Universidad Mayor de San Andrés
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Carrera de Matemática

PROYECTO DE GRADO

Álgebras de Lie semisimples y matrices de Cartan

Para la obtención del título de licenciado en Matemática

Postulante
Jorge Alejandro Álvarez Araníbar

Tutor
Dr. Guillermo Fernando Vera Hurtado

Diciembre, 2021

Agradecimientos

A todos quienes siempre estuvieron apoyándome, en especial gracias a mis padres Ernesto y Rosario, mis hermanas Silvia y Rocío y a mi sobrina Wara. Gracias por ser mi apoyo cuándo más estaba por caer y por compartir mis alegrías cuándo más deseaba poder tener a alguien con quien compartirlas.

Mi enorme gratitud también para con los profesores Mario Paz, Efraín Cruz, Charlie Lozano y Jimmy Santamaría quienes tuvieron una enorme influencia en mi formación tanto académica como personal.

Finalmente, me gustaría agradecer especialmente al Doctor Fernando Vera, de quién tuve la fortuna de aprender de su enorme capacidad matemática, tanto una valiosa forma de trabajar en un proyecto en matemática e innumerables lecciones en el transcurrir del trabajo de grado que seguro marcaran todo mi quehacer profesional de aquí en adelante.

Agradecerles a todos ellos por el incondicional apoyo que mostraron conmigo desde un inicio y el que en mis momentos de dudas se mostraron tanto como eximios mentores y amigos.

Dedicatoria

A mi abuela Rosa y a Tabata. Gracias será siempre decir poco para con ustedes.

Resumen

Se podría decir, como un comienzo histórico del tema, que el punto de partida para la teoría de las álgebras de Lie (así como la de los grupos de Lie) puede ver sus orígenes en los trabajos de Sophus Lie (1842-1899), quien esperaba poder desarrollar una teoría análoga a la teoría de Galois, pero para ecuaciones diferenciales. De forma simultanea, el Programa de Erlangen desarrollado por Felix Klein, que esperaba dar una conexión consistente entre la geometría y la teoría de grupos influenció el desarrollo del trabajo de S. Lie.

En 1893, Lie junto con Friedrich Engel (1861 – 1941), completaron el tercer volumen de su extenso trabajo fundacional Theorie der Transformationgruppen. Independientemente, en 1890, Wilhelm Killing (1847 – 1923) culminó un trabajo sobre la clasificación de álgebras de Lie simples complejas. Posteriormente este trabajo sería rigurosamente analizado y extendido por Elie Cartan en su tesis doctoral de 1894.

Es a partir de allí que una teoría de Lie global pudo emerger, justamente con los trabajos de E. Cartan y de igual manera gracias a Herman Weyl (a quien, entre otros reconocimientos, se le debe, el haber acuñado el nombre de teoría de Lie para lo que anteriormente era denominada, desde los iniciales estudios del propio Lie, como teoría de los grupos infinitesimales). Se le reconoce a Wilhelm Killing el haber enfatizado, primeramente, la clasificación de todas las álgebras de Lie (reales de dimensión finita) para posteriormente iniciar la clasificación de las acciones de todos los grupos asociados a las mismas.

Con la evolución de las ideas de Lie, Engel y Killing se mostró la necesidad primaria de obtener formas de determinar las álgebras de Lie simples y semisimples (de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$). Fue Killing quien planteó y trabajó fundamentalmente en este problema por muchos años. Sus trabajos en el área se publicaron en los Mathematische Annalen entre 1888 - 1890. A pesar de algunas lagunas (e incluso equivocaciones) en sus trabajos, fue Killing quien llegó a la sorprendente conclusión de que las únicas álgebras de Lie simples eran aquellas asociadas a grupos lineales, ortogonales y simplécticos, salvo un contado número de álgebras de Lie aisladas.

El problema fue completamente resuelto por Elie Cartan (1869 – 1951) quien, revisando los resultados de Killing, pero añadiendo cruciales ideas nuevas de su autoría (forma de Cartan–Killing), obtuvo resultados esenciales para las álgebras de Lie semisimples y la clasificación rigurosa de las álgebras de Lie simples en su tesis doctoral de 1894.

Posteriormente, en 1914, Cartan logró clasificar las álgebras de Lie reales y, en particular, observó que existe exactamente una forma real en la cual la fórmula de Cartan-Killing es definida negativa. Este hecho, en años posteriores, sería fundamental en el enfoque de H. Weyl de la teoría de representaciones de álgebras de Lie semisimples. El concepto fundamental para esta clasificación de subálgebras de Cartan h que, por el criterio de Cartan para álgebras de Lie semisimples, es un subálgebra maximal y nilpotente, se ve en la descomposición espectral de $ad(h)$, los autovalores toman ciertos valores de forma lineal denominados como las raíces de h.

A pesar de los resultados de Cartan y Killing, los cálculos para la clasificación de las álgebras de Lie semisimples permanecieron siendo de arduo trabajo hasta que Eugene B. Dynkin (1924 - 2014) definió el concepto de raíz simple y descubrió para estas el hecho siguiente: si $dim(h\mathbb{R}) = n$, entonces un sistema (conjunto) simple de raíces posee exactamente n elementos. Además, la matriz $C = (c_{ij})$ cuyas entradas son los correspondientes valores obtenidos a partir de la forma de Cartan-Killing es llamada la matriz de Cartan de h y ella da origen a un grafo conexo correspondiente, el diagrama de Dynkin, en el cual hay n nodos que corresponden cada uno a una raíz simple. Es decir, tanto la matriz de Cartan como el diagrama de Dynkin caracterizan completamente a su álgebra correspondiente a partir de la relación entre sus elementos (entradas de la matriz en el caso de la matriz de Cartan y las conexiones entre los nodos para el diagrama de Dynkin correspondiente). De esta forma es que las álgebras de Lie forman la base de lo que actualmente se conoce como teoría de Lie.

Un álgebra de Lie es un espacio vectorial g dotado de un producto $[\ ,\ ]$ bilineal, antisimétrico, y que además satisface la identidad de Jacobi. Dos teoremas fundacionales de la teoría de Lie son: el teorema de Lie y el teorema de Engel, que establecen, correspondientemente:

1. Teorema de Lie: Si V es un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado, y si g es una subálgebra soluble de $gl(V)$. Entonces existe una base de V en la que todo elemento de g puede ser representado por una matriz triangular superior.

2. Teorema de Engel: Sea g un álgebra de Lie de dimensión finita, entonces si la adjunta de todo elemento de g es nilpotente entonces el álgebra de Lie también es nilpotente.

Este trabajo se estructura en cuatro Capítulos:

El Capítulo 1 introduce los conceptos básicos y resultados sobre álgebras de Lie que serán empleados en todo el trabajo, así como ejemplos que servirán de base para un posterior desarrollo de los teoremas y resultados principales.

El Capítulo 2 se centra en el estudio de las álgebras de Lie semisimples, partiendo del caso particular de la representación del álgebra $sl(2, \mathbb{R})$ se desarrolla luego la construcción de subálgebras de Cartan y finalmente la fórmula de Killing.

El Capítulo 3 se centra en la construcción de las matrices de Cartan a partir de las raíces simples de un álgebra de Lie, y seguidamente se da una introducción a la forma de construir los diagramas de Dynkin.

Por último, el Capítulo 4 está orientado a enfatizar la relación de la teoría desarrollada en los anteriores capítulos como herramienta base para estudios en otras ciencias: Se enfatiza en este caso, con dos ejemplos, la generalización de la matriz de Cartan para $sl(n, \mathbb{R})$ las simetrías que surgen en el álgebra de Heisenberg en los sistemas unidimensionales en mecánica cuántica.

Índice general

1. Preliminares

1.1. Definiciones fundamentales

Definición 1. *Un álgebra de Lie consiste de un espacio vectorial g equipado de un producto (corchete o conmutador) $[\ ,\ ] : g \times g \to g$ con las siguientes propiedades:*

1. *Es bilineal.*
2. *Es antisimétrico, esto es $[X, X] = 0 \quad \forall X \in g$*
   (lo que implica $[X, Y] = -[Y, X] \quad \forall X, Y \in g$).
3. *Satisface la identidad de Jacobi:*
   $(\forall X, Y, Z \in g)\ ([X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0)$. *Esta igualdad puede ser reescrita como:*
   a) $[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]$
   b) $[[X, Y], Z] = [[X, Z], Y] + [X, [Y, Z]]$

Definición 2. *Sea g un álgebra de Lie. Una subálgebra de g es un subespacio vectorial h de g que es cerrado por el corchete, es decir, $[X, Y] \in h$ si $X, Y \in h$.*

Ejemplo 1. $gl(n, \mathbb{K})$: *El espacio de todas las transformaciones lineales de un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, que es el mismo que el espacio de las matrices $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$. El corchete está dado por $[X, Y] = XY - YX$. Veamos:*

1. *Bilinealidad: se cumple, pues se trata en este caso de transformaciones lineales.*
2. *Antisimetría: Sea $X \in gl(n, \mathbb{K})$ entonces, $[X, X] = XX - XX = 0$.*
3. *Identidad de Jacobi: Sean $X, Y, Z \in gl(n, \mathbb{K})$*
   $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = [X, YZ - ZY] + [Z, XY - YX] + [Y, ZX - XZ]$
   $= X(YZ - ZY) - (YZ - ZY)X + Z(XY - YX) - (XY - YZ)Z + Y(ZX - XZ) - (ZX - XZ)Y$
   $= 0.$

Por lo tanto, $gl(n, \mathbb{K})$, es en efecto un álgebra de Lie.

Ejemplo 2. *Álgebras de Lie provenientes de álgebras asociativas: Sea A un álgebra asociativa y definamos en A el corchete como el conmutador $[x, y] = xy - yx$ para todo $x, y \in A$. Veamos si A satisface con este conmutador las propiedades de álgebra de Lie:*

1. *Bilinealidad: se cumple al ser A un álgebra asociativa.*
2. *Antisimetría: Sea $x \in A$, tenemos que $[x, x] = xx - xx = 0$.*
3. *Identidad de Jacobi: Sean $x, y, z \in A$*
   $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = [x, yz - zy] + [z, xy - yz] + [y, zx - xz]$
   $= x(yz - zy) - (yz - zy)x + z(xy - yx) - (xy - yx)z + y(zx - xz) - (zx - xz)y = 0.$
   De esta forma vemos que $(A, [\ ,\ ])$ es una álgebra de Lie.

Ejemplo 3. *Álgebras abelianas:* $[\ ,\ ] = 0$

1. *Si $dim(g) = 1$, entonces g es abeliana: Dado que su dimensión es 1, una base posible para g es $B = \{e\}$.*
   Sean ahora $x = \lambda e$, $y = \beta e \in g$ cualesquiera: $[x, y] = [\lambda e, \beta e] = \lambda\beta[e, e] = 0$ por definición.
   Así, en este caso se satisfacen las tres propiedades de un álgebra de Lie.

2. *Todo subespacio de dimensión 1 de una álgebra de Lie cualquiera es una subálgebra abeliana:*
   Si $h \leq g$ con $dim(h) = 1$, entonces $B = \{e_h\}$ es una base para h y, por el razonamiento anterior, podemos ver que ésta será igualmente un álgebra abeliana.

3. *El espacio de las matrices diagonales M es una subálgebra abeliana de $gl(n, K)$.*
   Sean $X, Y \in gl(n, K)$ diagonalizadas como sigue:
   $$X = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$$
   Veamos ahora las propiedades de un álgebra de Lie en este caso:

   a) *Bilinealidad: En este caso se cumple pues $M \leq gl(n, K)$*

   b) *Antisimetría: Sea $X \in M$, tenemos que*
   $$[X, X] = XX - XX = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$
   $$- \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{pmatrix} = 0$$

   c) *Identidad de Jacobi: Notemos en este caso que para cualesquiera $X, Y \in M$ tenemos que:*
   $$[X, Y] = XY - YX = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$$
   $$- \begin{pmatrix} y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$
   $$= \begin{pmatrix} x_1y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2y_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & x_ny_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2y_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & x_ny_n \end{pmatrix} = 0$$
   De esta forma, como $[X, Y] \in M$ para todo $X, Y \in M$ podemos ver que la identidad de Jacobi se cumple y por tanto $M \leq gl(n, K)$ es una subálgebra de Lie abeliana.

1.2. Generalidades algebraicas

1.2.1. Morfismos e ideales

Definición 3. *Una transformación lineal* $\varphi : g \rightarrow \ h$ *(con* g,h *álgebras de Lie) es un:*

1. *homomorfismo si* $\varphi\,[X, Y] = [\varphi X, \varphi Y]$,
2. *isomorfismo si fuera un homomorfismo invertible,*
3. *automorfismo si es un isomorfismo y* $g = h$.

Las álgebras g *y* h *son isomorfas si existe un isomorfismo* $\varphi : g \ \rightarrow \ h$.

Ejemplo 4. *Los homomorfismos entre las álgebras abelianas son las transformaciones lineales. Dos álgebras abelianas son isomorfas si y solamente si ellas tienen la misma dimensión.*

Demostración. Sean g , h dos álgebras abelianas y definamos $\varphi \ : \ g \ \rightarrow \ h$ según $\varphi(a) = \lambda b \ + \ c$, con $a \in g$, $b, c \in h$ y $\lambda \in K$ cuerpo para h.
Sean ahora a_1 , $a_2 \in g$, y λ_1 , $\lambda_2 \in K$, entonces:
$\varphi\,[a_1 \ , \ a_2] = \varphi(a_1 \ , \ a_2) = \varphi(a_1 \ , \ a_2) \ - \ \varphi(a_1 \ , \ a_2) = 0$.
Por otro lado:

$$[\varphi a_1 \ , \ \varphi a_2] = (\lambda_1 b_1 \ + c_1)(\lambda_2 b_2 \ + c_2) \ - (\lambda_2 b_2 \ + c_2)(\lambda_1 b_1 \ + c_1)$$
$$= (\lambda_1 b_1 \lambda_2 b_2) + (\lambda_1 b_1 c_2) + (c_1 \lambda_2 b_2) + (c_1 c_2) - (\lambda_2 b_2 \lambda_1 b_1) - (\lambda_2 b_2 c_1) - (c_2 \lambda_1 b_1) - (c_2 c_1) = 0$$

Por tanto $\varphi\,[a_1 \ , \ a_2] = [\varphi a_1 \ , \ \varphi a_2]$. y así φ es un homomorfismo entre g y h.
Ahora, si $dim(g) = dim(h)$, entonces si $B_1 = \{e_1 \ , \ \cdots \ e_n\}$ y $B_2 = \{f_1 \ , \ \cdots \ f_n\}$ son bases respectivas de g y h , entonces : $|B_1| = |B_2|$.
Luego, podemos definir $\varphi^{-1} : \ h \ \rightarrow \ g$ dada por:

$$f_i \mapsto \varphi^{-}1(f_i) = e_i$$

con $i = \{1, 2, \cdots, n\}$, que es una función inversa para φ. De esta forma vemos que φ es un isomorfismo entre g y h. □

Ejemplo 5. *Sea* P *una transformación lineal invertible del espacio vectorial* V. *Entonces la conjugación por* $P : A \in gl(V) \ \mapsto \ PAP^{-1} \in gl(V)$ *es un automorfismo de* $gl(V)$.

Demostración. Como P es invertible y A pertenecen a $gl(V)$, entonces la conjugación por P es una transformación lineal de $gl(V)$ sobre sí mismo. Denotémosla por φ y sean $A, B \in gl(V)$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} [\varphi A \ , \ \varphi B] = [PAP^{-1} \ , \ PBP^{-1}] &= (PAP^{-1})(PBP^{-1}) \ - \ (PBP^{-1})(PAP^{-1}) \\ &= \ (PA(I)BP^{-1}) \ - \ (PB(I)AP^{-1}) \\ &= \ (PABP^{-1}) \ - \ (PBAP^{-1}) \\ &= \ \varphi[A, B]. \end{aligned}$$

Así, φ es un homomorfismo de $gl(V)$ en sí mismo. Veamos ahora si φ es invertible: Sea $\varphi(A) = PAP^{-1} \in gl(V)$. Entonces $\varphi^{-1}(A) = P^{-1}\varphi(A)P$ y por tanto φ es, en efecto, invertible.
Por tanto, la conjugación por P es un automorfismo de $gl(V)$. □

Una forma de verificar que dos álgebras de Lie de dimensión finita son isomorfas es a través del corchete de elementos de sus bases.
Sea g un álgebra de Lie y $\{X_1, \cdots, X_n\}$ una base para g. Tomando dos elementos X_i , X_j de la base, el corchete entre ellos puede ser escrito como una combinación lineal:

$$[X_i\ ,\ X_j] = \sum_\kappa c_{ij}^\kappa X_\kappa.$$

Los coeficientes c_{ij}^κ son denominados constantes de estructura del álgebra en relación a la base. Estas constantes determinan al álgebra salvo isomorfismos. De hecho, sea h un álgebra de Lie con base $\{Y_1, \cdots, Y_n\}$ con las mismas constantes de estructura que g. Sea la transformación lineal $\varphi : g \to h$ tal que $\varphi(X_i) = Y_i$, entonces :

$$\varphi[X,Y] = \sum_{ij\kappa} a^i b^j\ c_{ij}^\kappa\ \varphi(X_\kappa) = \sum_{ij} a^i b^j\ [Y_i\ ,\ Y_j] = [\varphi X\ ,\ \varphi Y$$

Donde a^i, b^j $i = 1, 2, \cdots, n$ son las coordenadas de X e Y respectivamente, en relación a la base de g. Esto muestra que φ es un isomorfismo y por tanto que g y h son isomorfas.
Las constantes de estructura satisfacen las igualdades para toda terna (i, j, k) y m, l enteros:

1. $c_{ij}^k = -c_{ji}^k$,
2. $\sum_l (c_{ij}^l\ c_{lk}^m) + (c_{jk}^l\ c_{li}^m) + (c_{ki}^l\ c_{lj}^m) = 0$.

Con la primera derivándose de la antisimetría del corchete y la segunda de la identidad de Jacobi. Recíprocamente, si las constantes satisfacen estas dos ecuaciones son constantes de estructura del álgebra de Lie. Es decir, partiendo de una base $\{X_1, \cdots, X_n\}$ de un espacio vectorial arbitrario y definiendo $[X_i\ ,\ X_j] = c_{ij}^k\ X_k$ se obtiene un álgebra de Lie de dicho espacio vectorial con constantes de estructura c_{ij}^k.

Definición 4. *Un subespacio* $h \subset g$ *es un ideal si y solamente si:* $(\forall\ Y \in h\ )\ (X \in g)\ \ ([X, Y] \in h)$ *esto es :* $[g, h] = gen\{[X, Y]\ :\ X \in g\ ,\ Y \in h\} \subset h$.

Notemos dos observaciones importantes en el caso de los ideales para las álgebras de Lie:

1. Todo subespacio de un álgebra abeliana es un ideal: Sea A un álgebra de Lie abeliana y $B \subset A$, entonces para todo $a \in A$ y $b \in B$, $[a, b] = 0 \in B$, pues $B \leq A$ y, recordemos que, para toda álgebra abeliana $[\ ,\ ] = 0$.
2. Las propiedades de la suma e intersección de ideales y subálgebras están catalogadas en la siguiente tabla, donde h_1 y h_2 son subespacios de un álgebra de Lie g:

h_1	h_2	$h_1 + h_2$	$h_1 \cap h_2$
ideal	ideal	ideal	ideal
subálgebra	ideal	subálgebra	subálgebra
subálgebra	subálgebra	?	subálgebra

Sea $\varphi : \ g \ \rightarrow \ h$ un homomorfismo. Las siguientes afirmaciones son de verificación inmediata:

1. $ker(\varphi)$ es un ideal.

   Demostración. $ker(\varphi) = \{X \in g \ : \ \varphi(X) = 0_h\}$. Sean ahora $X_1 \in g$ cualquiera y $X_2 \in ker(\varphi)$, entonces: $\varphi[X_1 \ , \ X_2] = [\varphi(X_1) \ , \ \varphi(X_2)] = [\varphi(X_1 \ , \ 0_h)] = 0_h$. Así, $[X_1 \ , \ X_2] \in ker(g)$. □

2. $Im(\varphi)$ es una subálgebra.

   Demostración. Por definición tenemos que:
   $Im(\varphi) = \{Y \in h : (\exists X \in g)(\varphi(X) = Y =\}$. Ahora bien, veamos las propiedades de álgebra de Lie:

   a) Bilinealidad: $\varphi[X_1 \ , \ X_2] = [\varphi(X_1) \ , \ \varphi(X_2)] \in Im(\varphi)$.

   b) Antisimetría: $\varphi[X, X] = [\varphi(X) \ , \ \varphi(X)] = [Y, Y] = 0$.

   c) Identidad de Jacobi: $\varphi([X,[Y,Z]]+[Z,[X,Y]]+[Y,[Z,X]]) = \varphi(0) = 0 \in Im(\varphi)$
   De esta forma, $Im(\varphi)$ es una subálgebra de h.

   □

Definición 5. *Sea g un álgebra de Lie y $h \subset g$ un ideal. El espacio vectorial cociente g/h está definido por $[\bar{X}, \bar{Y}] = [\overline{X, Y}]$ donde $\bar{X}$ denota la clase $X + h$.*

Como es usual en la construcción de cocientes, se debe mostrar que la definición del corchete es independiente de los representantes X e Y y que además define en g/h una estructura de álgebra de Lie. La proyección canónica:

$$\begin{array}{rl} \pi : \ g \rightarrow & g/h \\ X \mapsto & \bar{X} = X + h \end{array}$$

es un homomorfismo sobreyectivo de álgebras de Lie.
En esta construcción es imprescindible que h sea un ideal. Si fuese solo una subálgebra el corchete en el cociente no estaría bien definido.

Teorema 1. *Teoremas de isomorfismos*

1. *Sea $\varphi : \ g \rightarrow \ h$ un homomorfismo. Entonces $g/ker(\varphi) \ \cong \ Im(\varphi)$.*

2. *Sean g un álgebra de Lie y h_1 , $h_2 \subset g$ ideales de g . Entonces :*
   $(h_1 + h_2)/h_1 \ \cong \ h_2/(h_1 \cap h_2)$.
   El isomorfismo es obtenido pasando al cociente el homomorfismo:
   $x_1 + x_2 \in h_1 + h_2 \ \mapsto \ \bar{x_2} \in h_2/(h_1 \cap h_2)$.

Ejemplo 6. *Supóngase que g se escribe como suma directa $g = h_1 \oplus h_2$, con h_1 ideal y h_2 subálgebra. Entonces $g/h_1 \cong h_2$. El isomorfismo esta dado por $X \in h_2 \mapsto \bar{X} \in g/h_1$.*

Demostración. Sea $\varphi : \ h_2 \rightarrow \ g/h_1$ dada por $X \mapsto \ \varphi(X) = \bar{X} = X + H_1$.
Se desea mostrar que $\varphi(X)$ es un homomorfismo invertible. Veamos:

1. $\varphi[X_1, X_2] = [X_1, X_2] = [\bar{X_1}, X_2] + H_1 = [\overline{X_1}, \bar{X_2}] = [X_1{+}H_1, X_2{+}H_2] = [\varphi(X_1), \varphi(X_2)]$.

2. Tenemos por definición que $\varphi : h_2 \to g/h_1$. dada por $X \mapsto \varphi(X) = \bar{X} = X + H_1$ Luego, $\varphi^{-1} : g/h_1 \to h_2$ con $\bar{X} \mapsto \varphi(X) + {H_1}^{-1}$ es una función inversa para φ.

Por tanto, φ es un isomorfismo y $h_2 \cong g/h_1$ $\square$

1.2.2. Extensión del cuerpo de escalares

Sean g un álgebra de Lie sobre un cuerpo K y sea $\bar{K}$ una extensión de K. Sea también $g_{\bar{K}}$ el espacio vectorial sobre $\bar{K}$ extensión de g. Los elementos de $g_{\bar{K}}$ son de la forma $X = \sum a_i X_i$ con $a_i \in \bar{K}$, $X_i \in g$. Para $X = \sum a_i X_i$, $Y = \sum b_j Y_j$ en $g_{\bar{K}}$, definimos:

$$[X, Y] = \sum a_i b_j \; [X_i \; , \; Y_j] \in g_{\bar{K}}.$$

Este corchete define en $g_{\bar{K}}$ un álgebra de Lie. Formalmente, el espacio vectorial $g_{\bar{k}}$ está definido como el producto tensorial sobre K, $g_{\bar{K}} = g \otimes_{\bar{k}} \bar{K}$, que contiene a g, de la forma siguiente: $X \in g \mapsto X \otimes 1 \in g \otimes \bar{K}$ y es un espacio vectorial sobre $\bar{K}$ dado según: $a(X \otimes b) = X \otimes ab$ si $X \in g$ y $a, b \in \bar{K}$.

1.3. Representaciones

Sea V un espacio vectorial y sea $gl(V)$ el álgebra de Lie de las transformaciones lineales de V. Sea también g un álgebra de Lie (sobre el mismo cuerpo de escalares que V).
Una representación de g en V es un homomorfismo $\rho : g \to gl(V)$.
En la terminología usual, V se denomina el espacio de representación y su dimensión es la dimensión de la representación. Una representación ρ es llamada fiel si $ker(\rho) = \{0\}$.
La noción de representación viene de la idea de expresar las álgebras de Lie como álgebras de transformaciones lineales. En el caso de las representaciones fieles, $g \cong Im(g)$ y, por tanto, el álgebra puede ser vista como una subálgebra de las transformaciones lineales (o como una subálgebra de matrices si la dimensión es finita).
La idea de considerar álgebras de Lie como subálgebras de transformaciones lineales es realizada, a nivel teórico, para álgebras de Lie de dimensión finita. Debido a un resultado, el teorema de Ado, que establece que todo álgebra de Lie de dimensión finita admite una representación fiel también de dimensión finita.

Ejemplo 7. *Si $g \subset gl(V)$ es una subálgebra, la inclusión define, trivialmente, una representación de g en V denominada representación canónica.*

Demostración. Como $g \subset gl(V)$, entonces para todo $X \in g$, $X \in gl(V)$ y X admite una representación de la forma $X = Ax + B$ que es una transformación lineal. Luego, sea:

$$\begin{aligned} \rho : \; & g \to gl(V) \\ & X \mapsto \rho(X) = Ax + B \end{aligned}$$

Notemos que $\rho[X,Y] = A[X,Y]+B = [AX,AY]+B = [AX+B,AY+B] = [\rho(X)\ ,\ \rho(Y)]$. Por tanto ρ es un homomorfismo de g en $gl(V)$ y así también, será una representación de g en $gl(V)$. $\square$

Definición 6. *Un módulo sobre una álgebra de Lie g es un espacio vectorial V con una operación de multiplicación $g \times V \to V$, denotada por $(X,v) \mapsto Xv$, que satisface para $X,Y \in g$; $u,v \in V$ y un escalar x las siguientes propiedades:*

1. $(X+Y)v = Xv + Yv$,
2. $X(u+v) = Xu + Xv$,
3. $xXv = X(xv)$,
4. $[X,Y]v = XYv - YXv$.

En un módulo V, cada $X \in g$ define una aplicación lineal de V por multiplicación a la izquierda: $v \in V \mapsto Xv \in V$. En virtud de las propiedades de módulo, esas aplicaciones lineales definen una representación de g en V. Vice versa, dada una representación ρ de g en V, el producto $g \times V \to V$ dado por $(X,v) \mapsto Xv = \rho(X)v$ define un módulo sobre g. En otras palabras, los conceptos de módulo y representación son equivalentes.

1.3.1. Representación adjunta

Para un elemento X en el álgebra de Lie g, consideremos la transformación lineal: $ad(X) : g \to g$ definida por $ad(X)(Y) = [X,Y]$.
La aplicación $ad :\ X \in g \mapsto ad(X) \in gl(g)$ define una representación de g en g, denominada representación adjunta. El hecho de que ad sea lineal proviene de la bilinealidad del corchete. Y la propiedad de homomorfismo de ad es equivalente a la identidad de Jacobi. De hecho, la igualdad

$$ad([X,Y]) = ad(X)ad(Y)\ -\ ad(Y)ad(X)$$

es la misma que $[[X,Y],Z] = [[X,Z],Y]+[X,[Y,Z]]$ para todo $Z \in g$. Esta expresión es una de las dos formas de la identidad de Jacobi presentadas. El núcleo de la representación adjunta es denominado el centro de g y es denotado por $\xi(g)$:

$$\xi(g) = \{X \in g\ :\ ad(X)(Y) = [X,Y] = 0\ \forall Y \in g\}.$$

Esto es, el centro de una álgebra de Lie es el conjunto de elementos que conmutan con todos sus elementos. La terminología aquí sigue de la teoría de grupos. Evidentemente, $\xi(g)$ es un ideal de g. De forma mas general, el centralizador de un subconjunto $A \subset g$ está definido como:

$$\xi(A) = \{Y \in g\ :\ \forall X \in A\ ,\ [X,Y] = 0\}.$$

Para cualquier $A \in g$,$\xi(A)$ es una subálgebra, pues si $X,Y \in \xi(A)$ y $Z \in A$, entonces $[[X,Y],Z] = [[X,Z],Y] + [X,[Y,Z]] = 0$.

Notación: Si $h \in g$ es una subálgebra y X pertenece a h, la notación $ad(X)$ puede significar una transformación lineal de g o bien de h. Cuando esto ocurre, lo usual es indicar el álgebra con un subíndice. Por ejemplo, $ad_h(X)$ es una transformación lineal de h.

Ejemplo 8. *Sean g un álgebra no abeliana bidimensional y $\{X, Y\}$ una base de g tal que $[X, Y] = Y$. En esta base, las matrices de $ad(X)$ y $ad(Y)$ son:*

$$ad(X) = ad\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{22} & -X_{12} \\ -X_{21} & X_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$ad(Y) = ad\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{22} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La representación adjunta viene dada, por tanto, por:

$[ad(aX + bY)] = [ad(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & 0 \end{pmatrix})] = [ad(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & a \end{pmatrix})]$

$= ad[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix})] \quad ; c_1 , c_2 \in K$

$= [\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}] + [\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}]$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & a \end{pmatrix} = aX + bY.$

Por tanto, $\xi(g) = \{X \in g \ : \ [X, Y] = ad(X)(Y) = 0 \ \forall \ Y \in g\}$.
Así, podemos ver que $\xi(g) = g$.

1.3.2. Descomposición de representaciones

Una representación ρ de g en V se llama irreducible si los únicos subespacios invariantes por ρ son los triviales, $\{0\}$ *y* V. Una representación se llama completamente reducible si V se descompone como : $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$, con cada V_i invariante y tal que la restricción de ρ a V_i es irreducible. Dicho de otra manera, ρ es completamente reducible si ella es isomorfa a la suma directa $\oplus_i \rho|_{V_i}$ de representaciones irreducibles.
En general, la descomposición de V en componentes irreducibles no es única. A pesar de la nomenclatura, una representación irreducible es siempre completamente reducible. Las representaciones completamente reducibles son denominadas también representaciones semisimples.

Teorema 2. *Sea ρ una representación de dimensión finita de g en V. Entonces, ρ es completamente reducible si y solo si todo subespacio invariante admite un complemento invariante, esto es, para todo $W \in V$ invariante, existe W_1 también invariante tal que $V = W \oplus W_1$.*

Demostración. Asumiendo de la hipótesis que para todo $W \in V$ invariante, existe W_1 también invariante tal que $V = W \oplus W_1$. Supongamos que V no es irreducible y tomemos un subespacio invariante no trivial W. Existe entonces W_1 invariante tal que $V = W \oplus W_1$. Esta suma directa es la descomposición deseada si tanto W y W_1 fueran irreducibles. Supongamos por tanto, que uno de ellos, por ejemplo W, es reducible. Entonces es posible "separar" W a través de la siguiente afirmación:
W también se puede expresar como suma directa de subespacios propios suyos, también invariantes.
De hecho, sea $W' \in W$ invariante. Entonces, $W' \oplus W_1 \in W$ es invariante pues una suma de espacios invariantes es invariante. Como V satisface dicha afirmación, existe W_2 invariante tal que $V = (W' \oplus W_1) \oplus W_2$.

El subespacio $(W_1 \oplus W_2) \cap W$ es invariante pues la intersección de subespacios invariantes también es invariante. Por eso, para verificar nuestra afirmación inicial es suficiente mostrar que $W = ((W_1 \oplus W_2) \oplus W'$.
Sea $x \in W'$ y supongamos que $x \in W_1 \oplus W_2$. Entonces, $x = y + z$ con $y \in W_1$ y $z \in W_2$. Como $x - y \in W' \oplus W_1$, de la igualdad $x - y = z$ se tiene que $x - y = z = 0$ pues $z \in W_2$ disjunto de W_1 salvo para 0 y $W_2 \subset W'$ y de allí que $x \in W' \cap W_1$, de donde se concluye que $x = 0$ ya que $x \in W'$, $x = y + 0$, $x = y \in W_1 \subset W'$.
Esto muestra que la suma del segundo miembro de (b) es una suma directa.
Ahora, dado $x \in W$, se puede escribir $x = x_1 + x_2 + x_3$ con $x_1 \in W'$, $x_2 \in W_1$, $x_3 \in W_2$. Entonces $x_2 + x_3 = x - x_1 \in W$, mostrando que W es la suma directa de los subespacios de V y por tanto, demostrando la afirmación dada en principio. A partir de ahora, la descomposición de V en subespacios invariantes e irreducibles es obtenida por inducción, descomponiendo sucesivamente los subespacios que aparecen en las descomposiciones. Como V es de dimensión finita, este procedimiento es realizable.
Para la reciproca, usamos inducción sobre la dimensión de V.
Si $dim(V) = 1$, la afirmación ya está probada. Para dimensiones mayores, escribimos $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ con cada V_i invariante e irreducible. Sea $W \subset V$ invariante. Cada $W \cap V_i$ es invariante y como los subespacios V_i son irreducibles, $W \cap V_i = \{0\}$ o bien $W \cap V_i = V_i$ para todo i. Esto nos da dos posibilidades:
Caso 1. Para algún i , por ejemplo $i = 1$, $W \cap V_1 = V_1$, esto es, $V_1 \subset W$. Entonces $W = V_1 \oplus (W \cap (V_2 \oplus \cdots \oplus V_n))$.
De hecho, tomemos $x \in W$ y escribimos $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$. Como $V_1 \subset W$, $x \in W$ y por tanto, $x_2 \in W$. De ahí que $W = V_1 + W \cap (V_2 \oplus \cdots \oplus V_n)$. Esta suma es directa pues $V_1 \cap (V_2 \oplus \cdots \oplus V_n) = 0$. Usando ahora el paso de inducción, existe W' tal que $V_2 \oplus \cdots \oplus V_n = (W \cap (V_2 \oplus \cdots \oplus V_n) \oplus W')$ y W' complementa W en V ya que $V_1 \subset W$.
Caso 2. Para todo i , $W \cap V_i = \{0\}$. Entonces $W \oplus V_1$ está en las condiciones del primer caso y, por tanto, existe W' invariante tal que $V = (W \oplus V_1) \oplus W'$, esto es, $V = W \oplus (V_1 \oplus W')$.
Con estos dos casos se concluye la demostración de la implicación recíproca. $\square$

1.4. Derivaciones

Definición 7. *Una aplicación lineal $D : g \to g$ es una derivación del álgebra de Lie g si satisface:*
$D[X,Y] = [DX,Y] + [X,DY]$ *para todo* $X, Y \in g$.

De forma más general, una derivación de un álgebra de Lie es una transformación lineal que satisface la regla de Leibniz de derivada de un producto : $D(xy) = D(x)y + xD(y)$.
Un tipo de derivación que aparece con frecuencia en la teoría de Lie es la de las adjuntas de los elementos de g. Una de las formas de la Identidad de Jacobi muestra que:

$$ad(X)[Y,Z] = [X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]]$$

o bien,

$$ad(X)[Y,Z] = [ad(X)Y,Z] + [Y, ad(X)Z];$$

esto es, $ad(X)$ es una derivación. Derivaciones de este tipo son denominadas 'derivaciones internas'.
El conjunto de estas derivaciones coincide con la imagen de la representación adjunta. El espacio de las derivaciones internas es, por tanto, una subálgebra de $gl(g)$.
No toda derivación es interna. Un ejemplo es el caso de las álgebras abelianas en que toda transformación lineal es una derivación y, sin embargo, existe una única interna, que es la transformación idénticamente nula. En el otro extremo, en las álgebras semisimples toda derivación es interna.

Teorema 3. *Sea g un álgebra de Lie real de dimensión finita y sea $D: g \to g$ una transformación lineal. Entonces, D es una derivación si y solamente si para todo $t \in \mathbb{R}$, e^{tD} es un automorfismo de g.*

Demostración. Supongamos que para todo t real, e^{tD} sea un automorfismo, esto es, $e^{tD}[X,Y] = [e^{tD}X, e^{tD}Y]$ para todo $X, Y \in g$.
La derivada de esta igualdad, como función de t se escribe

$$De^{tD}[X,Y] = [De^{tD}X, e^{tD}Y] + [e^{tD}X, De^{tD}Y]$$

que evaluada en $t = 0$ muestra que

$$D[X,Y] = [DX,Y] + [X,DY].$$

Esto es, D es una derivación.
Por otro lado, asumiendo que D es una derivación, sean las funciones en g dadas por: $\alpha(t) = e^{tD}[X,Y]$; $\beta(t) = [e^{tD}X, e^{tD}Y]$.
Tomemos $\alpha(0) = [X,Y] = \beta(0)$, su derivación será dada por:$\alpha'(t) = De^{tD}[X,Y] = D\alpha(t)$ y luego obtenemos:

$$\beta'(t) = D[e^{tD}X, e^{tD}Y] = [De^{tD}X, e^{tD}Y] + [e^{tD}X, De^{tD}Y] = D\beta(t),$$

pues D es una derivación. Por tanto, α y β satisfacen la misma ecuación lineal y tienen las mismas condiciones iniciales, de ahí que $\alpha = \beta$. $\square$

Ejemplo 9. *Toda transformación lineal de un álgebra abeliana es una derivación. Veamos: Sea $T: g \to g$ una transformación lineal y sean $X, Y \in g$ un álgebra abeliana, esto es, $[X,Y] = 0$ para todo $X, Y \in g$.*
Entonces, $0 = T[X,Y] = [TX,Y] + [X,TY] = 0 + 0 = 0$ y en efecto T es una derivación de g.

Definición 8. *Representando un álgebra de Lie en otras dos por derivaciones, se puede construir un álgebra de Lie en el producto cartesiano de las dos álgebras. Ese producto, denominado producto semidirecto, generaliza el producto directo de álgebras como se muestra en el teorema siguiente.*

Teorema 4. *Sean g, h álgebras de Lie y ρ una representación de g en h. Supongamos que para todo $X \in g$, $\rho(X)$ es una derivación de h y definimos el corchete:*
$[(X_1,Y_1),(X_2,Y_2)] = [X_1,X_2]\rho(X_1)Y_2 - \rho(X_2)Y_1 + [Y_1,Y_2]$
Con ese corchete, $g \times h$ es un álgebra de Lie que se descompone en suma directa $g \times h = (g \times 0) \oplus (0 \times h)$, de un subálgebra isomorfa a g por un ideal isomorfo a h.

Demostración. El corchete en $g \times h$ es antisimétrico pues lo es en cada una de sus componentes. En cuanto a la identidad de Jacobi, ella vale en la primera coordenada por valer en g. Escribiendo ahora $v_i = (X_i, Y_i)$, la segunda coordenada de $[[v_1, v_2], v_3]$ se descompone en cuatro partes:

1. $\rho[X_1, X_2]Y_3 - \rho(X_3)(\rho(X_1)Y_2 - \rho(X_2)Y_1)$,
2. $\rho(X_3)[Y_1, Y_2]$,
3. $[\rho(X_1)Y_2 - \rho(X_2)Y_1, Y_3]$,
4. $[[Y_1, Y_2], Y_3]$.

Sumando las permutaciones definidas para el corchete en la hipótesis del teorema, los términos correspondientes a la primera y cuarta parte se anulan por la identidad de Jacobi en h y los términos correspondientes a la segunda y tercera parte se anulan entre sí por el hecho de ser $\rho(X_i)$ derivación. Ello muestra la identidad de Jacobi del corchete definido. □

El producto directo de dos álgebras puede ser visto como un caso particular de un producto semidirecto. Para esto, basta tomar la representación nula de g en h. En ese caso, g pasa a ser un ideal del producto y no solo una subálgebra.

Ejemplo 10. *Sea V un espacio vectorial y denotemos por $af(V)$ el espacio de las trasformaciones afines de V, esto es, de las transformaciones de V de la forma $Tw = Aw + v$ con A lineal y $v \in V$. El espacio $af(V)$ está dado por el producto $gl(V) \times V$. El corchete $[(A, v), (B, u)] = ([A, B], Au - Bv)$ define en $af(V)$ una estructura de álgebra de Lie que es el producto semidirecto de $gl(V)$ por V con la representación dada por la representación canónica.*

Demostración. En efecto, tenemos que:

1. $[(A, v), (A, v)] = ([A, A], Av - Av) = (0, 0) = 0$,
2. $[(A, v), (B, u) + (C, w)] = [(A, v), (B + C, u + w)] = ([A, B + C], A(u + w) - (B + C)v)$
   $= ([A, B + C], Au + Aw - Bv - Cv) = ([A, B], Au - Bv) + ([A, C], Aw - Cv)$
   $= [(A, v), (B, u)] + [(A, v), (C, w)]$.

□

1.5. Series de composición

1.5.1. Serie derivada

Sea g un álgebra de Lie, para dos subconjuntos A y B de g se usará la notación $[A, B]$ para indicar el subespacio generado por $\{[X, Y] \ : \ X \in A \ , \ Y \in B\}$.
Se define por inducción, los siguientes subespacios de g:
$g^{(0)} = g$
$g^{(1)} = [g, g]$
$g^{(2)} = [g^1, g^1]$
...

$g^{(k)=[g^{k-1},g^{k-1}]}$.
Estos subespacios son ideales de g.

Teorema 5. *$g^{(k)}$ es ideal de g para todo $k \geq 0$. En particular $g^{(k)}$ es subálgebra y por tanto, la secuencia es decreciente: $g^{(k+1)} \subset g^{(k)}$.*

Demostración. Por inducción sobre k :
$g^{(0)}$ es evidentemente un ideal. Asumiendo que $g^{(k-1)}$ sea un ideal, sean $X \in g$ e $Y \in g^{(k)}$. Se puede escribir a Y como $Y = \sum_i [Z_i, W_i]$ con Z_i , $W_i \in g^{(k-1)}$.
Por la identidad de Jacobi, $[X,Y] = \sum_i [X,[Z_i,W_i]] = \sum_i [[X,Z_i],W_i] + [Z_i,[X,W_i]]$ y esta ultima sumatoria (finita) está en $g^{(k)}$, pues cada factor de los corchetes está en $g^{(k-1)}$. Por tanto, $g^{(k)}$ es un ideal. $\square$

Definición 9. *Esta secuencia de ideales es conocida como la serie derivada de g y sus componentes son las álgebras derivadas de g.*

Ejemplo 11. *Sea g el álgebra de matrices triangulares superiores con ceros en la diagonal.*

$$g = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & * \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Entonces, $g(k) = 0$ si k es suficientemente grande, pues con cada derivación se reduce el numero de diagonales superiores no nulas. Eventualmente existirá, entonces, un k tal que $g^{(k)} = \{0\}$ y $g^{(k')} = 0$ para todo $k' \geq k$.

1.5.2. Álgebras solubles y nilpotentes

Definición 10. *Una subálgebra es soluble si alguna de sus derivadas se anula, esto es, $g^{(k_0)} = 0$ para algún $k_0 \geq 1$ (y, por tanto, $g^{(k)} = 0$ para todo $k \geq k_0$).*

Teorema 6.
1. *Si g es soluble y $h \subset g$ es una subálgebra, entonces h también es soluble.*
2. *Si g es soluble y $h \subset g$ es un ideal, entonces g/h también es soluble.*

Demostración.
1. Las álgebras derivadas sucesivas de h estarán contenidas en las correspondientes álgebras derivadas de g. Por tanto, h sera soluble si g lo es.
2. Como $(g/k)^k = \pi(g^{(k)})$; donde $\pi(.)$ es la aplicación proyección $Y + W = X \in g/h \mapsto \pi(X) = [X,H] \in g/h$ con $H \in h$. Así si algún álgebra derivada de g se anula, lo mismo ocurre con el álgebra derivada correspondiente de g/h.
   Veamos esta ultima afirmación:
   Sea $g^{(k)} = \{0\}$, esto es, $[g, g^{(k-1)}] = \{0\}$.
   Lo que implica que para todos los elementos $X, Y \in g$ tenemos que $[X, Y^{(k-1)}] = 0$ donde $Y^{(k-1)} \in [g, g^{(k-2)}] \subset g$, $\cdots$, $Y^{(k-n)} \in [g, g^{(k-n)}] \subset g$.
   Ahora bien, como h es ideal de g, entonces si $X \in (g/h)^{(k-1)}$, se tiene que, como $(g/h) \subset [g, g^{(k)]} = \{0\} \Rightarrow (g/h)^{(k)} = \{0\}$ y para todo $Y \in (g/h) \subset g$ $[Y,X] = 0$.

   Así, $[(g/h),(g/h)^{(k-1)}] = \{0\}$ y por tanto $(g/h)^{(k)} = \pi(g^{(k)})$ es soluble.

□

Teorema 7. *Sea g un álgebra de Lie y $h \subset g$ un ideal. Supongamos que tanto h como g/h son solubles. Entonces g es soluble.*

Demostración. Sea k_1 tal que $(g/h)^{(k_1)} = \{0\}$. Dada la proyección π definida según, $\pi(g^{(k)}) = (g/h)^{(k)}$, se tiene que $\pi(g^{(k_1)}) = \{0\}$. Esto significa que $g^{(k_1)} \subset h$ pues para un entero positivo k_1, $h^{(k_1)} = \{0\} = \pi(g^{(k_1)})$.
Como h es soluble, existe k_2 tal que $h^{(k_2)} = \{0\}$. De ahí que
$g^{(k_1+k_2)} = ((g^{(k_1)})^{(k_2)}) = \{0\}$. Por lo tanto g es soluble. □

Observemos: Sea g un álgebra de Lie sobre K y sea $\bar{K}$ una extensión de K. Las álgebras derivadas de g como de $g_{\bar{K}}$ son generadas por corchetes sucesivos de elementos de g; las álgebras derivadas de g son obtenidas por combinaciones lineales con coeficientes en K, mientras las de $g_{\bar{K}}$ por combinaciones lineales con coeficientes en $\bar{K}$. De ahí que $(g^{(n)})_{\bar{K}} = (g_{\bar{K}})^{(n)}$ para todo $n \geq 0$. De este razonamiento, obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 8. *g es soluble si y solo si $g_{\bar{K}}$ es soluble.*

Definición 11. *Una álgebra de Lie es nilpotente si su serie central descendente se anula en algún momento, es decir, $g^{(k_0)} = \{0\}$ para algún $k_0 \geq 1$ (y por tanto, $g^{(k)} = 0$ para todo $k \geq k_0$).*

De la misma forma que con las álgebras solubles, las subálgebras y cocientes de álgebras nilpotentes son también nilpotentes.

Teorema 9. *Sea g un álgebra nilpotente.*

1. *Si $h \subset g$ es una subálgebra, entonces (g/h) es nilpotente.*
2. *Si $h \subset g$ es un ideal, entonces (g/h) es nilpotente.*

De hecho, $h^{(k)} \subset g^{(k)}$ si $h \subset g$ y $\pi(g^{(k)}) = (\pi(g))^{(k)}$ si π es un homomorfismo.

Una distinción entre las álgebras solubles y las nilpotentes está dada por el centro de las mismas:

Teorema 10. *El centro de un álgebra de Lie nilpotente no es trivial.*

Demostración. Sea k tal que $g^{(k)} \neq \{0\} \Rightarrow g^{k+1} = 0$. Entonces $g^{(k)} \subset \phi(g)$ pues $[g, g^{(k)}] = \{0\} = g^{(k+1)} = \{0\}$. □

Otra diferencia entre las álgebras nilpotentes y las solubles está en las posibilidades de reconstruir las propiedades de solubilidad a partir de un cociente y del núcleo de ese cociente.
Esto no ocurre con las álgebras nilpotentes: si $h \subset g$ es ideal y ambas h y g/h son nilpotentes, entonces g es soluble mas no necesariamente nilpotente. Por ejemplo el álgebra no abeliana bidimensional con $[X, Y] = Y$.
El subespacio h generado por Y es un ideal y es nilpotente por ser de dimensión 1. Lo mismo ocurre con g/h . Su álgebra no es, sin embargo, nilpotente.
Sean g un álgebra de Lie sobre K y $\bar{K}$ una extensión de K. Como $g_K^{(n)}$ y $g_{\bar{K}}^{(n)}$ son generadas por productos de n elementos de g, vale la igualdad $(g^{(n)})_{\bar{K}} = (g_{\bar{K}})^{(n)}$. De todo esto se concluye el siguiente resultado:

Teorema 11. *g es nilpotente si y solamente si $g_{\bar{K}}$ es nilpotente.*

Si g es un álgebra nilpotente, existe un entero k tal que todos los corchetes que 'envuelven' a k elementos de g se anulan. En particular, $[X, \cdots, [X, Y], \cdots] = 0$ si X aparece $k-1$ veces, esto es $ad(X)^{k-1} = 0$ para todo $X \in g$.
En otras palabras, en las álgebras nilpotentes, las adjuntas de sus elementos son transformaciones lineales nilpotentes, pues si $X \in g$ nilpotente entonces

$$[X, X^{(k-1)}] = [I, X * X^{(k-1)}] = [I, I(X^{(k-2)})] = 0.$$

La recíproca de esta afirmación también es verdadera: Si g es un álgebra de dimensión finita tal que $ad(X)$ es nilpotente para todo $X \in g$, entonces g es nilpotente, ya que si $ad(X)$ es nilpotente, dados $X^*, Y^* \in ad(X)$ y $X, Y \in g$ entonces $[Y^*, X^*] = [X, Y] = 0$. Éste es el contenido del teorema de Engel. A partir de estas observaciones podemos concluir el siguiente teorema:

Teorema 12. *Sean g un álgebra de Lie y $h_1, h_2 \subset g$ ideales solubles (esto es, solubles como álgebras de Lie). Entonces $h_1 + h_2$ también es un ideal.*

Demostración. El hecho de que $h_1 + h_2$ es ideal es consecuencia de que la suma de ideales es un ideal. Por uno de los teoremas fundamentales de isomorfismos, $(h_1 + h_2)/h_2 \simeq h_1/(h_1 \cap h_2)$.
Como h_1 es soluble, $h_1/(h_1 \cap h_2)$ es soluble y de ahí que $(h_1 + h_2)/h_2$ sea soluble. Como h_2 es también soluble, $h_1 + h_2$ es soluble por el teorema 1.6. □

Teorema 13. *Sea g un álgebra de Lie de dimensión finita. Entonces, existe en g un único ideal $r \subset g$ que contiene todos los ideales solubles de g.*

Demostración. Denotemos por n a la máxima de las dimensiones de los ideales solubles de g , y sea r un ideal soluble con $dim(r) = n$. Entonces todo ideal soluble de g está contenido en r. De hecho, si h es un ideal soluble cualquiera, $r + h$ también lo es. Por la maximidad de la dimensión, $dim(r + h) = dim(r)$ y de ahí que $(r + h) \subset r$ y $h \subset r$.
Por tanto, r contiene todos los ideales solubles y él es único. □

Definición 12. *El ideal r del teorema anterior es llamado el radical soluble (o simplemente radical) de g. Para el radical de g será utilizada la notación $r(g)$.*

Ejemplo 12. *El radical de $g = gl(2, \mathbb{R})$ es:*

$$r(g) = \xi = \begin{pmatrix} a & \\ & a \end{pmatrix} \text{ tal que } a \in \mathbb{R}.$$

De hecho, ξ es un ideal abeliano de g y. por tanto, soluble. Además de eso, es el único ideal soluble pues los ideales de $gl(2, \mathbb{R})$ son ξ y $sl(2, \mathbb{R})$ además de los triviales. Para ver eso observemos que $gl(2, \mathbb{R}) = sl(2, \mathbb{R}) \oplus \xi$ y, por tanto, $gl(2, \mathbb{R})/\xi \simeq sl(2, \mathbb{R})$.
Sea ahora h un ideal no trivial de $gl(2, \mathbb{R})$, entonces h/ξ es un ideal de $sl(2, \mathbb{R})$.
Como los únicos ideales de $sl(2\mathbb{R})$ son los triviales, o bien $h = \xi$ o $h \cap sl(2, \mathbb{R})$ es no nulo. En este último caso, h contiene a $sl(2, \mathbb{R})$ y por tanto, debe ser o el propio $sl(2, \mathbb{R})$ o $gl(2, \mathbb{R})$.

Una observación importante en el caso del álgebra $gl(n, \mathbb{R})$ es que, en general, el radical soluble de $gl(n, \mathbb{R})$ es su centro, que a su vez, consiste en los múltiplos de la identidad, es decir, de las matrices escalonadas.

2. Álgebras semisimples

En este capítulo, se inicia la presentación de la teoría de Cartan y Killing de las álgebras semisimples sobre cuerpos algebraicamente cerrados. La esencia de esta teoría consiste en un análisis detallado de la representación adjunta de las subálgebras de Cartan. Toda estructura del álgebra está dada por los corchetes entre los espacios asociados a los pesos (raíces) de esa representación. Esos corchetes, a su vez, dependen de las sumas de las raíces correspondientes y ellas son completamente determinadas por los valores que asume la forma de Cartan-Killing en las raíces.
Como se verá, la forma de Cartan-Killing restricta a un álgebra de Cartan (o mejor, al subespacio racional generado por las raíces) es definida positiva, o sea, es un producto interno. De esa forma, toda estructura de un álgebra semisimple es revelada por las relaciones mutuas entre un número finito de elementos en un espacio vectorial con un producto interno (sistema de raíces) siendo posible, a partir de allí, obtener una clasificación de esas álgebras.

2.1. Definiciones fundamentales

Definición 13. *Un álgebra de Lie g es semisimple si $r(g) = 0$.*
Esto es, g no contiene ideales solubles además de $\{0\}$.

Definición 14. *Un álgebra de Lie g es simple si:*

1. *Los únicos ideales de g son $\{0\}$ y g,*
2. *$dim(g) \neq 1$.*

Se desea llamar simples a las álgebras que no poseen ideales además de los triviales. En este sentido, las álgebras de dimensión 1 no poseen ideales. Ellas son por tanto, consideradas simples, esencialmente par que exista compatibilidad entre los conceptos de álgebras simples y semisimples. Como es inmediato a partir de la definición, las álgebras unidimensionales no son semisimples. Pero las demás álgebras que no poseen ideales propios son semisimples. De hecho, sea g un álgebra que no posea ideales no triviales. Como $r(g)$ es un ideal, entonces debe ser $\{0\}$ o bien g. En el primer caso, g es semisimple como se pretendía. El segundo caso no puede ocurrir si $dim(g) \geq 2$. Eso porque si $r(g) = g$, entonces g es soluble y por tanto, $g' \neq g$.
Como g' también es un ideal, $g' = 0$, es decir, g es abeliana. Mas eso es imposible si $dim(g) \geq 2$, pues todo subespacio de un álgebra abeliana es un ideal. En otras palabras, las álgebras simples son semisimples.
Por otro lado, todo álgebra semisimple es un producto directo de álgebras simples. Ello es consecuencia de uno de los criterios de Cartan (detallados en los anexos).

Ejemplo 13. *$sl(2, \mathbb{R})$ es simple. Para verificar directamente, sean*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Los corchetes entre estos elementos son dados por

$$[H, X] = 2X,\ [H, Y] = -2Y \ \ y \ [X, Y] = H.$$

Tomemos $Z = aX + bH + cY$. *Entonces,* $ad(X)Z = -2bX + cH$, $ad(X)^{(2)} = -2cX$ *de donde se ve que* $Z \neq 0$. *Entonces* Z , $ad(X)Z$ *o* $ad(X)^{(2)}$ *es un múltiplo no nulo de* X. *De esto se concluye que, si* $h \neq \{0\}$ *es ideal no nulo, entonces* $X \in h$. *Como* $H = -[Y, X]$ *e* $Y = 1/2[Y, H]$, $H \in h$ *y de ahí que* $h = sl(2, \mathbb{R})$.

Teorema 14. *Sean* g *un álgebra de Lie que no es soluble y* $h \subset g$ *un ideal soluble. Entonces* g/h *es semisimple si y solo si* $h = r(g)$.

Demostración. Supongamos que $h = r(g)$. Sea $\pi : g \to g/r(g)$ el homomorfismo canónico y tomemos un ideal soluble $i \subset g/r(g)$. Entonces $\pi^{-1}(i)$ es un ideal que contiene a $r(g)$ e $i = \pi^{-1}(i)/r(g)$. De allí que $\pi^{-1}(i)$ sea soluble y, por tanto, está contenido en $r(g)$, esto es, $i = 0$, lo que muestra que $g/r(g)$ es semisimple.
Recíprocamente, si h es ideal soluble, $h \subset r(g)$ y $r(g)/h$ es un ideal soluble de g/h. La hipótesis de que g/h es semisimple implica, entonces, que $r(g)/h = 0$, esto es, $r(g) = h$. $\square$

Este teorema sugiere que un álgebra de Lie arbitraria puede ser descompuesta como la suma de álgebras, una soluble (radical) y la otra semisimple, isomorfa al cociente $g/r(g)$. Una descomposición de este tipo es posible para cocientes de espacios vectoriales de dimensión finita pues todo subespacio admite un subespacio complementario. No siempre es posible, sin embargo, complementar un ideal de un álgebra de Lie con una subálgebra. Para ello, en el caso en que el ideal es el radical de un álgebra de dimensión finita, es posible mostrar la existencia de una subálgebra que la completa.
Esta subálgebra es necesariamente semisimple por ser isomorfa al cociente. Este es el enunciado del teorema de Levi.

2.2. Representación adjunta de $sl(2, \mathbb{R})$

Las álgebras semisimples mas visibles son las álgebras $sl(n)$. Por ello, ellas serán utilizadas para ilustrar los conceptos y resultados sobre álgebras semisimples en general. A lo largo de lo que sigue del capítulo, supondremos que el cuerpo de escalares $\mathbb{K}$ sobre el cual definimos nuestras álgebras de Lie es algebraicamente cerrado y de característica cero.

Uno de los hechos principales sobre álgebras semisimples sobre cuerpos algebraicamente cerrados es que a toda raíz de una representación de una subálgebra de Cartan está asociada una subálgebra de dimensión 3 isomorfa a $sl(2, \mathbb{K})$.
Veamos el porqué de la afirmación:
Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo algebraicamente cerrado y $h \subset g$ una subálgebra de Cartan. Esto es:

1. g es un álgebra de Lie.
2. h es nilpotente.
3. El normalizador de h en g coincide con h. Lo que es equivalente al hecho de que si $[X, h] \subset h \Rightarrow X \in h$.

Hagamos ahora un análisis completo de las representaciones del álgebra $sl(2, \mathbb{K})$ que será denotada solamente por $sl(2)$.
Una base de este álgebra es $\{X, H, Y\}$, donde:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En efecto, si $A \in sl(2)$ entonces $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $a + d = 0$, luego obtenemos que

$$A = bX + cY + aH \ ; \ d = -a.$$

Los corchetes entre los elementos de la base son:

$$[H, X] = 2X \ ; \ [H, Y] = -2Y \ ; \ [X, Y] = H$$

pues, recordemos que $[A, B] = AB - BA$ para todo $A, B \in sl(2)$.
Notemos que $sl(2)$ es simple, lo que significa, por definición, que:

1. Los únicos ideales de $sl(2)$ son 0 y $sl(2)$.
2. $dim(sl(2)) \neq 1$. Para ver esto, tomemos $Z = aX + bH + cY$. Entonces $ad(X)Z = -2bX + cH \ ; \ ad(X)^2 Z = -2cX$. De dónde se ve que si $Z \neq 0$, entonces Z , $ad(Z)$ *o* $ad(X)^2 Z$ es un múltiplo no nulo de X. Se concluye entonces que si $h \neq \{0\}$ es un ideal no nulo, entonces $X \in h$. Como $H = -[Y, X]$ e $Y = 1/2[Y, H]$, $Y, H \in h$ y así $h = sl(2)$.

Apelando al teorema de Weyl, que afirma que dado g un álgebra de Lie semisimple de dimensión finita y ρ una representación de dimensión finita de g en V. Entonces ρ es completamente reducible, esto es, V se descompone como $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$, con cada V_i invariante e irreducible, entonces podemos reconstruir sus representaciones de dimensión finita a partir de aquellas que son irreducibles.

Luego, como $sl(2)$ es simple, $dim(sl(2)) = 3 \neq 1$ y sus únicos ideales son $\{0\}$ y $sl(2)$. Notemos que $r(sl(2)) \neq sl(2)$, pues para todo elemento de la base $\{X, H, Y\}$, el corchete de Lie no se anula en ningún momento y por tanto, el único ideal soluble de $sl(2)$ es $\{0\}$. Esto es, $r(sl(2)) = \{0\}$ y por tanto $sl(2)$ es semisimple. Luego si ρ es una representación de dimensión finita de $sl(2)$ en V, por el teorema de Weyl, $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ (con cada V_i invariante e irreducible). Este hecho nos indica que su representación en V se construye a partir de la suma directa de todas las representaciones V_i que son irreducibles.

Sea entonces ρ una representación irreducible de dimensión finita de $sl(2)$ en V. Esto quiere decir que $\rho : \ sl(2) \to \ V$, definida según $v \in V \mapsto \rho(H)v$.
Que sea de dimensión finita significa que $\rho : \ sl(2) \to \ V = (V_1 \oplus \cdots \oplus V_k)$. En particular, notemos que si $v \in V$, entonces $v = \alpha\rho(X) \ + \beta\rho(H) \ + \gamma\rho(Y)$.
Si definimos a ρ como la representación adjunta $ad(A) : \ sl(2) \to \ V$, entonces:

$$\begin{aligned} \rho(H)\rho(X)v &= ad(H)ad(X)v = [H \ , \ ad(X)]v \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v \ - & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v \\ &= ad(-X)v + ad(-X)v = -2ad(X)v. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que $v \in V$ es un autovector de $\rho(H)$ asociado al autovalor λ. Entonces,

$$\rho(H)\rho(X)v = \rho[H,X]v + \rho(X)\rho(H)v = 2\rho(X)v + \rho(X)\rho(H)v = (2+\rho(H))\rho(X)v$$

y como $\rho(H)v = \lambda v$ obtenemos finalmente la igualdad: $\rho(H)\rho(X)v = (2+\lambda)\rho(X)v$.
De manera simétrica, si $\rho(Y)v$ es no nula, es un autovector de $\rho(H)$ pero asociado al autovalor $\lambda - 2$, esto se ve ya que:

$$\begin{aligned}\rho(H)\rho(Y)v &= \rho[H,Y]v + \rho(Y)\rho(H)v \\ &= -2\rho(Y)v + \rho(Y)\rho(X)v \\ &= (\rho(H)-2)\rho(Y)v = (\lambda-2)\rho(Y)v.\end{aligned}$$

A partir de allí se obtiene por inducción sobre el valor de la derivación de $\rho(X)$ y de $\rho(Y)$, respectivamente, que

$$\begin{aligned}\rho(H)\rho(X)^k v &= (\lambda+2k)\rho(X)^k v \\ \rho(h)\rho(Y)^k v &= (\lambda-2k)\rho(Y)^k v.\end{aligned}$$

Por tanto, las iteraciones de las acciones de $\rho(X)$ dan origen a autovectores de $\rho(H)$ asociados a autovalores en orden creciente, lo mismo ocurre con $\rho(Y)$, pero con autovectores asociados a autovalores en orden decreciente.
Es de esa observación que se llega a la siguiente caracterización de las representaciones de $sl(2)$.

Teorema 15. *Sea ρ una representación irreducible de $sl(2)$ en V con $dim(V) = n+1$. Entonces, existe una base $\{v_0, v_1, \cdots, v_n\}$ de V tal que, para $i = 0, 1, \cdots, n$,*

1. $\rho(X)v_i = i(n-i+1)v_{i-1}$.
2. $\rho(H)v_i = (n-2i)v_i$.
3. $\rho(Y)v_i = v_{i+1}$.

donde $v_{-1} = v_{n+1} = 0$.

La demostración de este teorema se basará en los dos lemas siguientes que servirán como una base para demostrar el reciente enunciado.

Lema 1. *Sea $A: V \to V$ una transformación lineal y sean $\{v_0, v_1, \cdots, v_n\}$ vectores no nulos en V tales que $Av_0 = \lambda_0 v_0, \cdots, Av_n = \lambda_n v_n$, diferentes dos a dos.*

Demostración. Procedemos por inducción sobre el índice $i = 0, \cdots, n$.
El caso base se cumple pues si solo existe un único autovalor asociado a su respectivo autovector, $Av_0 = \lambda v_0$, como es único, es linealmente independiente. Ahora bien, supongamos que esto se cumple para $n-1$ autovectores (y sus respectivos $n-1$ autovalores) y mostremos que se cumplirá para n. Dada la combinación lineal nula $\alpha_0 v_0 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$; $Av_i = \lambda_i v_i$, entonces $\lambda_0\alpha_0 v_0 + \cdots + \lambda_n \alpha_n v_n = 0$. Multiplicando nuestra primera ecuación por λ_n y restándola de la segunda obtenemos que

$$(\lambda_0 - \lambda_n)\alpha_0 v_0 + \cdots + (\lambda_n - \lambda_n)\alpha_n v_n = 0 \Rightarrow (\lambda_0 - \lambda_n)\alpha_0 v_0 + \cdots + (\lambda_{n-1} - \lambda_n)\alpha_{n-1} v_{n-1} = 0.$$

Por la hipótesis de inducción, los vectores $v_0, \cdots, v_{n-1}$ son linealmente independientes, entonces $(\lambda_0 - \lambda_n)\alpha_0 = \cdots = (\lambda_{n-1} - \lambda_n)\alpha_{n-1} = 0$.
Como los autovalores son todos diferentes, los n paréntesis son distintos de 0, así $\alpha_0 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$, lo que reemplazando en la primera ecuación nos da $\alpha_n v_n = 0$ y como

$v_n \neq 0$ se concluye que $\alpha_n = 0$. Y la igualdad solo ocurre cuando todos los coeficientes α_i son nulos. $\square$

Lema 2. *Dada $dim(V) = n$. Si un operador lineal $A : V \to V$ tiene n autovalores diferentes, entonces existe una base $\{v_1 \cdots, v_n\} \subset V$ en relación a la cual la matriz de A es diagonal.*

Demostración. Si $Av_1 = \lambda_1 v_1, \cdots, Av_n = \lambda_n v_n$ con los v_i no nulos y los λ_i distintos dos a dos, entonces $\{v_1 \cdots, v_n\}$, por lo mostrado anteriormente, es una base de V. La matriz A en esta base es $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$, donde los términos que no aparecen son iguales a 0. $\square$

Retomamos ahora la demostración del teorema 14:

Demostración. Dado que $dim(V)$ es finita, podemos usar el principio del palomar y el teorema de descomposición primaria del álgebra lineal para afirmar que existirá un $i_0 \geq 1$ tal que $\rho(X)^{i_0} v = 0$ y $\rho(X)^{i_0 - 1} \neq 0$. Tomando i_0 de esa forma, sea $v_0 = \rho(X)^{i_0-1} v$. Entonces v_0 es un autovector de $\rho(H)$ pues v_0 es obtenido de un autovector de $\rho(H)$ por aplicaciones sucesivas de $\rho(X)$.
Esto debido a que $\rho(H)\rho(X)^{i_0} v = \rho(H)\rho(X)^{i_0-1}\rho(X)v$.
El autovalor asociado será denotado por λ_0. Fijando v_0, definimos, para $i \geq 1$, $v_i = \rho(Y)^i v_0$. Sea k el primer entero tal que $v_{k+1} = 0$. La existencia de k se debe a que V es de dimensión finita. Por tanto, en una $k+1$ de las sucesivas aplicaciones de $\rho(Y)$ se tendrá necesariamente que $v_{k+1} = \rho(H)\rho(X)^{i_0} v = 0$.
El conjunto $\{v_0, \cdots, v_k\}$ es linealmente independiente pues $\rho(H)v_i = (\lambda_0 - 2i)v_i$ y por tanto, es un conjunto de autovectores de $\rho(H)$ asociados a autovectores diferentes, demostrado justamente en el último lema. Veamos en detalle esta parte:
Como $\rho(H)v_i = (\lambda_0 - 2i)v_0$, con $v_0 = \rho(X)^{i_0-1} v$; $i \in \{0, 1, \cdots, k\}$ y para todo $i \in \{0, 1, \cdots, k\}$ $v_i \neq 0$, entonces $\{v_0, v_1, \cdots, v_k\}$ es, en efecto, linealmente independiente.
Así, como no es posible expresar ningún v_i como combinación lineal de los otros vectores de la base, los autovalores $(\lambda_0 - 2i)$ serán todos distintos y los v_i estarán todos asociados a autovalores distintos.
La acción de $\rho(X)$ en estos vectores está dada por: $\rho(X)v_i = i(\lambda_0 - i + 1)v_{i-1}$.
Esta igualdad se sigue por inducción sobre i:
Para $i = 0$, $\rho(X)v_0 = 0$, por la definición de $v_0 = \rho(X)^{i_0-1} v$; el segundo miembro de nuestra ecuación se anula. Para $i \geq 1$, $\rho(X)v_i = \rho(x)\rho(Y)v_{i-1}$ justamente por la definición de $v_i = \rho(Y)^i v_0$; luego, aplicando la identidad de Jacobi obtenemos:

$$\rho(X)v_i = \rho[X, Y]v_{i-1} + \rho(Y)\rho(X)v_{i-1} \qquad (1)$$

Mas por definición, $[X, Y] = H$. Por tanto,

$$\rho[X, Y]v_{i-1} = \rho(H)v_{i-1}\rho(Y)^{i-1}v_0 = (\lambda_0 - 2(i-1))\rho(Y)^{i-1}v_0 = (\lambda_0 - 2(i-1))v_{i-1}.$$

Así obtenemos que

$$\rho[X, Y]v_{i-1} = (\lambda_o - 2(i-1))v_{i-1} \qquad (2)$$

Por otra parte, analicemos $\rho(Y)\rho(X)v_{i-1}$:
Tenemos, como hipótesis de inducción:

$$\rho(X)v_{i-1} = (i-1)(\lambda_0 - (i-1) + 1)v_{i-2} = (i-1)(\lambda_0 - i + 2)v_{i-2}.$$

Luego, $\rho(Y)\rho(X)v_{i-1} = \rho(Y)(i-1)(\lambda_0 - i + 2)v_{i-2} = (i-1)(\lambda_0 - i + 2)\rho(Y)v_{i-2}$.
Ya que $\rho(Y)v_{i-2} = \rho(Y)\rho(Y)^{i-2}v_0 = \rho(Y)^{i-1}v_0 = v_{i-1}$. Obtenemos:

$$\rho(Y)\rho(X)v_{i-1} = (i-1)(\lambda_0 - i + 2)v_{i-1} \qquad (3)$$

Así, reemplazando (2) y (3) en (1) obtenemos:

$$\begin{aligned}\rho(X)v_i &= (\lambda_0 - 2(i-1))v_{i-1} + (i-1)(\lambda_0 - i + 2)v_{i-1}\\ &= \{(\lambda_0 - 2(i-1)) + (i-1)(\lambda_0 - i + 2)\}v_{i-1}\\ &= \{i(\lambda_0 - i + 2) - i\}v_{i-1} = i(\lambda_0 - i + (2-1))v_{i-1}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\rho(X)v_i = i(\lambda_0 - i + 1)v_{i-1}$. Que es la representación para $\rho(X)$ dada en el teorema 14.
Esta igualdad muestra que el espacio generado por $\{v_0, \cdots, v_k\}$ es invariante por $\rho(X)$, pues $\rho(X)v_i = i(\lambda_0 - i + 1)v_{i-1}$; λ_0 es un autovalor que pertenece a $\mathbb{R}$ y también se tiene que $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces todo vector v_i pertenecerá al espacio generado por $\{v_0, \cdots, v_k\}$ al aplicarle $\rho(X)$.
También el espacio generado por $\{v_0, \cdots, v_k\}$ es invariante por $\rho(H)$ y por $\rho(Y)$ ya que, primero para todo $v_i \in \{v_0, \cdots, v_k\}$; $\rho(Y)v_i = v_{i+1} \in \; gen\{v_0, \cdots, v_k\}$.
Y también $\rho(H)v_i = (\lambda_0 - 2i)v_i \in \; gen\{v_0, \cdots, v_k\}$. Por lo tanto, $gen\{v_0, \cdots, v_k\}$ coincide con V ya que la representación es irreducible (pues los espacios invariantes por $\rho(X)$, $\rho(Y)$, $\rho(H)$ serán solamente $\{0\}$ y $\{v_0, \cdots, v_k\}$).
De aquí se concluye que $k = n$ y entonces, para finalizar la demostración del teorema, es suficiente mostrar que $\lambda_0 = n$. Esto último pues hasta ahora se ha mostrado que $\rho(X)$, $\rho(Y)$, $\rho(H)$ satisfacen las ecuaciones enunciadas en el teorema, pero con el autovalor λ_0.
Para lograr este cometido, recordemos que, por cómo está definida, tenemos:

$$\rho(H)v_n = (\lambda_0 - 2n)v_n \qquad (4)$$

Y por otra parte,

$$\begin{aligned}\rho(H)v_n \quad &= \rho[X,Y]v_n = \rho(X)\rho(Y)v_n - \rho(Y)\rho(X)v_n\\ &= \rho(X)v_{n+1} - \rho(Y)(n(\lambda_0 - n + 1))v_{n-1}\\ &= \rho(X)0 - (n(\lambda_0 - n + 1))v_{n-1}\\ &= -(n(\lambda_0 - n + 1))v_n \qquad (5)\end{aligned}$$

Igualando (4) y (5) obtenemos que:

$$\begin{aligned}(\lambda_0 - 2n)v_n &= -(n(\lambda_0 - n + 1))v_n\\ \lambda_0 - 2n &= -n(\lambda_0 - n) - n\\ (n+1)\lambda_0 - n(n+1) &= 0\\ (n+1)\lambda_0 - n &= n \qquad \text{con } n \neq 0.\end{aligned}$$

Así, $\lambda_0 - n = 0 \Rightarrow \lambda_0 = n$. Lo que concluye la demostración del teorema 14. $\square$

Sobre este teorema valen las siguientes observaciones:

1. En la demostración, la hipótesis de que el cuerpo de escalares es algebraicamente cerrado fue usada para garantizar la existencia de autovectores de $\rho(H)$. De esa forma, es suficiente que ello ocurra para que la representación sea como en el enunciado.

2. Conviene resaltar la forma de la matriz $\rho(H)$ en relación a la base $\{v_0, \cdots, v_n\}$ que aparece en el teorema. Ella es diagonal, sus autovalores son enteros, al ser n un entero, y forman una progresión aritmética de razón -2. El mayor autovalor es $n = dim(V) - 1$ y el menor de ellos es $-n$, y todos ellos tienen la misma paridad. Por tanto la dimensión de la representación proporciona los autovalores de $\rho(H)$ y, recíprocamente, los autovalores de $\rho(H)$ determinan la dimensión de la representación irreducible. El hecho de que los autovalores de $\rho(H)$ sean enteros dará un carácter aritmético' a las álgebras semisimples, en el sentido de que muchas de sus propiedades serán descritas en términos de subespacios, bases y demás, sobre el cuerpo de los racionales y no sobre el cuerpo de origen.

A partir del anterior teorema, es posible obtener la siguiente clasificación de las representaciones irreducibles de $sl(2)$.

Teorema 16. *Para cada $n \geq 0$ existe una única representación irreducible (salvo isomorfismo) de dimensión $n+1$ de $sl(2)$ de dimensión finita.*

Demostración. Dado un espacio vectorial V de dimensión $n+1$, sea $\{v_0, \cdots, v_n\}$ una base de V. Definimos $\rho(X)$, $\rho(H)$, $\rho(Y)$ como:

1. $\rho(X)v_i = i(n + i - 1)v_{i-1}$,

2. $\rho(H)v_i = (n - 2i)v_i$,

3. $\rho(Y)v_i = v_{i+1}$.

donde, $v_{n+1} = v_{-1} = 0$.
Entonces ρ es una representación de $sl(2)$ en V. Para ver esto, es suficiente verificar que la relación entre los corchetes es satisfecha cuando ellos son evaluados en los elementos de la base de V, ya que al ser ρ una representación de $sl(2)$, si la relación entre los corchetes se satisface para los elementos de la base y $A \in sl(2)$, entonces $\rho(A)$ será una representación de A independientemente del vector que asigne a A en V.
Veamos esto con las tres representaciones definidas:

1. $\rho(H)v_i = \rho(H)\rho(Y)v_i = \rho[H, Y]v_i = -2\rho(Y)v_i = -2v_{i+1}$. Por otra parte, $[\rho(H), \rho(Y)]v_i = (\rho(H)\rho(Y) - \rho(Y)\rho(H))v_i = \rho(H)v_{i+1} - \rho(Y)(n - 2i)v_i$ $= (n - 2(i + 1) + 1)v_{i+1} - (n - 2i)v_i = -2v_{i+1}$.
   Así, obtenemos que $\rho[H, Y]v_i = [\rho(H), \rho(Y)]v_i = -2v_{i+1}$.

2. $\rho(X)v_i = \rho(X)\rho(Y)v_i = \rho[X, Y]v_i = \rho(H)v_i = (n - 2i)v_i$; se sigue luego la igualdad $[\rho(X), \rho(Y)]v_i = (\rho(X)\rho(Y) - \rho(Y)\rho(X))v_i = \rho(X)v_{i+1} - i(n + i - 1)\rho(Y)v_{i-1}$
   $= (i + 1)(n + (i + 1) - 1)v_i - i(n + i - 1)v_i$
   $= i(n + i - 1)v_i + iv_i + (n + i)v_i - i(n + i - 1)v_i$
   $= (n - 2i)v_i$.
   Y en este segundo caso obtenemos $\rho[X, Y]v_i = [\rho(X), \rho(Y)]v_i = (n - 2i)v_i$.

3. $\rho(H)\rho(X)v_i = \rho[H,X]v_i = 2\rho(X)v_i = 2i(n+i-1)v_{i-1}$
   Por otra parte:
   $[\rho(H),\rho(X)]v_i = (\rho(H)\rho(X) - \rho(X)\rho(H))v_i$
   $= \ i(n+i-1)\rho(H)v_{i-1} - (n-2i)\rho(X)v_i$
   $= \ i(n+i-1)(n-2(i-1))v_{i-1} - (n-2i)i(n+i-1)v_{i-1}$
   $= \ 2i(n+i-1)v_{i-1}.$
   Por tanto, $\rho[H,X]v_i = [\rho(H),\rho(X)]v_i = 2i(n+i-1)v_{i-1}$.

Así, de las representaciones para $\{X,H,Y\}$ mostradas en 1, 2 y 3 se ve que ρ es una representación de $sl(2)$ en V.
El hecho de que ρ sea irreducible viene de que los subespacios invariantes son, en particular, invariantes por $\rho(H)$ (mostrado, justamente en el anterior teorema). Así, si $W \subset V$ es un subespacio de V, como $\rho(H)W \subset W$ será invariante bajo $\rho(H)$, mas, notemos que tanto $\rho(X)W$ como $\rho(Y)W$ no estarán contenidos en Wpor lo que W no sera invariante bajo ρ. Así los únicos subespacios invariantes de V bajo ρ son $\{0\}$ y V, lo que significa justamente que ρ es irreducible. En detalle, esta ultima afirmación viene de la forma en que están definidas $\rho(X)$, $\rho(Y)$.
Dado $v \in W \subset V$ entonces $\rho(X)v \notin W$ e igualmente $\rho(Y)v \notin W$.
Esto muestra la existencia de representaciones irreducibles de dimensión $n+1$, por ser invariantes respecto a ρ y generadas por $\{v_0,\cdots,v_n\}$, base de V con $n+1$ elementos.
Por último, la unicidad es obtenida definiendo el isomorfismo entre dos representaciones irreducibles de la misma dimensión por la transformación lineal que hace corresponder entre sí las bases cuya existencia es garantizada por el teorema 1.
Veamos en detalle esta última parte:
Sean $\{v_0,\cdots v_n\}$ y $\{u_0,\cdots,v_n\}$ bases del espacio vectorial V de dimensión $n+1$, con representaciones respectivas ρ_1 y ρ_2. Esto quiere decir que

$$\begin{gathered}\rho_1(X)v_i = i(n+i-1)v_{i-1};\ \ \rho_2(X)u_i = i(n+i-1)u_{i-1}\\ \rho_1(H)v_i = (n-2i)v_i;\ \ \rho_2(H)u_i = (n-2i)u_i\\ \rho_1(Y)v_i = v_{i+1};\ \ \rho_2(Y)u_i = u_{i+1}.\end{gathered}$$

Donde, recordemos que $v_{n+1} = v_{-1} = 0$ y $u_{n+1} = u_{-1} = 0$.
Definimos ahora el isomorfismo lineal $P:\ \{v_0,\cdots,v_n\} \to \{u_0,\cdots,v_n\}$, tal que $\rho_2(A)\circ P = P\circ\rho_1(A)$
con $A \in gen\{X,H,Y\}$.
Entonces $P:\ \{v_0,\cdots,v_n\} \to \{u_0,\cdots,v_n\}$ está dado por v_i de la forma: $v_i \mapsto P(v_i) = u_i$.
Por tanto ρ_1 y ρ_2 son, efectivamente, equivalentes. □

2.3. Subálgebras de Cartan

2.3.1. Introducción

Definición 15. *Sea g un álgebra de Lie semisimple sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, h es una subálgebra de Cartan de g si:*

1. *h es nilpotente, es decir, su serie central descendente se anula en algún momento: Es decir, existe k_0 : $h^{(k_0)} = \{0\}$; $h^{(k)} = \{0\}$ para todo $k \geq k_0$.*

2. *El normalizador $N(h)$ de h en g coincide con h. Esta condición significa que: $N(h) = \{X \in g \ : \ [X,h] = [h,X]\}$. Equivalentemente, si $[X,h] \in h \rightarrow \ X \in h$.*

Definición 16. *La forma de Cartan-Killing del álgebra de Lie g se define de la siguiente forma. Dada una representación ρ de dimensión finita de g, definimos primero el trazo β_ρ que es la forma bilineal simétrica dada por $\beta_\rho(X,Y) = tr(\rho(X)\rho(Y))$.*
Definimos entonces a β_ρ como la forma de Cartan-Killing de g y la denotaremos más simplemente como $\langle \ , \ \rangle$ o bien $\langle \ , \ \rangle_g$ cuando sea necesario especificar sobre qué álgebra está definida.

2.3.2. Raíces o pesos de una representación

Definición 17. *Sea $\mathbb{K}$ el cuerpo de escalares, algebraicamente cerrado, sobre el cual está definida el álgebra de Lie g y tomemos una representación ρ de g en el espacio vectorial V, con $dim(V) < +\infty$ y g nilpotente. Entonces, los funcionales lineales $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ tales que:*

1. $V_{\lambda_i} = \{v \in V \ : \ (\forall \ X \in g) \ (\exists \ n \geq 1)(\rho(X) - \lambda_i(X))^n v = 0\}$ *con* $i = 1, \cdots, s$.
2. $V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$.

Son denominados pesos o raíces de la representación.

Teorema 17. *Sea g un álgebra semisimple. Entonces g se descompone en una suma directa $g = g_1 \oplus \cdots \oplus g_s$; con los g_i ideales simples. En esta descomposición, $[g_i, g_j] = 0$ si $i \neq j$.*

Demostración. Se mostrará que g se descompone es suma de ideales primero, suponiendo que estos ya son simples. Sea pues, g un álgebra de Lie semisimple que se descompone como suma directa de dos ideales: $g = h_1 \oplus h_2$.
Entonces, el complemento ortogonal de uno de los ideales es el otro, esto pues g está definida en un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con descomposición en suma directa de h_1 y h_2. De hecho, $h_1^\perp$ complementa a h_1 y como $g = h_1 \oplus h_1^\perp$, entonces $h_1^\perp$ y h_2 tienen la misma dimensión.
Por otro lado, los ideales son ortogonales a la forma de Cartan-Killing. Como el cuerpo $\mathbb{K}$ es algebraicamente cerrado, la representación de h dentro de cada g_i es dada por matrices de la forma:

$$ad(H) = \begin{pmatrix} \alpha_i(H) & * & \cdots & * \\ & & & \\ & & \cdots & \alpha_i(H) \end{pmatrix}.$$

Además, $[g_{\alpha_i}, g_{\alpha_j}] \subset g_{\alpha_i} + g_{\alpha_j}$. □

Esta estructura es mostrada por los resultados a seguir:

Lema 3. *Sean α, β dos raíces de h. Si $X \in g_\alpha$ e $Y \in g_\beta$, entonces $\langle X, Y\rangle = 0$, a menos que $\beta = -\alpha$.*

Demostración. Recordemos que dada una raíz λ, g_λ está definida según

$$g_\lambda = \{v \in V \ : \ \forall \ X \in g \ , \ \exists \ n \geq 1 \ ; \ (\rho(X) - \lambda(X))^n v = 0\}.$$

Además, la forma de Cartan-Killing en g dados los elementos X, Y, estará definida como $\langle x, y\rangle = tr(\rho(X)\rho(Y))$. Recordemos además que $[g_\alpha, g_\beta] \subset g_\alpha + g_\beta$. Donde α es la raíz correspondiente a $\rho(X)$ y β la raíz correspondiente a $\rho(Y)$.
Sea ahora $Z \in g_\gamma$. Entonces $\rho(X)Z = ad(X)Z \in g_{\alpha+\gamma}$ y obtenemos,

$$\rho(Y)\rho(X)Z = ad(Y)ad(X)Z \in g_{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Entonces, ningún elemento de la base que tenga a $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ como raíces respectivas contribuye para el trazo de $ad(X)ad(Y)$, salvo si $\alpha + \beta = 0$. □

Por el teorema anterior, podemos afirmar que, dada g semisimple y h una subálgebra de Cartan de g, entonces $g = h \oplus g_{\alpha_1} \oplus \cdots g_{\alpha_k}$, con $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ los pesos (raíces) no nulos de la representación adjunta de h en g.
El hecho de que h sea nilpotente garantiza que sus representaciones en g, vía la representación adjunta se descompone en $g = \oplus g_i$ con λ_i los pesos de la representación. El funcional nulo es siempre un peso de esta representación pues la representación adjunta de h en sí misma es nilpotente. Además, g_0 es una subálgebra y $h \subset g_0$. La segunda condición en la definición de una álgebra de Cartan garantiza que $h = g_0$.

Corolario 1. *1. La restricción de $\langle \ , \ \rangle$ a h es no degenerada.*

2. Si α es una raíz, entonces $-\alpha$ también es raíz.

3. Para todo $X \in g_\alpha$ existe $Y \in g_{-\alpha}$ tal que $\langle X, Y\rangle \neq 0$.

Demostración. 1. Sea $H \in h$. Como $\langle \ , \ \rangle$ es no degenerada, existe $X \in g$ tal que $\langle H, X\rangle \neq 0$. Luego, escribiendo $X = H_1 + X_1 + \cdots + X_k$ con $H_1 \in h \ ; \ X_i \in g_{\alpha_i}$, pues $X \in g$ que justamente se descompone como suma directa de H y subespacios de raíces g_{α_i}, por el lema anterior, $\langle H, X_i\rangle = 0$ y como $H_1, H \in h$, entonces, $\langle H, H_1\rangle \neq 0$. Así la restricción es no degenerada.

2. Sea $X \in g_\alpha$. La existencia de $Y \in g$ tal que $\langle X, Y\rangle \neq 0$ viene de lo mostrado en el anterior punto. Por el último lema, como una descomposición de g en espacios de raíces g_α, g_β con $\alpha + \beta = 0$ contribuiría al trazo de $ad(X)ad(Y)$ con elementos de la base tomada, se tiene que $\beta = -\alpha$ tal que $\alpha + \beta = 0$ es una raíz de h en g.

3. Si $\langle X, Y\rangle = 0$ para todo $Y \in g_{-\alpha}$ entonces por el lema 3, α , $-\alpha$ son dos raíces de h en g tales que $g = h \oplus g_\alpha \oplus g_{-\alpha}$.
Tomemos $Z \in g$ cualquiera, que podamos escribir de la forma $Z = H_1 + Z_\alpha + Z_{-\alpha}$.
Como $X = 0 + X + 0$, pues $X \in g_\alpha$, entonces $\langle X, Z\rangle = \langle X, H_1 + Z_\alpha + Z_{-\alpha}\rangle$
$= \langle X, H_1\rangle + \langle X, Z_\alpha\rangle + \langle X, Z_{-\alpha}\rangle = 0$.
Por tanto $\langle X, Z\rangle = 0$ para todo $Z \in g$ lo que contradice el hecho de que la forma de Cartan-Killing es no degenerada.

□

Proposición 1. *Para todo $H \in h$ y toda raíz α, $ad(H)|_{g_\alpha} = \alpha(H)Id$ y las transformaciones lineales $ad(H), H \in h$ son simultáneamente diagonalizables.*

Demostración. Vimos anteriormente que la restricción de $ad(H)$ a un subespacio de raíces es de la forma:

$$ad(H)|_{g_\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1(H) & * & \cdots & * \\ & \alpha_2(H) & \cdots & * \\ & & & \\ & & \cdots & \alpha_k(H) \end{pmatrix}.$$

Sea ahora la descomposición de H como $H = H_S + H_N$, donde $ad(H_S)$ es semisimple y $ad(H_N)$ nilpotente y con $H,\ H_S,\ H_N$ conmutando dos a dos (esto es: $[H, H_S] = H_S, H$; $[H, H_N] = [H_N, H]$; $[H_S, H_N] = [H_N, H_S]$). Entonces $ad(H_S)$ es en efecto la parte diagonal de $ad(H)$. □

A partir de estos últimos enunciados, podemos establecer como consecuencia un lema de las álgebras semisimples que resume varias de sus propiedades características.

Lema 4. *1. Si $X \in g_\alpha$ e $Y \in g_{-\alpha}$ entonces, $[X, Y] = \langle X, Y\rangle H_\alpha$.*

2. *Para todo $X \in g_\alpha$, existe $Y \in g_{-\alpha}$ tal que $[X, Y] = H_\alpha$.*
3. *Sean α, β raíces. Entonces $\langle \beta, \alpha\rangle = q_{\beta\alpha}\langle\alpha, \alpha\rangle$, con $q_{\beta\alpha} \in \mathbb{Q}$*
4. *Para toda raíz α, $\langle\alpha, \alpha\rangle$ es un racional estrictamente positivo. Por tanto, $\langle\alpha, \beta\rangle \in \mathbb{Q}$ para todas α, β raíces.*
5. *$dim(g_\alpha) = 1$ para toda raíz α.*
6. *Los únicos múltiplos enteros de una raíz α que son raíces son α y $-\alpha$.*

Demostración. 1. Del Corolario 1, como α es una raíz por hipótesis, entonces $-\alpha$ también lo será y, dado que $[g_{\alpha_i}, g_{\alpha_j}] \subset g_{\alpha_i+\alpha_j}$, tenemos que si

$$X \in g_\alpha \ \wedge \ Y \in g - \alpha \ \Rightarrow \ [X, Y] \in g_{\alpha-\alpha} = g_0 = h.$$

Sea entonces $H \in h$ cualquiera y veamos la forma de Cartan-Killing de H y $[X, Y]$: $\langle H, [X, Y]\rangle = \langle[H, X], Y\rangle = \alpha(H)\langle X, Y\rangle = \langle X, Y\rangle\alpha(H) = \langle X, Y\rangle\langle H, H_\alpha\rangle = \langle H, \langle X, Y\rangle H_\alpha\rangle$.
Como $\langle\ ,\ \rangle$ es no degenerada y tomando a $H \in h$ arbitrario, entonces de $\langle H, [X, Y]\rangle = \langle H, \langle X, Y\rangle H_\alpha\rangle$ tenemos que $[X, Y] = \langle X, Y\rangle H_\alpha$.

2. Como $[X, Y] = \langle\ ,\ \rangle H_\alpha$, tenemos por demostrar que existe $X \in g_\alpha$; $Y \in g_{-\alpha}$ tal que $\langle X, Y\rangle = 1$.
Definimos entonces a Y como $Y = \frac{1}{\langle X,Y'\rangle}Y$ con $Y' \in g_{-\alpha}$ y $\langle X, Y'\rangle \neq 0$, pues la forma de Cartan-Killing es no degenerada por definición.
Luego, por construcción tendríamos que

$$\langle X, Y\rangle = \left\langle X, \frac{Y'}{\langle X,Y'\rangle}\right\rangle = \frac{1}{\langle X,Y'\rangle}\langle X, Y'\rangle.$$

De esta forma obtenemos que $\langle X, Y\rangle = 1$ y por tanto $[X, Y] = H_\alpha$.

3. Como el número de raíces de la representación ad de h en g es finito, entonces la descomposición de g es también una suma directa finita de subespacios de raíces finita. Sea entonces V definido como

$$g \supseteq V = g_0 \oplus g_1 \oplus \cdots \oplus g_{\beta-2\alpha} \oplus g_{\beta-\alpha} \oplus g_\beta \oplus g_{\beta+\alpha} \oplus \cdots g_k$$

donde $g_0 = h$, $g_{\beta+k\alpha} = 0$. Si $\beta + k\alpha$ no es una raíz y $g_{\beta+k\alpha} = h$ si $\beta + k\alpha = 0$.
Tomemos ahora $X \in g_\alpha$ e $Y \in g_{-\alpha}$ tales que $[X, Y] = H_\alpha$ (vale observar en este punto que la existencia de X, Y esta garantizada justamente por lo demostrado anteriormente en el punto 2). Por la definición de V tenemos que $ad(X)V \subset V$ y $ad(Y)V \subset V$, pues $ad(X) : g \to g$ y de similar forma $ad(Y) : g \to g$.
Luego, como $H_\alpha = [X, Y]$, su representación adjunta restringida al subespacio V estará dada según:

$$ad(H_\alpha|_V = ad([X, Y])|_V = [ad(X), ad(Y)]|_V = [ad(X)|_V, ad(Y)|_V].$$

Analicemos ahora el trazo de la representación adjunta,

$$\begin{aligned} tr(ad(H_\alpha|_V)) &= \textstyle\sum_i \ tr([ad(X_i), ad(Y_i)]|_V)H_\alpha \\ &= \textstyle\sum_i \ tr((ad(X_i)|_V ad(Y_i)|_V)H_\alpha - (ad(Y_i)|_V ad(X_i)|_V)H_\alpha) \\ &= \textstyle\sum_i \ tr((ad(X_i)|_V H_\alpha ad(Y_i)|_V) - (ad(Y_i)|_V ad(X_i)|_V H_\alpha)) \\ &= \textstyle\sum_i \ tr(ad(Y_i)|_V [H_\alpha, ad(X_i|_V)]) \\ &= \textstyle\sum_i \ tr(ad(Y_i)|_V \ ad(H_\alpha X_i)|_V) \\ &= \textstyle\sum_i \ d_i(\beta + i\alpha)(H_\alpha); \end{aligned}$$

donde $0 < d_i = dim(g_{\beta+i\alpha})$; $i \in \mathbb{Z}$ y con $g_{\beta+i\alpha} \subset V$.
Prosiguiendo, tenemos

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_i \ d_i(\beta + i\alpha)(H_\alpha) &= \textstyle\sum_i \ d_i(\langle\beta, \alpha\rangle + i\langle\alpha, \alpha\rangle) \\ &= \textstyle\sum_i \ d_i\langle\beta, \alpha \ + \ \sum_i \ d_i\langle\alpha, \alpha\rangle \\ &= \langle\beta, \alpha\rangle \textstyle\sum_i \ d_i \ + \ \langle\alpha, \alpha\rangle \ \sum_i d_i i. \end{aligned}$$

Como $\sum_i \ d_i > 0$ pues $d_i > 0$ para todo $i \geq 0$, entonces: $\langle\beta, \alpha\rangle = \frac{-\sum_i d_i i}{\sum_i d_i}\langle\alpha, \alpha\rangle$.
Además, ya que se cumple para todo d_i que d_i, $i \in \mathbb{Z}$, $i \geq 0$, entonces el cociente en la última igualdad es entre enteros no nulos y por tanto un racional. Luego podemos definir a $q_{\alpha\beta}$ como:

$$q_{\alpha\beta} = \frac{-\sum_i d_i i}{\sum_i d_i}.$$

Lo que demuestra este enunciado.

4. Recordemos que $\langle\beta, \alpha\rangle = -q_{\alpha\beta}\langle\alpha, \alpha\rangle$ y $q_{\alpha\beta} \neq 0$.
Supongamos primero que $\langle\alpha, \alpha\rangle = 0$, entonces $\langle\beta, \alpha\rangle = 0$ para todo β raíz de h en g. Si ahora tomamos $H_\alpha \in g$, por definición tenemos que $\beta(H_\alpha) = 0$para todo β raíz de h (es decir para todo $\beta \in h^*$ $\beta(H) = 0$). Luego como $\beta(H_\alpha) = 0$ para todo $\beta \in h^*$, entonces el conjunto de raíces de h en g no generaría a h^* lo que es una contradicción y este caso queda descartado.
Ahora bien, para descartar el caso $\langle\alpha, \alpha\rangle \in \mathbb{Q}^- - \{0\}$, consideremos:

$$\begin{aligned} \langle\alpha, \alpha\rangle = \langle H_\alpha, H_\alpha\rangle &= \ tr(\alpha(H_\alpha)) = \ tr \ (ad(H_\alpha))^2 \\ &= \textstyle\sum_\beta \ trd_\beta\beta(H_\alpha)^2 \end{aligned}$$

Con $d_\beta = dim(g_\beta)$ y desarrollando la sumatoria de la misma forma que en la prueba del punto 3.
Así, ya que teníamos que $\langle\beta, \alpha\rangle = -q_{\alpha\beta}\langle\alpha, \alpha\rangle$, obtenemos

$$0 \neq \langle\alpha, \alpha\rangle = \textstyle\sum_\beta \ d_\beta \ q^2{}_{\alpha\beta}\langle\alpha, \alpha\rangle^2.$$

De esta forma llegamos a la siguiente igualdad:

$$\langle\alpha,\alpha\rangle = \langle\alpha,\alpha\rangle^2 \ \sum_\beta \ d_\beta {q^2}_{\alpha\beta}.$$

Y obtenemos que: $\langle\alpha,\alpha\rangle = \frac{1}{\sum_\beta \ d_\beta {q_{\alpha\beta}}^2}$.

Por tanto, $\langle\alpha,\alpha\rangle \in \mathbb{Q}^+$.

5. Sean $X \in g_\alpha$ e $Y \in g_{-\alpha}$, entonces para $H_\alpha \in h$ tendríamos $H_\alpha = [X, Y]$. Luego, el subespacio V generado por Y y h será:
   $V = \sum_{k\geq 1} \ g_{k\alpha}$, y entonces $tr(ad(H_\alpha)|_V) = 0$, por el punto 3.
   No obstante, por otro lado tenemos que:

   $$\begin{aligned} tr(ad(H_\alpha)|_V) &= -\alpha(H_\alpha) + \textstyle\sum_{k\geq 1} \ d_k k\alpha(\langle\alpha,\alpha\rangle) \\ &= -\langle\alpha,\alpha\rangle + \textstyle\sum_{k\geq 1} \ d_k k\langle\alpha,\alpha\rangle \end{aligned}$$

   donde $d_k = dim(g_{k\alpha})$ con $k \in \mathbb{N}$. Entonces, igualando estas dos ecuaciones

   $$\langle\alpha,\alpha\rangle = \textstyle\sum_{k\geq 1} \ d_k k\langle\alpha,\alpha\rangle$$

   y de aquí obtenemos

   $$1 = \textstyle\sum_{h\geq 1} \ d_k k \ \Leftrightarrow \ d_1 = 1 \text{ con } d_i = 0 \text{ para todo } k \geq 2.$$

   Por lo tanto, $dim(g_\alpha) = 1$.

6. De la ecuación anterior, $1 = dim(g_\alpha) + \sum_{k\geq 2}$, donde $\sum_{k\geq 2} d_k k = 0$.
   Luego, la única raíz entera múltiplo de α es el propio α, y, ya que mostramos que si α es una raíz de g, entonces lo es también $-\alpha$, por el mismo razonamiento, tomando a $-\alpha$ como raíz, vemos que éstas son las dos únicas raíces enteras múltiplos de α.

□

2.4. La fórmula de Killing

A partir del lema 2 es posible considerar en g subálgebras isomorfas a $sl(2)$. Dada una raíz α, sea $h(\alpha)$ el subespacio de h generado por H_α. Entonces el subespacio $g(\alpha) = g_{-\alpha} \oplus h(\alpha) \oplus g_\alpha$
es una subálgebra de dimensión tres, pues $[g_\alpha, g_\alpha] \subset h(\alpha)$ y cada una de las componentes en esta suma tiene dimensión 1 (consecuencia de los puntos 5 y 6 del lema 2).

Proposición 2. *$g(\alpha)$ es isomorfa a $sl(2)$.*

Demostración. Definamos a $H'_\alpha \in h(\alpha)$ como $H'_\alpha = \frac{2}{\langle\alpha,\alpha\rangle} H_\alpha$.
Por el lema 1, existen $X_\alpha \in g_\alpha$ e $Y_{-\alpha} \in g_{-\alpha}$ tales que

$$\langle X_\alpha, Y_{-\alpha}\rangle = \frac{2}{\langle\alpha,\alpha\rangle}$$

Ahora bien, veamos el valor de $\alpha(H'_\alpha)$:

$$\begin{aligned} \alpha(H'_\alpha) = \langle H'_\alpha, H'_\alpha\rangle \ &= \ \left\langle \frac{2}{\langle\alpha,\alpha\rangle} H_\alpha, \frac{2}{\langle\alpha,\alpha\rangle} H_\alpha \right\rangle \\ &= \frac{2}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\langle H_\alpha, H_\alpha\rangle, \text{ con } \langle H_\alpha, H_\alpha\rangle = \langle\alpha,\alpha\rangle \\ &= \frac{2}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\langle\alpha,\alpha\rangle \ = \ 2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\alpha(H'_\alpha) = 2$.
Los corchetes entre $X_\alpha, Y_{-\alpha}$ y H'_α estarán dados por:

$$[H'_\alpha, Y_{-\alpha}] = 2X_\alpha$$
$$[H'_\alpha, X_\alpha] = -2Y_{-\alpha}$$
$$[X_\alpha, Y_{-\alpha}] = H'_\alpha$$

Luego, el isomorfismo dado por $X \leftrightarrow X_\alpha$, $H \leftrightarrow H'_\alpha$, $Y \leftrightarrow Y_{-\alpha}$, con $\{X, H, Y\}$ la base canónica de $sl(2)$, termina la prueba de la proposición. □

Sobre esta proposición podemos hacer dos observaciones importantes:

1. El isomorfismo anterior no es único, pues existe una libertad al escoger a X_α e $Y_{-\alpha}$ ya que una representación puede tener varias raíces distintas.

2. Por la Proposición 2, cada raíz α define una representación de $sl(2)$ en g a través de la representación adjunta de $g(\alpha)$ en g. Así, con dichas representaciones, los resultados obtenidos sobre las representaciones irreducibles de $sl(2)$ permiten hacer un análisis detallado de los productos $[g_\alpha, g_\beta]$ para dos raíces α, β.

2.4.1. Secuencias de h^* y números de Killing

Definición 18. *Consideremos la siguiente secuencia de elementos de h^*:*
$\cdots, \beta - 2\alpha, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \beta + 2\alpha, \cdots$
Esta secuencia es denominada la α-secuencia iniciada en β.

Para entender el corchete en g, se desea saber cuáles elementos de esta secuencia son raíces.

Teorema 18. *Los elementos de la α-secuencia iniciada en β que son raíces forman un intervalo que contiene a β. Esto es, existen $p, q \geq 0$ tales que $\beta - p\alpha, \cdots, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \cdots, \beta + q\alpha$ son las únicas raíces de la forma $\beta + k\alpha$ con $k \in \mathbb{Z}$.*
Además, se tiene la siguiente fórmula, llamada fórmula de Killing:

$$p - q = \frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}$$

Observaciones:

1. En la fórmula de Killing, α y β no son simétricos, pues para la β-secuencia iniciada en α, son otros los valores de p y q que definen el intervalo.

2. De la fórmula de Killing se ve, en particular, que la expresión en el segundo miembro es un entero. Este hecho viene dado por la relación entre las dimensiones de las representaciones irreducibles de $sl(2)$ y los autovalores de H: el término $\frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}$ es un autovalor de H en una representación de $sl(2)$ y por el lema 2, será un entero.

Definición 19. *El entero $\frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}$ es denominado el número de Killing asociado a las raíces α y β.*

Demostración del Teorema 18. Procederemos por inducción sobre $k \in \mathbb{Z}$ en la α-secuencia $\beta + k\alpha$:

1. Supongamos primero que β es un múltiplo entero de α, esto es, $\beta = 0$ o bien $\beta = \pm\alpha$, por el punto 6 del lema 2. Entonces la α-secuencia iniciada en β será $-\alpha, 0, \alpha$ y el número de Killing entre α y β será 0 o ± 2. En ambos casos se obtendrá la fórmula de Killing.
   En efecto, si $\frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} = 0$, entonces $\langle\beta,\alpha\rangle = 0$ y por tanto β es un múltiplo entero de α.
   Si $\frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} = \pm 2$, entonces $\langle\beta,\alpha\rangle = \pm\langle\alpha,\alpha\rangle$ y nuevamente β es un múltiplo entero de α.

2. Asumamos ahora que β no es un múltiplo entero de α, es decir, $\beta + k\alpha \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.
   Sea $g(\alpha) \simeq sl(2)$, definamos el subespacio:
   $g(\alpha) \supset V_{\beta,\alpha} = \cdots \oplus g_{\beta-\alpha} \oplus g_\beta \oplus g_{\beta+\alpha} \oplus \cdots$.
   Notemos que la suma directa que definimos para $V_{\beta,\alpha}$ es finita, pues tenemos un número finito de raíces en $g(\alpha)$.
   Veamos ahora la representación adjunta de $g(\alpha)$ en g:
   $$ad(X_\alpha)g_{\beta+k\alpha} \subset g_{\beta+(k+1)\alpha}$$
   $$ad(Y_{-\alpha})g_{\beta+k\alpha} \subset g_{\beta+(k-1)\alpha}$$
   $$ad(H'_\alpha)g_{\beta+k\alpha} \subset g_{\beta+k\alpha}$$
   Esto se debe al hecho de que $X_\alpha \in g_\alpha$, $Y_{-\alpha} \in g_{-\alpha}$ y $H'_\alpha \in h = g_0$, y para los subespacios de raíces se cumple que para nuestra representación $ad()$, que $[g_a, g_b] \subset g_{a+b}$ con a, b raíces de $ad()$.
   Por lo tanto, $g(\alpha)$ tiene una representación en $V_{\beta,\alpha}$.

3. Afirmación: La representación de $g(\alpha)$ en $V_{\beta,\alpha}$ es irreducible.
   Veamos:
   Sea $V_{\beta,\alpha} = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$ la descomposición de $V_{\beta,\alpha}$ en componentes irreducibles. Este hecho viene garantizado por el teorema de Weyl.
   Sea ρ una representación irreducible de $sl(2)$ en un espacio vectorial finito V con $dim(V) = n+1$. Entonces existe $\{v_0, \cdots, v_n\} \subset V$ que es una base de V tal que:
   $$\rho(X)v_i = i(n-i+1)v_{i-1}$$
   $$\rho(H)v_i = (n-2i)v_i$$
   $$\rho(Y)v_i = v_{i+1}$$
   con $i = 0, 1, \cdots, n$ y $v_{-1} = v_{n+1} = 0$.

4. Por la clasificación de las representaciones irreducibles de $sl(2)$ mostrada en el teorema 15, los autovalores de $H'_\alpha \simeq H$ dentro de cada V_i son de la forma $m_i - 2j$, con $m_i = dim(V_i - 1)$ y $0 \leq j \leq m_i$.
   Luego, estos autovalores son todos enteros y todos de la misma paridad. Por otra parte, los autovalores de H'_α dentro de $V_{\beta,\alpha}$ vienen dados por:
   $(\beta + k\alpha)(H'_\alpha) = \frac{2}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\beta(H_\alpha) + \frac{2k}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\alpha(H_\alpha) = \frac{2}{\langle\alpha,\alpha\rangle}(\beta(H_\alpha) + k\alpha(H_\alpha))$
   $= \frac{2}{\langle\alpha,\alpha\rangle}(\langle\beta,\alpha\rangle + k\langle\alpha,\alpha\rangle) = \frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} + \frac{2k\langle\alpha,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} = 2\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} + 2k$.
   Así, la igualdad $(\beta + k\alpha)(H'_\alpha) = 2\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} + 2k$ muestra que $2\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}$ es un entero, ya que sumado a $2k$ es un autovalor de H'_α, dentro de V_i, que, anteriormente vimos; es un entero.
   Además, como $2\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} + 2k$ tiene la misma paridad que $2\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}$, entonces los diferentes autovalores de H'_α dentro de $V_{\beta,\alpha}$ tendrán todos la misma paridad. Esto muestra que

las dimensiones de los subespacios V_i son todas de la misma paridad y de la misma forma para m_i.

5. Por otro lado, los autovalores de H'_α son todos simples (esto es, recordemos, de multiplicidad algebraica igual a 1) pues los autoespacios son de la forma $g_{\beta+k\alpha}$ que tienen dimensión 1 ya que $\beta + k\alpha \neq 0$ por el teorema 15.
De esto se obtiene que $V_{\beta,\alpha}$ es irreducible. De hecho, supongamos que en la descomposición de $V_{\beta,\alpha}$ se tiene que $s \neq 1$(es decir existe una descomposición de V en subespacios irreducibles del mismo). Entonces existen $i, j \in \mathbb{Z}$ tales que $m_j = m + i + 2k$ con $k \geq 0$, luego m_i no sería un autovalor simple pues sería autovalor tanto de V_i como de V_j, lo cual es una contradicción al hecho de que todos los autovalores son simples.

6. La irreductibilidad de $V_{\beta,\alpha}$ y el hecho de que $(\beta + k\alpha)$ varía de 2 en 2 cuando varía k, garantizan en efecto la existencia de $V_{\beta,\alpha} = g_{\beta-p\alpha} \oplus \cdots \oplus g_{\beta+q\alpha}$. Luego, como por hipótesis teníamos que $p \leq q$, el conjunto de las raíces en la α-secuencia iniciada en β es un intervalo. El mayor autovalor de H'_α dentro de $V_{\beta,\alpha}$ vendrá dado por:
$$(\beta + q\alpha) = 2\tfrac{\langle \beta,\alpha\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle} \ + \ 2q.$$
Como $dim(V_{\beta,\alpha}) = p + q + 1$, entonces:
$$p + q = 2\tfrac{\langle \beta,\alpha\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle} \ + \ 2q$$
y finalmente obtenemos que: $p - q = 2\frac{\langle \beta,\alpha\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle}$, que es justamente la fórmula de Killing del enunciado.

□

Corolario 2. *Sea g un álgebra de Lie semisimple y sea h una subálgebra de Cartan. Para cada raíz α existe un $H_\alpha \in h$ tal que $\langle H, H_\alpha\rangle = \alpha(H)$ para todo $H \in h$.*

Demostración. Notemos primero que $g = h \ \oplus \ \sum_i g_{\alpha_i}$. Sean entonces α una raíz de g y sea $H \in h$ cualquiera. Luego, la forma de Cartan-Killing (respecto a H_α) estará definida por $\langle H, H_\alpha\rangle = \alpha(H)$.
Como $\langle \ , \ \rangle$ es no degenerada y además $H \neq H_\alpha$, ya que en ese caso tendríamos que $\langle H, H_\alpha\rangle = \alpha(H) = 0$, entonces existe un funcional lineal φ tal que $H_\alpha \longmapsto \varphi(H_\alpha) = \alpha(H) \in h^*$, el espacio dual de h. Así, un funcional lineal, en este caso α, está determinado solamente por H_α y como nuestra elección de H fue arbitraria, para toda raíz α existirá un único $H_\alpha \in h$ que satisface la ecuación $g = h \ \oplus \ \sum_i g_{\alpha_i}$ y por tanto cumple que $\langle H, H_\alpha\rangle = \alpha(H)$. □

Proposición 3. *Sean α, β raíces de un álgebra de Lie g y supongamos que $\alpha + \beta$ es también una raíz ($\alpha + \beta \neq 0$). Entonces $[g_\alpha, g_\beta] = g_{\alpha+\beta}$.*

Demostración. Como $\alpha + \beta$ es una raíz de g, entonces en la α-secuencia iniciada en β tenemos que $q \geq 1$, es decir, nuestra α-secuencia será de la forma:
$$\beta - p\alpha, \cdots, \beta, \beta + \alpha, \cdots, \beta + q\alpha$$

Luego, tomando $X_\alpha \in g_\alpha$ cualquiera, su representación adjunta vendrá dada por $ad(X_\alpha)g_\beta = [X_\alpha, g_\beta] = [X_\alpha, X_\beta]$ con $X_\beta \in g_\beta$. Entonces, $ad(X_\alpha)g_\beta = [X_\alpha, X_\beta] \in g_{\alpha+\beta}$.
Ahora bien, si $X_{\alpha+\beta} \in g_{\alpha+\beta}$, como $\alpha + \beta$ es raíz y está en la α-secuencia iniciada en β, entonces existen $X_\alpha, X_\beta : \; X_{\alpha+\beta} = [X_\alpha, X_\beta]$, y entonces $X_{\alpha+\beta} \in [g_\alpha, g_\beta]$ luego, dado que $g_{\alpha+\beta} \subseteq [g_\alpha, g_\beta]$, obtenemos que $[g_\alpha, g_\beta] = g_{\alpha+\beta}$. $\square$

3. Matrices de Cartan e introducción a los diagramas de Dynkin

3.1. Sistemas simples de raíces

Recordemos que el conjunto de raíces de una subálgebra de Cartan, que de ahora en adelante será denotado por Π, genera el espacio dual h^* de dicha álgebra. Una segunda observación esencial es la siguiente: Como la aplicación $H \mapsto \alpha_H(\ ) = \langle H,\ \rangle$ es no degenerada, entonces existirá un isomorfismo, denotado por φ, entre h y h^*, dado para $\alpha \in h^*$, $\varphi^{-1}(\alpha) = H_\alpha = \langle H,\ \rangle$ para todo $H \in h$.
A partir de este punto, el objetivo central será el de desarrollar todos los elementos necesarios para la construcción de las matrices de Cartan. Para ello comenzamos con una proposición que nos servirá de base para nuestro fin:

Proposición 4. *Como* $char(\mathbb{K}) = 0$ *entonces* $\mathbb{K}$ *contiene un subconjunto isomorfo al cuerpo de los racionales* $\mathbb{Q}$.

Demostración. Como $char(\mathbb{K}) = 0$, entonces es válida la cancelación (multiplicativa) en $\mathbb{K}$. Esto es, si $a, b, c \in \mathbb{K}$ son elementos cualesquiera tales que $ab = cb$, entonces $a = c$, es decir, existe un único $b^{-1} \in \mathbb{K}$ tal que es el inverso multiplicativo de b. Luego, si definimos $\mathbb{Q} = \{q = ab^{-1} = \frac{a}{b} \ :\ a, b \in \mathbb{K}\}$, como a, b son arbitrarios, entonces en efecto $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$. $\square$

Por ello, h puede ser considerado como un espacio vectorial de dimensión finita sobre los racionales. Más precisamente tenemos:

Proposición 5. $dim(h_{\mathbb{Q}}) = dim(h)$. *Dónde* $h_{\mathbb{Q}} = \{H_\alpha = a_1 H_{\alpha_1} + \cdots + a_k H_{\alpha_k} \ :\ a_i \in \mathbb{Q}$ *y* $\alpha_i \in \Pi\}$ *es el subespacio racional de* h *generado por* H_α , $\alpha \in \Pi$.

Demostración.

1. Como $\{H_\alpha \ :\ \alpha \in \Pi\}$ genera a h, existe $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\} \subset \Pi$ tal que $B = \{H_{\alpha_1} \cdots, H_{\alpha_l}\}$ es una base (sobre $\mathbb{K}$) de h. En efecto, como Π genera a h^* y existe un isomorfismo φ entre h y h^*, entonces existen en h elementos $H_{\alpha_1}, \cdots, H_{\alpha_l}$ tales que ellos serán las imágenes inversas de los $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ respectivamente. Y como estos son bases de h^*, entonces el conjunto $B = \{H_{\alpha_1} \cdots, H_{\alpha_l}\}$ es una base de h.

2. Para mostrar que las dimensiones coinciden es suficiente mostrar que B genera a $h_{\mathbb{Q}}$ (con coeficientes en $\mathbb{Q}$). Esto debido a que B genera a h, por lo observado en 1; si genera también a $h_{\mathbb{Q}}$, se tendrá la igualdad de la proposición.
Sea entonces α una raíz dada, podemos escribir $H_\alpha = a_1 H_{\alpha_1} + \cdots + a_l H_{\alpha_l}$, por la construcción definida para $\mathbb{Q}$. Los coeficientes a_i de esta combinación lineal pueden ser encontrados a partir de la relación

$$\textstyle\sum_{i=0}^{l} \langle H_{\alpha_i}, H_{\alpha_j} \rangle a_i = \langle H_\alpha, H_{\alpha_j} \rangle \text{ con } j = 1, \cdots, l \qquad (1)$$

Por el lema 2, los coeficientes a_i en (1) serán necesariamente racionales. Más aún, dado que la matriz del sistema en (1) es no degenerada en relación a la base B, entonces este sistema posee una única solución, y como para todo $i = 1, \cdots, l$ $a_i \in \mathbb{Q}$, entonces B genera al dual Π sobre los racionales y por tanto a $h_{\mathbb{Q}}$

□

Proposición 6. *La forma de Cartan-Killing restringida a $h_{\mathbb{Q}}$ es un producto interno.*

Demostración. Por definición, sabemos ya que $\langle\ ,\ \rangle$ es bilineal y simétrica. Queda entonces mostrar que es definida positiva.
Sea entonces $H \in h_{\mathbb{Q}}$, luego, tenemos que $\langle H, H\rangle = tr(ad^2(H)) = \sum_{\alpha\in\Pi} \langle H_\alpha, H\rangle^2$.
Como $\langle H_\alpha, H\rangle^2 \geq 0$ para todo $\alpha \in \Pi$, entonces $\langle H, H\rangle \geq 0$. Además, si tomamos $\langle H, H\rangle = 0$ esto se cumple si y solamente si $\sum_{\alpha\in\Pi} \langle H_\alpha, H\rangle^2 = 0$ y ello equivale a que $\langle H_\alpha, H\rangle = 0$ para todo $\alpha \in \Pi \Leftrightarrow H = 0$.
Por lo tanto, $\langle H, H\rangle = 0 \Leftrightarrow H = 0$. □

Como $h_{\mathbb{Q}}$ es un espacio vectorial racional, puede ser extendido a un espacio vectorial $h_{\mathbb{R}}$ de la misma dimensión, pero sobre el cuerpo de los reales $\mathbb{R}$. Así mismo, el producto interno definido en $h_{\mathbb{Q}}$ por la forma de Cartan-Killing se extiende a un producto interno en $h_{\mathbb{R}}$.

3.1.1. Orden lexicográfico en un espacio vectorial de dimensión finita

Ahora bien, deseamos construir sistemas simples de raíces para el espacio vectorial $h_{\mathbb{Q}}$. Tomemos entonces V un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ y $B = \{v_1 \cdots, v_l\}$ una base ordenada de V. Sean $v, w \in V$ escritos como

$$v = a_1v_1 + \cdots + a_lv_l$$
$$w = b_1v_1 + \cdots + b_lv_l.$$

Definición 20. *El orden lexicográfico en V, con relación a esta base B, está definido por $v \leq w$ si $v = w$ o si $a_i < b_i$, donde i es el primer índice en el que las coordenadas de v y w difieren.*

Esta relación define, de hecho, un orden compatible con la estructura de espacio vectorial, es decir, si $v \leq w$, entonces $v + u \leq w + u$ y $xv \leq xw$, con $u \in V$ y $x > 0 \in \mathbb{Q}$.
Si V está dotado de un producto interno, el orden lexicográfico satisface el siguiente lema:

Lema 5. *Tomando el orden lexicográfico dado por la base ordenada $B = \{v_1 \cdots, v_l\}$, sea $\{w_1, \cdots, w_m\}$ un subconjunto de V que satisface*

1. *$w_i > 0$ para todo $i = 1, \cdots, m$*
2. *$\langle w_i, w_j\rangle \leq 0$ para $i \neq j$.*

Entonces $\{w_1, \cdots, w_m\}$ es linealmente independiente.

Demostración. Supongamos por contradicción que existe $w_m = a_1v_1 + \cdots + a_{m-1}v_{m-1}$, con $m \leq l$. En el caso de que todos los coeficientes a_i fuesen menores o iguales a 0, entonces $w_m \leq 0$, lo que es una contradicción pues por el punto 1 de la hipótesis, $w_i > 0$ para todo $i = 1, \cdots, m-1$, y por tanto $a_iw_i \leq 0$ si y solamente si $a_i \leq 0$. Por tanto existe al menos

un coeficiente entre los a_i que es positivo.
Consideremos ahora la descomposición de w_m dada por $w_m = w^+ + w^-$, donde w^+ es la suma de todos los elementos w_i con coeficientes positivos y w^- es la suma de los restantes elementos que tienen coeficientes negativos. Por lo observado respecto a los coeficientes a_i, sabemos que $w^+ \neq 0$, luego el producto interno entre w_m y w^+ estará dado por $\langle w_m, w^+\rangle = \sum_i a_i\langle w_m, w_i\rangle \leq 0$, pues en la sumatoria todos los coeficientes a_i son positivos y por el punto 2 de la hipótesis, $\langle w_m, w_i\rangle < 0$ para todo i.
Por otra parte, $\langle w_m, w^+\rangle = \langle w^+ + w^-, w^+\rangle = |w^+|^2 + \langle w^-, w^+\rangle$.
Sean $w^- = \sum_j c_j w_j$ y $w^+ = \sum_i b_i w_i$, entonces $|w^+|^2 + \sum_{i,j} c_j b_i \langle w_j, w_i\rangle$, dónde $b_i > 0$, $c_j \leq 0$ y $\langle w_j, w_i\rangle \leq 0$.
Entonces, $\langle w_m, w^+\rangle \geq 0$, lo que contradice al punto 2 de la hipótesis. Por lo tanto, $\{w_1, \cdots, w_m\}$ es linealmente independiente. □

3.2. Raíces simples

Definición 21. *Fijemos un orden lexicográfico para una base dada de $h^*_{\mathbb{Q}}$. Una raíz $\alpha \in \Pi \subset h^*_{\mathbb{Q}}$ es simple (en relación al orden fijado) si*

1. *$\alpha > 0$, y*
2. *no existen raíces $\beta, \gamma \in \Pi$ tales que β, γ son positivas y $\alpha = \beta + \gamma$.*

Notación: El conjunto de raíces simples será denotado por Σ.
Quedaría ahora por mostrar que el conjunto Σ, así definido, es una base del espacio $h^*_{\mathbb{Q}}$.

Lema 6. *Σ es distinto del conjunto vacío $\emptyset$.*

Demostración. Sea α una raíz positiva minimal (es decir, no existen raíces $\beta, \gamma \in \Pi$ tales que $\alpha = \beta + \gamma > 0$). Notemos que si $\delta \in \Pi$ es una raíz cualquiera, entonces $-\delta \in \Pi$, luego esto nos garantiza que alguna de las raíces escogidas será positiva.
Ahora bien, como Π es finito (pues g es un álgebra de Lie definida sobre un espacio vectorial de dimensión finita), entonces existe un elemento minimal de Π, recordemos además que $\langle\Pi\rangle = g^*$.
Luego, si se satisfacen estas dos propiedades para una raíz en Π, entonces es, por la definición anterior, simple. Más aún, si $\alpha = \beta + \gamma$ con $\beta, \gamma > 0$ en Π, entonces $\beta < \alpha$ lo que contradice la minimalidad de α, entonces $\alpha \in \Sigma$ y por lo tanto $\Sigma \neq \emptyset$. □

Lema 7. *$\langle\alpha, \beta\rangle \leq 0$ si $\alpha, \beta \in \Sigma$ y $\alpha \neq \beta$.*

Demostración. Notemos primeramente que si $\alpha \neq \beta$ son raíces simples, entonces $\beta - \alpha \notin \Pi$ pues de lo contrario tendríamos

1. $\beta - \alpha \leq 0$, pero $\beta = \alpha + (\beta - \alpha)$ con β simple.
2. $\beta - \alpha \geq 0$, pero $\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$ con α simple.

Y en ambos casos obtenemos una contradicción al hecho de que α, β son simples.
Así, para la α-secuencia iniciada en β con $p = 0$, la fórmula de Killing queda de la forma

$$0 \geq -q = \tfrac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha,\rangle}.$$

Como q y $\langle \alpha, \alpha, \rangle$ son ambos mayores que 0 obtenemos finalmente que

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle \leq 0.$$

$\square$

Lema 8. Σ *es linealmente independiente.*

Demostración. Por el punto 2 del lema 3, dado que Σ es un subconjunto de V con un orden lexicográfico dado que satisface $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$ para todo $\alpha, \beta \in \Sigma$ y $\alpha \neq \beta$, entonces Σ es en efecto linealmente independiente. $\square$

Notación: El conjunto finito de las raíces simples será denotado como $\Sigma = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$.

Lema 9. *Sea $\beta \in \Pi$ con $\beta > 0$. Entonces β se escribe de forma única como $\beta = \eta_1\alpha_1 + \cdots + \eta_l\alpha_l$, donde $\eta_1, \cdots, \eta_l$ son positivos. En particular, este resultado nos dice que Σ genera el espacio dual $h_{\mathbb{Q}}^*$.*

Demostración. En inicio, si $\beta = \alpha_i$ para algún $i = 1, \cdots, l$, entonces la afirmación queda demostrada. En el caso contrario, como β no es simple, existirán raíces positivas β_1, β_2 tales que $\beta = \beta_1 + \beta_2$. Si β_1, β_2 son simples, entonces se tiene la descomposición deseada para β.
Ahora bien, supongamos sin perdida de generalidad que β_1 no es simple (el caso dónde β_1, β_2 no son ambas simples es análogo), entonces β_1 puede ser descompuesta como una suma de raíces positivas $\beta_1 = \gamma_1 + \gamma_2$ con $\beta \geq \gamma_1, \gamma_2 \geq 0$ y así sucesivamente. Como en cada descomposición se obtiene raíces estrictamente menores que las anteriores, el proceso termina en algún momento en el cual las raíces que se obtengan no poseen raíces positivas menores que ellas mismas. Estas raíces son simples y por tanto β se escribirá como suma de raíces simples, es decir, β es una combinación lineal de los elementos de Σ con coeficientes enteros. $\square$

Corolario 3. *Sea γ una raíz positiva que no es simple. Entonces*

1. *Existe $\alpha \in \Sigma$ tal que $\langle \gamma, \alpha \rangle > 0$ y $\gamma - \alpha$ es una raíz positiva.*

2. *Toda raíz positiva γ puede ser escrita como $\gamma = \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_k}$, con todos los α_{i_j} raíces simples tales que las sumas parciales $\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_s}$ con $s = 1, \cdots, k$ son raíces.*

Demostración.

1. Supongamos por contradicción que $\langle \gamma, \alpha \rangle \leq 0$ para todo $\alpha \in \Sigma$, entonces por el lema 3 tenemos que $\Sigma \cup \{\gamma\}$ es un conjunto linealmente independiente; no obstante $\gamma \notin \Sigma$ por definición. Así esto es una contradicción al lema 7. Ahora, el hecho de que $\gamma - \alpha$ sea una raíz positiva viene dado por la fórmula de Killing, con la α-secuencia iniciada en γ y con $p > 0$, pues $\langle \gamma, \alpha \rangle > 0$. Es decir, $0 < \frac{2\langle \gamma, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$, esto implica que $\gamma - \alpha$ está en la α-secuencia iniciada en γ y por tanto es una raíz.

2. Si γ es una raíz simple, la afirmación se cumple inmediatamente. Por otra parte, si consideramos que γ no es simple, entonces existe $\alpha \in \Sigma$ tal que $\gamma - \alpha$ es, por lo recién mostrado en el punto 1, una raíz positiva. Como $\gamma = \alpha + (\gamma - \alpha)$ se obtiene el resultado deseado vía inducción, análogamente al lema 7.

□

Como conclusión de estos últimos resultados obtenemos que si $\Sigma = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ es el conjunto de raíces simples en relación a un orden lexicográfico, entonces

1. Σ es una base de $h^*_{\mathbb{Q}}$.
2. Toda raíz β puede ser escrita como $\beta = \eta_1\alpha_1 + \cdots + \eta_l\alpha_l$ con coeficientes enteros, todos ellos del mismo signo.

Con base en estas dos observaciones podemos introducir el siguiente concepto.

Definición 22. *Un subconjunto $\Sigma = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ que satisface estas dos últimas propiedades, es denominado un sistema simple de raíces.*

Fijando un sistema simple de raíces (o bien un orden lexicográfico) se puede definir

$$\Pi^+ = \{\alpha \in \Pi \,:\, \alpha > 0\}$$
$$-\Pi^+ = \Pi^- = \{\alpha \in \Pi \,:\, \alpha < 0\}$$

Sean $n^+ = \sum_{\alpha\in\Pi^+} g_\alpha$ y $n^- = \sum_{\alpha\in\Pi^-} g_\alpha$.
Entonces n^+, n^- son duales pues por la fórmula de Killing, $\langle g_\alpha, g_{-\alpha}\rangle \neq 0$ y $\langle g_\alpha, g_\beta\rangle = 0$ si $\beta \neq -\alpha$. Esta es la estructura básica de las álgebras semisimples y que imita a $sl(2)$ dónde esa descomposición está dada por la base $\{X, H, Y\}$.
El álgebra n^+ es nilpotente pues si $X \in g_\alpha$ esto implica que $ad^k(X)g_\beta \subset g_{k\alpha+\beta}$, y como $k\alpha + \beta > 0$ esto nos asegura la afirmación. Lo mismo ocurre con n^-, que es, notemos, isomorfa a n^+.

3.3. Matrices de Cartan

3.3.1. Introducción

Ya fue visto que el conjunto Σ es un sistema simple de raíces, entonces toda raíz positiva es combinación lineal de elementos de Σ con coeficientes enteros positivos, o, equivalentemente, es una suma - con posibles repeticiones - de los elementos de Σ. De esta forma, para encontrar las raíces positivas (y por tanto todas las raíces ya que $\Sigma = \Pi^+ \cup \Pi^-$) se debe encontrar las sumas de elementos de Σ que son raíces. Eso es hecho a partir de la fórmula de Killing, paso a paso, considerando la cantidad de raíces simples que aparece en la expresión de una raíz positiva.

3.3.2. Construcción de la matriz de Cartan de un álgebra de Lie semisimple

Definición 23. *Sea $\Sigma = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ el sistema simple de raíces correspondiente a un álgebra de Lie g. Si β es una raíz positiva, entonces $\beta = \eta_1\alpha_1 + \cdots + \eta_l\alpha_l$ con los coeficientes $\eta_1, \cdots, \eta_l$ enteros no negativos. Definimos la altura de β como el entero positivo $\eta_1 + \cdots + \eta_l$.*

Por ejemplo, las raíces positivas de altura 1 son exactamente las raíces simples de Σ. Por otra parte, las raíces positivas de altura 2 son de la forma $\alpha_i + \alpha_j$ con $i \neq j$. La fórmula de Killing para α_i y α_j permite encontrar cuáles de estas sumas son raíces. De hecho, si $\alpha_j - p\alpha_i, \cdots, \alpha_j + q\alpha_i$ es la α-secuencia iniciada en α_j, entonces $p = 0$ pues $\alpha_i - \alpha_j$ no es una raíz. Por tanto $-q = \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}$ y de allí que $q > 0$. Es decir, $\alpha_i + \alpha_j$ es una raíz si y solo si $\frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} < 0$. Recordemos que $\langle \alpha, \beta \rangle < 0$ si α y β son raíces simples distintas. De esta forma, para decidir cuáles son las raíces de altura dos, basta ver la tabla para $\frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}$ con $i, j = 1, \cdots, l$ de los números de Killing asociados a las raíces simples.
Sea ahora β una raíz de altura 3. Por el corolario 3, $\beta = \alpha + \alpha_k$ con α de altura 2 y $\alpha_k \in \Sigma$, esto es,

$$\beta = \alpha_i + \alpha_j + \alpha_k, \text{ con } i \neq j.$$

La fórmula de Killing para la α-secuencia iniciada en $\alpha_i + \alpha_j$ es

$$p - q = \frac{2\langle \alpha_i + \alpha_j, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle}.$$

A partir de ello existen dos posibilidades:

1. $i \neq j \neq k$. En este caso, $p = 0$ pues $\alpha_i + \alpha_j - \alpha_k$ no es una raíz por ser una combinación lineal donde aparecen tanto coeficientes positivos como negativos para las raíces simples. De allí que, partiendo de $\alpha_i + \alpha_j \in \Sigma^+$, los valores de k para los cuales $\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k$ es una raíz positiva son aquellos en los que

$$\frac{2\langle \alpha_i, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle} < 0 \qquad \text{o bien} \qquad \frac{2\langle \alpha_j + \alpha_k, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle < 0}.$$

2. $k = i$ o $k = j$. Sin perdida de generalidad, podemos asumir este segundo caso, así la α-secuencia iniciada en $\alpha_i + \alpha_j$ es parte de la α_j-secuencia iniciada en α_i. Como $\alpha_i - \alpha_j$ no es una raíz, para decidir si $\alpha_i + 2\alpha_j$ es un término de la α-secuencia, vemos el número de Killing dado por

$$\frac{2\langle \alpha_i + \alpha_j, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle}.$$

En cada uno de estos casos, los números de Killing correspondientes a las raíces simples determinan las raíces de altura tres. De forma general, se puede proceder de esta manera por inducción. Por el corolario 3, las raíces de altura $n + 1$ son de la forma $\alpha + \alpha_k$ con α raíz de altura n y α_k una raíz simple. La fórmula de Killing muestra cuáles de estas sumas son raíces

$$p - q = \frac{2\langle \alpha, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle}.$$

Por inducción, p es conocido pues $\alpha - \alpha_k, \alpha - 2\alpha_k, \cdots$ al ser raíces, son positivas (pues los coeficientes de α son positivos) y de altura menor que n. Si $\alpha = \eta_1\alpha_1 + \cdots + \eta_l\alpha_l$, entonces

$$\frac{2\langle \alpha, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle} = \frac{\eta_1 2\langle \alpha, \alpha_1 \rangle}{\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle} + \cdots + \frac{\eta_l 2\langle \alpha, \alpha_l \rangle}{\langle \alpha_l, \alpha_l \rangle}.$$

Nuevamente q, y en consecuencia, el que $\alpha + \alpha_k$ sea o no una raíz, se encuentra a partir de calcular los números de Killing correspondientes a los elementos de Σ. Los números asociados a las raíces simples son colocados en forma de una matriz $l \times l$

$$C = \left(\frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \right)_{i,j}.$$

Esta matriz recibe el nombre de matriz de Cartan del sistema simple de raíces. Vale recalcar que la matriz de Cartan es única respecto al sistema simple de raíces fijado para el álgebra de Lie sobre el cuál se esté trabajando. Los elementos en la diagonal principal de esta matriz son todos iguales a 2 y los elementos fuera de la diagonal principal son, o bien iguales a cero, o bien enteros negativos. La siguiente proposición muestra que las posibilidades para los elementos fuera de la diagonal son bastante restrictas.

Proposición 7. *Sean α y β raíces.*

1. *Si θ denota el ángulo entre α y β, entonces,* $\cos\theta = 0, \pm\, 1, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{1}{2}$*, esto es, $\theta = \frac{k\pi}{6}$ o bien $\theta = \frac{k\pi}{4}$, con $k \in \mathbb{Z}$.*

2. *Los posibles valores para los números de Killing son* $\frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.

Demostración.

1. Notemos primero que $\frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}$ y $\frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\beta,\beta\rangle}$ son enteros. Luego, por la definición del coseno de un ángulo en un espacio vectorial, multiplicando ambos términos obtenemos que:

$$4\cos\theta^2 = \frac{4\langle\alpha,\beta\rangle^2}{\langle\alpha,\alpha\rangle\langle\beta,\beta\rangle}$$

que es también un entero y en consecuencia: $4\cos\theta^2 = 0, 1, 2, 3, 4$ y finalmente obtenemos que

$$\cos\theta = 0, \pm 1, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{1}{2}.$$

2. Del anterior punto, tenemos que

$$\frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\beta,\beta\rangle} = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \text{ o } 4 \text{ con cada factor siendo positivo.}$$

Aún más, si uno de los factores es 0, esto es $\langle\beta,\alpha\rangle = 0$, entonces el otro factor también se anula. Luego, cada uno de los factores está restringido a los valores $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$.
Notemos que el caso $\frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} = \pm 4$ implica que $4\cos^2\theta = \frac{4\langle\beta,\alpha\rangle^2}{\langle\alpha,\alpha\rangle\langle\beta,\beta\rangle} = 4$, luego tendríamos que $\cos\theta = \pm 1$, es decir, β es múltiplo de α, lo que a su vez implica que $\beta = \pm\alpha$ y obtendríamos $\frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} = \pm 2$ lo que es una contradicción.
Por tanto los valores para los números de Killing quedan restrictos a $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$, con lo que concluye la demostración de la proposición.

□

A partir de esta última proposición se ve que los elementos fuera de la diagonal de la matriz de Cartan asumen solo los valores $0, -1, -2$ o -3. Esto también muestra que si θ es el ángulo entre dos raíces simples α_i, α_j, entonces $\theta = 0°$. Si las raíces coinciden o $\theta = 90°$, $120°$, $135°$ o bien $150°$ si las raíces son distintas. Además, como $\cos^2\theta < 1$ para $i \neq j$ se ve que $\frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle} = -2$ o -3.
Así, necesariamente $\frac{2\langle\alpha_j,\alpha_i\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle} = -1$, pues el producto de estos dos números de Killing debe coincidir con $4\cos^2\theta$. En otras palabras, si una entrada c_{ij} de la matriz de Cartan, con $i \neq j$, es -2 o -3, entonces la entrada c_{ji} es -1. De la misma forma, si $c_{ij} = 0$ entonces $c_{ji} = 0$. Resumiendo estas últimas proposiciones, tenemos el siguiente teorema que caracteriza completamente a la matriz de Cartan de un álgebra de Lie semisimple.

Teorema 19. *Sea $C = (c_{ij})$ la matriz de Cartan de un sistema simple de raíces. Entonces,*

1. $c_{ii} = 2$ *para todo* i
2. $c_{ij} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$
3. $c_{ji} = -1$ *si* $c_{ij} = \pm 2$ *o* ± 3
4. $c_{ij} = 0$ *si y solo si* $c_{ji} = 0$

3.3.3. Diagramas de Dynkin

Un diagrama de Dynkin es un diagrama (grafo) que contiene la misma información que la matriz de Cartan. Dicho diagrama se encuentra definido a partir de un sistema de raíces fijado $\Sigma = \{\alpha_1, \cdots, \alpha l\}$.
El diagrama contiene l puntos (vértices) representando cada una de las raíces. Los vértices son ligados o no por uno, dos o tres segmentos (aristas) de acuerdo a las siguientes condiciones:

1. Si $\frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle} = \frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle} = 0$, entonces no existe un arista entre los puntos que representan a α_i y α_j.
2. Si $\frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle} = -1$ o bien $\frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle} = -1$, entonces α_i y α_j están ligados por un arista.
3. Si $\frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}$ o $\frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle}$ son iguales a -2, entonces α_i y α_j estarán ligados por dos aristas.
4. Finalmente, si $\frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle} = -3$ o $\frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle} = -3$, entonces α_i y α_j estarían ligados por tres aristas.

La idea de un diagrama de Dynkin es poder utilizarlo para obtener la matriz de Cartan. Sea $C = (c_{ij})$ dicha matriz, si el diagrama de Dynkin está construido de acuerdo a las anteriores condiciones, entonces $c_{ij} = c_{ji} = 0$ cuando las raíces α_i y α_j no estén ligadas y $c_{ij} = c_{ji} = -1$ si dichas raíces estuviesen ligadas por un solo segmento. En el caso de que las raíces estén ligadas por dos o tres segmentos, no se puede establecer directamente cuál de las entradas c_{ij} o c_{ji} de la matriz de Cartan C es -2 o -3. Para hacer esta distinción, se establece una dirección en la orientación de las aristas, es decir, por ejemplo
Si $c_{ji} = \frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle} = -2$ o -3, y por tanto $c_{ij} = -1$, obtenemos una orientación direccionada de α_i a α_j.
El número de ligaciones entre dos raíces en un diagrama de Dynkin tiene la siguiente interpretación geométrica. Si θ es el ángulo entre α_i y α_j, entonces

$$4\cos^2\theta = \frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}\frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle}$$

y por tanto, este valor es el número de aristas que ligan a ambas raíces, pues si uno de los factores es nulo, lo será también el otro. En caso contrario, al menos uno de los factores tendrá valor -1.
De esta manera el número de ligaciones entre dos raíces simples es el ángulo θ que forman entre sí, y viene definido de la siguiente forma:

1. Si no existe ligación, entonces $\theta = 90°$,
2. Si existe una ligación, entonces $\theta = 120°$,

3. Si existen dos ligaciones, entonces $\theta = 135°$,
4. Si existen tres ligaciones, entonces $\theta = 150°$.

4. Aplicaciones de las álgebras de Lie semisimples y las matrices de Cartan

4.1. Matrices de Cartan y diagramas de Dynkin para $sl(n, \mathbb{R})$

Para abordar este caso, comencemos con el estudio de la matriz de Cartan de $sl(3)$. Como $dim(sl(3)) = 3$, entonces sabemos que en este caso habrá exactamente dos raíces simples. Si las denotamos por α_1 y α_2, y como

$$\tfrac{2\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle}{\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle} = \tfrac{2\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle}{\langle\alpha_2,\alpha_2\rangle} = -1$$

la α_1-secuencia iniciada en α_2 tiene que $p = 0$ y por tanto $q = 1$. De la misma forma ocurre con la α_2-secuencia iniciada en α_1. De esto se tiene que $\alpha_1 + \alpha_2$ será la única raíz positiva ya que $\alpha_1 + 2\alpha_2$ y $\alpha_2 + 2\alpha_1$ no son raíces por estar fuera de las α-secuencias respectivas y por tanto no existen raíces de altura 3.
La matriz de Cartan de $sl(3)$, entonces será de la forma

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Y finalmente las raíces simples serán $\alpha_1 = \alpha_{12}$ y $\alpha_2 = \alpha_{23}$.
En el caso de $sl(4)$, tendremos que la matriz de Cartan correspondiente será

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Las raíces de la matriz las obtenemos de la siguiente forma:

1. Las raíces de altura uno son las raíces simples $\alpha_1 = \alpha_{12}, \alpha_2 = \alpha_{23}$ y $\alpha_3 = \alpha_{34}$.

2. Las raíces de altura dos son $\alpha_1 + \alpha_2$ y $\alpha_2 + \alpha_3$. La suma $\alpha_1 + \alpha_3$ no es una raíz pues $\frac{2\langle\alpha_1,\alpha_3\rangle}{\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle} = 0$.

3. La unica raíz de altura tres es $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ ya que $\alpha_i + 2\alpha_j$ no es raíz para ningún par de raíces simples α_i y α_j.

No existen raíces de altura cuatro, pues en la α_i-secuencia iniciada en $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $p = 1$ si $i = 1$ o 3, y $p = 0$ si $i = 2$, esto debido a que las raíces de altura dos son $\alpha_1 + \alpha_2$ y $\alpha_2 + \alpha_3$, y de la fórmula de Killing tendríamos

$$p - q = \tfrac{2\langle\alpha_i,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}$$

Y por los valores posibles de p vemos que $q = 0$.
Si procedemos por inducción de esta manera (sobre la dimensión de la matriz de Cartan) vemos que la matriz de Cartan para $sl(n, \mathbb{K})$ es de la forma

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ * & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Con todas las raíces positivas hasta una altura $n-1$ dados por los mismos criterios que usamos para verificar en $sl(3)$ y $sl(4)$. Y esta Matriz define el siguiente diagrama de Dynkin

4.2. Aplicaciones en el álgebra de Heisenberg

Proposición 8. *Sean* $g = \{A \in gl(3,K) : \ A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\}$ *y* $h = \{B \in gl(3,K) : \ B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\}$. *Notemos primero que* h *es un ideal de* g *pues para todo* $X \in h$ *,* $Y \in g[X,Y] = 0$.
Tenemos entonces que el cociente g/h *es un álgebra abeliana bidimensional, pues dados* $X, Y \in g$ *,* $[X,Y]$ *pertenece a* h. *. El álgebra* g *es conocida como álgebra de Heisenberg.*

Procedamos finalmente a ver la prueba de esta proposición:

Demostración. Sean $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 0 & y_1 & y_2 \\ 0 & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

elementos de h y g respectivamente.
Entonces:

$$[X,Y] = XY - YX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_g$$

Así, tenemos que $[X,Y] = 0_g$.
Ahora bien, si $X = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 0 & y_1 & y_2 \\ 0 & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ son matrices arbitrarias de g entonces

$$[X,Y] = XY - YX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_1y_3 - y_1x_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in h$$

Y de esta forma vemos que $[X,Y] \in h$. Esto es, g/h es en efecto un ideal de g. $\square$

5. Conclusiones y proyecciones

Una primera conclusión del trabajo desarrollado que se desea enfatizar es la alta interacción en el desarrollo de la teoría de Lie entre diversas áreas de la matemática, tanto ya altamente establecidas, como es el caso del álgebra lineal, así como temas que aún en la actualidad se encuentran en desarrollo, como es el caso, en el álgebra abstracta de las propiedades de aquellas álgebras que son no conmutativas, un área altamente activa en la actualidad y que podría derivar en posteriores estudios. Desde lo iniciado en este trabajo, en temas como las álgebras cuánticas, o bien, la aplicación de grupos de Lie en el estudio de otras áreas de la matemática e incluso, a partir de la mostrada construcción de los diagramas de Dynkin, incursionar en los temas respectivos a ellos en teoría de grafos, entre otras posibilidades.

Una segunda conclusión que se procuró resaltar, especialmente en el último capítulo, es la relevancia de la teoría de Lie como una forma de desarrollo en otras ciencias. Enfatizando el caso de la física, dónde la relevancia de algunos puntos de la teoría de Lie desarrollados en este trabajo, como por ejemplo la construcción realizada de la matriz de Cartan correspondiente al álgebra de Heisenberg, se mantienen vigentes como una base de inicio a temas más avanzados en dicha rama de la ciencia.

En cuanto a resultados destacables propios a la teoría de Lie desarrollados en el presente trabajo, vale enfatizar sobre todo dos:

1. La demostración de la existencia de álgebras de Lie semisimples pero que no son de Cartan.
2. La generalización de la forma de la matriz de Cartan y el correspondiente diagrama de Dynkin para todo álgebra de Lie sobre los números reales.

Como un comentario final, se espera que el presente trabajo haya podido mostrar la alta valía que puede tener el estudio de la teoría de Lie. Entre los temas más específicos de la matemática que son estudiados en un inicio de la formación matemática, bien por su cercanía, como una posible herramienta de estudio, a otras ciencias, pero remarcando sobretodo la interrelación que presenta entre distintas áreas fundamentales de la matemática.

6. Bibliografía

1. Brookes, C. (2012). A Course on Lie Algebras and Their Representations. Michaelmas, Term. Cambridge University Press.
2. Bäuerle, G. G. A. and de Kerf E. A. (1999) Lie Algebras. Part 1. Finite and Infinite Dimensional Lie Algebras and Applications in Physics. Elsevier Studies in Mathematical Physics 1.
3. Bourbaki N. (1975). Éléments de Mathématique. Groupes et Algèbres de Lie, Chapitre 1.
4. Carter, R. W.(2005). Lie Algebras of Finite and Affine Type. Cambridge University Press.
5. Deligne, Pierre and Morgan, John W. (1999) Notes on supersymmetry (following Joseph Bernstein). Quantum fields and strings: a course for mathematicians, Vol. 1, 2. Princeton University Press.
6. Dynkin, E. B. (1950), The structure of semi-simple algebras. Amer. Math. Soc. Translation.
7. Hall, B. C. Lie Groups. (2004). Lie Algebras, and Representations. Springer.
8. Hoffman, K. y Kunze, R. (1973). Álgebra Lineal. Prentice Hall Inc.
9. Humpreys, J. E. (1980), Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. Springer - Verlag.
10. Jacobson, N. (1979). Lie Algebras. Dover Publications Inc. New York.
11. Kac, Victor G. (2007). Introduction to Lie algebras, Course notes. MIT free course notes.
12. Lages Lima, E. (1998). Álgebra Lineal. Impa.
13. San Martin, L. A. B. (2010). Álgebras de Lie. Unicamp.
14. Serre, Jean-Pierre. (1992) Lie algebras and Lie groups, 1964 lectures given at Harvard University, Second edition. Springer - Verlag Lectures in Mathematics.
15. Stewart, I. (1970). Lie Algebras. Springer - Verlag, Lecture Notes in Mathematics.
16. Wan, Z. X. (1975). Lie Algebras. Pergamon Press.

Anexos

A. Nociones básicas del álgebra abstracta

Definición 24. *Un álgebra A es un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ dotada de una operación binaria que es bilineal:*

1. $a(\lambda b + \mu c) = \lambda ab + \mu ac$
2. $(\lambda b + \mu c)a = \lambda ba + \mu ca$

dónde $a, b, c \in V$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Observación: Definimos el grupo lineal especial de dimensión n (sobre $\mathbb{K}$) como $sl(\mathbb{K}) = \{a \in gl_n(\mathbb{K}) \ : \ tr(a) = 0\}$.

Definición 25. *Una forma bilineal $B : V \times V \to \mathbb{K}$ es una función que asocia un escalar a cada par de vectores tal que es lineal en cada uno de sus argumentos por separado:*

1. $B(u_1 + u_2, v) = B(u_1, v) + B(u_2, v)$
2. $B(u, v_1 + v_2) = B(u, v_1) + B(u, v_2)$
3. $B(\lambda u, v) = \lambda B(u, v)$
4. $B(u, \lambda v) = \lambda B(u, v)$,

Para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y para todos $u_1, u_2, u, v_1, v_2, v \in V$.

La forma de Cartan-Killing de un álgebra de Lie g de dimensión finita, es la forma bilineal definida $tr(ad(X), ad(Y))$ para $X, Y \in g$.
Los criterios de Cartan son condiciones necesarias y suficientes, en términos de dicha forma bilineal, para que g sea semisimple o soluble:

1. g es semisimple si y solamente si su forma de Cartan-Killing es no degenerada.
2. g es soluble si y solamente si $tr(ad(X), ad(Y)) = 0$ para todo $X \in g$ e $Y \in g'$.

B. Teorema de descomposición primaria del álgebra lineal

El teorema de descomposición primaria del álgebra lineal nos presenta una caracterización específica de los polinomios minimales de una transformación lineal en un espacio vectorial cualquiera, así como también de los subespacios resultantes de la acción de dicha transformación lineal sobre ellos. Es por esto que posee una alta importancia como una herramienta para mostrar, como consecuencias de este teorema, resultados propios de las álgebras de Lie, pues, recordemos, éstas están definidas a partir de un espacio vectorial arbitrario y con una operación que es una transformación bilineal.Para demostrar el teorema de descomposición primaria, comenzamos con dos definiciones esencial para este fin.

Definición 26. *Sea T un operador lineal en un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. El polinomio minimal $p = k_0x^0 + \cdots + k_{n-1}x^{n-1} + 1_nx^n$ para T es el generador mónico del ideal de polinomios sobre $\mathbb{K}$ que anula a T.*
El polinomio minimal p para el operador lineal T está únicamente determinado por estas tres propiedades:

1. *p es un polinomio mónico sobre el cuerpo de escalares $\mathbb{K}$.*
2. *$p(T) = 0$.*
3. *Ningún polinomio sobre $\mathbb{K}$ que anula a T tiene grado menor que el de p.*

Definición 27. *Si V es un espacio vectorial, una proyección de V es un operador lineal E en V tal que $E^2 = E$.*

Supongamos ahora que E es una proyección. Sea R el rango de E y N el espacio nulo de E.

1. Un vector β está en el rango R si y solamente si $E\beta = \beta$. En efecto, si $\beta = E\beta$ entonces $E\beta = E^2\beta = E\beta = \beta$. Recíprocamente, si $\beta = E\beta$, entonces β está en el rango de E.
2. $V = R \oplus N$, lo cual es una consecuencia directa de que E es un operador lineal y $R \cap U = \emptyset$.
3. La única expresión para α como suma de vectores en R y N es $\alpha = E\alpha + (\alpha - E\alpha)$, que es justamente una consecuencia del punto anterior pues $E\alpha \in R$ y $\alpha - E\alpha \in N$.

Teorema 20. *Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo, un polinomio mónico f, no escalar,en $K[x]$ puede ser factorizado como un producto de polinomios mónicos p_i en $K[x]$ en una única manera (salvo por el orden de los factores), es decir,*

$$f = p_1^{n_1}\, p_2^{n_2}\, \cdots\, p_r^{n_r}$$

Demostración. Supongamos f está dado como en la hipótesis. Como los polinomios de grado 1 son irreducibles, en este caso el teorema ya estaría probado. Supongamos además que f tiene un grado $n > 1$. Por inducción podemos asumir que el teorema es válido para

todos los polinomios mónicos de grado menor que n. Si f es irreducible, está ya factorizado como producto de polinomios mónicos primos (es decir que no tienen un polinomio de menor grado en común); y en otro caso $f = gh$ dónde g y h son polinomios mónicos no escalares de grado menor a n. Entonces g y h pueden ser factorizados como producto de polinomios mónicos primos en $K[x]$ y por tanto también f.
Ahora bien, supongamos que

$$f = p_1 \cdots p_m = q_1 \cdots q_n$$

dónde $p_1, \cdots, p_m$ y $q_1, \cdots, q_n$ son mónicos primos en $K[x]$. Entonces p_m divide el producto $q_1 \cdots q_n$, esto es, p_m divide algún q_i. Como p_m y q_i son ambos mónicos, esto significa que $p_m = q_i$.
Así, vemos que $m = n$ y, si $m = 1$ o $n = 1$, tenemos que f es un polinomio mónico primo. Para $deg(f) = \sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{j=1}^{n} q_j > 1$, reordenando los q_j y los p_i podemos asumir que $p_m = q_n$ y que $p_1 \cdots p_{m-1} = q_1 \cdots q_{n-1}$. Como el polinomio $p_1 \cdots p_{m-1}$ tiene grado menor a n la inducción asumida es aplicable y muestra que el producto $q_1 \cdots q_{n-1}$ es, a lo más, un reordenamiento del producto $p_1 \cdots p_{m-1}$. Así podemos concluir que la factorización de f como producto de polinomios mónicos primos es única salvo el orden de los factores. $\square$

Consideremos un operador T en un espacio vectorial de dimensión finita V. Descomponiendo T en una suma directa de operadores 'elementales', podemos estudiar más a fondo V. Podemos hacer esto a partir de los autovalores y autovectores de T en algunos casos (por ejemplo, cuando el polinomio minimal de T se factoriza sobre el cuerpo de escalares $\mathbb{K}$ en un producto de polinomios mónicos de grado uno). En el caso general para T, si tratamos de estudiarlo usando autovalores, tenemos dos dificultades. Primero, T podría no tener un único autovalor. Segundo, incluso si el polinomio característico se factoriza completamente sobre $\mathbb{K}$ en un producto de polinomios de grado uno, podría no haber suficientes autovectores para que T genere a V.
La segunda situación la podemos ilustrar con el operador T en $\mathbb{K}^3$ representado en la base canónica como:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico para A es $(x-2)^2(x+1)$ que es también el polinomio minimal para A (equivalentemente, para T) pues está ya factorizado en polinomios irreducibles sobre $\mathbb{K}^3$. Así, T no es diagonalizable, esto se puede ver pues el espacio nulo de $(T-2I)$ tiene dimensión 1. Por otra parte, el espacio nulo de $(T+I)$ y el espacio nulo de $(T-2I)^2$ juntos generan a V, el primero siendo un subespacio generado por e_3 y el segundo generado por e_1 y e_2.
Este es a grandes rasgos el método para el segundo problema. Si el polinomio minimal para T se descompone:

$$p = (x - c_1)^{r_1} \cdots (x - c_k)^{r_k}$$

dónde $c_1, \cdots, c_k$ son elementos distintos de $\mathbb{K}$, entonces mostraremos que el espacio vectorial V es una suma directa de los espacios nulos de $(T - c_i I)^{r_i}$ para $i = 1, \cdots, k$.
El teorema de descomposición primaria es más general de lo descrito pues funciona con la descomposición del polinomio minimal, entren o no los polinomios irreducibles (es decir, no necesariamente solo primos) siendo todos de grado uno.

Teorema 21 (Teorema de descomposición primaria del álgebra lineal)**.** *Sea T un operador lineal en un espacio vectorial V de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Sea $p = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ el polinomio minimal para T, dónde los p_i son polinomios mónicos irreducibles sobre $\mathbb{K}$ y los r_i son enteros positivos. Sea W_i el espacio nulo de $p_i(T)^{r_i}$ para $i = 1, \cdots, k$. Entonces,*

1. *$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$,*
2. *cada W_i es invariante bajo T,*
3. *si T_i es el operador inducido en W_i por T, entonces el polinomio minimal para T_i es $p_i^{r_i}$.*

Demostración. La idea general de la prueba es como sigue: Si la descomposición en suma directa de nuestra hipótesis es valida, entonces es posible conseguir las proyecciones $E_1, \cdots, E_k$ asociadas a esta descomposición.
La proyección E_i será la identidad en W_i y ceros en los otros W_j. Queda entonces encontrar un polinomio q_i tal que $q_i(T)$ sea la identidad en W_i y cero en los restantes W_j, de forma que

$$q_1(T) + \cdots + q_k(T) = I$$

Para cada i, sea $f = \frac{P}{p_i^{r_i}} = \Pi_{j \neq i} p_j^{r_i}$. Como $p_1, \cdots, p_k$ son polinomios primos distintos los polinomios $f_1, \cdots, f_k$ son relativamente primos (consecuencia del teorema anterior). Entonces existen polinomios $g_1, \cdots, g_k$ tales que $\sum_{i=1}^{n} f_i g_i = 1$
Notemos también que si $i \neq j$ entonces $f_i f_j$ es divisible por el polinomio P, pues $f_i f_j$ contiene cada $p_m^{r_m}$ como un factor.
Debemos probar que el polinomio $q_i = f_i g_i$ se comporta de la forma descrita en el primer párrafo de la prueba; es decir, $q_i(T) = I_{W_i}$ y $q_i = 0$ para todo $j \neq i$. Sea entonces $E_i = q_i(T) = f_i(T) g_i(T)$. Como $q_1 + \cdots + q_k = 1$, y p divide a $f_i f_j$ para $i \neq j$ tenemos que $E_1 + \cdots + E_k = I$, con $E_i E_j = 0$ si $i \neq j$.
Entonces los E_i son proyecciones que corresponden a alguna descomposición en sumas directas del espacio V. Desearíamos mostrar que el rango de E_i es justamente el subespacio W_i. Observemos entonces que cada vector en el rango de E_i está en W_i, pues si α está en el rango de E_i, entonces $\alpha = E_i \alpha$ y

$$p_i(T)^{r_i} \alpha = p_i(T)^{r_i} E_i \alpha = p_i(T)^{r_i} f_i(T) g_i(T) \alpha = 0$$

pues $p^{r_i} f_i g_i$ es divisible por el polinomio minimal p. Recíprocamente, supongamos que α está en el espacio nulo de $p_i(T)^{r_i}$. Si $j \neq i$, entonces $f_i g_i$ es divisible por $p_i^{r_i}$ y entonces $f_i(T) g_i(T) \alpha = 0$, esto es, $E_i \alpha = 0$ para $j \neq i$. Pero en ese caso se concluye que $E_i \alpha = \alpha$, es decir, α está en el rango de E_i. Esto completa la prueba de 1.
Como los subespacios W_i son invariantes bajo T, si T_i es el operador inducido en W_i por T, entonces $p_i(T_i)^{r_i} = 0$, pues, por definición, $p_i(T)^{r_i} = 0$ en el subespacio W_i.
Esto muestra que el polinomio minimal para T_i divide a $p_i^{r_i}$. Recíprocamente, sea g un polinomio cualquiera tal que $g(T_i) = 0$. Entonces $g(T_i) f_i(T) = 0$, así $g f_i$ es divisible por el polinomio minimal p de T, lo que nos dice que $p_i^{r_i} f_i$ divide a $g f_i$. De aquí se ve que $p_i^{r_i}$ divide a g y por tanto el polinomio minimal de T_i es $p_i^{r_i}$. $\square$

C. Nociones básicas de la teoría de representaciones

El contenido general de la teoría de representaciones puede ser muy brevemente resumido como sigue:

1. Un álgebra asociativa sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$ equipado con una operación de multiplicación que es bilineal y asociativa $\lambda a, \delta b \in V \mapsto \lambda\delta(ab)$ para todo $a, b \in V$ y $\lambda, \delta \in \mathbb{K}$. Consideraremos siempre álgebras asociativas con unidad, es decir, $\exists\ 1_{\mathbb{K}}\ :\ 1_{\mathbb{K}}a = a1_{\mathbb{K}} = a$ para todo $a \in V$.
2. Una representación de un álgebra asociativa A (también llamada un módulo A-izquierdo) es un espacio vectorial V equipado con un homomorfismo $\rho : A \to gl(V)$ (transformaciones lineales de V en si mismo), es decir, son transformaciones lineales que preservan la multiplicación y la unidad en A.
3. Una subrepresentación de una representación V es un subespacio $U \subset V$ que es invariante bajo todas las operaciones $\rho(a)\ ,\ a \in A$. También, si V_1 y V_2 son dos representaciones de A, entonces la suma directa $V_1 \oplus V_2$ tiene una estructura de representación de A.

Definición 28. *Una representación V de A se denomina irreducible si sus únicas subrepresentaciones son $\{0\}$ y V, se llama indescomponible si no puede ser escrita como suma directa de dos subrepresentaciones no nulas.*

Definición 29. *Una representación matricial de grado $n \geq 1$ de un grupo finito G sobre un anillo conmutativo A es un homomorfismo de grupos $\rho : G \to GL(n, A)$ dónde el grupo lineal general $GL(n, A)$ es el grupo de las matrices invertibles de orden n con coeficientes en A. Si ρ es inyectiva, entonces se dice que la representación es fiel.*

Observación: La aplicación ρ dada según

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in sl(2, \mathbb{K}) \mapsto \begin{pmatrix} 2a & -2b & 0 \\ -c & 0 & b \\ 0 & 2c & -2a \end{pmatrix} \in gl(3, \mathbb{K})$$

es una representación de $sl(2, \mathbb{K})$. De hecho, sea la base $\{X, H, Y\}$ de $sl(2, \mathbb{K})$, dónde

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La multiplicación, en este caso denominada el corchete de Lie, entre sus elementos viene dada por

$$[H, X] = 2X\ ,\ [H, Y] = -2Y\ ,\ [X, Y] = H.$$

Las imágenes de los elementos de esta base forman una base de $Im(\rho)$ que será una base para $gl(3, \mathbb{K})$.

Proposición 9. *Sea ρ una representación de $sl(2, \mathbb{K})$ en V. Entonces se tiene que*

$$\rho(H)\rho(X)v = \rho[H,X]v \ + \ \rho(X)\rho(H)v.$$

Demostración. Como $\rho : sl(2,\mathbb{K}) \to V$ es una representación, entonces es un homomorfismo. Así tenemos que aplicada a $v \in V$, $\rho[H,X]v = [\rho(H),\rho(X)]v$, que por la definición del corchete de Lie es igual a

$$\rho(H)\rho(X)v - \rho(X)\rho(H)v; \text{ reordenando los términos en}$$

esta igualdad obtenemos finalmente que

$$\rho(H)\rho(X)v = \rho[H,X]v \ + \ \rho(X)\rho(H)v.$$

□