

UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS
FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES
CARRERA DE MATEMÁTICA



ESPECTRO DE FLOQUET Y LYAPUNOV

(ÁREA: ECUACIONES DIFERENCIALES)

Autor: Univ. Wilson Patty Yujra

Tutor: Dr. Efraín Cruz Mullisaca

PROYECTO DE GRADO

ELABORADO PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADO EN
MATEMÁTICA

LA PAZ-BOLIVIA
2012

ESPECTRO DE FLOQUET
Y
LYAPUNOV

(Área: Ecuaciones Diferenciales)

Por
Wilson Patty Yujra

REMITIDO EN CUMPLIMIENTO PARCIAL DE LOS
REQUISITOS PARA LA OBTENCIÓN DEL GRADO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICA
EN LA
UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS.

LA PAZ, BOLIVIA
JUNIO DE 2012

A mis queridos padres

Dionicio y Andrea.

Índice general

Índice General	II
Resumen	III
Agradecimientos	IV
Introducción	v
I. Preliminares	1
I.1. Sistemas lineales autónomos	3
I.2. Flujo de una ecuación lineal	11
I.3. Atractores lineales	15
I.4. Conjugación topológica de sistemas lineales	18
II. Teoría de Floquet	23
II.1. Introducción	23
II.2. Teorema de Floquet	26
II.3. El logaritmo de una matriz invertible	29
II.4. Multiplicadores de Floquet	32

II.5. El comportamiento de las soluciones	35
II.6. Sistemas periódicos no homogéneos	42
III.Estabilidad de Floquet	50
III.1. Espectro de Lyapunov	53
III.2. Espectro de Floquet	55
III.3. La matriz fundamental de Cauchy	58
III.4. Multiplicadores reales e idénticos	64
III.5. Ecuación de Hill	67
III.6. Estabilidad local de órbitas periódicas	70
III.6.1. Aplicaciones	71
III.6.2. Aplicación de Retorno (Poincaré)	74
IV.Conclusiones y recomendaciones	79
A. Forma Canónica de Jordan	82
A.1. Teorema de la Descomposición de Jordan	82
B. Normas Adaptadas a Matrices	90
B.1. Normas y productos Adaptados a Matrices	90
B.2. Logaritmo y Exponencial de Matrices	95
Bibliografía	98

Resumen

La teoría general de estabilidad de soluciones de la ecuación diferencial $x' = A(t)x$, $x \in \mathbb{R}^n$, está todavía, increíblemente, incompleta. Sólo para una cierta clase de funciones $A : \mathbb{R} \rightarrow gl(n, \mathbb{R})$ se ha tenido satisfactoriamente éxito para el estudio cualitativo de las soluciones. Históricamente el primero en completar la teoría para una cierta clase de funciones, $A : \mathbb{R} \rightarrow gl(n, \mathbb{R})$, fue el matemático francés Gaston Floquet en 1883, para el caso periódico.

En este trabajo se estudia en detalle el criterio de estabilidad asintótica exponencial de las soluciones de las ecuaciones diferenciales de la forma

$$x' = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

cuando $A : \mathbb{R} \rightarrow gl(n, \mathbb{R})$ es una función matricial continua y periódica; y, todo esto a través del estudio del espectro de Floquet del sistema.

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a Dios por estar junto a mi en todo momento. Por otro lado, quiero agradecer muy cordialmente al profesor Efraín Cruz, mi profesor tutor por todo su apoyo y confianza durante todo el proceso de mi formación en la carrera de matemática, y claro en la elaboración de este trabajo; del mismo modo quiero agradecer al Seminario: Dinámicas de Control de la carrera de Matemática que esta a cargo de los profesores Efraín Cruz, Miguel Yucra, y Willy Condori, por brindarme el apoyo y la oportunidad de poder desarrollarme y superarme en la matemática. Y claro, a quienes de una u otra forma contribuyeron en mi formación matemática, a todos mis profesores.

Por supuesto, este trabajo nunca hubiera sido posible realizar sin el apoyo, paciencia, confianza y amor de mi familia, muy especialmente de mis queridos padres Dionicio y Andrea, por quienes mi deuda siempre será infinita.

Me gustaría también dar un agradecimiento muy especial a mis queridos hermanos Victor Hugo y Lourdes por ser más que hermanos, mis mejores amigos. A mi amada esposa Lourdes y a mi querido hijo Julio Cesar por todos los bellos momentos que paso junto a ellos, por brindarme su comprensión, apoyo y haberme dado una razón para ser mejor cada día.

Finalmente, darles un agradecimiento muy cordial a todos mis amigos de la carrera de Matemática.

Wilson Patty

Junio, 2012.

Introducción

Este trabajo se enmarca dentro de la teoría de los sistemas dinámicos, la cual es una área muy moderna, aunque se remonta a Newton con sus estudios de Mecánica Celeste y a Henri Poincaré, quién inicio el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales, pues en esos tiempos no todos los problemas de ecuaciones diferenciales se podían resolver de forma explícita.

Poincaré indica que podemos establecer el comportamiento y propiedades de las soluciones de una ecuación diferencial sin conocerla explícitamente. Fue hace apenas unos 40 años que los sistemas dinámicos se establecieron como un área propiamente dicha, gracias al trabajo destacado de matemáticos e ingenieros como: S. Smale, V. Arnold, Lyapunov, etc.

Si intentamos dar un concepto de sistema dinámico, podríamos decir burdamente que se trata del estudio de sistemas deterministas, es decir, consideramos situaciones que dependen de algún parámetro dado, que frecuentemente suponemos es el tiempo, y que varían de acuerdo a leyes establecidas. De manera que el conocimiento de la situación en un momento dado, nos permite reconstruir el pasado y predecir el futuro. Varias son las formas de estudiar el comportamiento de estos sistemas dinámicos, podemos destacar entre ellas: el estudio de la estabilidad, estabilidad asintótica, estabilidad exponencial, etc.

El objetivo central de este trabajo es desarrollar en detalle el estudio de estabilidad de las soluciones de la ecuación diferencial $x' = A(t)x$, $x \in \mathbb{R}^n$, cuando $A(t)$ es una función matricial continua y periódica. En el caso particular en que $A(t) \equiv A$ es una matriz constante ya se ha estudiado en detalle el estudio de la estabilidad de las soluciones.

Estableceremos criterios de estabilidad a través del Espectro de Floquet, más conocida como la Teoría de Floquet.

En el primer capítulo revisaremos los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales; en particular, los de coeficientes constantes. De ellas enfatizaremos la forma de sus soluciones.

Para este estudio se requiere usar Álgebra Lineal incluyendo autovalores y autovectores propios y la forma canónica de Jordan, la primera sección revisa algo de este material. Además mostraremos algunos de los criterios para el estudio de la Estabilidad de las soluciones alrededor de puntos de equilibrio. Algunos resultados resuelven, inclusive, el caso en que los coeficientes dependen del tiempo.

En el capítulo II está destinado, exclusivamente, al estudio general de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes periódicos, es decir, consideramos sistemas de la forma

$$x' = A(t)x, \quad A(t + T) = A(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad A \in C(\mathbb{R}, gl(n, \mathbb{R})).$$

El matemático francés Gaston Floquet (1883), fue el primero en desarrollar la teoría general de estos sistemas lineales periódicos y dió un estudio sistemático de ellos. En general, las soluciones de sistemas lineales periódicos no pueden ser expresadas en términos de funciones elementales, pero la linealidad y periodicidad de $A(t)$ permiten que el comportamiento de una solución para todos los tiempos puede ser deducida de la solución general en un intervalo de longitud T . Esta propiedad inusual hace que el comportamiento de las soluciones cuando $t \rightarrow +\infty$ pueda ser frecuentemente deducida de aproximaciones analíticas o de soluciones numéricas.

En el Capítulo III, discutimos las propiedades más importantes de la ecuación diferencial con coeficientes periódicos. Se presenta el resultado central de este capítulo, en la cual estudiamos la estabilidad asintótica exponencial de las soluciones en torno al punto de equilibrio $x = 0$ a través del Espectro de Floquet; en particular, se realiza el estudio del caso importante en que los Multiplicadores de Floquet son reales e idénticos, la ecuación de Hill (caso particular, en dimensión dos, en que el producto de los multiplicadores de Floquet es 1). Luego aplicamos todos estos resultados para estudiar la estabilidad local de soluciones periódicas de la ecuación diferencial de la forma $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Finalmente, en el capítulo IV se desarrolla una introducción al estudio de la estabilidad de las soluciones para el caso general, es decir cuando consideremos el sistema

$$x' = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

con $A : \mathbb{R} \rightarrow gl(n, \mathbb{R})$ es continua y acotada, no necesariamente periódica. Lamentablemente, en este caso no se puede dar una expresión explícita de las soluciones de esta ecuación diferencial en términos de la exponencial de matrices. Sin embargo, se puede estudiar el crecimiento exponencial de las soluciones a través de los Exponentes de Lyapunov.



CAPÍTULO I

Preliminares

En la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales, más que obtener la solución explícita interesa entender el comportamiento de las mismas. La Teoría de Estabilidad va en esa dirección. En este trabajo, planteamos una introducción a esta teoría, con énfasis en la estabilidad de ecuaciones diferenciales definidas por campos lineales. En consecuencia, en este caso, se presenta una caracterización completa de la estabilidad por medio de conceptos: topológico, algebraico y analítico.

El estudio de las ecuaciones diferenciales definidas por campos lineales es muy importante ya que nos permiten establecer soluciones en términos de la función exponencial.

Por ejemplo, dada la ecuación diferencial autónoma

$$x' = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{I.1}$$

donde $A \in gl(n, \mathbb{R})$ (el conjunto de matrices de tamaño $n \times n$ con entradas reales) y la condición inicial $x(0) = x_0$, la solución está dada por

$$x(t) = e^{tA}x_0. \tag{I.2}$$

En consecuencia, si conocemos la exponencial de matrices constantes la solución es simple. Esta solución también nos permite resolver la ecuación diferencial

$$x' = Ax + g(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{I.3})$$

cuando $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua. En efecto, pues si consideramos la función $y(t) = e^{-tA}x(t)$ tenemos $y(0) = x(0) = x_0$ y, derivando y con respecto a t

$$y' = e^{-tA}x' - Ae^{-tA}x = e^{-tA}g(t).$$

De esto obtenemos,

$$y - x_0 = \int_0^t e^{-sA}g(s)ds,$$

es decir

$$x(t) = e^{tA}x_0 + e^{tA} \int_0^t e^{-sA}g(s)ds. \quad (\text{I.4})$$

Todos estos resultados dependen de las propiedades elementales de la exponencial de una matriz. La ecuación I.1 es un caso particular de la ecuación diferencial lineal

$$x' = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{I.5})$$

Una simple propiedad de las ecuaciones diferenciales lineales es que si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son soluciones de I.5, entonces $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ es también solución. Esta propiedad, en principio, no se cumple en general para sistemas no lineales pero tiene importantes consecuencias para sistemas lineales. Si podemos encontrar n soluciones linealmente independientes para la ecuación diferencial I.5, se tiene que cualquier otra solución se puede expresar como una combinación lineal de estas soluciones. En otras palabras, si $x_1(t), \dots, x_n(t)$ son soluciones linealmente independientes, entonces la solución general de I.5 se puede expresar como

$$x(t) = \mathbf{X}(t)c, \quad (\text{I.6})$$

donde $c \in \mathbb{R}^n$ es constante y $\mathbf{X}(t)$ es una matriz de $n \times n$ donde sus columnas son las soluciones $x_i(t)$, es decir $\mathbf{X}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$. La matriz $\mathbf{X}(t)$ es llamada *Matriz Fundamental del sistema* I.5 y, e^{tA} es simplemente una natural elección de matriz fundamental para el sistema $x' = Ax$. De la solución en términos de la matriz fundamental, se tiene que $x(0) = x_0 = \mathbf{X}(0)c$, es decir $c = \mathbf{X}^{-1}(0)x_0$ y $x(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(0)x_0$. Comparando esto con I.2 podemos ver que si $\mathbf{X}(t)$ es matriz fundamental para el problema autónomo, I.1, entonces

$$e^{tA} = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(0). \quad (\text{I.7})$$

La idea de Matriz Fundamental, como veremos en el siguiente capítulo, es muy útil particularmente si consideramos el sistema con coeficientes periódicos, $x' = A(t)x$ con $A(t+T) = A(t)$ para algún $T > 0$. Pues, nos ayudarán a estudiar a detalle la estabilidad de las soluciones en torno a puntos de equilibrio. Enfatizamos, que la razón principal para estudiar sistemas lineales es que los resultados obtenidos se pueden aplicar a sistemas no lineales.

I.1. Sistemas lineales autónomos

En esta sección veremos que efectivamente la exponencial e^{tA} es matriz fundamental para la ecuación diferencial $x' = Ax$, donde $x \in \mathbb{R}^n$ y A es un operador lineal de \mathbb{R}^n (podemos identificar también a A como una matriz de tamaño $n \times n$ con entradas reales, es decir $A \in gl(n, \mathbb{R})$). Inicialmente como se conoce $gl(n, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial real de dimensión $n \times n$, y como en todo espacio vectorial, en $gl(n, \mathbb{R})$ tenemos muchas normas a nuestra disposición, pero para nuestros propósitos, la norma más conveniente es la norma del Operador

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \sup_{|x|=1} |Ax|,$$

para $A \in gl(n, \mathbb{R})$, y $|\cdot|$ es la norma euclidiana en \mathbb{R}^n . Es conveniente esta norma, dado que ella además satisface:

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|, \quad \forall A, B \in gl(n, \mathbb{R}), \quad (\text{I.8})$$

además, por inducción resulta

$$\|A^m\| \leq \|A\|^m, \quad \text{para cada } m \in \mathbb{N},$$

y para todo $A \in gl(n, \mathbb{R})$.

Ahora podemos definir la exponencial de una matriz y establecer algunas de sus propiedades.

Definición I.1. Definimos la Exponencial de la matriz $A \in gl(n, \mathbb{R})$, e^A , por

$$e^A := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j, \quad A^0 = I, \quad A \in gl(n, \mathbb{R}).$$

También escribimos $\exp(A) = \exp A = e^A$. La exponencial de una matriz tiene propiedades muy similares a la exponencial de un número real.

La primera pregunta que podemos hacernos es que si la serie que define la exponencial de la matriz converge ó no en el espacio normado $gl(n, \mathbb{R})$; es decir, deseamos saber si este concepto está bien definido. En el caso $n = 1$ tenemos $e^a = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} a^j$, que es la serie convergente de Taylor de la exponencial escalar.

En el caso general, tomando $\|\cdot\|$ la norma del operador de $gl(n, \mathbb{R})$, obtenemos

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{j!} A^j \right\| = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \|A^j\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \|A\|^j = e^{\|A\|}, \quad (I.9)$$

donde usamos, de manera esencial, la propiedad I.8. La serie que define la exponencial es, por tanto, absolutamente convergente, y como el espacio $gl(n, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial normado, entonces la serie que define la exponencial es convergente. Esto muestra que la exponencial de una matriz está bien definida.

La razón principal para considerar la norma $\|\cdot\|$ en $gl(n, \mathbb{R})$ es exactamente esa, poder usar la propiedad I.8 en I.9 para probar fácilmente la convergencia de la exponencial. Note que, la serie de la exponencial de una matriz también converge en la norma euclidiana (ó en cualquier otra norma) pues $gl(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$.

Ejemplo I.2. Claramente $e^0 = I$, la matriz identidad de $gl(n, \mathbb{R})$. Más generalmente, podemos calcular la exponencial de una matriz diagonal

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

pués es fácil de constatar que $D^j = \text{diag}(\lambda_1^j, \lambda_2^j, \dots, \lambda_n^j)$, para cada $j \in \mathbb{N}$, y

$$\begin{aligned} e^D &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} D^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \text{diag}(\lambda_1^j, \lambda_2^j, \dots, \lambda_n^j) \\ &= \text{diag}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \lambda_1^j, \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \lambda_2^j, \dots, \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \lambda_n^j\right) \\ &= \text{diag}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n}). \end{aligned} \tag{I.10}$$

En particular, $e^I = \text{diag}(e, e, \dots, e) = eI$.

Ejemplo I.3. Calculemos ahora la exponencial de una matriz de la forma

$$N(r) = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in gl(r, \mathbb{R}).$$

Estas matrices son nilpotentes, y $N(r)^r = 0$. Así, podemos calcular directamente

$$e^{N(r)} = \begin{pmatrix} 1 & c & \frac{c^2}{2!} & \cdots & \frac{c^{r-2}}{(r-2)!} & \frac{c^{r-1}}{(r-1)!} \\ 0 & 1 & c & \cdots & \frac{c^{r-3}}{(r-3)!} & \frac{c^{r-2}}{(r-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo I.4. Calculemos la exponencial de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$.

Podemos deducir (por inducción) que

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}^{2j} = (-1)^j \begin{pmatrix} b^{2j} & 0 \\ 0 & b^{2j} \end{pmatrix},$$

para potencias pares y

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}^{2j+1} = (-1)^j \begin{pmatrix} 0 & b^{2j+1} \\ -b^{2j+1} & 0 \end{pmatrix},$$

para potencias impares. Recordando las series de Taylor

$$\begin{aligned} \cos b &= 1 - \frac{1}{2!}b^2 + \frac{1}{4!}b^4 - \frac{1}{6!}b^6 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} b^{2j}, \\ \sin b &= b - \frac{1}{3!}b^3 + \frac{1}{5!}b^5 - \frac{1}{7!}b^7 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} b^{2j+1}, \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

obtenemos que

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos b & \sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix}.$$

La propiedad fundamental de las exponenciales es la de ofrecer las soluciones de la ecuación diferencial $x' = Ax$, como sigue.

Fijando una matriz $A \in gl(n, \mathbb{R})$ y dado $t \in \mathbb{R}$, tenemos

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j A^j \in gl(n, \mathbb{R}).$$

Ejemplo I.5. Fijando $b \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\exp \left(t \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{pmatrix};$$

por lo tanto, podemos derivar cada componente para obtener

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \exp \left(t \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} -b \sin bt & b \cos bt \\ -b \cos bt & -b \sin bt \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \exp \left(t \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \right); \end{aligned} \quad (\text{I.12})$$

es decir, para esa matriz tenemos $\frac{d}{dt} e^{tA} = Ae^{tA}$. En particular, cada columna de la matriz exponencial es una solución de la ecuación diferencial $x' = Ax$.

Proposición I.6. Dadas una matriz $A \in gl(n, \mathbb{R})$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, los caminos $t \mapsto e^{tA}$ en $gl(n, \mathbb{R})$ y $t \mapsto e^{tA}x_0$ en \mathbb{R}^n son derivables y,

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = Ae^{tA}, \quad \frac{d}{dt} e^{tA}x_0 = Ae^{tA}x_0.$$

Demostración. Dado $t \in \mathbb{R}$, tenemos $\|tA\| = |t|\|A\|$, de modo que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{t}(e^{tA} - I) - A \right\| &= \frac{1}{|t|} \|e^{tA} - I - tA\| \leq \frac{1}{|t|} \|tA\|^2 e^{\|tA\|} \\ &= |t|\|A\|^2 e^{|t|\|A\|} \leq |t|\|A\|^2 e^{\|A\|}, \end{aligned} \quad (\text{I.13})$$

para $|t| < 1$. Escribiendo $X(t) = e^{tA}$, tenemos $X(0) = I$ y, de la desigualdad anterior, se deduce, por definición, que $X'(0) = A$. Afirmamos que

$$X(t+u) = X(t)X(u) \in gl(n, \mathbb{R}),$$

para cualesquiera $t, u \in \mathbb{R}$. Por definición de derivada, de eso se deduce que $X(t)$ es derivable en \mathbb{R} , valiendo

$$X'(t) = X'(0)X(t) = AX(t),$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. Además, dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, podemos aplicar todas esas matrices en x_0 para concluir

que $x(t) = X(t)x_0 = e^{tA}x_0$ es derivable en \mathbb{R} con $x'(t) = Ax(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$ y $x(0) = e^{0A}x_0 = Ix_0 = x_0$.

Resta probar la afirmación. Fijemos $t, u \in \mathbb{R}$. Dado $j \in \mathbb{N}$ tenemos,

$$\frac{1}{j!}(t+u)^j = \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} t^k u^{j-k} = \sum_{k=0}^j \frac{t^k}{k!} \frac{u^{j-k}}{(j-k)!} = \sum_{r+s=j} \frac{t^r}{r!} \frac{u^s}{s!},$$

por lo tanto,

$$\frac{1}{j!}(tA + uA)^j = \frac{1}{j!}(t+u)^j A^j = \left(\sum_{r+s=j} \frac{t^r}{r!} \frac{u^s}{s!} \right) A^j = \sum_{r+s=j} \frac{t^r}{r!} A^r \frac{u^s}{s!} A^s.$$

Así, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=0}^n \frac{1}{j!}(tA + uA)^j = \sum_{j=0}^n \sum_{r+s=j} \frac{t^r}{r!} A^r \frac{u^s}{s!} A^s = \left(\sum_{r=0}^n \frac{1}{r!} (tA)^r \right) \left(\sum_{s=0}^n \frac{1}{s!} (uA)^s \right).$$

Pasando al límite, con $n \rightarrow \infty$, resulta que $e^{tA+uA} = e^{tA}e^{uA}$, por lo tanto, $X(t+u) = e^{(t+u)A} = e^{tA+uA} = e^{tA}e^{uA} = X(t)X(u)$. \square

Fijados una matriz $A \in gl(n, \mathbb{R})$ y también un vector $x_0 \in \mathbb{R}^n$, el camino derivable

$$t \mapsto e^{tA}x_0$$

desempeña un papel prominente, como resumimos en el resultado principal:

Teorema I.7. Si $A \in gl(n, \mathbb{R})$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces el camino

$$x(t) = e^{tA}x_0,$$

define una única solución de $x' = Ax$ con la condición inicial $x(0) = x_0$.

Demostración. Por la proposición anterior el camino $x(t) = e^{tA}x_0$, es efectivamente solución de $x' = Ax$ con la condición inicial $x(0) = x_0$. \square

Ahora podemos establecer algunas propiedades elementales de la exponencial de matrices.

Teorema I.8. Dadas las matrices A y B en $gl(n, \mathbb{R})$, tenemos:

1. Si $A = QBQ^{-1}$, donde $Q \in GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in gl(n, \mathbb{R}) / A \text{ es invertible}\}$, entonces $e^A = Qe^BQ^{-1}$,
2. $AB = BA$ si, y sólo si, $e^Ae^B = e^{A+B} = e^Be^A$, y
3. La matriz e^A es invertible, para cada $A \in gl(n, \mathbb{R})$ con $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

Demostración. 1. Como $AQ = QB$, se sigue por inducción que $A^jQ = QB^j$, para $j \in \mathbb{N}$. Así,

$$\begin{aligned} e^AQ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j \right) Q = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j Q \right) \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} Q B^j \right) = Q \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} B^j \right) = Qe^B. \end{aligned} \quad (\text{I.14})$$

2. Si A, B son tales que $AB = BA$, entonces $(tA)B = B(tA)$, y por la parte 1 del teorema, obtenemos que $e^{tA}B = Be^{tA}$. Fijemos $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Definiendo $x(t) = e^{tA}e^{tB}x_0$, derivando obtenemos

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ae^{tA}e^{tB}x_0 + e^{tA}Be^{tB}x_0 = Ae^{tA}e^{tB}x_0 + Be^{tA}e^{tB}x_0 \\ &= (A + B)e^{tA}e^{tB}x_0 = (A + B)x(t), \end{aligned} \quad (\text{I.15})$$

esto muestra que $x(t)$ es solución de $x' = (A + B)x$ con condición inicial $x(0) = x_0$. Más como el camino $t \mapsto e^{t(A+B)}x_0$ es la única solución de $x' = (A + B)x$ con condición inicial $x(0) = x_0$; obtenemos $x(t) = e^{t(A+B)}x_0$, y así $e^{A+B}x_0 = e^Ae^Bx_0$. Como esto es cierto para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$, las matrices e^{A+B} y e^Ae^B resultan iguales. El recíproco es inmediato.

3. En particular, como $A - A = 0$ y $e^0 = I$, entonces $e^Ae^{-A} = e^{-A}e^A = I$, es decir $(e^A)^{-1} = e^{-A}$. \square

Ejemplo I.9. Calculemos la exponencial de la matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Como las matrices $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ conmutan, entonces por el teorema anterior obtenemos

$$\begin{aligned} \exp \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} &= \exp \left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \right] = \exp \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos b & \sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix} = e^a \begin{pmatrix} \cos b & \sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{I.16})$$

Ejemplo I.10. Ahora bien, si tomamos

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \text{o} \quad A = \begin{pmatrix} D & I_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & D & I_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D & I_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & D \end{pmatrix},$$

donde $D = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$; tenemos que la solución de la ecuación diferencial $x' = Ax$ con la condición inicial $x(0) = x_0$ está dada por:

$$x(t) = e^{tA}x_0 = \text{diag}(e^{t\lambda_1}, e^{t\lambda_2}, \dots, e^{t\lambda_n})x_0,$$

$$x(t) = e^{tA}x_0 = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!} & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} x_0, \quad \text{o}$$

$$x(t) = e^{at} \begin{pmatrix} \hat{D} & t\hat{D} & \frac{t^2}{2!}\hat{D} & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\hat{D} & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\hat{D} \\ 0 & \hat{D} & t\hat{D} & \cdots & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!}\hat{D} & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\hat{D} \\ 0 & 0 & \hat{D} & \cdots & \frac{t^{n-4}}{(n-4)!}\hat{D} & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!}\hat{D} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \hat{D} & t\hat{D} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \hat{D} \end{pmatrix} x_0,$$

respectivamente, donde $\hat{D} = \begin{pmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{pmatrix}$.

En conclusión, por lo que vimos en esta sección, si quisiéramos resolver la ecuación diferencial $x' = Ax$ con la condición inicial $x(0) = x_0$, debemos estudiar en detalle e^{tA} , pues la solución está dada explícitamente por $x(t) = e^{tA}x_0$.

I.2. Flujo de una ecuación lineal

Ya vimos que la solución general de la ecuación diferencial $x' = Ax$ con la condición inicial $x(0) = x_0$ está dada por $x(t) = e^{tA}x_0$.

Para calcular e^{tA} basta saber calcular e^{tP} , para alguna matriz P linealmente conjugada a la matriz $A \in gl(n, \mathbb{R})$.

Lema I.11. Si $P, Q \in gl(n, \mathbb{R})$ y $Q \in GL(n, \mathbb{R})$, entonces

$$e^{tQPQ^{-1}} = Qe^{tP}Q^{-1}.$$

Demostración. La afirmación se deduce inmediatamente del hecho $t(QPQ^{-1}) = Q(tP)Q^{-1}$. \square

Como la forma canónica de Jordan J es linealmente conjugada a la matriz dada $A \in gl(n, \mathbb{R})$ (ver apéndice A), entonces e^{tA} es linealmente conjugada a la matriz e^{tJ} y con la misma matriz de conjugación.

Ahora bien, si $y(t) = e^{tJ}y_0$ es solución de la ecuación diferencial $y' = Jy$ con $y(0) = y_0$, entonces

$$x(t) = Qe^{tJ}y_0 = Qe^{tJ}Q^{-1}Qy_0 = e^{tQJQ^{-1}}Qy_0 = e^{tA}x_0$$

es solución de la ecuación $x' = Ax$ con la condición inicial $x(0) = Qy_0 = x_0$, donde $A = QJQ^{-1}$.

Vamos a para un instante y observar de cerca los elementos de las matrices que constituyen los bloques de la exponencial de la forma canónica de Jordan $e^{Jt} = \text{diag}(e^{J_1t}, \dots, e^{J_qt})$ de una matriz $A \in gl(n, \mathbb{R})$.

Podemos garantizar que cada elemento de la matriz e^{tJ} es cero o de una de las formas

$$\frac{t^j}{j!}e^{at} \cos bt \quad \text{o} \quad \frac{t^j}{j!}e^{at} \sin bt, \quad (\text{I.17})$$

para algún $0 \leq j \leq n-1$ y $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda = a + ib$ es un autovalor complejo de A ; si $b = 0$ y $a = \lambda$, los dos tipos de arriba se reducen a la forma $\frac{t^j}{j!}e^{\lambda t}$. Estas observaciones nos permiten demostrar el siguiente resultado.

Teorema I.12. Sea $A \in gl(n, \mathbb{R})$. Cada coordenada de cualquier solución de $x' = Ax$ es una combinación lineal de las funciones

$$t \mapsto \frac{t^j}{j!}e^{at} \cos bt \quad \text{y} \quad t \mapsto \frac{t^j}{j!}e^{at} \sin bt,$$

con $0 \leq j \leq n-1$ y $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda = a + ib$ es un autovalor de A .

Demostración. Dada $A \in gl(n, \mathbb{R})$, tomamos una matriz $Q \in GL(n, \mathbb{R})$ tal que $Q^{-1}AQ = J$, donde $J = \text{diag}(J_1, \dots, J_q)$ es la forma canónica de Jordan real para A . Luego $x(t) = Qe^{tJ}Q^{-1}x(0)$ es la solución general de $x' = Ax$ y, por lo visto arriba, tenemos que cada entrada de cada una de las matrices e^{tJ_i} de los bloques de la diagonal de e^{tJ} es cero ó está dada por I.17. Al multiplicar e^{tJ} por Q , Q^{-1} y el vector columna $x(0)$, se producen combinaciones lineales de esas funciones. \square

Ejemplo I.13. Considere la ecuación diferencial $x' = Ax$, donde

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 & 4 & -4 \\ -3 & -9 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -5 & -14 & 2 & 9 & -4 \\ -3 & -9 & 0 & 7 & -4 \end{pmatrix} \in A \in gl(5, \mathbb{R}).$$

La forma canónica de Jordan real, J , de A está dada por

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \text{diag}(J_1, J_2),$$

donde,

$$J_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Luego, como en el teorema anterior obtenemos que

$$e^{tA} = Qe^{tJ}Q^{-1} = e^{-2t}Q \begin{pmatrix} e^t & te^t & \frac{t^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & 0 & 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix} Q^{-1},$$

y podemos ver que la solución general $x(t) = e^{tA}x(0)$ de la ecuación $x' = Ax$ es una combinación lineal de funciones e^{-t} , te^{-t} , $\frac{t^2}{2}e^{-t}$, $e^{-2t} \cos t$ y $e^{-2t} \sin t$, como garantiza el teorema I.12.

En el ejemplo anterior, podemos ver que todas las soluciones tienden al origen cuando $t \rightarrow +\infty$.

Desde el punto de vista cualitativo, más importante que hacer explícita la solución de una ecuación diferencial es, entender el comportamiento asintótico de las soluciones. En este objetivo, introducimos algunas definiciones.

Un difeomorfismo en \mathbb{R}^n es una aplicación $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ biyectiva, diferenciable y tal que su inversa g^{-1} también es diferenciable. El conjunto de los difeomorfismos en \mathbb{R}^n es denotado por $Dif(n)$. Observe que $Dif(n)$ es un grupo con la composición de aplicaciones.

Un Sistema Dinámico actuando en \mathbb{R}^n es un homomorfismo de grupos $\phi : \mathbb{R} \rightarrow Dif(n)$, es decir

$$\phi(t + s) = \phi(t) \circ \phi(s), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

Decimos que la familia $\{\phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ es un grupo a un parámetro de difeomorfismos.

En nuestro caso, dada una matriz $A \in gl(n, \mathbb{R})$ y fijando t , la matriz e^{tA} define un operador lineal $x \mapsto e^{tA}x$ de \mathbb{R}^n que es claramente diferenciable, y con inversa e^{-tA} lineal, por tanto diferenciable, en resumen, e^{tA} es un difeomorfismo.

Afirmamos que $\phi(t) = e^{tA}$ define un sistema dinámico, $\phi : \mathbb{R} \rightarrow Dif(n)$. En efecto, como $(tA)(sA) = (ts)A^2 = (sA)(tA)$, tenemos

$$e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}.$$

Desde el punto de vista de isomorfismos de \mathbb{R}^n , la multiplicación matricial es la composición, por tanto tenemos $e^{(t+s)A} = e^{tA} \circ e^{sA}$, y así concluimos que $t \mapsto e^{tA} \in gl(n, \mathbb{R})$ es un homomorfismo del grupo \mathbb{R} sobre el grupo de las matrices inversibles $GL(n, \mathbb{R})$ de $gl(n, \mathbb{R})$ y, de ese modo, e^{tA} define un sistema dinámico en \mathbb{R}^n .

Desde el punto de vista de los sistemas dinámicos, la aplicación e^{tA} es conocida como el Flujo del campo lineal A o entonces, de la ecuación diferencial $x' = Ax$. Más precisamente, el flujo de A es la aplicación

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\mapsto e^{tA}x. \end{aligned} \tag{I.18}$$

El origen $0 \in \mathbb{R}^n$ es siempre una singularidad del campo lineal A ; es decir, $A0 = 0$. En particular, el flujo de A es siempre constante en la singularidad: $e^{tA}0 = 0$ para cada $t \in \mathbb{R}$. El retrato fase del flujo e^{tA} se puede ver como un esbozo de algunas curvas parametrizadas $t \mapsto e^{tA}x$ para algunos puntos x elegidos; es decir, de algunas soluciones representativas de la ecuación diferencial.

I.3. Atractores lineales

Recordemos que, usando la regla de L'Hospital, tenemos que la exponencial crece más rápido que la polinomial; es decir,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^j e^{\lambda t} = 0$$

para cada $j \in \mathbb{N}$ y cualquier $\lambda < 0$. Lo mismo para las combinaciones lineales de esas expresiones.

En el ejemplo I.13, sin calcular explícitamente las soluciones de la ecuación $x' = Ax$ dada, observamos que, cuando $t \rightarrow +\infty$, todas las soluciones convergen al origen, ya que la parte real de todos sus autovalores son negativos. Esto no es casual, y podemos generalizar este resultado en el siguiente teorema.

Teorema I.14. Si todos los autovalores de la matriz $A \in gl(n, \mathbb{R})$ tienen parte real negativa, entonces cualquier solución de $x' = Ax$ tiende a $0 \in \mathbb{R}^n$, cuando $t \rightarrow \infty$. Recíprocamente, si cada solución de $x' = Ax$ tiende al origen, cuando $t \rightarrow \infty$, entonces $Re(\lambda) < 0$, para cada autovalor λ de la matriz A .

Demostración. Del teorema I.12 se desprende, que si $Re(\lambda) < 0$, para cada autovalor λ de la matriz A , entonces cualquier solución de $x' = Ax$ tiende al origen, cuando $t \rightarrow \infty$.

Recíprocamente, supongamos que existe λ autovalor de A tal que $Re(\lambda) \geq 0$, tomamos un autovector v asociado a λ y entonces $x(t) = e^{t\lambda}v$ es una solución de $x' = Ax$. De donde

1. Si $Re(\lambda) > 0$, entonces $|x(t)| = |e^{t\lambda}v| = e^{Re(\lambda)t}|v| \rightarrow \infty$, cuando $t \rightarrow \infty$,
2. Si $Re(\lambda) = 0$, entonces $|x(t)| = |e^{t\lambda}v| = |v| \neq 0$, no tiene límite cero cuando $t \rightarrow \infty$,

Luego, en ningún caso estas soluciones tienden a cero cuando $t \rightarrow \infty$. □

Ahora, introducimos alguna terminología importada de los sistemas dinámicos.

Definición I.15. Decimos que la singularidad $0 \in \mathbb{R}^n$ del campo lineal A es un Pozo para A si, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, vale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{tA}x = 0.$$

En este caso, incluso tenemos que $e^{tA} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Por otro lado decimos que A es un Atractor (hiperbólico) cuando todos los autovalores de A tienen parte real negativa. Por lo tanto, por lo visto antes puede ser resumido como sigue:

Teorema I.16. El origen de un campo lineal $A \in gl(n, \mathbb{R})$ es un pozo si, y sólo si, el campo A es un atractor.

Para algún propósito, pasamos a demostrar el siguiente resultado.

Corolario I.17. Para cada matriz $A \in gl(n, \mathbb{R})$, existe $\lambda > 0$ suficientemente grande tal que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t(A-\lambda I)}x = 0.$$

Demostración. Basta mostrar que para cada $A \in gl(n, \mathbb{R})$, existe $\lambda > 0$ suficientemente grande tal que $A - \lambda I$ es un atractor. En el espacio $gl(n, \mathbb{R})$ tenemos que $\lim_{s \rightarrow 0} (sA - I) = -I$ y es claro que el único autovalor de $-I$ es -1 . Es posible mostrar que los autovalores dependen continuamente de las entradas de la matriz, de modo que podemos escoger $s_0 > 0$ tal que la matriz $sA - I$ tiene todos los autovalores con parte real $< -\frac{1}{2}$ para cada $0 < s \leq s_0$. Observe que γ es un autovalor de $sA - I$ si, y sólo si, $\lambda\gamma$ es un autovalor de $\lambda(sA - I)$. Así, para cada $\lambda \geq \frac{1}{s_0}$ tenemos $0 < \frac{1}{\lambda} = s \leq s_0$ y concluimos que todos los autovalores de

$$A - \lambda I = \lambda \left(\frac{1}{\lambda} A - I \right) = \lambda (sA - I)$$

tiene parte real menor que $-\frac{1}{2s_0}$ y, por lo tanto, $A - \lambda I$ es un atractor. \square

Así, el conocimiento del signo (de la parte real) de los autovalores de A da la información sobre el comportamiento de las soluciones de $x' = Ax$ a largo plazo. Si fuera más fácil calcular los autovalores de A que las soluciones, eso sería bastante útil.

La equivalencia del concepto topológico de pozo con el concepto algebraico de atractor conduce a una versión analítica del comportamiento de un campo lineal.

Definición I.18. Decimos que el flujo e^{tA} de A es Contractivo si, existen constantes $C > 0$ y $\tau > 0$ tales que

$$|e^{tA}x| \leq Ce^{-\tau t}|x|, \quad (\text{I.19})$$

para todo $t \geq 0$ y todo $x \in \mathbb{R}^n$.

El concepto de flujo de un campo lineal, congrega en una sola aplicación todas las soluciones de la ecuación diferencial definida por el campo. Vemos así, que el flujo de $x' = Ax$ es contractivo si todas las soluciones convergen al origen uniforme y exponencialmente. Estas observaciones permiten estudiar el resultado central de este capítulo.

Teorema I.19. Sea $A \in gl(n, \mathbb{R})$ un campo lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. El origen es un pozo para A .
2. A es un atractor.
3. El flujo de A es contractivo.

Demostración. Si A es un atractor, podemos escoger una constante $\tau > 0$ tal que la parte real de cada autovalor de A es menor que $-\tau$ (ver apéndice B). Luego es posible probar que existe $C \geq 1$ tal que

$$\|e^{tA}\| \leq Ce^{-\tau t},$$

para cada $t \geq 0$, donde $\|\cdot\|$ es la norma del operador de la matriz. Por lo tanto,

$$|e^{tA}x| \leq \|e^{tA}\||x| \leq Ce^{-\tau t}|x|,$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y $t \geq 0$. Esto muestra que el flujo de A es contractivo y, por tanto, vale que (2) \Rightarrow (3).

Si el flujo de A es contractivo, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{tA}x| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} C e^{-\tau t} |x| = C|x| \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\tau t} = 0,$$

de modo que el origen es un pozo. Así, vale que (3) \Rightarrow (1). El teorema I.16 afirma que (1) \Leftrightarrow (2). \square

Ejemplo I.20. *El flujo asociado al campo lineal*

$$x' = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in gl(3, \mathbb{R}).$$

es contractivo, pues los autovalores de A son $-3, -2 \pm i$.

El teorema anterior afirma que, todas las soluciones convergen al origen si, y sólo si, convergen al origen uniforme y exponencialmente. A partir de ese resultado es posible demostrar que todos los atractores en $gl(n, \mathbb{R})$ son topológicamente conjugados, un concepto a estudiar en la próxima sección.

I.4. Conjugación topológica de sistemas lineales

Consideremos dos flujos que tienen las mismas propiedades cualitativas, luego son topológicamente similares, si podemos igualar las trayectorias de uno con las trayectorias del otro. Existen dos formas de hacer esta dependencia en si exigimos que la conjugación iguale el tiempo de parametrización de los dos flujos o permita una reparametrización. La condición fuerte requiere que los flujos se igualen con una reparametrización.

Definición I.21. *Decimos que dos flujos φ_t y ψ_t en un espacio M (M puede ser \mathbb{R}^n o alguna variedad) son Topológicamente Conjugados si, existe un homeomorfismo $h : M \rightarrow M$ tal que h lleva trayectorias de φ_t a trayectorias de ψ_t mientras preserva su orientación. Más precisamente, φ_t y ψ_t son topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo $h : M \rightarrow M$ y una (reparametrización) función $\alpha : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h \circ \varphi_{\alpha(t,x)}(x) = \psi_t \circ h(x)$ para todo $x \in M$ y para*

todo $t \in \mathbb{R}$, donde suponemos que para cada x fijado $\alpha(t, x)$ es monótona creciente en t y sobre todo \mathbb{R} .

Usamos estos conceptos repetidamente en nuestro estudio de flujos. En general, no es posible preservar la parametrización cuando hacemos perturbaciones. El siguiente teorema prueba que dos flujos lineales con el mismo espacio contracción dimensional y los mismos espacios de expansión son realmente conjugados; es decir, es posible preservar la parametrización para este caso.

Teorema I.22. Sean A y $B \in gl(n, \mathbb{R})$.

1. Supongamos que todos los autovalores de A y B tienen parte real negativa. Entonces los dos flujos lineales e^{tA} y e^{tB} son topológicamente conjugados.
2. Suponiendo que todos los autovalores de A y B tienen parte real no cero y la dimensión de la suma directa de todos los auto-espacios generalizados con parte real negativa son los mismos para A y B . (Así la dimensión de la suma directa de todos los auto-espacios generalizados con parte real positiva es el mismo para A y B .) Entonces los dos flujos lineales e^{tA} y e^{tB} son topológicamente conjugados.
3. En particular, si todos los autovalores de A tienen parte real no cero y B está bastante cerca de A , entonces los dos flujos lineales e^{tA} y e^{tB} son topológicamente conjugados.

En contraste al resultado anterior que demuestra que muchas contracciones lineales diferentes son topológicamente conjugados, existe el siguiente resultado estándar a cerca de conjugación lineal que implica que muy pocas ecuaciones diferenciales lineales son linealmente conjugados.

Teorema I.23. Sean A y $B \in gl(n, \mathbb{R})$, y suponer que los dos flujos e^{tA} y e^{tB} son linealmente conjugados; es decir, existe una matriz $M \in GL(n, \mathbb{R})$ con $e^{tB} = Me^{tA}M^{-1}$. Entonces, A y B tienen los mismos autovalores.

Demostración. Derivando la igualdad $e^{tB} = Me^{tA}M^{-1}$ con respecto a t en $t = 0$, obtenemos que $B = MAM^{-1}$. Es decir, A y B son similares y luego es claro que tienen los mismos polinomios característicos, esto implica que tienen los mismos autovalores. \square

En el caso en que h sea un difeomorfismo de clase C^r , ($1 \leq r \leq \infty$), entonces decimos que los flujos e^{tA} y e^{tB} , de A y B respectivamente, son C^r conjugados y h es llamado conjugación C^r .

El siguiente resultado nos dice esencialmente que $gl(n, \mathbb{R})$ sólo admite dos clasificaciones: la topológica y la lineal.

Teorema I.24. Sean $A, B \in gl(n, \mathbb{R})$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Los flujos e^{tA} y e^{tB} , de A y B respectivamente, son C^1 conjugados;
2. existe $P \in GL(n, \mathbb{R})$ tal que $PA = BP$;
3. los flujos e^{tA} y e^{tB} son linealmente conjugados.

Demostración. ($1 \Rightarrow 2$) Por hipótesis existe $h \in Dif(n)$ de clase C^1 tal que

$$h(e^{tA}x) = e^{tB}h(x), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Consideremos dos casos:

Caso 1. $h(0) = 0$. Derivando con respecto a t la expresión anterior, tenemos

$$h'(e^{tA}x)Ae^{tA}x = Be^{tB}h(x), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n;$$

evaluando en $t = 0$, obtenemos

$$h'(x)Ax = Bh(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$; de la expresión anterior tenemos

$$h'(\lambda x)A(\lambda x) = Bh(\lambda x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

es decir

$$h'(\lambda x)Ax = B \left[\frac{h(\lambda x) - h(0)}{\lambda} \right], \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{I.20})$$

Por otro lado, como $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable en 0, tenemos

$$h(p) = h(0) + h'(0)p + r(p), \quad \forall p \in \mathbb{R}^n,$$

donde $\lim_{p \rightarrow 0} \frac{r(p)}{|p|} = 0$. Haciendo $p = \lambda x$, donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, tenemos

$$\frac{h(\lambda x) - h(0)}{\lambda} = h'(0)x + \frac{r(\lambda x)}{\lambda}$$

Luego tomando límite en I.20 cuando $\lambda \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} h'(\lambda x)Ax &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(B \left[\frac{h(\lambda x) - h(0)}{\lambda} \right] \right), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\ h'(0)Ax &= Bh'(0)x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{I.21}$$

Tenemos que $h'(0)A = Bh'(0)$, donde $h'(0) \in GL(n, \mathbb{R})$.

Caso 2. $h(0) = c \neq 0$. Consideremos la función $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $H(x) = h(x) - c$. Es claro que $H \in Dif(\mathbb{R}^n)$ y $H(0) = 0$. Además,

$$\begin{aligned} H(e^{tA}x) &= h(e^{tA}x) - c = e^{tB}h(x) - c = e^{tB}(H(x) + c) - c \\ &= e^{tB}H(x) + e^{tB}c - c. \end{aligned} \tag{I.22}$$

Por otro lado

$$e^{tB}c = e^{tB}h(0) = h(e^{tA}0) = h(0) = c,$$

reemplazando lo anterior en I.22, obtenemos

$$H(e^{tA}x) = e^{tB}H(x), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

De esta manera la función H cumple todas las condiciones para poder aplicar el caso 1.

(2 \Rightarrow 3) Consideremos $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la transformación lineal asociada a la matriz P , es decir

$h(x) = Px$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Como $P \in GL(n, \mathbb{R})$, tenemos que $h \in GL(n, \mathbb{R})$, luego

$$\begin{aligned} h(e^{tA}x) &= Pe^{tA}x = Pe^{tP^{-1}BP}x = Pe^{P^{-1}(tB)P}x \\ &= PP^{-1}e^{tB}Px = e^{tB}Px \\ &= e^{tB}h(x), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n; \end{aligned} \tag{I.23}$$

es decir, los flujos e^{tA} y e^{tB} son linealmente conjugados.

(3 \Rightarrow 1) No hay nada que probar puesto que $GL(n, \mathbb{R}) \subset Dif(n)$. □

Remarca I.25. 1. De la demostración del teorema anterior, se desprende que toda $h \in Dif(n)$ conjugación C^1 entre e^{tA} y e^{tB} induce una conjugación lineal entre e^{tA} y e^{tB} , la cual viene dada por $h'(0) \in GL(n, \mathbb{R})$.

2. En álgebra lineal se dice que dos matrices $A, B \in gl(n, \mathbb{R})$ son similares si, y solamente si, existe $P \in GL(n, \mathbb{R})$ tal que $PA = BP$. La equivalencia 2 \Leftrightarrow 3 nos dice que los flujos e^{tA} y e^{tB} son linealmente conjugados si, y sólo si, A y B son similares.

3. Sabemos que toda matriz $A \in gl(n, \mathbb{R})$ es similar a su forma canónica de Jordan $J \in gl(n, \mathbb{R})$ (ver Apéndice A). Luego cada clase de equivalencia lineal admite un representante simple en el sentido que su exponencial (y por tanto su regla de correspondencia) queda explícitamente determinada.

CAPÍTULO II

Teoría de Floquet

II.1. Introducción

La fascinación humana con fenómenos periódicos gobernados por ecuaciones diferenciales como la luna creciente y la luna menguante, se remonta a la prehistoria. Aquí consideraremos los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales cuyos coeficientes son funciones periódicas. Esta clase de ecuaciones diferenciales es tan grande como los sistemas con coeficientes constantes, y en general la descripción explícita de las soluciones no será obtenida. Sin embargo, la periodicidad impone algún tipo de estructura en las soluciones, una estructura que puede ser descrita usando un poco de álgebra lineal.

Consideremos la ecuación diferencial

$$x' = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

donde $A : \mathbb{R} \rightarrow gl(n, \mathbb{R})$ es continua y periódica; es decir, cuando la aplicación matricial A es continua y existe $T > 0$ (periodo) tal que $A(t+T) = A(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Esta ecuación diferencial

recibe el nombre de ecuación diferencial con coeficientes periódicos.

El matemático francés Gaston Floquet (1883), primero desarrolló la teoría general de sistemas lineales periódicos y dió un estudio sistemático de tales sistemas. En general, las soluciones de sistemas lineales periódicos no pueden ser expresadas en términos de funciones elementales, pero la linealidad y periodicidad de $A(t)$ permiten que el comportamiento de todas las soluciones para todos los tiempos puede ser deducida de la solución general en un intervalo de longitud T .

Como motivación a los resultados centrales de este capítulo analizaremos, primero, el caso de las ecuaciones diferenciales con coeficientes periódicos en \mathbb{R} .

En este contexto el sistema con coeficientes periódicos $x' = A(t)x$, $A(t + T) = A(t)$, $t \in \mathbb{R}$, toma la forma

$$x' = a(t)x, \quad a(t + T) = a(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R},$$

cuya solución general está dada por

$$x(t) = \exp \left[\int_0^t a(s) ds \right] x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

La función $\varphi(t) = \exp \left[\int_0^t a(s) ds \right]$ juega un rol primordial para el problema, pues la solución general toma la forma $x(t) = \varphi(t)x_0$.

Por otro lado, como

$$\int_0^{t+T} a(s) ds = \int_0^T a(s) ds + \int_T^{t+T} a(s) ds,$$

usando la periodicidad de $a(s)$, $a(s + T) = a(s)$, tenemos

$$\int_T^{t+T} a(s) ds = \int_0^t a(s) ds,$$

de donde

$$\varphi(t + T) = \exp \left[\int_0^T a(s) ds \right] \exp \left[\int_T^{t+T} a(s) ds \right] = \varphi(T)\varphi(t),$$

en particular,

$$\varphi(nT) = \varphi(T)^n.$$

El número $\varphi(T) = e^{\sigma T}$ será llamado *Multiplicador de Floquet*, mientras que σ será llamado *Exponente de Floquet*. Como $\varphi(T) \neq 0$, entonces

$$\varphi(T) = e^{\log \varphi(T)} = e^{\sigma T},$$

de donde σ está determinado por la constante

$$\sigma = \frac{1}{T} \log \varphi(T) + \frac{2k\pi i}{T}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Para determinar el comportamiento de las soluciones entorno al origen, punto de equilibrio de la ecuación diferencial, definimos la aplicación $v(t) = \varphi(t)e^{-\sigma t}$, y tenemos

$$v(t+T) = \varphi(t+T)e^{-\sigma(t+T)} = \varphi(t)e^{-\sigma t} = v(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

es decir, $v(t)$ es periódica y acotada.

Por lo tanto, la solución general toma la forma

$$x(t) = \varphi(t)x_0 = v(t)e^{\sigma t}x_0;$$

de donde, si $\operatorname{Re}\sigma < 0$ las soluciones tienden a cero, mientras que si $\operatorname{Re}\sigma > 0$ las soluciones no están acotadas cuando $t \rightarrow \infty$. De modo que, las decisiones se basan en el valor σ .

Ejemplo II.1. Consideremos la ecuación diferencial

$$x' = (\delta + \cos t)x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

En este caso, $a(t) = \delta + \cos t$, es periódica con periodo $T = 2\pi$. Además,

$$\int_0^{2\pi} a(s)ds = \int_0^{2\pi} (\delta + \cos t)ds = \delta 2\pi,$$

y luego el exponente de Floquet es $\sigma = \delta$ y las soluciones tienden al origen cuando $t \rightarrow \infty$ si $\delta < 0$, y no están acotadas cuando $\delta > 0$.

II.2. Teorema de Floquet

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria en \mathbb{C}^n

$$X' = A(t)X, \quad X \in \mathbb{C}^n \quad (\text{II.1})$$

donde $A : \mathbb{R} \rightarrow gl(n, \mathbb{C})$ es continua y periódica; es decir, cuando la función matricial A es continua y existe $T > 0$ (periodo) tal que $A(t+T) = A(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Una observación básica acerca de esta ecuación diferencial es que, si $X(t)$ satisface el sistema II.1, entonces también $Y(t) = X(t+T)$ satisface II.1, ya que

$$Y'(t) = X'(t+T) = A(t+T)X(t+T) = A(t)Y(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Así, si \mathbf{X} es una base de soluciones (matriz fundamental) para el sistema II.1, entonces también lo es \mathbf{Y} , donde $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}(t+T)$. En efecto, $\det \mathbf{Y}(t) = \det \mathbf{X}(t+T) \neq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$ y, además

$$\mathbf{Y}'(t) = \mathbf{X}'(t+T) = A(t+T)\mathbf{X}(t+T) = A(t)\mathbf{Y}(t).$$

Este hecho conduce a un resultado fundamental para la representación de una base \mathbf{X} de soluciones para el sistema II.1.

Teorema II.2 (Teorema de Floquet). *Cada base \mathbf{X} de soluciones de II.1 puede ser representado como*

$$\mathbf{X}(t) = P(t)e^{Rt}, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}, \quad (\text{II.2})$$

donde $P : \mathbb{R} \rightarrow gl(n, \mathbb{C})$ es una aplicación de clase C^1 tal que $P(t)$ es invertible y $P(t+T) = P(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$ con $T > 0$, y además $R \in gl(n, \mathbb{C})$.

Demostración. Como $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}(t+T)$ también es base de soluciones de II.1, entonces $\mathbf{X}(t+T) = \mathbf{X}(t)C$ para algún $C \in GL(n, \mathbb{C})$. En la siguiente sección se estudiará el teorema que muestra que, para cada $C \in GL(n, \mathbb{C})$, existe una matriz $R \in gl(n, \mathbb{C})$ tal que $e^{RT} = C$.

Con este hecho, resulta que

$$\mathbf{X}(t+T) = \mathbf{X}(t)e^{RT}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (\text{II.3})$$

Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R} &\rightarrow gl(n, \mathbb{C}) \\ t &\mapsto \mathbf{X}(t)e^{-Rt} \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

entonces

$$P(t+T) = \mathbf{X}(t+T)e^{-R(t+T)} = \mathbf{X}(t)e^{RT}e^{-R(t+T)} = \mathbf{X}(t)e^{-Rt} = P(t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Por otro lado, como $\mathbf{X}(t)$ y e^{-Rt} son inversibles, lo es también $P(t)$ y además por la definición de P tenemos que $P \in C^1(\mathbb{R}, gl(n, \mathbb{C}))$. \square

Ejemplo II.3. Consideremos la ecuación diferencial

$$x' = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad A(t) = \begin{pmatrix} -2 \sin^2(t) & 1 - 2 \sin t \cos t \\ -1 - \sin t \cos t & -2 \cos^2 t \end{pmatrix},$$

donde $A(t)$ es periódica de periodo $T = 2\pi$.

Una base \mathbf{X} de soluciones para este sistema está dada por

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & e^{-2t} \sin t \\ -\sin t & e^{-2t} \cos t \end{pmatrix}.$$

Se debe hallar la matriz $R \in gl(2, \mathbb{C})$ tal que $e^{R2\pi} = \mathbf{X}^{-1}(0)\mathbf{X}(2\pi) = I\mathbf{X}(2\pi) = \mathbf{X}(2\pi) = C$, con

$$\mathbf{X}(2\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-4\pi} \end{pmatrix}.$$

Tomando

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \in gl(2, \mathbb{C})$$

obtenemos que $e^{R2\pi} = \mathbf{X}(2\pi)$.

Luego, por el teorema de Floquet, la base \mathbf{X} se representa como

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix},$$

donde,

$$P(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad y \quad e^{Rt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

En la siguiente sección se darán técnicas para construir la matriz $R \in gl(n, \mathbb{C})$.

Por otra parte, el Teorema de Floquet nos lleva a un resultado muy importante que relaciona sistemas con coeficientes periódicos y sistemas con coeficientes constantes.

Teorema II.4 (Teorema de Floquet y Lyapunov). *El sistema II.1 es reducible a un sistema con coeficientes constantes.*

Demostración. Como una base \mathbf{X} de soluciones para II.1 satisface $\mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X}$, la sustitución de $\mathbf{X}(t) = P(t)e^{Rt}$ conduce a

$$P'(t)e^{Rt} + P(t)Re^{Rt} = A(t)P(t)e^{Rt},$$

ó $P' + PR = AP$.

Si hacemos $X = PY$, reemplazando en II.1, obtenemos $P'Y + PY' = AX = APY = P'Y + PRY$, de donde obtenemos el sistema

$$Y' = RY. \tag{II.5}$$

Así, la sustitución $X = PY$ transforma el sistema II.1 al sistema con coeficientes constantes II.5. En efecto, la aplicación $Y \mapsto X = PY$ es un isomorfismo entre el conjunto de soluciones de II.5 y el conjunto $\mathcal{S} = \{X \in \mathbb{C}^n / \text{tales que } X \text{ es solución de II.1}\}$. \square

Ejemplo II.5. *El sistema con coeficientes constantes correspondiente al ejemplo II.3 es*

$$Y' = RY, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \in gl(2, \mathbb{R}).$$

II.3. El logaritmo de una matriz invertible

En esta sección estudiaremos el logaritmo de una matriz invertible y posteriormente demostraremos el teorema que usamos en la demostración del teorema de Floquet.

Definición II.6. *Decimos que la matriz $B \in gl(n, \mathbb{C})$ es el logaritmo de C si $e^B = C$.*

El teorema de Floquet hace uso del hecho de que cada matriz $C \in GL(n, \mathbb{C})$ tiene un logaritmo, que es el siguiente resultado. La prueba hace uso de algunas técnicas de series potenciales.

Teorema II.7. *Dado $C \in GL(n, \mathbb{C})$, existe $B \in gl(n, \mathbb{C})$ tal que $e^B = C$.*

Demostración. Sea J la forma canónica de Jordan de C , luego existe $Q \in GL(n, \mathbb{C})$ tal que $J = Q^{-1}CQ$. Si existiese un K tal que $e^K = J$, entonces se sigue que $C = QJQ^{-1} = Qe^KQ^{-1} = e^{QKQ^{-1}} = e^B$, donde $B = QKQ^{-1}$. Por lo tanto, basta hallar una matriz K tal que $e^K = J$.

Luego, una mayor reducción es posible gracias que a la matriz J tiene la forma diagonal de bloques, $J = \text{diag}(J_1, \dots, J_q)$. Si K_j satisface $e^{K_j} = J_j$, $j = 1, \dots, q$, entonces con $K = \text{diag}(K_1, \dots, K_q)$, tenemos

$$e^K = \text{diag}(e^{K_1}, \dots, e^{K_q}) = \text{diag}(J_1, \dots, J_q) = J.$$

Como C es invertible, ninguno de sus autovalores μ_j es 0. Por lo tanto, es suficiente hallar un K tal que $e^K = J$ cuando J es una matriz de 1×1

$$J = (\mu), \quad \mu \neq 0 \tag{II.6}$$

ó cuando J es una matriz de $r \times r$

$$J = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu \end{pmatrix} = \mu I_r + N, \quad r > 1, \quad \mu \neq 0. \quad (\text{II.7})$$

En el caso II.6, elegimos K como cualquier valor de $\log(\mu)$. Por ejemplo, $\mu = |\mu|e^{i\theta}$, $-\pi < \theta \leq \pi$ entonces elegimos $\log(\mu) = \log|\mu| + i\theta$, el valor principal de $\log(\mu)$.

En el caso II.7, escribimos

$$J = \mu \left(I_r + \frac{N}{\mu} \right),$$

y notamos que $\left(\frac{N}{\mu}\right)^r = \frac{1}{\mu^r} N^r = 0$.

Encontremos una matriz $l\left(\frac{N}{\mu}\right)$ tal que

$$\exp \left[l \left(\frac{N}{\mu} \right) \right] = I_r + \frac{N}{\mu}, \quad (\text{II.8})$$

y luego la matriz

$$K = \log(\mu)I_r + l\left(\frac{N}{\mu}\right)$$

será tal que $e^K = J$. La determinación de $l\left(\frac{N}{\mu}\right)$ está basado en la serie potencial

$$l(A) = \log(I + A) = A - \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} - \frac{A^4}{4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{A^k}{k},$$

que es absolutamente convergente para $\|A\| < 1$, $A \in gl(n, \mathbb{C})$. Además, como

$$I + A = \exp[l(A)] = \exp[\log(I + A)], \quad (\text{II.9})$$

para todo $A \in gl(n, \mathbb{C})$ con $\|A\| < 1$, (ver apéndice B).

Como $\left(\frac{N}{\mu}\right)^r = 0$, por lo tanto la suma

$$l\left(\frac{N}{\mu}\right) = \left(\frac{N}{\mu}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{N}{\mu}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{N}{\mu}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{N}{\mu}\right)^4 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \left(\frac{N}{\mu}\right)^k$$

es una suma finita, por tanto es convergente. Ahora calculamos $\exp\left[l\left(\frac{N}{\mu}\right)\right]$ como en II.9, con la misma reordenación de los términos. Como los coeficientes después de reordenar coinciden con aquellas en II.9 y luego II.8 se obtiene. \square

Ejemplo II.8. Encuentre el logaritmo de la matriz invertible

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De acuerdo a la construcción hecha en la demostración del anterior teorema es suficiente tomar

$$B = \begin{pmatrix} \log(-2) & 0 & 0 \\ 0 & \log(-1) & -1 \\ 0 & 0 & \log(-1) \end{pmatrix} \in gl(3, \mathbb{C}),$$

Sin dificultad vemos que $e^B = C$; es decir, $B \in gl(3, \mathbb{C})$ es el logaritmo de la matriz invertible C .

Por otro lado, la ecuación II.3 muestra que

$$C = e^{RT} = \mathbf{X}^{-1}(0)\mathbf{X}(T), \quad (\text{II.10})$$

así R puede ser calculado una vez que conozcamos \mathbf{X} en 0 y T . También, por la periodicidad de P este es determinado de modo único por su valor en $[0, T]$. Así, una base \mathbf{X} está determinado sobre todo \mathbb{R} por II.2 una vez que esta es conocida sobre $[0, T]$.

II.4. Multiplicadores de Floquet

Las matrices C y R determinados en el teorema de Floquet y II.10 dependen de la base \mathbf{X} . Si \mathbf{X}_1 es otra base para \mathcal{S} (el conjunto de soluciones de II.1), tenemos que $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}T$ para alguna matriz $T \in GL(n, \mathbb{C})$. Si

$$\mathbf{X}_1(t+T) = \mathbf{X}_1(t)C_1, \quad t \in \mathbb{R},$$

se tiene que

$$C_1 = \mathbf{X}_1^{-1}(0)\mathbf{X}_1(T) = T^{-1}\mathbf{X}^{-1}(0)\mathbf{X}(T)T = T^{-1}CT,$$

luego C_1 es similar a C . Así los autovalores de C , junto con sus multiplicidades, dependen sólo de $A(t)$ y son independientes de la base escogida.

Definición II.9. Los autovalores μ de $C = e^{RT}$ son llamados, frecuentemente, multiplicadores de Floquet del sistema II.1.

Este nombre es sugerido por la siguiente propiedad.

Teorema II.10. Sea X solución no trivial de II.1. Entonces X satisface

$$X(t+T) = \mu X(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (\text{II.11})$$

si, y sólo si, μ es un multiplicador de Floquet para II.1.

En particular, II.1 posee solución no trivial periódica, de periodo T si, y sólo si, $\mu = 1$ es un multiplicador para II.1.

Demostración. Si \mathbf{X} es una base para II.1, tenemos que la solución no trivial $X = \mathbf{X}v$, $v \neq 0$, satisface II.11 si, y sólo si,

$$X(t+T) = \mathbf{X}(t+T)v = \mathbf{X}(t)Cv = \mu X(t) = \mu \mathbf{X}(t)v = \mathbf{X}(t)(\mu v),$$

donde $Cv = \mu v$. □

La importancia de este teorema radica en que el multiplicador de Floquet μ , adquiera un valor específico que implique la existencia de soluciones periódicas de periodo T .

Ejemplo II.11. Consideremos el sistema periódico

$$x' = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & h(t) \end{pmatrix}, \quad h(t) = \frac{\cos t + \sin t}{2 + \sin t - \cos t}$$

Es claro que $A(t)$ es periódica de periodo 2π , pues $h(t)$ lo es.

Una base \mathbf{X} , para el sistema está dada por

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} -2 - \sin t & e^t \\ 2 + \sin t - \cos t & 0 \end{pmatrix}.$$

Además, para todo $t \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{X}^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 0 & h_1(t) \\ e^{-t} & h_2(t) \end{pmatrix},$$

donde

$$h_1(t) = \frac{1}{2 + \sin t - \cos t} \quad y \quad h_2(t) = \frac{2 + \sin t}{e^t(2 + \sin t - \cos t)}$$

Por otro lado, como $C = \mathbf{X}^{-1}(0)\mathbf{X}(2\pi)$, entonces

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & e^{2\pi} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi} \end{pmatrix}.$$

Puede constatarse que, los autovalores de C son $\mu = 1$ y $\mu = e^{2\pi}$, y estos son los Multiplicadores de Floquet del sistema.

Por el teorema anterior, tenemos que $\mu = 1$ es el multiplicador para el cual $x(t+2\pi) = x(t)$, $t \in \mathbb{R}$; es decir, esta solución es periódica de periodo 2π . Además, esta solución está dada, explícitamente,

por

$$x(t) = \begin{pmatrix} -2 - \sin t \\ 2 + \sin t - \cos t \end{pmatrix}.$$

Si bién está solución es efectivamente periódica, no está del todo claro que se obtenga directamente de considerar que $\mu = 1$. Para ello requerimos introducir otros conceptos, los cuales veremos más adelante.

Si \mathbf{X} es una base para \mathcal{S} satisfaciendo $\mathbf{X}(0) = I_n$. Se tiene que, $C = e^{RT} = \mathbf{X}(T)$, y los multiplicadores de Floquet para II.1 son los autovalores de $\mathbf{X}(T)$.

Sea $\mathcal{S}(\mu)$ el conjunto de todos los $X \in \mathcal{S}$ satisfaciendo II.11; es decir

$$\mathcal{S}(\mu) = \{X \in \mathcal{S} / X(t+T) = \mu X(t), t \in \mathbb{R}\}.$$

La estructura de $\mathcal{S}(\mu)$ está dada en el siguiente teorema.

Teorema II.12. Para cada $\mu \in \mathbb{C}$ multiplicador del sistema II.1, tenemos

1. $\mathcal{S}(\mu)$ es un subespacio vectorial de \mathcal{S} ,
2. $\dim \mathcal{S}(\mu) = \dim \mathcal{E}(\mathbf{X}(T), \mu) = \dim \text{Ker}(\mathbf{X}(T) - \mu I_n)$; donde $\mathcal{E}(\mathbf{X}(T), \mu)$ es el auto-espacio de $\mathbf{X}(T)$ inducido por μ .

Demostración. Sea $\mu \in \mathbb{C}$ fijo, multiplicador de II.1.

1. Es claro que, $\mathcal{S}(\mu) \neq \emptyset$ pues $X \equiv 0 \in \mathcal{S}(\mu)$, además si $X, Y \in \mathcal{S}(\mu)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, se tiene

$$\begin{aligned} (\alpha X + \beta Y)(t+T) &= \alpha X(t+T) + \beta Y(t+T) \\ &= \alpha \mu X(t) + \beta \mu Y(t) \\ &= \mu(\alpha X + \beta Y)(t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{II.12}$$

es decir, $\alpha X + \beta Y \in \mathcal{S}(\mu)$.

2. Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned}\psi : \mathcal{E}(\mathbf{X}(T), \mu) &\rightarrow \mathcal{S}(\mu) \\ v &\mapsto X = \mathbf{X}v.\end{aligned}\tag{II.13}$$

Afirmamos que ψ es un isomorfismo del auto-espacio de $\mathbf{X}(T)$ para μ sobre $\mathcal{S}(\mu)$. En efecto; ψ es lineal, pues si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, y $u, v \in \mathcal{E}(\mathbf{X}(T), \mu)$,

$$\psi(\alpha u + \beta v) = \mathbf{X}(\alpha u + \beta v) = \alpha \mathbf{X}u + \beta \mathbf{X}v = \alpha \psi(u) + \beta \psi(v),$$

además, como \mathbf{X} es invertible se tiene que ψ es uno a uno; pues $\psi(u) = \psi(v)$, ó $\mathbf{X}u = \mathbf{X}v$ si, y sólo si, $u = v$. Por otro lado, ψ es sobreyectiva; pues si $X \in \mathcal{S}(\mu)$, $X = \mathbf{X}v$, $v \neq 0$, entonces por el teorema II.10, se tiene que v es autovector de $C = \mathbf{X}(T)$ con autovalor μ ; luego tomamos $v \in \mathcal{E}(\mathbf{X}(T), \mu)$ tal que $\psi(v) = X$. Por tanto, ψ es un isomorfismo; además, como $\mathcal{E}(\mathbf{X}(T), \mu)$ y $\mathcal{S}(\mu)$ son espacios vectoriales de dimensión finita, estos espacios son isomorfos si, y sólo si, tienen la misma dimensión. \square

II.5. El comportamiento de las soluciones

En esta sección, consideremos la base \mathbf{X} para II.1 satisfaciendo $\mathbf{X}(0) = I_n$. Los autovalores de la matriz $R \in gl(n, \mathbb{C})$ tal que $\mathbf{X}(T) = e^{RT}$ son llamados Exponentes de Floquet (exponentes característicos) para el sistema II.1. Sea J la forma canónica de Jordan para R , esto es $J = Q^{-1}RQ$ para alguna matriz $Q \in GL(n, \mathbb{C})$ y $J = \text{diag}(J_1, \dots, J_q)$, donde J_i es matriz de $r_i \times r_i$; con

$J_i = (\lambda_i)$ si $r_i = 1$, y

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad \text{si } r_i > 1.$$

Se tiene $\mathbf{X}(T) = e^{RT} = \exp(QJQ^{-1}T) = Q \exp(JT)Q^{-1}$, y como

$$\exp(JT) = \text{diag}(\exp(J_1T), \dots, \exp(J_qT)),$$

entonces, los autovalores de $\mathbf{X}(T)$, que son los multiplicadores de Floquet para II.1, coinciden con los autovalores de $\exp(JT)$, los cuales están dados por $\exp(\lambda_j T)$.

Por lo tanto, obtenemos

$$\mu_j = \exp(\lambda_j T), \quad j = 1, \dots, n.$$

Por otro lado, si R_1 es otra matriz tal que $\exp(R_1 T) = \mathbf{X}(T)$, con autovalores ν_j , tenemos

$$\mu_j = \exp(\nu_j T), \quad j = 1, \dots, n,$$

y se sigue que

$$\lambda_j = \nu_j + \frac{2\pi ik}{T}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Así, los exponentes característicos no están determinados de manera única para II.1. Pero de $\mu_j = \exp(\lambda_j T)$, $j = 1, \dots, n$, se obtiene

$$|\mu_j| = \exp(\text{Re}(\lambda_j)T), \quad \text{Re}(\lambda_j) = \frac{1}{T} \log |\mu_j|, \quad j = 1, \dots, n.$$

Por la representación (Teorema de Floquet) para \mathbf{X} y la forma canónica de Jordan $J = Q^{-1}RQ$ para $R \in \text{gl}(n, \mathbb{C})$, podemos obtener otra base \mathbf{X}_1 , dada por

$$\mathbf{X}_1(t) = \mathbf{X}(t)Q = \mathbf{P}_1(t)e^{Jt}, \quad \text{donde } \mathbf{P}_1(t) = P(t)Q, \quad \text{y } \mathbf{P}_1(t+T) = \mathbf{P}_1(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

De la estructura explícita de e^{Jt} , podemos ver que las columnas X_1, \dots, X_n de \mathbf{X}_1 tienen la forma

$$X_j(t) = e^{\lambda t} P(t),$$

donde λ es un autovalor de R y $P(t)$ es un vector polinomial con coeficientes que son funciones periódicas de periodo $T > 0$. Por ejemplo, cuando $\mathbf{P}_1 = (P_1, \dots, P_n)$ y el primer bloque de J es

una matriz de $r_1 \times r_1$

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad r_1 > 1.$$

Además, recordemos que

$$e^{J_1 t} = \exp(\lambda_1 t) \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{r_1-2}}{(r_1-2)!} & \frac{t^{r_1-1}}{(r_1-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{r_1-3}}{(r_1-3)!} & \frac{t^{r_1-2}}{(r_1-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego, las primeras r_1 columnas de $\mathbf{X}_1(t)$ se obtienen de

$$(P_1, \dots, P_n) \exp(\lambda_1 t) \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{r_1-2}}{(r_1-2)!} & \frac{t^{r_1-1}}{(r_1-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{r_1-3}}{(r_1-3)!} & \frac{t^{r_1-2}}{(r_1-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de donde

$$X_1(t) = \exp(\lambda_1(t))P_1(t),$$

$$X_2(t) = \exp(\lambda_1(t))[tP_1(t) + P_2(t)],$$

$$X_3(t) = \exp(\lambda_1(t)) \left[\frac{t^2}{2!}P_1(t) + tP_2(t) + P_3(t) \right],$$

\vdots

$$X_{r_1}(t) = \exp(\lambda_1(t)) \left[\frac{t^{r_1-1}}{(r_1-1)!}P_1(t) + \frac{t^{r_1-2}}{(r_1-2)!}P_2(t) + \dots + P_{r_1}(t) \right].$$

De la representación de $\mathbf{X}_1(t) = \mathbf{P}_1(t)e^{Jt}$ tenemos un resultado central análogo a los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

El siguiente resultado nos ayuda a determinar el comportamiento cualitativo de las soluciones del sistema II.1 respecto al origen (punto de equilibrio del sistema), cuya demostración está basada en la relación fundamental, $|\mu_j| = \exp(\operatorname{Re}(\lambda_j)T)$.

Teorema II.13. Sean μ_1, \dots, μ_k los distintos multiplicadores de Floquet para II.1, con multiplicidades m_1, \dots, m_k respectivamente. Entonces

1. Las soluciones de II.1 están acotadas en $[0, \infty)$ si, y sólo si, $|\mu_j| \leq 1$, para $j = 1, \dots, k$; y para aquellos μ_j tales que $|\mu_j| = 1$, tenemos que $m_j = \dim \mathcal{E}(\mathbf{X}(T), \mu_j)$.
2. Las soluciones de II.1 tienden a cero cuando $t \rightarrow \infty$ si, y sólo si, $|\mu_j| < 1$, $j = 1, \dots, k$.

Demostración. 1. (\Leftarrow) La expresión $|\mu_j| \leq 1$, $j = 1, \dots, k$, es equivalente a $\operatorname{Re}\lambda_j \leq 0$, $j = 1, \dots, k$.

Por otro lado, se vió que las columnas de $\mathbf{X}_1(t)$ son de la forma $X_k(t) = e^{\lambda t}P(t)$, por lo tanto:

- (i) si $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$, entonces $|X_k(t)| = |e^{\lambda_j t}P(t)| = e^{(\operatorname{Re}\lambda_j)t}|P(t)| \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$.
- (ii) si $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$, entonces $|X_k(t)| = |e^{\lambda_j t}P(t)| = |P_k(t)| \leq M$, con $M > 0$, y $t \in [0, \infty)$; pues $P_k(t)$ es la k -ésima columna de la matriz $\mathbf{P}_1 = (P_1, \dots, P_n)$, la cual es una matriz periódica de periodo $T > 0$.

Por tanto, en ambos casos las soluciones X_k son acotadas en $[0, \infty)$. Es decir, existe una constante $N > 0$ tal que $|\mathbf{X}_1(t)| \leq N$, para todo $t \in [0, \infty)$. Esto implica que cada solución $X(t)$ de II.1 está acotada en $[0, \infty)$; pues $X(t) = \mathbf{X}_1(t)C$, para algún $C \in \mathbb{C}^n$, de donde

$$|X(t)| = |\mathbf{X}_1(t)C| \leq \|\mathbf{X}_1(t)\| \|C\| \leq N|C|, \quad \text{para todo } t \in [0, \infty).$$

(\Rightarrow) Si existe algún λ_j tal que $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$, tomamos la solución correspondiente $X_l(t) = e^{\lambda_j t}P(t)$, de donde $|X_l(t)| = |e^{\lambda_j t}P(t)| = e^{(\operatorname{Re}\lambda_j)t}|P(t)| \rightarrow \infty$, cuando $t \rightarrow \infty$.

Por otro lado, para aquellos λ_j tales que $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$. Si $\dim \mathcal{E}(\mathbf{X}(T), \mu_j) < m_j$, entonces los bloques de Jordan J_j correspondientes a λ_j son matrices de $r_j \times r_j$, con $r_j > 1$. Luego obtenemos soluciones

de la forma

$$X(t) = e^{\lambda_j t} [tP_1(t) + P_2(t)],$$

donde $P_1(t)$ y $P_2(t)$ son funciones vectoriales con coeficientes periódicos.

Para $t > 0$, tenemos

$$|X(t)| = |tP_1(t) + P_2(t)| = t|P_1(t) + \frac{P_2(t)}{t}| \geq t(|P_1(t)| - \frac{|P_2(t)|}{t}) \rightarrow \infty, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Esto prueba la primera parte del teorema.

2. (\Leftarrow) Si $|\mu_j| < 1$, $j = 1, \dots, k$, es decir $Re\lambda_j < 0$, $j = 1, \dots, k$, entonces con el mismo argumento de la primera parte del teorema se tiene que las columnas $X_k(t)$ de $\mathbf{X}_1(t)$ son tales que $|X_k(t)| \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$; y por tanto $|\mathbf{X}_1(t)| \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$. Esto implica que cualquier solución $X(t) = \mathbf{X}_1(t)C$, $C \in \mathbb{C}^n$ satisface $|X(t)| \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$.

(\Rightarrow) Si existe algún λ_j tal que $Re\lambda_j \geq 0$, tomamos la correspondiente solución X_j la cual está dada por

$$X_j(t) = e^{\lambda_j t} P(t).$$

Tenemos que, si $Re\lambda_j > 0$ entonces

$$|X_j(t)| = e^{Re\lambda_j t} |P(t)| \rightarrow \infty, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty,$$

y si $Re\lambda_j = 0$ se tiene $|X_j(t)| = |P(t)| \neq 0$. En cualquier caso $|X_j(t)|$ no tiene límite cero cuando $t \rightarrow \infty$. \square

Ejemplo II.14. Consideremos el sistema con coeficientes periódicos

$$x' = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} \beta \cos^2 t - \sin^2 t & 1 - (1 + \beta) \sin t \cos t \\ -1 - (1 + \beta) \sin t \cos t & -1 + (1 + \beta) \sin^2 t \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

es periódica de periodo $T = 2\pi$.

Puede constatarse que la matriz fundamental satisfaciendo $\mathbf{X}(0) = I_2$, está dada por

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} e^{\beta t} \cos t & e^{-t} \sin t \\ -e^{\beta t} \sin t & e^{-t} \cos t \end{pmatrix}.$$

Por otro lado,

$$\mathbf{X}(2\pi) = \begin{pmatrix} e^{\beta 2\pi} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, los autovalores de $\mathbf{X}(2\pi)$, que son los multiplicadores de Floquet del sistema, son $\mu_1 = e^{\beta 2\pi}$ y $\mu_2 = e^{-2\pi}$. Entonces, $|\mu_j| < 1$, $j = 1, 2$ si, y sólo si, $\beta < 0$. En consecuencia, por el teorema II.13, las soluciones del sistema tienden al origen cuando $t \rightarrow \infty$ si, y sólo si, $\beta < 0$.

Por otro lado, si μ_1, \dots, μ_n son los multiplicadores de Floquet para II.1, incluyendo sus multiplicidades; y como $\mu_j = e^{\lambda_j T}$, $j = 1, \dots, n$, donde los λ_j son exponentes de Floquet para II.1 se tiene el siguiente resultado.

Teorema II.15. Si μ_1, \dots, μ_n son los multiplicadores de Floquet del sistema II.1, incluyendo sus multiplicidades, y \mathbf{X} es una base para \mathcal{S} satisfaciendo $\mathbf{X}(0) = I_n$. Entonces,

$$\mu_1 \cdots \mu_n = \exp \left(\int_0^T \text{tr} A(s) ds \right).$$

En consecuencia, ningún μ_j es cero, y si conocemos $(n-1)$ multiplicadores, el restante es obtenido con la fórmula.

Equivalentemente,

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \frac{1}{T} \int_0^T \text{tr} A(s) ds + \frac{2k\pi}{T}i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. Por el teorema de Abel Lioville, tenemos

$$\det \mathbf{X}(t) = \det \mathbf{X}(0) \exp \left(\int_0^t \text{tr} A(s) ds \right).$$

Además, como $\mathbf{X}(0) = I_n$ entonces

$$\det \mathbf{X}(T) = \exp \left(\int_0^T \operatorname{tr} A(s) ds \right).$$

Por otro lado, recordemos que $\mu_1 \cdots \mu_n = \det \mathbf{X}(T)$; en consecuencia, obtenemos

$$\mu_1 \cdots \mu_n = \exp \left(\int_0^T \operatorname{tr} A(s) ds \right).$$

Esto prueba la primera parte del teorema.

Para probar la segunda parte, por la primera parte del teorema y $\mu_j = e^{\lambda_j T}$, $j = 1, \dots, n$, tenemos

$$\mu_1 \cdots \mu_n = \prod_{j=1}^n e^{\lambda_j T} = \exp \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j T \right) = \exp \left(\int_0^T \operatorname{tr} A(s) ds \right),$$

de donde

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j T = \int_0^T \operatorname{tr} A(s) ds + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Finalmente, obtenemos

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \frac{1}{T} \int_0^T \operatorname{tr} A(s) ds + \frac{2k\pi}{T} i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

□

Ejemplo II.16. *Todas las soluciones de sistema periódico son periódicas.*

$$x' = A(t)x, \quad A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

En efecto, como $A(t)$ es periódica de periodo $T = 2\pi$, y satisface $A(t)A(s) = A(s)A(t)$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$, en este caso se puede ver que la matriz fundamental satisfaciendo $\mathbf{X}(0) = I_2$ está dada por

$$\mathbf{X}(t) = \exp \left(\int_0^t A(s) ds \right),$$

y que evaluada en el periodo 2π es $\mathbf{X}(2\pi) = I_2$.

Por tanto todos los multiplicadores de Floquet son iguales a uno. Luego por el teorema II.10 el sistema admite soluciones periódicas. Por otro lado, sabemos que la solución del problema de valor inicial está dado por $X(t) = \mathbf{X}(t)x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$, donde $\mathbf{X}(t) = \exp(\int_0^t A(s)ds)$. De modo que $X(t + 2\pi) = \mathbf{X}(t + 2\pi)x_0$, y se cumple que

$$\mathbf{X}(t + 2\pi) = \exp\left(\int_0^{t+2\pi} A(s)ds\right) = \exp\left(\int_0^t A(s)ds + \int_t^{t+2\pi} A(s)ds\right),$$

y por la forma de $A(t)$ es fácil ver que $\int_t^{t+2\pi} A(s)ds = 0$. Por lo que se concluye

$$\mathbf{X}(t + 2\pi) = \exp\left(\int_0^t A(s)ds\right) = \mathbf{X}(t),$$

es decir, $X(t) = X(t + 2\pi)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

De modo que efectivamente: “Todas las soluciones del sistema son periódicas”.

II.6. Sistemas periódicos no homogéneos

Consideremos el sistema no-homogéneo

$$X' = A(t)X + B(t), \quad X \in \mathbb{C}^n, \quad (\text{II.14})$$

donde $A : \mathbb{R} \rightarrow gl(n, \mathbb{C})$, y $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$, son aplicaciones continuas y periódicas de periodo $T > 0$; es decir

$$A(t + T) = A(t), \quad B(t + T) = B(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Es interesante determinar cuando el sistema II.14 posee soluciones periódicas de periodo $T > 0$, y la estructura del conjunto de esas soluciones. Sean \mathcal{S}_p el conjunto de soluciones de $X' = A(t)X$ que son aplicaciones periódicas de periodo T , y $\mathcal{S}_p(B)$ el conjunto de soluciones de II.14 que son periódicas de periodo T .

Teorema II.17. *El conjunto $\mathcal{S}_p(B)$ es un espacio afín, es decir*

$$\mathcal{S}_p(B) = V + \mathcal{S}_p = \{X/X = V + U, U \in \mathcal{S}_p\},$$

donde V es una solución particular en $\mathcal{S}_p(B)$.

Demostración. Si $V \in \mathcal{S}_p(B)$ y $U \in \mathcal{S}_p$, se tiene que $X = V + U$ es una solución de II.14 que es periódica de periodo T , entonces $X \in \mathcal{S}_p(B)$. Esto muestra que $V + \mathcal{S}_p \subset \mathcal{S}_p(B)$. Recíprocamente, si X y $V \in \mathcal{S}_p(B)$, se tiene que $U = X - V$ satisface $X' = A(t)X$ y es periódica de periodo T , de donde $U \in \mathcal{S}_p$. Esto muestra que $\mathcal{S}_p(B) \subset V + \mathcal{S}_p$. \square

Ejemplo II.18. *Consideremos la ecuación diferencial periódica de periodo $T = 2\pi$,*

$$x' = (-\cos t)x + \cos t,$$

para $n = 1$; donde $A(t) = -\cos t$ y $B(t) = \cos t$.

La solución x satisfaciendo $x(0) = x_0$ está dada por

$$x(t) = 1 - \exp(-\sin t) + \exp(-\sin t)x_0, \quad x_0 \in \mathbb{C},$$

que es solución periódica de periodo 2π para cada $x_0 \in \mathbb{C}$. En este caso $x = v + u$, donde

$$v(t) = 1 - \exp(-\sin t), \quad u(t) = \exp(-\sin t)x_0.$$

En contraste al ejemplo anterior tenemos.

Ejemplo II.19. *Consideremos la ecuación diferencial de periodo $T = 2\pi$,*

$$x' = (-\cos t)x + 1,$$

donde $A(t) = -\cos t$, $B(t) = 1$.

La solución x satisfaciendo $x(0) = x_0$ está dada por

$$x(t) = \exp(-\sin t) \int_0^t \exp(\sin s) ds + \exp(-\sin t)x_0, \quad x_0 \in \mathbb{C},$$

y además

$$x(2\pi) - x(0) = \int_0^{2\pi} \exp(\sin s) ds > 0.$$

Concluimos que la ecuación no posee solución periódica de periodo 2π , para cada $x_0 \in \mathbb{C}$.

El problema central es determinar cuando $\mathcal{S}_p(B)$ es no vacío. De manera análoga al caso homogéneo, si X es una solución de II.14 lo propio ocurre con $Y(t) = X(t+T)$, pues

$$Y'(t) = X'(t+T) = A(t+T)X(t+T) + B(t+T) = A(t)Y(t) + B(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Además, la solución X de II.14 es periódica de periodo T si, y sólo si, $X(t) = Y(t) = X(t+T)$ para cada $t \in \mathbb{R}$, y esto es verdadero si, y sólo si, $X(0) = X(T)$.

Por otro lado, si \mathbf{X} es una base para las soluciones de $X' = A(t)X$ satisfaciendo $\mathbf{X}(0) = I_n$, entonces por la Fórmula de Variación de Parámetros, la solución X de II.14 satisfaciendo $X(0) = x_0$ está dada por

$$X(t) = \mathbf{X}(t)x_0 + \mathbf{X}(t) \int_0^t \mathbf{X}^{-1}(s)B(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Así $X(0) = X(T)$, es decir $X \in \mathcal{S}_p(B)$ si, y sólo si,

$$[I_n - \mathbf{X}(T)]x_0 = \mathbf{X}(T) \int_0^T \mathbf{X}^{-1}(s)B(s)ds \tag{II.15}$$

Si $I_n - \mathbf{X}(T) \in GL(n, \mathbb{C})$, está claro que

$$x_0 = [I_n - \mathbf{X}(T)]^{-1} \mathbf{X}(T) \int_0^T \mathbf{X}^{-1}(s)B(s)ds$$

es el único $x_0 = X(0)$ que produce una solución periódica X de II.14 de periodo T .

Por otro lado, $I_n - \mathbf{X}(T) \in GL(n, \mathbb{C})$ si, y sólo si, $\mu = 1$ no es un multiplicador de Floquet para $X' = A(t)X$; es decir, cuando el sistema homogéneo no posee soluciones periódicas no triviales de

periodo T . Este análisis lo resumimos en el siguiente teorema.

Teorema II.20. *Existe algún $X \in \mathcal{S}_p(B)$ si, y sólo si, existe $x_0 \in \mathbb{C}^n$ satisfaciendo II.15.*

Además, si $\dim(\mathcal{S}_p) = 0$, entonces existe un único $X \in \mathcal{S}_p(B)$ para cada $B \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$, periódico de periodo T .

El análisis del caso $\dim(\mathcal{S}_p) > 0$ depende del estudio de la ecuación lineal

$$\mathbf{T}x_0 = \eta, \quad \text{donde } \mathbf{T} \in gl(n, \mathbb{C}), \quad x_0, \eta \in \mathbb{C}^n.$$

Note que II.15 tiene esta forma, donde

$$\mathbf{T} = I_n - \mathbf{X}(T), \quad \eta = \mathbf{X}(T) \int_0^T \mathbf{X}^{-1}(s)B(s)ds.$$

Se estudiará bajo que condiciones resolver la ecuación lineal $\mathbf{T}x_0 = \eta$, es equivalente a encontrar soluciones ζ de la ecuación homogénea adjunta $\mathbf{T}^\zeta = 0$. Recordamos que la adjunta \mathbf{T}^* de \mathbf{T} es la conjugada transpuesta de $\mathbf{T} = (t_{ij})$; es decir, $\mathbf{T}^* = (\bar{t}_{ji})$.*

*El producto interno (x_0, η) de $x_0, \eta \in \mathbb{C}^n$ está dado por $(x_0, \eta) = \eta^*x_0$. Si $S \subset \mathbb{C}^n$, el complemento ortogonal S^\perp es el conjunto*

$$S^\perp = \{\eta \in \mathbb{C}^n / (x_0, \eta) = \eta^*x_0 = 0, \forall x_0 \in S\}.$$

El conjunto S^\perp es un subespacio vectorial de \mathbb{C}^n , y si S es un subespacio vectorial de \mathbb{C}^n , se tiene

$$\mathbb{C}^n = S \oplus S^\perp,$$

en suma directa; es decir cualquier elemento $\zeta \in \mathbb{C}^n$ se escribe de manera única como $\zeta = x_0 + \eta$, donde $x_0 \in S$, $\eta \in S^\perp$. Por definición, claramente se tiene que $(S^\perp)^\perp = S$. Como consecuencia de $\mathbb{C}^n = S \oplus S^\perp$, si S es un subespacio de \mathbb{C}^n , se tiene

$$\dim(S) + \dim(S^\perp) = n.$$

Teorema II.21. *Si $\mathbf{T} \in gl(n, \mathbb{C})$, se tiene*

$$\begin{aligned} \text{Ran}(\mathbf{T}) &= (N(\mathbf{T}^*))^\perp, \\ \dim(N(\mathbf{T})) &= \dim(N(\mathbf{T}^*)), \end{aligned} \tag{II.16}$$

donde $N(\mathbf{T}^*) = \{x \in \mathbb{C}^n / \mathbf{T}^*x = 0\}$.

Demostración. Para cada $x_0, \zeta \in \mathbb{C}^n$ se tiene

$$(\mathbf{T}x_0, \zeta) = \zeta^* \mathbf{T}x_0 = (\mathbf{T}^* \zeta)^* x_0 = (x_0, \mathbf{T}^* \zeta).$$

Para la primera parte del teorema es suficiente mostrar que $(\text{Ran}(\mathbf{T}))^\perp = N(\mathbf{T}^*)$. Veamos esto, si $\zeta \in (\text{Ran}(\mathbf{T}))^\perp$, esto es $(\mathbf{T}x_0, \zeta) = 0$ para todo $x_0 \in \mathbb{C}^n$ si, y sólo si, $(x_0, \mathbf{T}^* \zeta) = 0$ para todo $x_0 \in \mathbb{C}^n$, luego $\mathbf{T}^* \zeta = 0$, esto es $\zeta \in N(\mathbf{T}^*)$. Esto muestra que $(\text{Ran}(\mathbf{T}))^\perp = N(\mathbf{T}^*)$, y luego obtenemos que

$$\text{Ran}(\mathbf{T}) = ((\text{Ran}(\mathbf{T}))^\perp)^\perp = (N(\mathbf{T}^*))^\perp,$$

esto prueba la primera parte del teorema.

Por otro lado, por la primera parte del teorema y como $\dim(S) + \dim(S^\perp) = n$, con $S = N(\mathbf{T}^*)$, obtenemos

$$\dim(N(\mathbf{T}^*)) + \dim(\text{Ran}(\mathbf{T})) = n.$$

Pero conocemos que

$$\dim(N(\mathbf{T})) + \dim(\text{Ran}(\mathbf{T})) = n,$$

y entonces, $\dim(N(\mathbf{T})) = \dim(N(\mathbf{T}^*))$. □

Apelando al Teorema II.21, para $\mathbf{T} = I_n - \mathbf{X}(T)$ en II.15; entonces existe un $X \in \mathcal{S}_p(B)$ si, y sólo si,

$$\zeta^* \mathbf{X}(T) \int_0^T \mathbf{X}^{-1}(s) B(s) ds = 0, \tag{II.17}$$

para todo $\zeta \in \mathbb{C}^n$ tal que

$$[I_n - \mathbf{X}^*(T)]\zeta = 0.$$

Esta condición puede ser interpretada en términos del conjunto de soluciones \mathcal{S}^* de la ecuación diferencial homogénea adjunta

$$Y' = -A^*(t)Y. \quad (\text{II.18})$$

La base \mathbf{Y} para \mathcal{S}^* tal que $\mathbf{Y}(0) = I_n$ es justamente $\mathbf{Y} = (\mathbf{X}^*)^{-1}$, donde \mathbf{X} es la base para el conjunto de soluciones \mathcal{S} de $X' = A(t)X$ satisfaciendo $\mathbf{X}(0) = I_n$. Esto se sigue de,

$$\mathbf{Y}' = -(\mathbf{X}^*)^{-1}(\mathbf{X}^*)'(\mathbf{X}^*)^{-1} = -(\mathbf{X}^*)^{-1}\mathbf{X}^*A^*(\mathbf{X}^*)^{-1} = -A^*\mathbf{Y},$$

$$\mathbf{Y}(0) = (\mathbf{X}^*)^{-1}(0) = I_n.$$

Sea \mathcal{S}_p^* el conjunto de soluciones $Y \in \mathcal{S}^*$ que son periódicas de periodo $T > 0$. La ecuación

$$I_n - \mathbf{X}^*(T) = -\mathbf{X}^*(T)[I_n - \mathbf{Y}(T)], \quad (\text{II.19})$$

muestra que $\zeta \in \mathbb{C}^n$ satisface $[I_n - \mathbf{X}^*(T)]\zeta = 0$ si, y sólo si,

$$[I_n - \mathbf{Y}(T)]\zeta = 0,$$

y esto es cierto si, y sólo si, $Y = \mathbf{Y}\zeta \in \mathcal{S}_p^*$.

Ahora $\mathbf{X}^*(T)\zeta = \zeta$ implica que $\zeta^*\mathbf{X}(T) = \zeta^*$, y por II.17 se tiene

$$\zeta^* \int_0^T \mathbf{X}^{-1}(s)B(s)ds = \int_0^T Y^*(s)B(s)ds = 0,$$

para cada $Y = \mathbf{Y}\zeta \in \mathcal{S}_p^*$.

Por otro lado, la ecuación II.19 y aplicando el teorema II.21 a $\mathbf{T} = I_n - \mathbf{X}(T)$, implica que

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{S}_p^*) &= \dim(N(I_n - \mathbf{Y}(T))) = \dim(N(I_n - \mathbf{X}^*(T))) \\ &= \dim(N(I_n - \mathbf{X}(T))) = \dim(\mathcal{S}_p). \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

Con el análisis anterior hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema II.22. Para cada $B \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ periódica de periodo T , existe $X \in \mathcal{S}_p(B)$ si, y sólo si,

$$\int_0^T Y^*(s)B(s)ds = 0,$$

para cada $Y \in \mathcal{S}_p^*$.

Además, $\dim(\mathcal{S}_p^*) = \dim(\mathcal{S}_p)$, entonces, existe un único $X \in \mathcal{S}_p(B)$ si, y sólo si, $\dim(\mathcal{S}_p) = 0$.

Como aplicación inmediata del teorema II.22 presentamos el siguiente teorema, que caracteriza bajo que condiciones el sistema II.14 tiene soluciones periódicas, de periodo T .

Teorema II.23. Existe $X \in \mathcal{S}_p(B)$ si, y sólo si, existe alguna solución X de $X' = A(t)X + B(t)$ que está acotada en $[0, \infty)$. Equivalentemente, o $\mathcal{S}_p(B)$ es no vacío, ó cualquier solución de $X' = A(t)X + B(t)$ no está acotada en $[0, \infty)$.

Demostración. Es claro que, si $X \in \mathcal{S}_p(B)$, se tiene que X está acotado en \mathbb{R} , y desde luego en $[0, \infty)$. Recíprocamente, suponemos que existe una solución X de $X' = A(t)X + B(t)$ que está acotada por $M > 0$, esto es

$$|X(t)| \leq M, \quad \forall t \in [0, \infty).$$

La fórmula de variación de parámetros implica

$$X(t) = \mathbf{X}(t)X(0) + \mathbf{X}(t) \int_0^t \mathbf{X}^{-1}(s)B(s)ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

donde \mathbf{X} es la base para $X' = A(t)X$ tal que $\mathbf{X}(0) = I_n$. De donde

$$X(T) = \mathbf{X}(T)X(0) + \eta, \quad \eta = \mathbf{X}(T) \int_0^T \mathbf{X}^{-1}(s)B(s)ds.$$

Como $Y(t) = X(t+T)$ es también solución de $X' = A(t)X + B(t)$, entonces se tiene

$$Y(T) = \mathbf{X}(T)Y(0) + \eta, \quad \text{ó}$$

$$X(2T) = \mathbf{X}(T)X(T) + \eta = \mathbf{X}^2(T)X(0) + [I_n + \mathbf{X}(T)]\eta.$$

Por inducción se puede ver que para cada $k = 1, 2, \dots$,

$$X(kT) = \mathbf{X}^k(T)X(0) + [I_n + \mathbf{X}(T) + \dots + \mathbf{X}^{k-1}(T)]\eta. \quad (\text{II.21})$$

Si suponemos que $\mathcal{S}_p(B) = \emptyset$. Entonces existe un $\zeta \in \mathbb{C}^n$ satisfaciendo $[I_n - \mathbf{X}^*(\omega)]\zeta = 0$, $\zeta = \mathbf{X}^*(\omega)\zeta$ tal que II.17 no es válido, esto es, $\zeta^*\eta \neq 0$. Esto es equivalente a la existencia de algún $Y \in \mathcal{S}_p^*$ tal que

$$\int_0^T Y^*(s)B(s)ds \neq 0.$$

Ahora $\zeta = \mathbf{X}^*(T)\zeta$ implica

$$\zeta^* = \zeta^*\mathbf{X}(T) = \zeta^*\mathbf{X}^2(T) = \dots = \zeta^*\mathbf{X}^k(T), \quad k = 1, 2, \dots,$$

y multiplicando II.21 por ζ^* resulta que

$$\zeta^*X(kT) = \zeta^*X(0) + k\zeta^*\eta, \quad k = 1, 2, \dots$$

Ahora como $|X(t)| \leq M$, para todo $t \in [0, \infty)$, entonces

$$k|\zeta^*\eta| = |\zeta^*X(kT) - \zeta^*X(0)| \leq 2M|\zeta|, \quad k = 1, 2, \dots,$$

pero esto es absurdo ya que $\zeta^*\eta \neq 0$. Por tanto $\mathcal{S}_p(B)$ es no vacío. □

CAPÍTULO III

Estabilidad de Floquet

El objetivo central de este capítulo es estudiar en detalle la estabilidad de las soluciones de la ecuación diferencial

$$x' = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{III.1})$$

cuando $A : \mathbb{R} \rightarrow gl(n, \mathbb{R})$ es una aplicación matricial continua y periódica; es decir, cuando $A(\cdot)$ es continua y existe $T > 0$ (periodo) tal que $A(t + T) = A(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, en términos de los sistemas dinámicos. Si bien se conoce que la estabilidad está caracterizado por el análisis de la respuesta del sistema dinámico a pequeñas perturbaciones en el sistema de estados. Intuitivamente, un punto de equilibrio de un sistema dinámico es estable si, para perturbaciones suficientemente pequeños de valores iniciales, el movimiento perturbado permanece en una región arbitrariamente prescrita en el espacio de estados.

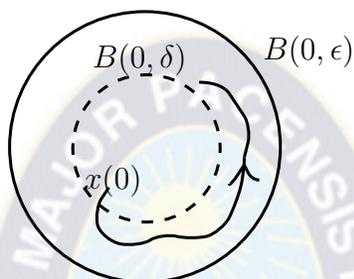
Para este propósito, notemos que la aplicación $x(t) = 0$, para cada $t \in \mathbb{R}$, es solución trivial de la ecuación diferencial $x' = A(t)x$, a esta solución la llamaremos solución cero de III.1.

Se conoce que Aleksandr Lyapunov (1857-1918) introdujo por primera vez métodos que permiten

determinar la estabilidad de sistemas de ecuaciones diferenciales sin necesidad de calcular explícitamente las soluciones, los cuales nos serán de mucha utilidad para realizar nuestro objetivo.

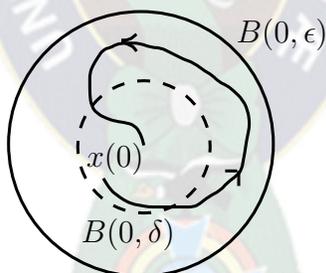
Definición III.1 (Estabilidad de Lyapunov). La solución cero $x(t) \equiv 0$ de $x' = A(t)x$ es:

(1) Estable si, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x(0)| < \delta$, entonces $|x(t)| < \epsilon$, para todo $t \geq 0$.



(2) Asintóticamente estable si, es estable y existe $\delta > 0$ tal que si $|x(0)| < \delta$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$



(3) Exponencialmente estable si, existen $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}^+$ tales que si $|x(0)| < \delta$, entonces

$$|x(t)| \leq \alpha |x(0)| e^{-\beta t}, \quad t \geq 0.$$

Definición III.2. La solución cero $x(t) \equiv 0$ de $x' = A(t)x$ es:

(4) Asintóticamente estable global si, es estable y para todo $x(0) \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

(5) Exponencialmente estable global si, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ tales que $|x(t)| \leq \alpha |x(0)| e^{-\beta t}$, $t \geq 0$, para todo $x(0) \in \mathbb{R}^n$.

Notemos que en la definición de estabilidad, en el sentido de Lyapunov, del sistema III.1 se cumple, claramente, que (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1).

Ejemplo III.3. Consideremos la ecuación diferencial

$$x' = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

La solución general está dada por

$$x_1(t) = x_1(0) \cos t - x_2(0) \sin t,$$

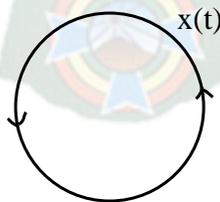
$$x_2(t) = x_1(0) \sin t + x_2(0) \cos t.$$

Observemos que $x_1^2(t) + x_2^2(t) = x_1^2(0) + x_2^2(0)$, para cada $t \in \mathbb{R}$. Dado $\epsilon > 0$, tomamos $\delta = \delta(\epsilon) = \epsilon$. Ahora cuando $0 < x_1^2(0) + x_2^2(0) < \delta$, se tiene que

$$x_1^2(t) + x_2^2(t) < \delta = \epsilon.$$

Esto muestra que la solución cero del sistema es estable, pero no es asintóticamente estable ya que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_1^2(t) + x_2^2(t)) = x_1^2(0) + x_2^2(0) \neq 0.$$



Con estas definiciones estamos en condiciones de abordar el objetivo trazado para estudiar la estabilidad de las soluciones de la ecuación diferencial $x' = A(t)x$, cuando $A : \mathbb{R} \rightarrow gl(n, \mathbb{R})$ es una aplicación continua y periódica.

Primero, estudiaremos el caso particular en que $A(t) \equiv A$; es decir, A es una matriz constante. En este caso la ecuación diferencial lineal $x' = A(t)x$ toma la forma $x' = Ax$, donde $A \in gl(n, \mathbb{R})$.

Recordemos que el primer capítulo ya se ha estudiado de manera implícita la estabilidad de las soluciones en torno al punto de equilibrio $x = 0$ (solución cero de $x' = Ax$), luego todos los resultados ya obtenidos en el capítulo I serán estudiados desde el punto de vista de los sistemas dinámicos. Previamente, introduciremos otro concepto muy importante para el estudio de la estabilidad de los sistemas con coeficientes constantes.

III.1. Espectro de Lyapunov

El espectro de una matriz constante $A \in gl(n, \mathbb{R})$, denotado por $\Sigma(A)$, es el conjunto todos sus autovalores; es decir, $\Sigma(A) = \{\mu_i \in \mathbb{C} / \mu_i \text{ es autovalor de } A, i = 1, \dots, n\}$.

Ejemplo III.4. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -29 & 18 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ 4 & 6 & -29 & 18 \\ 5 & 7 & -34 & 21 \end{pmatrix} \in gl(4, \mathbb{R}).$$

El espectro de la matriz $A \in gl(4, \mathbb{R})$ está dada por $\Sigma(A) = \{-1, -2 + i, -2 - i\}$, siendo la multiplicidad algebraica $ma(\mu_1 = -1) = 2$, $ma(\mu_2 = -2 + i) = 1$, y $ma(\mu_3 = -2 - i) = 1$.

Definición III.5. El Espectro de Lyapunov $\Sigma_{Ly}(A)$ de una matriz $A \in gl(n, \mathbb{R})$ es el conjunto de las partes reales de los autovalores; es decir,

$$\Sigma_{Ly}(A) = \{\lambda_i \in \mathbb{R} / \lambda_i = \text{Re}\mu_i, \mu_i \in \Sigma(A)\}.$$

Ejemplo III.6. Del ejemplo anterior tenemos que

$$\Sigma_{Ly}(A) = \{-1, -2\}.$$

Sean $\mu_j = \lambda_j + i\beta_j$, $j = 1, \dots, r \leq n$, los distintos autovalores de $A \in gl(n, \mathbb{R})$. Ordenando las partes reales de los autovalores como $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_l$, con $1 \leq l \leq r \leq n$.

Definición III.7. El espacio de Lyapunov de λ_j se define por $L(\lambda_j) = \oplus E_k$, donde la suma directa está tomada sobre todos los auto-espacios reales (generalizados) asociados a los autovalores con parte real λ_j . Notemos que contamos con valores espectrales de acuerdo a su multiplicidad. Es decir,

$$\bigoplus_{j=1}^l L(\lambda_j) = \mathbb{R}^n.$$

Los subespacios de Lyapunov Estable, Centro, é Inestable asociados a la matriz $A \in gl(n, \mathbb{R})$ están definidas como $L^- := \oplus \{L(\lambda_j)/\lambda_j < 0\}$, $L^0 := \oplus \{L(\lambda_j)/\lambda_j = 0\}$, y $L^+ := \oplus \{L(\lambda_j)/\lambda_j > 0\}$ respectivamente.

El espectro de Lyapunov $\Sigma_{L_y}(A)$ describe el comportamiento de estabilidad de las soluciones de la ecuación diferencial $x' = Ax$. Además, sobre sus subespacios L^- (espacio de Lyapunov estable), L^0 (espacio de Lyapunov centro), y L^+ (espacio de Lyapunov inestable).

Teorema III.8. Si $A \in gl(n, \mathbb{R})$, entonces la solución cero $x(t) \equiv 0$ (de $x' = Ax$) es exponencialmente estable si, y sólo si, $\lambda < 0$ para todo $\lambda \in \Sigma_{L_y}(A)$.

Demostración. Notemos que esto ya lo demostramos en el teorema I.19. □

Ejemplo III.9. Si consideramos la ecuación diferencial $x' = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$, donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in gl(3, \mathbb{R}).$$

Es claro que $\Sigma(A) = \{-1 \pm i5, -2\}$, y luego el espectro de Lyapunov es $\Sigma_{L_y}(A) = \{-1, -2\}$. Además, los auto-espacios generalizados de Lyapunov están dados, en este caso, por

$$L(\lambda_1 = -1) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle = \mathbb{R}^2 \times \{0\}, \quad y \quad L(\lambda_2 = -2) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Luego, es claro que

$$\bigoplus_{j=1}^2 L(\lambda_j) = \mathbb{R}^3; \quad \text{es decir,} \quad L^- = \mathbb{R}^3.$$

Así, $\lambda < 0$ para cada $\lambda \in \Sigma_{L_y}(A)$, entonces la solución cero del sistema es exponencialmente estable.

III.2. Espectro de Floquet

Para aplicaciones matriciales periódicas $A : \mathbb{R} \rightarrow gl(n, \mathbb{R})$ con periodo $T > 0$; es decir, $A(t) = A(t+T)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. La teoría de Floquet nos da una similar caracterización: sea $\Phi(t)$ matriz fundamental para la ecuación diferencial $x' = A(t)x$, con $A(t) = A(t+T)$, satisfaciendo $\Phi(0) = I$; entonces, por el Teorema de Floquet, Φ se puede representar como $\Phi(t) = P(t) \exp(Rt)$, donde $P : \mathbb{R} \rightarrow gl(n, \mathbb{C})$ es una aplicación matricial de clase C^1 , invertible para todo $t \in \mathbb{R}$, periódica de periodo T , y además $R \in gl(n, \mathbb{C})$.

Los autovalores μ_i de $\Phi(T) = \exp(RT)$ son llamados Multiplicadores de Floquet (multiplicadores característicos) de $A(t)$, y los números $\alpha_i = \frac{1}{T} \log \mu_i$, $\mu_i \in \Sigma(\Phi(T))$ son llamados Exponentes de Floquet (exponentes característicos) de $A(t)$.

Definición III.10. El Espectro de Floquet $\Sigma_{Fl}(A)$ de una aplicación matricial $A : \mathbb{R} \rightarrow gl(n, \mathbb{R})$ periódica está formado por las partes reales de los exponentes de Floquet; es decir,

$$\Sigma_{Fl}(A) = \{\lambda_i \in \mathbb{R} / \lambda_i = \text{Re} \alpha_i, \alpha_i \in \Sigma(R)\}.$$

En particular, si $A(t) \equiv A$ es una matriz constante entonces tenemos que $\Sigma_{Fl}(A) = \Sigma_{L_y}(A)$.

Notemos que los exponentes característicos están sólo determinados por los múltiplos enteros de $\frac{2\pi i}{T}$, pero el espectro de Floquet depende sólo de $A(t)$.

Por otro lado de manera similar al de coeficientes constantes podemos definir el espacio de Floquet para el multiplicador μ_j . Sean $\mu_j = \nu_j + i\beta_j$, $j = 1, \dots, r \leq n$, los distintos multiplicadores de $A(t)$. Ordenando las partes reales de los multiplicadores como $\nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_l$, con $1 \leq l \leq r \leq n$.

Definición III.11. El auto-espacio de Floquet para ν_j lo definimos por $L(\nu_j) = \oplus E_k$, donde la suma directa está tomada sobre todos los auto-espacios reales (generalizados) asociados a los multiplicadores con parte real ν_j . Notemos que contamos con valores espectrales de acuerdo a su multiplicidad. Es decir,

$$\bigoplus_{j=1}^l L(\nu_j) = \mathbb{R}^n.$$

Los subespacios de Floquet Estable, Centro, é Inestable asociados a la aplicación matricial periódica $A(t)$ están definidas como $F^- := \oplus\{L(\nu_j)/\nu_j < 0\}$, $F^0 := \oplus\{L(\nu_j)/\nu_j = 0\}$, y $F^+ := \oplus\{L(\nu_j)/\nu_j > 0\}$ respectivamente.

El espectro de Floquet $\Sigma_{Fl}(A)$ describe el comportamiento de estabilidad de las soluciones de la ecuación diferencial $x' = A(t)x$. Además, sobre los subespacios F^- (espacio de Floquet estable), F^0 (espacio de Floquet centro), y F^+ (espacio de Floquet inestable); con componente T periódica e invariantes por el flujo (es decir, con respecto a la matriz fundamental Φ) se tiene

$$\Phi(t)F^k(0) = P(t)F^k(0) = F^k(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad k = -, 0, +.$$

El resultado central de esta sección lo estudiamos en el siguiente teorema.

Teorema III.12. Todas las soluciones de $x' = A(t)x$ tienden (exponencialmente) a cero cuando $t \rightarrow \infty$ si, y sólo si, $\lambda < 0$ para todo $\lambda \in \Sigma_{Fl}(A)$.

Demostración. Si suponemos que todas las soluciones de la ecuación diferencial $x' = A(t)x$ tienden a cero, entonces por el teorema II.13 (2da. parte) concluimos que $|\mu_j| < 1$, para $j = 1, \dots, n$, esto implica que

$$\lambda_j = \operatorname{Re}\alpha_j = \frac{1}{T} \log |\mu_j| < 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Es decir, $\lambda_j < 0$ para todo $\lambda_j \in \Sigma_{Fl}(A)$.

Recíprocamente, si suponemos que $\lambda < 0$ para todo $\lambda \in \Sigma_{Fl}(A)$, podemos escoger una constante $\tau > 0$ tal que $\lambda = \operatorname{Re}\alpha_i$ es menor que $-\tau$, para todo $i = 1, \dots, n$, (ver apéndice B). Con este hecho probamos la existencia de $C \geq 1$ tal que

$$\|e^{Rt}\| \leq Ce^{-\tau t},$$

para cada $t \geq 0$. Por lo tanto,

$$|e^{Rt}x| \leq \|e^{Rt}\| |x| \leq Ce^{-\tau t} |x|,$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y $t \geq 0$. Por otro lado, la solución general de $x' = A(t)x$ satisfaciendo $x(0) = x_0$ está dada por

$$x(t) = \Phi(t)x_0 = P(t)e^{Rt}x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

entonces, se concluye que la solución trivial de $x' = A(t)x$ es exponencialmente estable, ya que

$$\begin{aligned} |x(t)| &= |P(t)e^{Rt}x_0| \leq \|P(t)\| |e^{Rt}x_0| \\ &\leq M C e^{-\tau t} |x_0| \\ &= N e^{-\tau t} |x_0|, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad \text{con } N = MC > 0. \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

Esto implica que cada solución de $x' = A(t)x$ tiende (exponencialmente) a cero cuando $t \rightarrow \infty$. \square

Ejemplo III.13. Consideremos el sistema de lineal periódico

$$x' = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 - \alpha \cos^2(t) & 1 - \alpha \sin t \cos t \\ -1 - \alpha \sin t \cos t & -1 + \alpha \sin^2(t) \end{pmatrix}.$$

Es claro, que $A(t)$ es periódica de periodo 2π . Puede constatarse que la matriz fundamental Φ , para el sistema, satisfaciendo $\Phi(0) = I_2$ está dada por

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \exp[(\alpha - 1)t] \cos t & \exp(-t) \sin t \\ -\exp[(\alpha - 1)t] \sin t & \exp(-t) \cos t \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, se tiene

$$\Phi(2\pi) = \begin{pmatrix} \exp[(\alpha - 1)2\pi] & 0 \\ 0 & \exp(-2\pi) \end{pmatrix}.$$

Entonces, los multiplicadores de Floquet para el sistema son $\mu_1 = \exp[(\alpha - 1)2\pi]$ y $\mu_2 = \exp(-2\pi)$. Luego, $|\mu_j| < 1$, $j = 1, 2$ si, y sólo si, $\alpha < 1$. Con, $\lambda_1 = \alpha - 1$, $\lambda_2 = -1$, tenemos, $\lambda_j < 0$, $j = 1, 2$ para cada $\lambda_j \in \Sigma_{Fl}(A)$ si, y sólo si, $\alpha < 1$. Entonces, por el teorema III.12, la solución cero del sistema lineal periódico tiende a cero exponencialmente si, y sólo si, $\alpha < 1$.

III.3. La matriz fundamental de Cauchy

Consideremos la ecuación diferencial

$$x' = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{III.3})$$

donde la aplicación $A : I \rightarrow gl(n, \mathbb{R})$ es continua y $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto de los números reales. Sea $\mathbf{X}(t)$ matriz fundamental para el sistema III.3. Entonces la matriz fundamental $\Phi(t, t_0) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(t_0)$, satisfaciendo $\Phi(t_0, t_0) = I_n$ recibe el nombre de matriz fundamental de Cauchy para el sistema III.3. Notemos que se cumple la propiedad de transición; es decir

$$\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0), \quad \text{para } t_0 \leq t_1 \leq t_2.$$

En particular, tenemos $\Phi(t, t_0)^{-1} = \Phi(t_0, t)$.

Por otro lado, la solución general del sistema III.3 está dada por

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0), \quad x(t_0) \in \mathbb{R}^n.$$

Desafortunadamente, para este caso general no existe una expresión explícita para la matriz fundamental de Cauchy $\Phi(t, t_0)$. Sin embargo, presentamos a continuación resultados para la expresión de la matriz de Cauchy $\Phi(t, t_0)$ cuando la aplicación matricial $A(t)$ satisface ciertas condiciones, y con esto obtenemos un criterio algebraico para el estudio de la estabilidad de las soluciones.

Teorema III.14. Si se verifican las siguientes condiciones:

- (1) $A(t) \in C(I, gl(n, \mathbb{R}))$,

(2) $A(t) \int_{\tau}^t A(t_1) dt_1 = \int_{\tau}^t A(t_1) dt_1 A(t)$, para cada $\tau, t \in [t_0, \infty)$, y

(3) $\bar{A} := \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t A(t_1) dt_1$ existe y $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ para cada $\lambda_i \in \Sigma(\bar{A})$, $i = 1, \dots, n$.

Entonces,

(1) La matriz fundamental de Cauchy se puede expresar como

$$\Phi(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t A(t_1) dt_1}$$

(2) La solución cero del sistema $x' = A(t)x$ es exponencialmente estable.

Demostración. (1) La condición (2) implica que:

$$A(t) e^{\int_{t_0}^t A(t_1) dt_1} = e^{\int_{t_0}^t A(t_1) dt_1} A(t).$$

Sea $\Omega(t) := \exp(\int_{t_0}^t A(t_1) dt_1)$. Claramente, $\Omega(t_0) = I_n$, y además se tiene que

$$\frac{d\Omega(t)}{dt} = \Omega'(t) = e^{\int_{t_0}^t A(t_1) dt_1} A(t) = A(t) e^{\int_{t_0}^t A(t_1) dt_1} = A(t)\Omega(t),$$

entonces $\Omega(t)$ es matriz fundamental de Cauchy para el sistema, luego por la unicidad de las soluciones se tiene que

$$\Phi(t, t_0) = \Omega(t) = e^{\int_{t_0}^t A(t_1) dt_1}.$$

(2) Con la condición

$$A(t) \int_s^t A(t_1) dt_1 = \int_s^t A(t_1) dt_1 A(t), \tag{III.4}$$

derivando III.4 con respecto a la variable s , obtenemos que $A(t)A(s) = A(s)A(t)$, para cada

$s, t \in [t_0, \infty)$. De esto, se obtiene que

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^t A(t_1) dt_1 \frac{1}{s} \int_{t_0}^s A(t_2) dt_2 &= \frac{1}{s} \int_{t_0}^t A(t_1) dt_1 \int_{t_0}^s A(t_2) dt_2 \\
 &= \frac{1}{s} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^s A(t_1) A(t_2) dt_2 \\
 &= \frac{1}{s} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^s A(t_2) A(t_1) dt_2 \\
 &= \frac{1}{s} \int_{t_0}^s A(t_2) dt_2 \int_{t_0}^t A(t_1) dt_1.
 \end{aligned} \tag{III.5}$$

Haciendo $s \rightarrow +\infty$, y luego por la propiedad (3) se tiene que

$$\int_{t_0}^t A(t_1) dt_1 \bar{A} = \bar{A} \int_{t_0}^t A(t_1) dt_1.$$

Suponemos que $\frac{1}{t} \int_{t_0}^t A(t_1) dt_1 = \bar{A} + B(t)$, donde $B(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

Pero observemos que,

$$\bar{A} B(t) = \bar{A} \left[\frac{1}{t} \int_{t_0}^t A(t_1) dt_1 - \bar{A} \right] = B(t) \bar{A}.$$

Por otro lado, sabemos que la solución general de $x' = A(t)x$ se expresa como $x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0)$, $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$.

Entonces por la parte (1) del teorema tenemos

$$\begin{aligned}
 x(t) &= e^{\int_{t_0}^t A(t_1) dt_1} x(t_0) \\
 &= e^{t\bar{A} + tB(t)} x(t_0) \\
 &= e^{t\bar{A}} e^{tB(t)} x(t_0).
 \end{aligned} \tag{III.6}$$

Llamemos

$$\max_{1 \leq j \leq n} \operatorname{Re} \lambda_j = \alpha < 0, \quad \lambda_j \in \Sigma(\bar{A}).$$

Escogemos $\epsilon > 0$ tal que $\alpha + 2\epsilon < 0$, y como sabemos existe un $T > 0$ tal que si $t \geq T$, entonces

$\|B(t)\| < \epsilon$. Pero usando la relación III.6 se concluye que existe una constante $M > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
 |x(t)| &= |e^{t\bar{A}}e^{tB(t)}x(t_0)| \\
 &\leq M|e^{tB(t)}x(t_0)|e^{(\alpha+\epsilon)t} \\
 &\leq \|e^{tB(t)}\| |x(t_0)|e^{(\alpha+\epsilon)t} \\
 &\leq Me^{t\|B(t)\|} |x(t_0)|e^{(\alpha+\epsilon)t} \\
 &\leq Me^{t\epsilon} |x(t_0)|e^{(\alpha+\epsilon)t} \\
 &= M|x(t_0)|e^{(\alpha+2\epsilon)t}, \quad t \geq T.
 \end{aligned} \tag{III.7}$$

Como $\alpha + 2\epsilon < 0$, entonces la solución cero del sistema $x' = A(t)x$ es exponencialmente estable. \square

Teorema III.15. *Si el sistema III.3 satisface las siguientes condiciones:*

(1) $A(t) \int_{t_0}^t A(t_1)dt_1 - \int_{t_0}^t A(t_1)dt_1 A(t) := K^{(1)}(t) \neq 0$, pero

$$K^{(1)}(t) \int_{t_0}^t A(t_1)dt_1 - \int_{t_0}^t A(t_1)dt_1 K^{(1)}(t) := K^{(2)}(t) = 0;$$

(2) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t A(t_1)dt_1 := \bar{A}$: existe y $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ para cada $\lambda_i \in \Sigma(\bar{A})$, $i = 1, \dots, n$;

(3) $K^{(1)}(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

Entonces, la solución cero de III.3 es exponencialmente estable.

Demostración. Si la condición (1) es satisfecha, entonces la matriz fundamental de Cauchy del sistema III.3 está dada por

$$\mathbf{X}(t) = e^{\int_{t_0}^t A(t_1)dt_1} \mathbf{Y}(t), \tag{III.8}$$

donde $\mathbf{Y}(t)$ es matriz fundamental de Cauchy de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = y' = K^{(1)}(t)y.$$

Por la condición (2), sea $\int_{t_0}^t A(t_1)dt_1 = \bar{A}t + tB(t)$, donde $B(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$. Se tiene de

III.8 que la matriz fundamental se puede expresar como $\mathbf{X}(t) = e^{\bar{A}t} e^{tB(t)} \mathbf{Y}(t)$.

Supongamos que

$$\max_{1 \leq j \leq n} \operatorname{Re} \lambda_j = \alpha < 0, \quad \lambda_j \in \Sigma(\bar{A}).$$

Escogemos $\epsilon > 0$ tal que $\alpha + 3\epsilon < 0$. Por otro lado como $K^{(1)}(t) \rightarrow 0$ (cuando $t \rightarrow +\infty$), esto implica que

$$|y(t)| = |\mathbf{Y}(t)y(t_0)| \leq e^{\int_{t_0}^t \|K^{(1)}(t_1)\| dt_1} |y(t_0)| \leq M_2 e^{\epsilon t}, \quad M_2 = \text{constante},$$

y como $B(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$, esto implica que existe un $T > 0$ tal que si $t > T$, entonces $\|B(t)\| < \epsilon$.

Así, para $t > T$ obtenemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}(t)\| &\leq M_1 e^{(\alpha+\epsilon)t} e^{t\|B(t)\|} \|\mathbf{Y}(t)\| \\ &\leq M_1 e^{(\alpha+2\epsilon)t} M_2 e^{\epsilon t} \\ &= M e^{(\alpha+3\epsilon)t}, \end{aligned} \tag{III.9}$$

donde $M = M_1 M_2$. Luego la relación obtenida en III.9 implica que la solución cero de III.3 es exponencialmente estable. \square

En particular, si consideramos el sistema de ecuaciones diferenciales con coeficientes periódicos,

$$x' = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad A(t+T) = A(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{III.10}$$

Usando los resultados obtenidos en la teoría de Floquet se pueden realizar caracterizaciones similares al caso general para el estudio de la estabilidad de las soluciones de III.10, para algunos casos particulares.

Teorema III.16. *Si se verifican las siguientes condiciones:*

- (1) $A(t) \int_{t_0}^t A(t_1) dt_1 = \int_{t_0}^t A(t_1) dt_1 A(t)$, y
- (2) $B(T) - B(0) := \int_0^T A(t) dt$ satisface $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, para cada $\lambda_i \in \Sigma[B(T) - B(0)]$.

Entonces, la solución cero de III.10 es exponencialmente estable.

Demostración. Sea $\mathbf{X}(t)$ matriz fundamental de Cauchy del sistema III.10. Por el teorema III.14 esta matriz fundamental la podemos expresar como

$$\mathbf{X}(t) = \exp \left(\int_0^t A(s) ds \right).$$

Sea $t \in [kT, (k+1)T]$, es decir $t = kT + t_1$ donde $0 \leq t_1 \leq T$. Como $\mathbf{X}(t)$ satisface $\mathbf{X}(0) = I_n$, entonces $\mathbf{X}(t+T) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}(T)$.

De donde

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= \mathbf{X}(kT + t_1) = \mathbf{X}(t_1 + (k-1)T + T) \\ &= \mathbf{X}(t_1 + (k-1)T)\mathbf{X}(T) = \dots \\ &= \mathbf{X}(t_1)\mathbf{X}^k(T). \end{aligned} \tag{III.11}$$

Por otro lado, como $t_1 \in [0, T]$ entonces $\mathbf{X}(t_1)$ está acotado, ya que existe una constante $M_1 > 0$ tal que $\|\mathbf{X}(t)\| \leq M_1$, para todo $t \in [0, T]$. Además, se tiene que

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(t_1)\mathbf{X}^k(T) = \mathbf{X}(t_1)e^{k \int_0^T A(t) dt} = \mathbf{X}(t_1)e^{k[B(T)-B(0)]}. \tag{III.12}$$

Entonces, por la condición (2) y III.12, existe $M > 0$ y $\alpha > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |x(t)| &= |\mathbf{X}(t)x(0)| = |\mathbf{X}(t_1)e^{k[B(T)-B(0)]}x(0)| \\ &\leq \|\mathbf{X}(t_1)\| |e^{k[B(T)-B(0)]}x(0)| \\ &\leq M_1 M_2 |x(0)| e^{-\frac{\alpha k T}{T}} = M_1 M_2 |x(0)| e^{\frac{\alpha t_1}{T}} e^{-\frac{\alpha}{T} t} \\ &= N |x(0)| e^{-\frac{\alpha}{T} t}, \quad N = M_1 M_2 e^{\frac{\alpha t_1}{T}}, \quad x(0) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{III.13}$$

Esto prueba que la solución cero de III.10 es exponencialmente estable. \square

Ejemplo III.17. Analicemos la estabilidad del sistema con coeficientes periódicos,

$$x' = \begin{pmatrix} a + \cos bt & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & a + \cos bt \end{pmatrix} x, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Podemos ver fácilmente que, la matriz de coeficientes $A(t)$ satisface la primera condición del teorema anterior; es decir,

$$A(t) \int_{t_0}^t A(t_1) dt_1 = \int_{t_0}^t A(t_1) dt_1 A(t), \quad y$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{|b|}} A(t_1) dt_1 = B\left(\frac{2\pi}{|b|}\right) - B(0) = \begin{pmatrix} a\frac{2\pi}{|b|} & -\frac{\pi}{|b|} \\ \frac{\pi}{|b|} & a\frac{2\pi}{|b|} \end{pmatrix}.$$

Además, los autovalores son $\lambda = a\frac{2\pi}{|b|} \pm i\frac{\pi}{|b|}$, y luego $\operatorname{Re}\lambda = a\frac{2\pi}{|b|} < 0$ si, y sólo si, $a < 0$. Entonces, la solución cero del sistema es exponencialmente estable si, y sólo si, $a < 0$; y es estable si, y sólo si, $a = 0$.

III.4. Multiplicadores reales e idénticos

Consideremos la ecuación diferencial con coeficientes T -periódicos,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_2(t)x = 0, \quad a_k(t+T) = a_k(t), \quad k = 1, 2. \quad (\text{III.14})$$

o equivalentemente la ecuación diferencial matricial con coeficientes periódicos

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2(t) & -a_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad y = \frac{dx}{dt} \quad (\text{III.15})$$

Sea $\Phi(t)$ matriz fundamental para el sistema III.15. Estamos interesados sólo en el caso especial donde la matriz $C = e^{RT} = \Phi(T)\Phi^{-1}(0)$ (teorema de Floquet), tiene dos multiplicadores reales e idénticos, y por tanto $\operatorname{Tr}(C)^2 = 4 \det(C)$.

Si μ es este multiplicador, entonces existe una solución para III.15, que satisface

$$x_1(t+T) = \mu x_1(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (\text{III.16})$$

Sea $x_2(t)$ cualquier solución de III.14 linealmente independiente de $x_1(t)$. Ya que $x_2(t+T)$ es también una solución de III.14, entonces existen constantes c_1 y c_2 tales que

$$x_2(t+T) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t). \quad (\text{III.17})$$

El valor de c_2 se encuentra evaluando el Wronskiano de las dos soluciones,

$$W(t) = \det \Phi(t) = x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t).$$

Si sustituimos las ecuaciones III.16 y III.17 en la expresión equivalente para $W(t+T)$ obtenemos $W(t+T) = \mu c_2 W(t)$. Pero, la fórmula de Liouville nos da

$$W(t+T) = W(t) \exp\left(\int_0^T \text{Tr} A(t) dt\right) = W(t) \exp\left(-\int_0^T a_1(t) dt\right),$$

y por tanto

$$\mu c_2 = \exp\left(-\int_0^T a_1(t) dt\right). \quad (\text{III.18})$$

Ahora construimos la matriz C usando las dos soluciones linealmente independientes con las condiciones iniciales

$$x_1(0) = 1, \quad x_1'(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_2'(0) = 1,$$

por lo tanto

$$C = \begin{pmatrix} x_1(T) & x_2(T) \\ x_1'(T) & x_2'(T) \end{pmatrix} \quad (\text{III.19})$$

y el multiplicador μ satisface la ecuación

$$\mu^2 - (x_1(T) + x_2'(T))\mu + \exp\left(-\int_0^T a_1(t)dt\right) = 0. \quad (\text{III.20})$$

Pero habíamos supuesto que los multiplicadores son idénticos, por tanto esta ecuación tiene una raíz doble, y por tanto

$$\mu^2 = \exp\left(-\int_0^T a_1(t)dt\right),$$

y entonces $c_2 = \mu$. Así la ecuación III.17 se convierte en

$$x_2(t+T) = c_1x_1(t) + \mu x_2(t),$$

y existen dos casos a considerar:

Caso 1. Si $c_1 = 0$ tenemos que $x_2(t+T) = \mu x_2(t)$.

(1) Si $\mu = 1$, ($\det(C) = 1$ y $\text{Tr}(C) = 2$), ambas soluciones linealmente independientes son T -periódicas.

(2) Si $\mu = -1$, ($\det(C) = 1$ y $\text{Tr}(C) = -2$), ambas soluciones linealmente independientes son $2T$ -periódicas.

Esta situación ocurre sólo si la matriz C tiene dos autovectores linealmente independientes, esto es si

$$x_1'(T) = x_2(T) = 0, \quad \text{y} \quad x_1(T) = x_2'(T).$$

Caso 2. Si $c_1 \neq 0$ definimos las siguientes aplicaciones,

$$p_1(t) = e^{-\lambda t}x_1(t), \quad \mu = e^{\lambda T}; \quad p_2(t) = e^{-\lambda t}x_2(t) - \frac{c_1 t}{\mu T}p_1(t).$$

Vemos que $p_1(t)$ es T -periódica. Ahora probaremos que $p_2(t)$ es también T -periódica. En efecto,

$$\begin{aligned} p_2(t+T) &= e^{-\lambda(t+T)}(c_1x_1(t) + \mu x_2(t)) - \frac{c_1(t+T)}{\mu T}p_1(t) \\ &= e^{-\lambda t}x_2(t) - \frac{c_1 t}{\mu T}p_1(t) = p_2(t). \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

Ahora tenemos

$$x_2(t) = e^{\lambda t} \left[p_2(t) + \frac{c_1 t}{\mu T} p_1(t) \right].$$

Vemos que la amplitud de $x_2(t)$ crece linealmente con t . Esta situación ocurre si la matriz C tiene sólo un autovector.

Si $\det(C) = 1$, la raíz doble de la ecuación característica es 1 y -1 ; entonces, en ambos casos, el periodo de las soluciones periódicas es T si $\mu = 1$, ($\text{Tr}(C) = 2$); y es $2T$ si $\mu = -1$, ($\text{Tr}(C) = -2$).

III.5. Ecuación de Hill

La ecuación de Hill puede ser escrita en la forma

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + (a + p(t)x) = 0, \quad (\text{III.22})$$

donde a es una constante y $p(t)$ es una función periódica de periodo T . Un caso especial de esta ecuación es cuando $p(t) = 2q \cos(2t)$ y $T = \pi$, esta ecuación es la ecuación de Mathieu.

Definiendo $\frac{dx}{dt} = x' = y$ podemos escribir la ecuación de Hill en la forma matricial estándar

$$\frac{dX}{dt} = X' = A(t)X, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a - p(t) & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{III.23})$$

Ya que $\text{Tr}A(t) = 0$, la ecuación $\det \Phi(t) = W(t) = W(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t \text{Tr}A(s) ds \right)$ muestra que el $\det \Phi = \text{constante}$ y por tanto $\det(C) = 1$ y el producto de los multiplicadores es igual a uno. Los multiplicadores de C están dados por

$$\mu^2 - \text{Tr}(C)\mu + 1 = 0, \quad \Rightarrow \quad 2\mu = \text{Tr}(C) \pm \sqrt{\text{Tr}(C)^2 - 4}. \quad (\text{III.24})$$

Por tanto el comportamiento a largo plazo de las soluciones es determinado principalmente por el único número real $\text{Tr}(C)$.

Consideremos dos soluciones independientes de III.22 que satisfacen las condiciones iniciales

$$x_1(0) = 1, \quad x_1'(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_2'(0) = 1, \quad (\text{III.25})$$

por lo tanto $\Phi(0) = I_2$ y

$$\text{Tr}(C) = x_1(T) + x_2'(T). \quad (\text{III.26})$$

Existen cinco casos diferentes según los valores de la $\text{Tr}(C)$.

(1) $\text{Tr}(C) > 2$. Los multiplicadores son positivos, diferentes, no iguales a 1 y satisfacen la relación $0 < \mu_1 < 1 < \mu_2$. Los exponentes característicos son $\pm\lambda$, donde

$$\lambda T = \log \mu_2 > 0,$$

y dos soluciones linealmente independientes son

$$x(t) = e^{-\lambda t} p_1(t), \quad y(t) = e^{\lambda t} p_2(t), \quad (\text{III.27})$$

donde $p_k(t)$ son funciones periódicas con período T .

(2) $\text{Tr}(C) = 2$. Los multiplicadores son idénticos e iguales a 1, por tanto $\lambda = 0$. Ahora el comportamiento de las soluciones depende del número de autovectores de C independientes:

(2a) la matriz C tiene dos autovectores linealmente independientes: luego existen dos soluciones con período T y como en III.27,

$$x(t) = p_1(t), \quad y(t) = p_2(t),$$

donde $p_k(t)$ son funciones T -periódicas.

(2b) la matriz C tiene un autovector linealmente independiente: las dos soluciones independientes

de III.22 son

$$x(t) = p_1(t), \quad y(t) = tp_1(t) + p_2(t), \quad (\text{III.28})$$

donde $p_k(t)$ son funciones T -periódicas. La primera solución es acotada. La amplitud de la segunda solución crece linealmente con t , por tanto existe una solución estable y una solución inestable.

(3) $|\text{Tr}(C)| < 2$. Los multiplicadores de C son complejos y pueden escribirse en la forma $\mu = e^{\pm i\theta}$, $0 < \theta < \pi$, con exponentes característicos $\lambda T = \pm \cos^{-1}(\text{Tr}(C)/2)$. Ahora las dos soluciones independientes son

$$x(t) = e^{i\lambda t} p_1(t), \quad y(t) = e^{-i\lambda t} p_2(t), \quad (\text{III.29})$$

donde $p_k(t)$ son funciones T -periódicas. En este caso todas las soluciones son acotadas para todo tiempo t .

(4) $\text{Tr}(C) = -2$. Los multiplicadores son idénticos e iguales a -1 . De nuevo el comportamiento de las soluciones dependen de el número de autovectores independientes de C :

(4a) la matriz C tiene dos autovectores linealmente independientes: luego existen dos soluciones con período $2T$ ya que $\lambda T = i\pi$, y las dos soluciones independientes son

$$x(t) = p_1(t), \quad y(t) = p_2(t),$$

y además se cumplen las condiciones de periodicidad

$$x_1(t+T) = -x_1(t), \quad x_2(t+T) = -x_2(t).$$

(4b) la matriz C tiene sólo un autovector linealmente independiente: las dos soluciones independientes de III.22 son

$$x(t) = p_1(t), \quad y(t) = tp_1(t) + p_2(t), \quad (\text{III.30})$$

donde $p_k(t)$ son dos funciones de $2T$ -periódicas. La primera solución es acotada. La amplitud de la segunda solución crece linealmente con t , por tanto existe una solución estable y una solución inestable.

(5) $\text{Tr}(C) < -2$. Los multiplicadores son reales, negativos, diferentes y no iguales a -1 y satisfacen la relación $\mu_2 < -1 < \mu_1 < 0$. Los exponentes característicos son

$$\lambda T = \pm \log(-\mu_2) + i\pi,$$

y las dos soluciones linealmente independientes son

$$x(t) = e^{-\lambda t} p_1(t), \quad y(t) = e^{\lambda t} p_2(t),$$

con $x(t)$ decreciente y $y(t)$ creciente cuando $t \rightarrow \infty$.

Esta clasificación de estabilidad nos da la impresión de que existe una fuerte distinción entre soluciones estables e inestables. Esto es verdad, pero sólo para tiempos largos, o formalmente cuando $t \rightarrow \infty$. Si observamos una solución en un tiempo finito, la distinción no es tan clara, ya que las soluciones son generalmente funciones diferenciables, suaves, continuas que dependen de los parámetros del sistema. Por ejemplo, si $\text{Tr}(C) = -2$, la amplitud de una solución crece linealmente con t : si $\text{Tr}(C) = -2 + \epsilon^2$, la amplitud de esta solución también inicialmente crecerá con t y puede (si ϵ es suficientemente pequeño) alcanzar un valor relativamente grande antes de decrecer.

III.6. Estabilidad local de órbitas periódicas

Consideremos la ecuación diferencial autónoma

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{III.31}$$

donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial de clase C^1 .

Supongamos que $\varphi(x, t)$ es una órbita periódica de III.31, de periodo $T > 0$, y consideremos $x_0 \in \mathbb{R}^n$ sobre esta órbita periódica, esto es $\varphi(x_0, T) = x_0$.

Sea $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n / x = \varphi(x_0, t), \text{ para algún } 0 \leq t < T\}$. Entonces podemos definir una vecindad abierta $N(\Gamma, \epsilon)$ de Γ en la forma: $N(\Gamma, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n / \text{ existe } y \in \Gamma \text{ tal que } |x - y| < \epsilon\}$.

Notemos que

$$N(\Gamma, \epsilon) = \bigcup_{y \in \Gamma} B(y, \epsilon).$$

Definición III.18. La órbita periódica, Γ , es una órbita Lyapunov Estable si, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in N(\Gamma, \delta)$, entonces $\varphi(x, t) \in N(\Gamma, \epsilon)$ para todo $t \geq 0$.

Es posible definir cuando una órbita es Lyapunov asintóticamente estable de manera similar. Con esta definición podemos realizar el estudio acerca de la estabilidad local de órbitas periódicas.

III.6.1. Aplicaciones

Consideramos la ecuación diferencial autónoma $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Supongamos que Γ es una órbita periódica y $x_0 \in \Gamma$; es decir, $\varphi(x_0, T) = x_0$, donde T es el periodo de la órbita.

Para el análisis de estabilidad de la órbita periódica $\varphi(x_0, t)$ se analiza la evolución en el tiempo de una pequeña perturbación de la órbita periódica, la cual dará origen a un sistema lineal con coeficientes periódicos, la cual ya fue estudiado a detalle en los capítulos precedentes. La estabilidad de una solución periódica se determinará mediante el cálculo de sus multiplicadores característicos o multiplicadores de Floquet.

Sea $x(t) = \varphi(x_0, t) + v(t)$, donde $|v(0)| \ll 1$, una pequeña perturbación de la órbita periódica. La ecuación diferencial que describe la evolución de $v(t)$ en el tiempo se obtiene aplicando la definición de la derivada de f en el punto $\varphi(x_0, t)$. Entonces, se tiene

$$\dot{x} = f(x) = f(\varphi(x_0, t) + v) = f(\varphi(x_0, t)) + Df(\varphi(x_0, t))v + r(v),$$

donde,

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0.$$

Es decir, $r(v) = o(|v|)$. Por otro lado, como $\dot{x} = \dot{\varphi}(x_0, t) + \dot{v}$; y así obtenemos, finalmente, la

ecuación diferencial para la perturbación

$$\dot{v} = Df(\varphi(x_0, t))v + o(|v|),$$

donde $Df(\varphi(x_0, t))$ es la matriz Jacobiana de f evaluada en $\varphi(x_0, t)$, esto es

$$Df(\varphi(x_0, t)) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\varphi(x_0, t)).$$

El sistema lineal $\dot{v} = Df(\varphi(x_0, t))v$ es llamado la linealización de $\dot{x} = f(x)$ en $\varphi(x_0, t)$, y donde los términos en $r(v)$ son despreciables.

Sabiendo que $\varphi(x_0, t)$ es solución de $\dot{x} = f(x)$, obtenemos para la perturbación $v(t)$ la ecuación diferencial

$$\dot{v} = Df(\varphi(x_0, t))v \tag{III.32}$$

Ejemplo III.19. En coordenadas polares la órbita periódica del sistema

$$\dot{r} = r(1 - r^2), \quad \dot{\theta} = 1,$$

está dada, explícitamente, por $\varphi(x_0, t) = (1, t)$. Consideremos $v = (\rho, \psi)$ en coordenadas polares y $x = (1 + \rho, t + \psi)$ encontramos, sustituyendo esta perturbación en la ecuación diferencial e ignoramos los términos de orden dos,

$$\dot{\rho} = -2\rho, \quad \dot{\psi} = 0.$$

Así obtenemos que, la linealización del sistema posee un autovalor en el semiplano izquierdo (correspondiente a la dirección estable) y el otro en la dirección neutral (correspondiente a la posibilidad de desplazarse rodeando la órbita periódica).

En general, obviamente, la matriz Jacobiana $Df(\varphi(x_0, t))$ no es independiente del tiempo, pero como $\varphi(x_0, t) = \varphi(x_0, t + T)$, luego $Df(\varphi(x_0, t)) = A(t)$ es una matriz de $n \times n$ con coeficientes

periódicos; es decir $A(t + T) = A(t)$. Esto nos lleva a considerar la ecuación diferencial lineal

$$\dot{v}(t) = A(t)v, \quad A(t) = A(t + T), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (\text{III.33})$$

Esta es justamente la ecuación diferencial lineal con coeficientes periódicos estudiada en detalle en los capítulos precedentes. Consideremos la matriz fundamental $\Phi(t)$ satisfaciendo $\Phi(0) = I_n$ y se tiene que $\Phi(t + T) = \Phi(t)C$, con $C \in GL(n, \mathbb{R})$. Si $t = 0$, la matriz $C = \Phi(T)$ es llamada matriz de monodromía. Los autovalores de $\Phi(T)$ son los multiplicadores de Floquet, $\mu(T)$ y si $\mu(T) = e^{\lambda T}$ se tiene que los coeficientes λ son los exponentes de Floquet de $\Phi(T)$.

Por otro lado, la definición de la matriz fundamental implica que la solución general para la perturbación está dada por

$$v(t) = \Phi(t)v_0, \quad v_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{III.34})$$

La órbita periódica será localmente Lyapunov estable si, para $t \rightarrow \infty$ la perturbación $|v(t)| \rightarrow 0$; es decir, el flujo del sistema vuelve, después un tiempo transitorio, sobre el ciclo límite.

A partir del módulo de los multiplicadores de Floquet $|\mu(T)| = e^{(\text{Re}\lambda)T}$, podemos hacer una clasificación de los tipos de soluciones periódicas en función de su estabilidad:

- **CENTRO:** Todos los multiplicadores tienen módulo igual a uno.

La perturbación ni atenúa ni aumenta. Siendo la perturbación de pequeña amplitud, la solución, representado en el espacio de fases, se mantiene entorno al ciclo límite no perturbado.

- **NODO – ESTABLE:** Todos los multiplicadores tienen una magnitud menor que uno o uno. La perturbación se atenúa y cuando $t \rightarrow \infty$ el flujo del sistema se aproxima al ciclo límite. La solución periódica es estable y físicamente observable.

- **NODO – INESTABLE:** Todos los multiplicadores tienen una magnitud mayor que uno o uno. La perturbación se aumenta para $t \rightarrow \infty$ y la solución del sistema se aleja del ciclo límite. La solución periódica es inestable y físicamente inobservable.

- **SILLA:** Algunos multiplicadores tienen una magnitud mayor que uno y otros menor que uno. La perturbación se aumenta tanto para $t \rightarrow \infty$ como para $t \rightarrow -\infty$. La solución es inestable y

físicamente inobservable.

III.6.2. Aplicación de Retorno (Poincaré)

Consideremos el flujo $\varphi(x, t)$ definido por la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, y suponemos que existe una órbita periódica Γ . Entonces podemos definir un corte transversal local $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ de dimensión $n - 1$ que es transversal al flujo y que consecuentemente interseca Γ en un único punto z . Ahora para algún conjunto abierto $U \subset \Sigma$ tal que $z \in U$ definimos la aplicación:

$$\begin{aligned} R : U &\rightarrow \Sigma \\ x &\mapsto \varphi(x, \tau(x)) \end{aligned} \quad (\text{III.35})$$

donde $\varphi(x, \tau(x)) \in \Sigma$ y $\varphi(x, t)$ no está en Σ para $0 < t < \tau(x)$. Note que si el periodo de Γ es T entonces $\tau(z) = T$ y que la estabilidad de la órbita periódica es reflejado en la estabilidad de z , que es un punto fijo para la aplicación R . La aplicación R es llamado una Aplicación de Retorno (Poincaré), y en una vecindad de un punto sobre una órbita periódica aislada es siempre posible construir una aplicación que es suave y semejante al flujo original.

Ejemplo III.20. Consideremos el sistema no lineal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= x + y - y(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

o en coordenadas polares

$$\dot{r} = r(1 - r^2), \quad \dot{\theta} = 1$$

Escogemos $\Sigma = \{(r, \theta) / r > 0, \theta = 0\}$. Resolviendo la ecuación diferencial obtenemos las soluciones:

$$r(t) = \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-2t} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad \theta(t) = \theta_0 + t,$$

ahora, si escogemos la condición inicial $(r_0, \theta_0) = (x, 0)$ en Σ podemos ver inmediatamente que

$\tau(x) = 2\pi$ para todo $x > 0$ y luego

$$R(x) = \left[1 + \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

Tenemos el punto fijo, $x = R(x)$, cuando $x = 1$; así el punto $(r, \theta) = (1, 0)$ está sobre una órbita periódica del flujo, y

$$DR(x) = -\frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right]^{-\frac{3}{2}} \left(-\frac{2e^{-4\pi}}{x^3} \right)$$

Evaluando esto cuando $x = 1$, tenemos que $DR(1) = e^{-4\pi} < 1$, luego la órbita periódica es Lyapunov estable.

Esto podría, ser deducido directamente de las soluciones; el importante aspecto de esta sección es que la órbita periódica puede ser estudiada en general.

Para órbitas periódicas en dimensión dos existe una manera mucho más simple de estudiar los multiplicadores de Floquet. Básicamente, la idea es para usar la divergencia del campo vectorial f cerca de la órbita periódica.

Suponemos que la órbita periódica es $u(t)$; es decir, $u(t) = u(t + T)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces la matriz periódica, $A(t)$ en la ecuación III.33, es

$$A(t) = Df(u(t)). \quad (\text{III.36})$$

Como u es una solución de la ecuación diferencial, tenemos

$$\dot{u} = f(u); \quad (\text{III.37})$$

derivando III.37 con respecto a t , obtenemos

$$\ddot{u} = \frac{d}{dt} f(u(t)) = Df(u)\dot{u} = A(t)\dot{u}.$$

Así \dot{u} satisface la ecuación diferencial de la pequeña perturbación, III.33, y como u es periódica,

se tiene que $\dot{u}(t) = \dot{u}(t + T)$. Pero, usando III.34, esto implica que

$$\dot{u}(T) = \dot{u}(0) = \Phi(T)\dot{u}(0) \quad (\text{III.38})$$

y así un multiplicador de Floquet del problema necesariamente es igual a uno. Este resultado es cierto en dimensión arbitraria, pero nosotros consideramos el caso de la ecuación diferencial en el plano.

Sea $\Phi(t)$ la matriz fundamental satisfaciendo $\Phi(0) = I_2$. Entonces los multiplicadores de Floquet son los autovalores de $\Phi(T)$. Pero como el producto de los autovalores es el determinante de la matriz y además como ya se ha establecido que uno de los multiplicadores es igual a uno. De ahí, obtenemos que el otro multiplicador, μ está dado por,

$$\mu = \det \Phi(T) \quad (\text{III.39})$$

y, es claro, que μ es el multiplicador de Floquet que, en general, es difícil de calcular. Esta manera, no simplifica para nada el problema, pero podríamos estudiar y ver esto dado que la evolución de $\det \Phi(t)$, con respecto al tiempo, es particularmente simple.

Primero notemos que como $\dot{\Phi} = A\Phi$, luego podemos escribir en la usual notación

$$\dot{\Phi}_{ij} = A_{i1}\Phi_{1j} + A_{i2}\Phi_{2j}, \quad y \quad (\text{III.40})$$

$$\det \dot{\Phi}(t) = \Phi_{11}\Phi_{22} - \Phi_{12}\Phi_{21}. \quad (\text{III.41})$$

Derivando III.41 y usando III.40 obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det \Phi(t) &= (A_{11}\Phi_{11} + A_{12}\Phi_{21})\Phi_{22} + \Phi_{11}(A_{21}\Phi_{12} + A_{22}\Phi_{22}) \\ &\quad - (A_{11}\Phi_{12} + A_{12}\Phi_{22})\Phi_{21} - \Phi_{12}(A_{21}\Phi_{11} + A_{22}\Phi_{21}). \end{aligned} \quad (\text{III.42})$$

Consecuentemente, obtenemos

$$\frac{d}{dt} \det \Phi(t) = (A_{11} + A_{22}) \det \Phi(t).$$

Pero, como $A(t) = Df(u(t))$, entonces tenemos

$$A_{11} + A_{22} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(u(t)) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(u(t)) = \operatorname{div} f(u(t)) \quad (\text{III.43})$$

luego, se obtiene

$$\frac{d}{dt} \det \Phi(t) = \operatorname{div} f(u(t)) \det \Phi(t).$$

Integrando esta última ecuación escalar, con la condición inicial $\det \Phi(0) = 1$, obtenemos

$$\det \Phi(t) = \exp \left(\int_0^t \operatorname{div} f(u(\tau)) d\tau \right),$$

y así, finalmente, obtenemos

$$\mu = \exp \left(\int_0^T \operatorname{div} f(u(\tau)) d\tau \right) \quad (\text{III.44})$$

y para que $\mu < 1$, la condición para la estabilidad de la órbita, es que

$$\int_0^T \operatorname{div} f(u(\tau)) d\tau < 0. \quad (\text{III.45})$$

Afortunadamente, en muchas situaciones esto es fácil de calcular.

Ejemplo III.21. Con el ejemplo III.20 de esta sección tenemos,

$$\operatorname{div} f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r[r(1-r^2)]) = 2 - 4r^2,$$

y sobre la órbita periódica $r = 1$, tenemos que $\operatorname{div} f = -2$. Finalmente, con $T = 2\pi$, se obtiene que $\mu = \exp(-4\pi) < 1$. Así, la órbita periódica es una órbita Lyapunov estable.

Ejemplo III.22. *Considere el oscilador no lineal,*

$$\ddot{x} + h(x)\dot{x} + g(x) = 0.$$

En coordenadas de Liénard con $H(x) = \int_0^x h(\xi)d\xi$, la ecuación diferencial se convierte en

$$\dot{x} = y - H(x), \quad \dot{y} = -g(x)$$

y como $\operatorname{div}f(x, y) = -h(x)$. De ahí, si $\varphi(x_0, t)$ es la órbita periódica para el sistema con periodo $T > 0$, entonces la órbita periódica es Lyapunov estable si, y sólo si,

$$\int_0^T h(\varphi(x_0, t))dt > 0.$$



CAPÍTULO IV

Conclusiones y recomendaciones

Una de las características del trabajo en su transversalidad a varias ramas de la matemática, como ser la teoría de las Ecuaciones Diferenciales, Sistemas Dinámicos, Sistemas de Control. Este trabajo además de ser una incursión en una rama relativamente moderna la matemática, como es la Teoría de los Sistemas Dinámicos, constituye un ejemplo de la interrelación de los elementos de la Matemática, un fenómeno muy propio de los últimos tiempos.

Desde un principio, el objetivo central fue estudiar la estabilidad de las soluciones de las ecuaciones diferenciales de la forma

$$x' = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

cuando $A : \mathbb{R} \rightarrow gl(n, \mathbb{R})$ es una aplicación continua y periódica; razón por lo cual pasamos por muchos tópicos que eran preponderantes para el estudio de la ecuación diferencial periódica. Cada capítulo nos deja una enseñanza en particular; por ejemplo, citemos el capítulo uno, nosotros vimos gracias al estudio de los sistemas lineales autónomos como estudiar el capítulo II lo cual nos ayudo a comprender como se llegó a deducir el Teorema de Floquet, y por ende el estudio de la Teoría de Floquet.

Uno de los capítulos más fructíferos fue el capítulo III , ya que en este capítulo se desarrolla el

resultado central en la teoría de estabilidad para las ecuaciones diferenciales periódicas.

Afirmamos que en este trabajo se lograron las metas que nos propusimos desde el principio, se abarco gran parte del tema y sus aplicaciones; por lo tanto se vió con alegría el resultado de todos los problemas que servirán para investigaciones futuras y aplicaciones de los conocimientos recién adquiridos, ya que en verdad algunos problemas fueron muy complicados de realizar, logramos todo lo que nos propusimos y llegando a un final plenamente satisfactorio.

Por otra parte, si consideramos la aplicación matricial $A : \mathbb{R} \rightarrow gl(n, \mathbb{R})$, continua y acotada, no necesariamente periódica. En este caso, el estudio de la estabilidad de las soluciones de las ecuaciones diferenciales de la forma

$$x' = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (IV.1)$$

lo realizamos estudiando los índices de crecimiento exponencial de las soluciones de $x' = A(t)x$. Sea $\varphi(t, x)$ una solución de IV.1 satisfaciendo $\varphi(0, x) = x$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$.

Definimos la exponente de Lyapunov, para $x \in \mathbb{R}^n$, como

$$\lambda(x) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |\varphi(t, x)|, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (IV.2)$$

La aplicación matricial $A(\cdot)$ tiene una base normal; es decir, un sistema fundamental

$$\varphi(\cdot, x_1), \dots, \varphi(\cdot, x_n)$$

de soluciones con límite $\lambda_i = \lambda(x_i)$ para todo i , tal que cualquier solución $\varphi(\cdot, y) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi(\cdot, x_i)$ tiene como su exponente de Lyapunov $\lambda(y)$ exactamente uno de los λ_i s. Por tanto sólo existen n posibles exponentes de Lyapunov; y definimos el espectro de Lyapunov de la aplicación matricial $A(\cdot)$ como:

$\Sigma_{L_y}(A) = \{\lambda_i / \lambda_i \text{ es una exponente de Lyapunov de una solución } \varphi(\cdot, y) \text{ de } x' = A(t)x\}$, para todo $i = 1, \dots, n$.

En particular, si $A(t) \equiv A \in gl(n, \mathbb{R})$ el espectro de Lyapunov se reduce a la parte real de los

autovalores de la matriz constante A ; si $A(t)$ es periódica, entonces el espectro de Lyapunov se reduce al espectro de Floquet, es decir $\Sigma_{L_y}(A) = \Sigma_{Fl}(A)$.

Los resultados centrales respecto al estudio de la estabilidad exponencial de las soluciones para los casos de coeficientes constantes y coeficientes periódicos, respectivamente, pueden ser generalizados a través del estudio del espectro de Lyapunov, para el caso que consideramos.



APÉNDICE A

Forma Canónica de Jordan

A.1. Teorema de la Descomposición de Jordan

Para resolver el caso general de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias $x' = Ax$, con $A \in gl(n, \mathbb{R})$, necesitamos la descomposición de la matriz en forma canónica dada por el teorema de la Descomposición de Jordan.

Si consideremos el cambio de coordenadas $x = Py$ donde $P \in GL(n, \mathbb{R})$. Entonces, $x' = Ax$, implica que $y' = P^{-1}x' = P^{-1}Ax = P^{-1}APy = \Lambda y$, donde $\Lambda = P^{-1}AP$ y el valor inicial $x(0) = x_0$ es transformado en $y(0) = P^{-1}x_0 = y_0$. En estas nuevas coordenadas la solución es $y(t) = e^{\Lambda t}y_0$, y en las coordenadas iniciales tenemos

$$x(t) = Py(t) = Pe^{\Lambda t}y_0 = Pe^{\Lambda t}P^{-1}x_0.$$

Esto implica que, $e^{tA} = Pe^{\Lambda t}P^{-1}$. El objetivo de esta sección es que la elección de P implique que el cálculo de e^{tA} sea sencillo, y así obtener e^{tA} con el menor esfuerzo posible.

Si suponemos que la matriz A tiene n autovalores reales distintos, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, con autovectores

asociados e_i , esto es $Ae_i = \lambda_i e_i$, $1 \leq i \leq n$. Sea $P = [e_1, \dots, e_n]$, la matriz con los autovectores de A como columnas.

Es claro, por la forma de la elección de la matriz P , que $P \in Gl(n, \mathbb{R})$ y

$$\begin{aligned} AP &= [Ae_1, \dots, Ae_n] = [\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n] \\ &= [e_1, \dots, e_n] \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

y luego si $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tenemos $\Lambda = P^{-1}AP$. Luego, por ejemplo I.2, tenemos

$$e^{tA} = P e^{t\Lambda} P^{-1} = P \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) P^{-1}.$$

Podemos extender estas ideas y considerar la forma canónica sobre los números complejos, en el caso donde exista una base de autovectores complejos, v_1, \dots, v_n . Poniendo $P = [v_1, \dots, v_n]$, tenemos $AP = P\Lambda$, donde $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Así, $P^{-1}AP = \Lambda$ es una matriz diagonal.

Si un autovalor $\lambda_j = a_j + ib_j$ es complejo, entonces su autovector propio correspondiente: $v_j = u_j + iw_j$, debe ser también complejo. Si A es real, el conjugado complejo $\bar{\lambda}_j = a_j - ib_j$ es también autovalor y tiene autovector correspondiente: $\bar{v}_j = u_j - iw_j$. Como

$$Av_j = A(u_j + iw_j) = (a_j u_j - b_j w_j) + i(b_j u_j + a_j w_j),$$

igualando las partes real e imaginaria se tiene

$$Au_j = a_j u_j - b_j w_j, \quad \text{y} \quad Aw_j = b_j u_j + a_j w_j.$$

Usando los vectores $\text{Re}v_j = u_j$ y $\text{Im}v_j = w_j$ como parte de una base, produce una matriz sub bloque, en términos de esta base, de la forma

$$D_j = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix}.$$

Así, si A tiene una base de autovectores complejos, entonces existe una base real $\{z_1, \dots, z_n\}$, en

términos del cual $A \sim \text{diag}(J_1, \dots, J_q)$, donde cada uno de los bloques J_j es, un bloque 1×1 con entradas reales λ_k o bien, J_j es de la forma D_j , dado arriba.

Teorema A.1. Sea $A \in \text{gl}(n, \mathbb{R})$ con k autovalores reales distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ y $m = \frac{1}{2}(n-k)$ pares de autovalores complejos conjugados distintos $a_1 \pm ib_1, \dots, a_m \pm ib_m$. Entonces existe $P \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ tal que

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k, D_1, \dots, D_m),$$

donde los D_j , $1 \leq j \leq m$, son bloques de 2×2 , $D_j = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix}$.

Además, $e^{tA} = Pe^{t\Lambda}P^{-1}$ y

$$e^{t\Lambda} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_k t}, e^{tD_1}, \dots, e^{tD_m}),$$

donde,

$$e^{tD_j} = e^{a_j t} \begin{pmatrix} \cos b_j t & \sin b_j t \\ -\sin b_j t & \cos b_j t \end{pmatrix}.$$

Demostración. Sean (e_i) , $1 \leq i \leq k$, los autovectores reales asociados a los autovalores reales λ_i y (z_j) , $1 \leq j \leq m$, los autovectores (complejos) asociados a los autovalores $a_j + ib_j$. Si P es la matriz en donde las primeras k columnas son los autovectores e_1, \dots, e_k y las restantes $n - k$ columnas son las partes reales e imaginarias de los autovectores z_j , esto es

$$P = [e_1, \dots, e_k, \text{Re}z_1, \text{Im}z_1, \dots, \text{Re}z_m, \text{Im}z_m].$$

Como los autovalores son distintos, entonces los autovectores son linealmente independientes, y luego $P \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ y por el análisis ya hecho anteriormente, se tiene $AP = P\Lambda$. El resto del teorema es inmediato. \square

Ahora, estudiamos el caso de autovalores repetidos, donde los autovectores no generan a todo el espacio. Si la matriz A tiene polinomio característico $P_A(\lambda)$, entonces $P_A(A)v = 0$ para todo vector v . (Este es llamado el Teorema de Cayley-Hamilton). En particular, si $\lambda_1, \dots, \lambda_{k_0}$ son autovalores

distintos con multiplicidades m_1, \dots, m_{k_0} , respectivamente, entonces

$$E_k = \{v \in \mathbb{C}^n / (A - \lambda_k I)^{m_k} v = 0\}$$

es un espacio vectorial de dimensión m_k . Los vectores en E_k son llamados autovectores generalizados. Ahora, fijando un autovalor $\lambda = \lambda_k$, suponer que existe un bloque de Jordan. Esto significa que existen vectores v_1, \dots, v_m tal que $(A - \lambda I)v_1 = 0$ y $(A - \lambda I)v_j = v_{j-1}$ para $2 \leq j \leq m$. En términos de esta base (parcial), la (sub) matriz de $m \times m$ tiene la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Esto da lugar a la Forma Canónica de Jordan sobre los números complejos.

Ahora estamos en condiciones de enunciar el resultado central de esta sección, la cual es herramienta fundamental para el estudio cualitativo de las soluciones de la ecuación diferencial $x' = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Teorema A.2 (Forma Canónica de Jordan Compleja). Si $A \in gl(n, \mathbb{R})$, entonces existe una matriz no singular P tal que $J = P^{-1}AP$ donde $J = \text{diag}(J_1, \dots, J_q)$. Además, cada bloque J_i de tamaño $r_i \times r_i$, es de la forma

$$J_i = \lambda_i I + N_i, \quad 1 \leq i \leq q,$$

donde λ_i es autovalor de A y N_i es matriz nilpotente de orden r_i , esto es $N_i^{r_i} = 0$.

El bloque J_i de $r_i \times r_i$ tiene la forma

$$J_i = \lambda_i I_{r_i} + N_i,$$

y por el ejemplo I.3, en particular, se tiene $N_i^p = 0$, para $p \geq r_i$. Dado que $t\lambda_i I_{r_i}$ conmuta con tN_i

entonces

$$e^{J_i t} = e^{\lambda_i t I_{r_i}} e^{N_i t} = e^{\lambda_i t} e^{N_i t}.$$

Pero

$$e^{N_i t} = I_{r_i} + tN_i + \frac{t^2}{2!}N_i^2 + \cdots + \frac{t^{r_i-1}}{(r_i-1)!}N_i^{r_i-1} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{r_i-2}}{(r_i-2)!} & \frac{t^{r_i-1}}{(r_i-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{r_i-3}}{(r_i-3)!} & \frac{t^{r_i-2}}{(r_i-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esto lo resumimos en el siguiente teorema.

Teorema A.3. Sea $A \in gl(n, \mathbb{R})$ tal que $A = QJQ^{-1}$, donde $J = \text{diag}(J_1, \dots, J_q)$ es la forma canónica de Jordan para A , con J_i de $r_i \times r_i$, $J_i = (\lambda_i)$ si $r_i = 1$,

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

si $r_i > 1$. Entonces

$$e^{At} = Qe^{Jt}Q^{-1}, \quad e^{Jt} = \text{diag}(e^{J_1 t}, \dots, e^{J_q t}),$$

y

$$e^{J_i t} = e^{\lambda_i t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{r_i-2}}{(r_i-2)!} & \frac{t^{r_i-1}}{(r_i-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{r_i-3}}{(r_i-3)!} & \frac{t^{r_i-2}}{(r_i-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Estamos interesados ahora en revisar la forma canónica de Jordan real en el caso de autovalores repetidos. Como motivación revisamos primero los posibles casos para ecuaciones diferenciales

lineales en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 , respectivamente.

Consideremos primero el caso en que $A \in gl(2, \mathbb{R})$ tiene autovalor real λ repetido, así el polinomio característico de A es $P_A(\lambda) = (x - \lambda)^2$. Como A satisface la ecuación característica, esto implica que

$$(A - \lambda I)^2 v = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Ahora, o $(A - \lambda I)v = 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$, o existe e_2 tal que $(A - \lambda I)e_2 \neq 0$ y $e_2 \neq 0$. En el primer caso $A = \text{diag}(\lambda, \lambda)$ para cada elección de vectores básicos e_1 y e_2 , como $Av = \lambda v$ para cada $v \in \mathbb{R}^2$. En el segundo caso definimos $e_1 = (A - \lambda I)e_2$. Tenemos $(A - \lambda I)^2 e_2 = 0 = (A - \lambda I)e_1$ y luego $Ae_1 = \lambda e_1$, además $Ae_2 = e_1 + \lambda e_2$. De ahí

$$A[e_1, e_2] = [\lambda e_1, e_1 + \lambda e_2] = [e_1, e_2] \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

En otras palabras, si λ es un autovalor doble de A tenemos que existe un cambio de coordenadas tal que la matriz A es similar a alguno de los dos casos

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

El caso de tres autovalores reales repetidos en \mathbb{R}^3 es similar, pero existen ahora tres casos posibles a analizar. Primero note que el polinomio característico es $P_A(\lambda) = (x - \lambda)^3$ y así $(A - \lambda I)^3 v = 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^3$. Los tres casos que debemos analizar son

- (1) existe $e_3 \neq 0$ tal que $(A - \lambda I)^2 e_3 \neq 0$;
- (2) $(A - \lambda I)^2 v = 0$ para cada $v \in \mathbb{R}^3$, pero existe $e_2 \neq 0$ tal que $(A - \lambda I)e_2 \neq 0$; y
- (3) $(A - \lambda I)v = 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^3$.

Estos tres casos llevan (respectivamente) a las formas canónicas

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad y \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

El último de estas tres posibilidades es el más sencillo como la diagonal en el caso de \mathbb{R}^2 y no nos detendremos a analizar esto. En el caso (1) definimos

$$e_1 = (A - \lambda I)^2 e_3, \quad y \quad e_2 = (A - \lambda I)e_3.$$

Claramente $Ae_1 = \lambda e_1$ y $Ae_3 = \lambda e_3 + e_2$ (por la definición de e_2). Además, la definición de e_1 implica que $e_1 = (A - \lambda I)e_2$ y así $Ae_2 = \lambda e_2 + e_1$. Con estas tres relaciones considerando la matriz $[e_1, e_2, e_3]$ tenemos

$$\begin{aligned} A[e_1, e_2, e_3] &= [\lambda e_1, e_1 + \lambda e_2, e_2 + \lambda e_3] \\ &= [e_1, e_2, e_3] \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{A.2}$$

El segundo caso es el más dificultoso de establecer. Nosotros tenemos que $(A - \lambda I)^2 v = 0$ para cada $v \in \mathbb{R}^3$, y que existe $e_2 \neq 0$ tal que $(A - \lambda I)e_2 \neq 0$. Como en el caso de dimensión dos definimos $e_1 = (A - \lambda I)e_2$, luego $Ae_1 = \lambda e_1$ y $Ae_2 = \lambda e_2 + e_1$. Podemos escoger otro vector v_3 que es independiente de e_1 y e_2 que también satisface $Ae_3 = \lambda e_3$ (dado que $\dim \text{Nuc}(A - \lambda I)^2 = 2$). La matriz $P = [e_1, e_2, e_3] \in GL(3, \mathbb{R})$ produce la forma canónica esperada.

En el caso autovectores complejos repetidos de manera similar obtenemos la forma canónica

$$\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}.$$

En general, si usamos las partes real e imaginaria de los autovectores, de los autovalores complejos, para formar una base de vectores reales, obtenemos la Forma Canónica de Jordan Real para A , $J = \text{diag}(B_1, \dots, B_q)$ donde B_j es uno de los siguientes cuatro tipos:

1. $B_j = (\lambda_k)$ para algún autovalor real λ_k ,

2.

$$B_j = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

para algún autovalor real $\lambda = \lambda_k$,

3. $B_j = D_k$ donde $D_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ -\beta_k & \alpha_k \end{pmatrix}$, para algún autovalor complejo $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$, ó

4.

$$B_j = \begin{pmatrix} D_k & I_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & D_k & I_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D_k & I_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & D_k \end{pmatrix}$$

donde D_k es como fue dado arriba para algún autovalor complejo $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ e, I_2 es la matriz identidad de 2×2 .

Esto lo resumimos en el siguiente teorema.

Teorema A.4 (Forma Canónica de Jordan Real). Si $A \in \text{gl}(n, \mathbb{R})$, entonces A es linealmente conjugada a la matriz real

$$J = \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_q) \in \text{gl}(n, \mathbb{R}),$$

donde cada B_j es un bloque de alguna de las cuatro formas dadas arriba. La matriz J es única, salvo el orden de los bloques en la diagonal.

APÉNDICE B

Normas Adaptadas a Matrices

B.1. Normas y productos Adaptados a Matrices

En esta sección final presentamos la prueba de algunos lemas técnicos que utilizamos en la teoría de estabilidad en los capítulos precedentes. Para probar estos lemas partimos del conocimiento de la descomposición de una matriz en su forma canónica de Jordan real, presentada anteriormente. El primer resultado que estudiamos fue utilizado en la caracterización de flujos lineales atractores (Teorema I.14).

Lema B.1. *Sean $A \in gl(n, \mathbb{R})$ y $\beta \in \mathbb{R}$. Si la parte real de cada autovalor de A es menor que β , entonces existe $C \geq 1$ tal que*

$$\|e^{tA}\| \leq Ce^{\beta t},$$

para cada $t \geq 0$.

Demostración. Inicialmente observamos que el lema es independiente de la norma escogida en $gl(n, \mathbb{R})$; de hecho, si el lema es verdadero para una norma $[\cdot]_1$ de $gl(n, \mathbb{R})$ y $[\cdot]_2$ es otra norma en $gl(n, \mathbb{R})$ entonces, por la equivalencia de todas las normas en $gl(n, \mathbb{R})$, obtenemos $a > 0$ tal que

$[B]_2 \leq a[B]_1$ para todo $B \in gl(n, \mathbb{R})$, de modo que

$$[e^{tA}]_2 \leq a[e^{tA}]_1 \leq aC e^{\beta t} \leq C_2 e^{\beta t},$$

para cada $t \geq 0$, con $C_2 = 1 + aC$, es decir, el cambio de normas en $gl(n, \mathbb{R})$ sólo afecta a la constante C .

Análogamente, observamos que el lema es independiente de la matriz en la clase de semejanza de A ; de hecho, si el lema vale para A y $B \in gl(n, \mathbb{R})$ es similar a A , entonces $B = Q^{-1}AQ$ para algún $Q \in GL(n, \mathbb{R})$, de modo que

$$\|e^{tB}\| = \|Q^{-1}e^{tA}Q\| \leq \|Q^{-1}\| \|e^{tA}\| \|Q\| \leq C_1 e^{\beta t},$$

para cada $t \geq 0$, con $C_1 = \|Q^{-1}\| \|Q\| C \geq C$, ya que $1 = \|I\| = \|Q^{-1}Q\| \leq \|Q^{-1}\| \|Q\|$, es decir, cambio dentro de la clase de conjugación de A también sólo afecta a la constante C .

Estas observaciones muestran que basta probar el lema para $A = J \in gl(n, \mathbb{R})$ en la forma canónica de Jordan y con la norma

$$\|C\|_\infty = \|(c_{ij})\|_\infty = \max\{|c_{ij}|/1 \leq i, j \leq n\}$$

de $gl(n, \mathbb{R})$. Más por I.15 (ver p. 8), para cualquier $t \geq 0$ tenemos que $e^{tJ} = C(t) = (c_{ij}(t))$ con

$$|c_{ij}(t)| \leq \frac{t^s}{s!} e^{at},$$

para algún autovalor $\lambda = a + ib$ de A y algún $0 \leq s \leq k - 1$.

Sea, ahora, $\tau < \beta$ tal que la parte real de cada autovalor de A es menor que τ . Si $0 \leq t \leq 1$, se tiene que $|c_{ij}(t)| \leq e^{\tau t} \leq e^{\beta t}$ y, si $t \geq 1$, tenemos que

$$|c_{ij}(t)| \leq \frac{t^s}{s!} e^{\tau t} \leq t^s e^{\tau t} \leq \frac{t^{k-1}}{e^{(\beta-\tau)t}} e^{\beta t} \leq \frac{k!}{(\beta-\tau)^k} e^{\beta t},$$

donde la última desigualdad se sigue de que $\alpha^k t^{k-1} \leq k! e^{\alpha t}$, para cualesquiera $k \geq 1$, $t \geq 1$, y,

$\alpha > 0$. En efecto, recordemos que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\alpha t)^k = e^{\alpha t}$, entonces se tiene

$$\frac{\alpha^k t^{k-1}}{k!} \leq \frac{\alpha^k t^k}{k!} \leq e^{\alpha t}.$$

Finalmente, para obtener la afirmación del lema, basta tomar $C = \max\{1, k!/(\beta - \tau)^k\}$. \square

Para los demás resultados es conveniente introducir la siguiente notación que unifica los casos de la forma canónica de Jordan real. Dados $\lambda, a, b, c \in \mathbb{R}$ y $l \in \mathbb{N}$, escribimos

$$J_{\lambda}^c(l) = \begin{pmatrix} \lambda & c & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & c & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in gl(l, \mathbb{R}), \quad y$$

$$J_{a,b}^c(l) = \begin{pmatrix} J_{a,b} & cI & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & J_{a,b} & cI & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J_{a,b} & cI \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & J_{a,b} \end{pmatrix} \in gl(2l, \mathbb{R}),$$

donde, en el segundo caso, como antes, $0, I, J_{a,b} \in gl(2, \mathbb{R})$ están dadas por

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Por la notación introducida en el Teorema de la Descomposición de Jordan real, tenemos que $\text{diag}(\lambda, \dots, \lambda) = J_{\lambda}^0(l)$, $J_{\lambda}^0(l) = J_{\lambda}^1(l)$, $\text{diag}(J_{a,b}, \dots, J_{a,b}) = J_{a,b}^0(l)$, y $J_{a,b}(l) = J_{a,b}^1(l)$.

Lema B.2. Si $A \in gl(n, \mathbb{R})$, entonces A es linealmente conjugada a una matriz real

$$J = \text{diag}(J_1, \dots, J_r) \in gl(n, \mathbb{R}),$$

donde cada J_i es una matriz de uno de los cuatro tipos $J_{\lambda}^0(l)$, $J_{\lambda}^c(l)$, $J_{a,b}^0(l)$, y $J_{a,b}^c(l)$, para ciertos

l, λ, a y b .

Demostración. Por el teorema de la Descomposición de Jordan real, basta mostrar que las matrices

$$J_\lambda(l), \quad \text{y} \quad J_{a,b}(l)$$

son conjugadas de las matrices

$$J_\lambda^\epsilon(l), \quad \text{y} \quad J_{a,b}^\epsilon(l),$$

para cualquier $\epsilon > 0$, $\lambda, a, b \in \mathbb{R}$ y $l \in \mathbb{N}$, respectivamente. Veamos el caso de autovalor real. Fijamos $\lambda \in \mathbb{R}$ y $l \in \mathbb{N}$ y denotando $J_1 = J_\lambda(l)$, tenemos $J_1 e_i = \lambda e_i + e_{i-1}$ para $2 \leq i \leq l$ y $J_1 e_1 = \lambda e_1$, donde los e_i son los vectores de la base canónica de \mathbb{R}^l . Tomando $\alpha_i \neq 0$ y escribiendo $v_i = \alpha_i e_i$ para $1 \leq i \leq l$, obtenemos

$$\begin{aligned} J_1 v_i &= J_1 \alpha_i e_i = \alpha_i \lambda e_i + \alpha_i e_{i-1} \\ &= \lambda \alpha_i e_i + \frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}} \alpha_{i-1} e_{i-1} \\ &= \lambda v_i + \frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}} v_{i-1}, \end{aligned} \tag{B.1}$$

si $2 \leq i \leq l$ y también $J_1 v_1 = J_1 \alpha_1 e_1 = \lambda \alpha_1 e_1 = \lambda v_1$. Así es claro que queremos $\frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}} = \epsilon$ para $2 \leq i \leq l$, pues de esto obtenemos que la matriz $J_1 = J_\lambda^1(l)$ en la base $\{v_1, \dots, v_l\}$ es precisamente $J_\lambda^\epsilon(l)$ y por tanto ambas matrices son conjugadas. Ahora, basta tomar

$$\alpha_l = 1, \quad \alpha_{l-1} = \frac{\alpha_l}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon}, \quad \alpha_{l-2} = \frac{\alpha_{l-1}}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon^2}, \dots, \quad \text{y}$$

$$\alpha_{l-i+1} = \frac{1}{\epsilon^{i-1}}$$

para $2 \leq i \leq l$. Análogamente, si $J_1 = J_{a,b}^\epsilon(l) \in gl(2l, \mathbb{R})$, entonces construimos la base

$$\mathcal{B} = \left\{ e_1, e_2, \frac{1}{\epsilon} e_3, \frac{1}{\epsilon} e_4, \dots, \frac{1}{\epsilon^{l-1}} e_{2l-1}, \frac{1}{\epsilon^{l-1}} e_{2l} \right\},$$

y obtenemos $[J_1]_{\mathcal{B}} = J_{a,b}^1(l)$, es decir, la matriz de J_1 en la base \mathcal{B} es precisamente $J_{a,b}^1(l)$ y por tanto ambas matrices son conjugadas. \square

Lema B.3. Sea $A \in gl(k, \mathbb{R})$ una matriz cualesquiera y suponga que cada autovalor μ de A satisface $|\mu| < \tau$. Entonces existe una base \mathcal{B} de \mathbb{R}^k tal que la norma asociada a \mathcal{B} satisface

$$|Ax|_{\mathcal{B}} \leq \tau|x|_{\mathcal{B}},$$

para cada $x \in \mathbb{R}^k$. En particular, usando la norma asociada a \mathcal{B} para definir la norma $\|\cdot\|$ del operador en \mathbb{R}^k , se cumple

$$\|A\| \leq \tau.$$

Demostración. Notemos, primeramente, que

$$(ax + by)^2 + (-bx + ay)^2 = a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$$

es cierta para cualesquiera $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, de modo que, en la norma euclidiana (asociada a la base canónica), tenemos

$$|J_{a,b}(x, y)| = \left| \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} ax + by \\ -bx + ay \end{pmatrix} \right| = |a + ib|(x, y)|.$$

Por otro lado, es evidente que $|\lambda x| = |\lambda||x|$, y por tanto no es difícil constatar que

$$|J_{\lambda}^0(l)x| = |\lambda||x|, \quad y$$

$$|J_{a,b}^0(l)(x, y)| = |a + ib|(x, y)|.$$

son válidas para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^l$. Ahora fijamos $r \in \mathbb{N}$ y $\lambda_j, a_j + ib_j$ tales que $|\lambda_j|, |a_j + ib_j| < \tau$ para $1 \leq j \leq r$ y escribimos $J(t) = \text{diag}(J_1(t), \dots, J_r(t)) \in gl(k, \mathbb{R})$, donde cada una de las matrices cuadradas $J_1(t), \dots, J_r(t)$ es alguno de los cuatro tipos $J_{\lambda}^0(l), J_{\lambda}^t(l), J_{a,b}^0(l)$ o $J_{a,b}^t(l)$, para ciertos $l \in \mathbb{N}$. Por lo que vimos arriba, podemos deducir que

$$|J(0)x| \leq \text{máx}\{|\lambda_j|, |a_j + ib_j|\}|x|,$$

esto es, $\|J(0)\| \leq \text{máx}\{|\lambda_j|, |a_j + ib_j|\}$. Como $t \mapsto \|J(t)\|$ es una función real continua y $\|J(0)\| \leq \tau$,

existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $\|J(\epsilon)\| < \tau$ para cada $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$. Observe que ϵ_0 es determinado solamente por los números λ_j y $a_j + ib_j$.

Sea, ahora, $A \in gl(k, \mathbb{R})$ y τ tales que $|\mu| < \tau$ para cada autovalor de A y tomemos $\epsilon > 0$ determinado por los autovalores de A , como ya vimos. Por el lema B.2, existe una base \mathcal{B} de \mathbb{R}^k tal que $J(\epsilon)$ es la matriz de A en la base \mathcal{B} , es decir, dado $x \in \mathbb{R}^k$, las coordenadas de Ax en la base \mathcal{B} son las coordenadas canónicas del vector columna obtenido por la multiplicación de $J(\epsilon)$ por el vector columna $[x]_{\mathcal{B}}$ de las coordenadas de x en la base \mathcal{B} . Así,

$$|Ax|_{\mathcal{B}} = |J(\epsilon)[x]_{\mathcal{B}}| \leq \tau|[x]_{\mathcal{B}}| = \tau|x|_{\mathcal{B}},$$

para cada $x \in \mathbb{R}^k$, demostrando el lema. □

B.2. Logaritmo y Exponencial de Matrices

Motivados por la serie infinita clásica

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,$$

válida para todo $x \in \mathbb{R}$ con $|x| < 1$, definimos el Logaritmo de la matriz $I + A$, con $\|A\| < 1$, por

$$\log(I + A) = A - \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} - \frac{A^4}{4} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{1}{i} A^i \quad (\text{B.2})$$

Proposición B.4. Para cada $A \in gl(n, \mathbb{C})$ con $\|A\| < 1$, la serie B.2 converge.

Demostración. Afirmamos que la serie B.2 es absolutamente convergente. En efecto,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\| (-1)^{i+1} \frac{1}{i} A^i \right\| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \|A^i\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \|A\|^i \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|A\|^i$$

y por comparación con la serie geométrica, para $\|A\| < 1$, tenemos que la serie B.2 es absolutamente convergente. Como $gl(n, \mathbb{C})$ es un espacio de Banach, entonces la serie B.2 converge para cada

$A \in gl(n, \mathbb{C})$ con $\|A\| < 1$. □

La propiedad fundamental del logaritmo de una matriz es la misma que la del logaritmo ordinario, es decir, es la inversa de la funcion exponencial.

Proposición B.5. En el espacio $gl(n, \mathbb{C})$. Sea U una vecindad de I en donde \log está definida y sea V una vecindad de 0 tal que $\exp(V) \subset U$. Entonces

(1) para $X \in U$, $e^{\log X} = X$;

(2) para $A \in V$, $\log e^A = A$.

Demostración. Mostremos (2) primero. Note que, para $A \in V$ tenemos $e^A \in U$, luego $\log e^A$ está definida (es decir, la serie converge). Por otro lado, como

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

entonces,

$$\begin{aligned} \log e^A &= \left(A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots \right) - \frac{1}{2} \left(A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots \right) + \frac{1}{3} \left(A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots \right) + \dots \\ &= A + \left(\frac{A^2}{2!} - \frac{A^2}{2} \right) + \left(\frac{A^3}{3!} - \frac{A^3}{2} + \frac{A^3}{3} \right) + \dots = A \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

(1) Es similar, teniendo en cuenta que,

$$\log X = (X - I) - \frac{1}{2}(X - I)^2 + \frac{1}{3}(X - I)^3 - \dots$$

$$\begin{aligned} e^{\log X} &= I + \left[(X - I) - \frac{1}{2}(X - I)^2 + \dots \right] + \frac{1}{2!} \left[(X - I) - \frac{1}{2}(X - I)^2 + \dots \right]^2 + \dots \\ &= X - \left[\frac{1}{2}(X - I)^2 - \frac{1}{2}(X - I)^2 \right] + \left[\frac{1}{3}(X - I)^3 - \frac{1}{2}(X - I)^3 + \frac{1}{3!}(X - I)^3 \right] + \dots \\ &= X. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Estos cálculos están justificados ya que la serie de la exponencial y logaritmo de matrices es

absolutamente convergente. □

Proposición B.6. Si $AB = BA$, y $\log A$, $\log B$ y $\log(AB)$ están bien definidas, entonces

$$\log(AB) = \log A + \log B.$$

Demostración. Suponemos que $\log A = X$ y $\log B = Y$, es decir, $e^X = A$ y $e^Y = B$ por la proposición anterior. Notemos que $XY = YX$. En efecto,

$$X = \log[I + (A - I)] = (A - I) - \frac{1}{2}(A - I)^2 + \frac{1}{3}(A - I)^3 - \dots,$$

$$Y = \log[I + (B - I)] = (B - I) - \frac{1}{2}(B - I)^2 + \frac{1}{3}(B - I)^3 - \dots,$$

y las series conmutan ya que A y B lo hacen. Luego usando propiedades conocidas de la exponencial de matrices, tenemos

$$AB = e^X e^Y = e^{X+Y}.$$

Esto es equivalente, por la proposición anterior, a

$$\log(AB) = X + Y = \log A + \log B.$$

Esto concluye la prueba de la proposición. □

Proposición B.7. Como la serie B.2 es absolutamente convergente, entonces

$$\frac{d}{dt} \log(I + At) = A(I + At)^{-1}.$$

Demostración. Notemos, primeramente, que

$$\log(I + At) = At - \frac{1}{2}A^2t^2 + \frac{1}{3}A^3t^3 - \frac{1}{4}A^4t^4 + \dots$$

De donde,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \log(I + At) &= A - A^2t + A^3t^2 - A^4t^3 - \dots \\ &= A[I - At + A^2t^2 - A^3t^3 + \dots].\end{aligned}\tag{B.5}$$

Por otro lado, observemos que

$$(I + At)[I - At + A^2t^2 - A^3t^3 + \dots] = I + At - At - A^2t^2 + A^2t^2 + A^3t^3 - A^3t^3 - A^4t^4 + A^4t^4 + \dots = I,$$

es decir,

$$[I - At + A^2t^2 - A^3t^3 + \dots] = (I + At)^{-1}.\tag{B.6}$$

Sustituyendo B.6 en B.5, obtenemos la afirmación de la proposición. \square



Bibliografía

- [1] *Lopes, Artur O., Claus I. Doering., Equações Diferenciais Ordinárias, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2007.*
- [2] *Lima, Elon Lages., Variedades Diferenciáveis, Publicações Matemáticas, IMPA, 2007.*
- [3] *Harris, C. J. and Miles, J., Stability of Systems Linear, Academic Press, 1980.*
- [4] *Spivak, M., A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 1, Publish or Perish Press (1970).*
- [5] *Figueiredo, D., Equações Diferenciais Aplicadas, Colección Matemática Universitaria 1997.*
- [6] *Benazic, R., “Tópicos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias”, Serie de Matemática 2006.*
- [7] *Glendinning, Paul, Stability, inestability and chaos, Cambridge University Press 2001.*
- [8] *Coddington, Earl A., Robert Carlson., Linear Ordinary Differential Equations, Philadelphia, 1997.*
- [9] *Colonius, Fritz., Wolfgang Kliemann., The Dynamics of Control, Philadelphia, 1997.*
- [10] *Elliott, David L., Bilinear Control Systems, Matrices in Action.*
- [11] *Curtis, Morton L., Matrix Groups, Houston, Texas, 1984.*
- [12] *Stillwell, John, Naive Lie Theory, San Francisco, USA, 2007.*