0 o 1. Entonces para cada $n \in N$, la función:

$$tn = t1 + ... + t1.$$

no asume otros valores mas que 0 o n. Consideremos, ahora, alguna función g en *C*(Y)*. Como $|g| \leq n$, para algún $n \in N$, entonces $|tg| \leq tn \leq n$. $\square$

Corolario 1.
Si X no es pseudocompacto, entonces *C(X)* no es una imagen homomorfica de *C*(Y)*, para algún Y.

Prueba.
En particular, *C(X)* y *C*(X)* son isomorfos si son idénticos. Así, X es pseudocompacto. $\square$

Corolario 2.
Sea t un homomorfismo de *C(Y)* en *C(X)*, cuya imagen contiene *C*(X)*. Entonces t lleva *C*(Y)* sobre *C*(X)*.

Prueba.
Probemos primero que $t1 = 1$. Sea $k \in C(Y)$ que satisface $tk = 1$; entonces $t1 = (tk)(t1) = t(k \cdot 1) = tk = 1$. Se sigue que $tn = n$, para cada $n \in N$. Ahora, dado $f \in C^*(X)$, tenemos que encontrar $g \in C^*(Y)$ tal que $tg = f$. Escogemos $h \in C(Y)$ para el cual $th = f$, y escogemos un $n \in N$ que

satisface $|f| \leq n$. Ahora definimos $g = (-n \vee h) \wedge n$. Entonces $g \in C^*(Y)$, y, por el teorema tenemos $tg = (-n \vee f) \wedge n = f$. $\square$

2.3. Zero-conjuntos

Observemos a los conjuntos de la forma:

$$f^{\leftarrow}(r) = \{x \in X/f(x) = r\}, \quad f \in C, r \in R,$$

claramente estos conjuntos son cerrados.

Vemos que si s es algún número real, entonces:

$$\{x : f(x) = r\} = \{x : (f - s)(x) = r - s\}.$$

Consecuentemente, la familia de conjuntos de la primera forma, obtenida dejando correr f a lo largo de C, y r a lo largo de$R$, puede ser obtenida dejando r fijo. El aspecto algebraico de los puntos situados en la elección del número 0 como el valor de r será considerado.

El conjunto $f^{\leftarrow}(0)$ será llamado el *zero-conjunto* de *f*. Encontramos conveniente denotar este conjunto por $Z(f)$, o, para mayor claridad, por $Z_X(f)$:

$$Z(f) = Z_X(f) = \{x \in X/f(x) = 0\}, \quad f \in C(X).$$

Cualquier conjunto que es un zero-conjunto de alguna función en *C(X)* es llamado un zero-conjunto en X. Así, Z es un función del anillo C sobre el conjunto de todos los zero-conjuntos en X.

Evidentemente, $Z(f) = Z(|f|) = Z(f^n)$ para todo $n \in N$, $Z(0) = X$, y $Z(1) = \emptyset$. Además:

$$Z(fg) = Z(f) \bigcup Z(g),$$

y

$$Z(f^2 + g^2) = Z(|f| + |g|) = Z(f) \bigcap Z(g).$$

Si $f \in C$ y $g = |f| \wedge 1$, entonces $g \in C^*$ y $Z(g) = Z(f)$. Así, C y C^* generan el mismo zero-conjunto.

2.3.1. Cozero-conjuntos

Todo conjunto de la forma $\{x/f(x) \geq 0\}$ es un zero-conjunto:

$$\{x : f(x) \geq 0\} = Z(f \wedge 0) = Z(f - |f|).$$

Como,

$$\{x : f(x) \leq 0\} = Z(f \vee 0) = Z(f + |f|).$$

Así, los conjuntos abiertos:

$$posf = \{x : f(x) > 0\}.$$

y

$$negf = \{x : f(x) < 0\} = pos(-f).$$

son *cozero-conjuntos*, i.e. complementos de zero-conjuntos. De otra manera, todo zero-conjunto es de la forma:

$$X - Z(f) = posf \bigcup negf$$

2.3.2. Unidades.

Para una función f en *C(X)*, tenemos:

$$f \quad \text{es unidad de } C \text{ si y solo si} \quad Z(f) = \emptyset.$$

Así, si f es una unidad de C^*, entonces $Z(f) = \emptyset$. El recíproco no necesariamente se cumple, pues el inverso multiplicativo de f^{-1} de f en C puede no ser una función acotada. De hecho, la condición para C^* es claramente la siguiente: una función f en C^* es una unidad de C^* si y solo si está acotada exceptuando por el 0, i.e. $|f| \geq r$, para algún $r > 0$.

Para $C' \subset C(X)$, escribimos $Z[C']$ para designar la familia de zero-conjuntos $\{Z(f)/f \in C'\}$. Esto es consistente con nuestra notación convencional para las imágenes de un conjunto bajo una función. Por otro lado, la familia $Z[C(X)]$ de todos los zero-conjuntos en X será denotada, por simplicidad, por *Z(X)*.

Hemos observado que $Z[C^*(X)]$ es el mismo que *Z(X)*, y *Z(X)* es cerrado bajo la formación de uniones finitas e intersecciones finitas.

(a) *Z(X)* es cerrado bajo intersección enumerable.

Para un $f_n \in C$ dado, definimos $g_n = |f_n| \wedge 2^{-n}$, sea:

$$g(x) = \sum_{n \in N} g_n(x), \quad x \in X.$$

Como $|g_n| \leq 2^{-n}$, la serie converge uniformemente, y luego g es una función continua. Claramente:

$$Z(g) = \bigcap_{n \in N} Z(g_n) = \bigcap_{n \in N} Z(f_n).$$

2.3.3. Conjuntos Completamente Separados

Dos conjuntos A y B de X se dicen *completamente separados* (uno del otro) *en* X si existe una función f en *C*(X)* tal que $0 \leq f \leq 1$,

$$f(x) = 0 \quad \text{para todo} \quad x \in A, \quad f(x) = 1 \quad \text{para todo} \quad x \in B.$$

Claramente, es suficiente encontrar una función g en *C(X)* satisfaciendo $g(x) \leq 0$ para todo $x \in A$ y $g(x) \geq 1$ para todo $x \in B$; así, $0 \vee g \wedge 1$ tiene la propiedad requerida. Además los números 0 y 1 pueden ser reemplazados por cualesquiera números reales r y s, con $r < s$.

Es claro que dos conjuntos contenidos completamente en conjuntos completamente separados son completamente separados, y que dos conjuntos son completamente separados si y solo si sus clausuras lo son.

Teorema 3.
Dos conjuntos son completamente separados si y solo si están contenidos en zero-conjuntos disjuntos. Aún más, conjuntos completamente separados tienen vecindades de zero-conjuntos disjuntas.

Prueba.
[$\Leftarrow$] Si $Z(f) \bigcap Z(g) = \emptyset$, entonces $|f| + |g|$ no tiene ceros; definimos:

$$h(x) = \frac{|f(x)|}{|f(x)| + |g(x)|}, \quad x \in X.$$

Entonces $h \in C(X)$, y h es a 0 en *Z(f)* y a 1 en Z(g).
[⇒] Si A y *A'* son conjuntos completamente separados, entonces existe $f \in C(X)$ igual a 0 en A y a 1 en *A'*. Los conjuntos disjuntos:

$$F = \{x : f(x) \leq \frac{1}{3}\}, \quad F' = \{x : f(x) \geq \frac{2}{3}\},$$

son vecindades de zero-conjuntos de A y *A'* respectivamente. □

Capítulo 3

Ideales y z-Filtros

Continuando con el estudio de las relaciones entre las propiedades algebraicas de *C(X)* y las propiedades topológicas de X, examinamos las características de la familia de zero-conjuntos de un ideal de funciones. Dicha familia posee propiedades análogas a las de un filtro.

Vemos que un subconjunto I del anillo C es un ideal en C si I es un subanillo de C y, si $gf \in I$ cuando $f \in I$, para un $g \in C$ arbitrario. Este resultado es equivalente al de un ideal en un sup-semiretículo, el cual estudiamos en el capítulo 1.

Tenemos que un ideal I de C es un subconjunto propio si y solo si este no contiene unidades, visto de otra forma tenemos, un ideal contiene unidades si y solo si no es un subconjunto propio. Pues, sea $f \in I$ una unidad en C si y solo si $fg = 1 \in I$, para algún $g \in C$, si y solo si $1 \cdot h = h \in I$, para todo $h \in C$, si y solo si $I = C$. Así, nos referiremos al anillo C como un ideal impropio. Y, la palabra ideal, sin modificarse, significará ideal propio.

Claramente la intersección de cualquier familia de ideales es un ideal. Y, del capítulo 1 tenemos los siguientes resultados para C: todo ideal está contenido en un ideal maximal, y todo ideal maximal M es primo (i.e. si $f \cdot g \in M$ entonces $f \in M$ o $g \in M$).

El ideal más pequeño que contiene una colección de ideales $\{I_i\}$, y elementos $\{f_j\}$, es denotado por:

$$(I_i, ..., f_j, ...),$$

este consiste en todos los elementos de C expresado como sumas (finitas) $i + ... + sf + ...$, donde $i \in I, ...$, y s,... son funciones arbitrarias en C.

Los correspondientes resultados se aplican a C^*. Ya que la intersección de ideales es un ideal tenemos que, si I es un ideal en C entonces $I \bigcap C^*$ es un ideal en C^*.

3.1. z-Filtros

Una subfamilia no vacía $\boldsymbol{F}$ de $Z(X)$ es llamada un *z-filtro* de X si:

(i) $\emptyset \notin \boldsymbol{F}$.

(ii) Si $Z_1, Z_2 \in \boldsymbol{F}$, entonces $Z_1 \bigcap Z_2 \in \boldsymbol{F}$.

(iii) Si $Z \in \boldsymbol{F}$, $Z' \in Z(X)$, y $Z' \supset Z$, entonces $Z' \in \boldsymbol{F}$.

Por (iii), X pertenece a todo z-filtro. Por (iii), (ii) puede ser reemplazado en la definición por:

(ii') Si $Z_1, Z_2 \in \boldsymbol{F}$, entonces $Z_1 \bigcap Z_2$ contienen un miembro de $\boldsymbol{F}$.

Como la intersección de dos elementos arbitrarios de una familia de zero-conjuntos con la propiedad de intersección finita, $\mathcal{B}$, es no vacía tenemos que $\emptyset$ no pertenece a ninguna familia que tiene la propiedad de intersección finita, i.e. $\emptyset \notin \mathcal{B}$; en la sección anterior, se vio que la intersección de zero-conjuntos con la propiedad de intersección finita es una operación cerrada, i.e. si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ entonces $B_1 \bigcap B_2 \in \mathcal{B}$; y como $B_2 \supset B_1 \Rightarrow B_1 \bigcap B_2 = B_1 \neq \emptyset$ tenemos que $B_2 \in \mathcal{B}$, para $B_1 \in \mathcal{B}$, $B_2 \in Z(X)$ y $Z(X) \supset \mathcal{B}$. Así, toda familia $\mathcal{B}$ de zero-conjuntos que tiene la propiedad de intersección finita está contenida en un z-filtro. Claramente, el más pequeño de ellos es la familia $\mathcal{F}$ de todos los zero-conjuntos que contiene intersecciones finitas de miembros de $\mathcal{B}$; luego, decimos que $\mathcal{B}$ genera el z-filtro $\mathcal{F}$. Cuando $\mathcal{B}$ es cerrado bajo intersección finita, se dice que es una base para $\mathcal{F}$.

La definición anterior es, desde luego, una analogía de nuestra definición de filtro para un sup-semiretículo. Un z-filtro es un objeto topológico, mientras que un filtro es un objeto puramente conjuntista. En un espacio discreto, todo conjunto es un zero-conjunto, entonces filtros y z-filtros son los mismos.

Claramente, la intersección de *Z(X)* con algún filtro es un z-filtro. Recíprocamente, si $\mathcal{F}'$ es el filtro más pequeño que contiene un z-filtro dado (i.e. $\mathcal{F}$ es una base para $\mathcal{F}'$), entonces $\mathcal{F}' \bigcap Z(X) = \mathcal{F}$.

Teorema 1.

(i) Si I es un ideal en *C(X)*, entonces la familia $Z[I] = \{Z(f)/f \in I\}$ es un z-filtro en X.

(ii) Si $\mathcal{F}$ es un z-filtro en X, entonces la familia $Z^{\leftarrow}[\mathcal{F}] = \{f/Z(f) \in \mathcal{F}\}$ es un ideal en C.

Prueba.

(i) Como I no contiene unidades, tenemos que $\emptyset \notin Z[I]$. Sean $Z(f_1), Z(f_2) \in Z[I]$, con $f_1, f_2 \in I$; como I es un ideal, tenemos que $f_1^2 + f_2^2 \in I$, así, $Z(f_1) \bigcap Z(f_2) = Z(f_1^2 + f_2^2) \in Z[I]$. Sea $Z(f) \in Z[I]$, y $Z(f') \in Z(X)$, con $f \in I$ y $f' \in C$; como I es un ideal tenemos que $f \cdot f' \in I$, así, si $Z(f') \supset Z(f)$ entonces $Z(f') = Z(f) \bigcup Z(f') = Z(f \cdot f') \in Z[I]$.

(ii) Sea $J = Z^{\leftarrow}[\boldsymbol{F}]$. J no contiene unidades. Sea $f, g \in J$ y sea $h \in C$, luego, tenemos $Z(f-g) \supset Z(f) \bigcap Z(g) \in \boldsymbol{F}$; y $Z(hf) \supset Z(f) \in \boldsymbol{F}$. Entonces $Z(f-g), Z(hf) \in \boldsymbol{F}$. Así, $f - g$ y hg están en J, i.e. J es un ideal en C. $\square$

En particular tenemos, $(f, g) \neq C$ si y solo si, *Z(f)* intersecta *Z(g)* si y solo si, $f^2 + g^2$ no es unidad en C.

Como cualquier función, Z satisface (con $Z(X) \supset \boldsymbol{F}$):

$$\boldsymbol{F} = Z[Z^{\leftarrow}[\boldsymbol{F}]] \quad y \quad Z^{\leftarrow}[Z[I]] \supset I.$$

La primera relación implica que todo z-filtro es de la forma *Z[J]* para algún ideal J en C. En la segunda relación, la inclusión puede ser propia.

El análogo al teorema 1(i), con C^* en lugar de C, es falso en general. Si J es un ideal en C^*, entonces *Z[J]* satisface las propiedades (ii) y (iii) de un z-filtro, como se muestra en la prueba del teorema; de todas maneras, (i) podría no resultar ser cierto. Por ejemplo, el conjunto J de todas las sucesiones que convergen a cero, es obviamente un ideal en *C*(N)*; pero como $\frac{1}{n} \in J$, $\forall n \in N$, y $Z(\frac{1}{n}) = \emptyset$, se sigue que $\emptyset \in Z[\frac{1}{n}]$. Observemos que J no es un ideal en C; de hecho, $\frac{1}{n}$ es unidad en J.

3.2. z-Ultrafiltros

Denominamos a un z-filtro maximal en X por *z-ultrafiltro*, i.e. uno no contenido en algún otro z-filtro de X. Luego, es claro que, un z-ultrafiltro es una subfamilia maximal de *Z(X)* con la propiedad de intersección finita. Del principio maximal, se sigue que toda subfamilia de *Z(X)* con la propiedad de intersección finita está contenida en algún z-ultrafiltro.

Puesto que, en un espacio discreto los z-filtros son los mismos que los filtros, tenemos que en este mismo espacio los z-ultrafiltros son los mismos que los ultrafiltros, i.e. filtros maximales.

Teorema 2.

(i) Si M es un ideal maximal en *C(X)*, entonces *Z[M]* es un ultrafiltro en X.

(ii) Si $\mathcal{A}$ es un z-ultrafiltro en X, entonces $Z^{\leftarrow}[\mathcal{A}]$ es un ideal maximal en C.

Prueba.
Como Z y $Z^{\leftarrow}$ preservan la inclusión, los resultados de [i] y [ii] siguen del teorema 1. Como vimos anteriormente, no podemos concluir que un ideal es maximal del hecho que un z-filtro es maximal. □

Teorema 3.

(i) Sea M un ideal maximal en *C(X)*; si *Z(f)* intersecta cada miembro de *Z[M]*, entonces $f \in M$.

(ii) Sea $\mathcal{A}$ un z-ultrafiltro en X; si un zero-conjunto Z intersecta cada miembro de $\mathcal{A}$, entonces $Z \in \mathcal{A}$.

Prueba.
Por el teorema 2, los dos enunciados son equivalentes. En (b), $\mathcal{A} \bigcup\{Z\}$ genera un z-filtro. Como este contiene el z-filtro maximal $\mathcal{A}$, este tiene que ser $\mathcal{A}$. $\square$

Las propiedades establecidas en el teorema anterior son, de hecho, características de los ideales maximales y los z-filtros; si un z-filtro $\mathcal{A}$, contiene cada zero-conjunto que intersecta a todos los miembros de $\mathcal{A}$, entonces, claramente, $\mathcal{A}$ es un z-ultrafiltro.

Capítulo 4

z-Ideales e Ideales Primos

4.1. z-Ideales

Un ideal I en $C(X)$ es llamado un *z-ideal*, si $Z(f) \in Z[I]$ implica $f \in I$; es decir si $I = Z^{\leftarrow}[Z[I]]$.

Si $\mathcal{F}$ es un z-filtro, entonces $Z^{\leftarrow}[\mathcal{F}]$ es un z-ideal (como $\mathcal{F} = Z[Z^{\leftarrow}[\mathcal{F}]]$). Luego, si J es algún ideal en C, entonces $I = Z^{\leftarrow}[Z[J]]$ es un z-ideal; claramente, I es el z-ideal más pequeño que contiene a J.

Es evidente que, todo ideal maximal es un z-ideal. La intersección arbitraria (no vacía) de una familia de z-ideales es un z-ideal. La función Z es inyectiva del conjunto de todos los z-ideales sobre el conjunto de todos los z-filtros.

Ejemplo.
En $C(\mathrm{N})$, todo ideal I es un z-ideal. Pues, supongamos que $Z(f) = Z(g)$, donde $g \in I$. Definimos h, como $h(n) = 0$, para $n \in Z(g)$,y $h(n) = \frac{f(n)}{g(n)}$, para $n \notin Z(g)$. Como N es discreto, h es continua. Evidentemente, $f = hg$. Así, $f \in I$.

Teorema 1.
Todo z-ideal en *C(X)* es una intersección de ideales primos.

Prueba.
$Z(f^n) = Z(f)$, para todo $n \in N$. Luego, si I es algún z-ideal, entonces $f^n \in I$ implica $f \in I$. Pero esta propiedad caracteriza a I como la intersección de todos los ideales primos que lo contienen. $\square$

El recíproco del teorema no es cierto, pues es suficiente encontrar un ideal primo simple que no sea un z-ideal. Como ejemplo, consideremos el conjunto O_0 de todas las funciones f en *C(R)* para las cuales *Z(f)* es un vecindario de 0. Claramente, O_0 es un z-ideal, y está propiamente contenido en el ideal maximal $M_0 = Z^{\leftarrow}[Z[I]]$ de todas las funciones que desaparecen en 0. Note que todo vecindario de 0 contiene un vecindario-zero-conjunto de 0, i.e. un miembro de $Z[O_0]$. Ahora, si I es algún ideal que contiene a O_0, entonces $Z[O_0] \subset Z[I]$; luego, todo miembro de *Z[I]* intersecta a cada vecindario de 0, y así contiene a 0. Se sigue que $I \subset M_0$. Esto muestra que M_0 es el único ideal maximal que contiene O_0. Luego, O_0 no es una intersección de ideales maximales.

Ahora, como O_0 es una intersección de ideales primos (contenido en M_0), establecemos que no existe un ideal maximal en *C(R)*. Así, una intersección de ideales primos no es un z-ideal.

Teorema 2.
Para algún z-ideal I en C, los siguientes resultados son equivalentes

(i) I es primo.

(ii) I contiene un ideal primo.

(iii) Para todo $g, h \in C$, si $gh = 0$, entonces $g \in I$ o $h \in I$.

(iv) Para cada $f \in C$, existe un zero-conjunto en *Z[I]* en el cual f no cambia de signo.

Prueba.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Trivial.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Si I contiene un ideal primo P, y $gh = 0$, entonces $gh \in P$, luego g o h está en P, y luego en I.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Es suficiente observar que $(f \vee 0)(f \wedge 0) = 0$, para que $f \in C$.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Dado $gh \in I$, consideremos la función $|g| - |h|$. Por hipótesis, existe un zero-conjunto Z de I en el cual $|g|-|h|$ es no-negativo. Entonces cada cero de g en Z es un cero de h. Luego:

$$Z(h) \supset Z \bigcap Z(h) = Z \bigcap Z(gh) \in Z[I],$$

entonces $Z(h) \in Z[I]$. Como I es un z-ideal, $h \in I$. Así, I es primo. □

Si J y *J'* son ideales, ninguno contiene al otro, entonces $J \bigcap J'$ no es primo. De hecho, esto es cierto en cualquier anillo conmutativo. Pues, para $a \in J - J'$ y $a' \in J' - J$, tenemos que ni a ni *a'* pertenecen a $J \bigcap J'$, pero $a \cdot a' \in J \bigcap J'$.

El siguiente teorema generaliza este resultado a un conjunto arbitrario de ideales maximales en *C(X)*, para algún X.

Teorema 3.
Todo ideal primo en *C(X)* está contenido en un único ideal maximal.

Prueba.
Sabemos que todo ideal está contenido en por lo menos un ideal maximal. Si *M* y *M'* son ideales maximales distintos, su intersección es un z-ideal (pues *M* y *M'* son z-ideales), pero no es primo por el resultado anterior; por el teorema 3 del capítulo 3, $M \bigcap M'$ no contiene un ideal primo. □

4.2. z-Filtros Primos

Por un *z-filtro primo*, denominaremos a un z-filtro $\boldsymbol{F}$ con la siguiente propiedad: si la unión de dos zero-conjuntos pertenece a $\boldsymbol{F}$, entonces por lo menos uno pertenece a $\boldsymbol{F}$.

Teorema 4.

(i) Si *P* es un ideal primo en *C(X)*, entonces *Z[P]* es un z-filtro primo.

(ii) Si $\boldsymbol{F}$ es un z-filtro primo, entonces $Z^{\leftarrow}[\boldsymbol{F}]$ es un z-ideal primo.

Prueba.

(i) Sea $Q = Z^{\leftarrow}[Z[P]]$. Entonces $Z[Q] = Z[P]$, y Q es un z-ideal que contiene el ideal primo P. Por el teorema 2, Q es primo. Supongamos, ahora, que $Z(f) \bigcup Z(g) \in Z[P]$. Esto implica que, $Z(fg) \in Z[Q]$; luego *fg* pertenece al z-ideal Q. Como Q es primo, contiene a *f*. Así, $Z(f) \in Z[Q] = Z[P]$.

(ii) Sabemos, que el ideal $P = Z^{\leftarrow}[\boldsymbol{F}]$ es un z-ideal. Supongamos que $fg \in P$. Entonces:

$$Z(fg) = Z(f) \bigcup Z(g) \in Z[P] = \boldsymbol{F}.$$

Por hipótesis, *Z(f)*, pertenece a *Z[P]*. Entonces f pertenece al z-ideal P. □

Se sigue que un z-filtro primo esta contenido en un único z-ultrafiltro. Como cada ideal maximal en C es primo, cada z-ultrafiltro es un z-filtro primo. Si los zero-conjuntos Z y Z' no pertenecen al z-ultrafiltro $\boldsymbol{A}$, entonces, por el teorema 3(ii) del capítulo 3, existen $A, A' \in \boldsymbol{A}$ tales que $Z \bigcap A = Z \bigcap A' = \emptyset$. Entonces $Z \bigcup Z'$ no intersectan al miembro $A \bigcap A'$ de $\boldsymbol{A}$, y por lo tanto no pertenece a $\boldsymbol{A}$.

En un espacio discreto X, no existe diferencia entre primo y maximal, i.e. todo filtro primo $\boldsymbol{U}$ es un ultrafiltro. Si $A \notin \boldsymbol{U}$, entonces $X - A \in \boldsymbol{U}$; así, A no puede ser adjuntado a $\boldsymbol{U}$.

Las correspondencias entre z-filtros de X e ideales en *C(X)* que fueron establecidas, pueden ocurrir de una manera rudimentaria en C^*, pues vimos que $Z^{\leftarrow}[\boldsymbol{F}] \bigcap C^*$ es un ideal en C^*; a pesar de esto, varios teoremas y resultados pueden ser falsos si reemplazamos C^* en lugar de C.

Conclusiones

El estudio del anillo ordenado de funciones continuas *C(X)* requiere un fuerte conocimiento enmarcado en las áreas de Álgebra, Topología y Análisis, por ser una estructura abundante en propiedades y una parte de la matemática todavía en desarrollo.

La teoría de los *z-filtros* y los *z-ideales* es solo parte de este estudio, siendo estructuras conjuntistas con diversas propiedades no muy difíciles de abstraer y visualizar se prestan a relacionar las áreas ya mencionadas anteriormente, obteniendo resultados que implican el objetivo de este trabajo.

Este trabajo pretende recopilar aspectos aprendidos durante la licenciatura matemática y mostrar como funcionan en estas estructuras.

Bibliografía

[1] L. Fuchs, *Partially Ordered Algebraic Systems*, Pergamon Press (1963)

[2] L. Gillman and M. Jerison, *Rings of Continuos Functions*, Springer (1976)

[3] J. A. Gallian, *Contemporary Abstract Algebra*, Houghton Mifflin (2006)

[4] J. R. Munkres, *Topología*, Prentice Hall (2002)

[5] F. Hernández, *Teoría de Conjuntos*, Sociedad Matemática Mexicana (1998)

[6] I. N. Herstein, *Álgebra Abstracta*, Grupo Editorial Iberoamericana S.A. (1998)