UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS

FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES

CARRERA DE MATEMÁTICA

Teorema de Representación de Yosida

(Estructuras algebraicas ordenadas)

Autor: **Roberto Quispe Mamani**

Tutor : **Lic. Ramiro Choque Canaza**

La Paz - Bolivia

Diciembre - 2017

Universidad Mayor De San Andrés
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Carrera De Matemática

Teorema de Representación de Yosida

(Estructuras algebraicas ordenadas)

Autor: Roberto Quispe Mamani
Tutor : Lic. Ramiro Choque Canaza

La Paz - Bolivia
Diciembre - 2017

Agradecimientos

En primer lugar quiero expresar mi más profundo agradecimiento a Dios por haber guiado mi vida con un propósito. Tal vez mi pasado me desanime, mi futuro quizás me asuste pero lo que ahora vivo, lo vivo con la fe puesta en Dios, lo cual me estimula a alcanzar objetivos muy grandes en este campo de la ciencia; no sólo me dio vida, si no una vida en abundancia lo cual me llena de gozo. Y en su gracia me rodeo de muchas personas maravillosas brindándome apoyo, confianza y cariño.

Agradezco a mis compañeros de estudio de la Carrera de Matemática quienes se vuelven indispensables por la calidad humana que tienen, dejando un recuerdo imperecedero en mi vida. Así mismo, dirijo mi admiración y gratitud al Lic. Ramiro Choque Canasa por su valioso aporte con ideas en el desarrollo de mi proyecto de grado como tutor, lo que me ha permitido ampliar mis conocimientos en este campo magnífico y fascinante de las ciencias exactas. También agradecer inmensamente a mis padres (Juan y Juliana) y a mis queridos hermanos (Justo, Juan Luis, Lino, Hilda, Aleja) que núnca perdieron la fe de apoyarme, y en especial a mis hijos: Melvin, Alejandra y a mi amada esposa Andrea, quienes me motivaron a inspirarme y fortalecerme más.

Agradezco por supuesto a todos los docentes de la Carrera de Matemática que fueron parte de mi formación académica transmitiéndome sus conocimientos y experiencias. Y no puede faltar mis agradecimientos a mis queridos amigos, amigas y personas cercanas a quienes llevo en el corazón, son tantos que se me dificulta mencionarlos uno a uno.
Sinceramente les agradece su servidor: Roberto Quispe Mamani

Que Dios os proteja siempre.

Resúmen

En este trabajo estudiamos a las estructuras algebraicas ordenadas tales como: espacios vectoriales ordenados, espacios de Riesz y sus propiedades. Así mismo los homomorfismos entre espacios de Riesz, isomorfismos de Riesz, ideales de Riesz, espacios arquimedianos con una unidad, Lema de Yosida, Corolario de Yudin. A partir de ahí se demuestra el Teorema de representación de Yosida que describe que los espacios de Riesz son isomorfos a $\mathsf{C}(\mathsf{X})$ para algún espacio de Hausdorff compacto X.

Introducción

En matemática, un teorema de representación es una proposición, que establece que cada estructura abstracta con ciertas propiedades es isomorfa a una estructura concreta. Existen diversos teoremas de representación en distintos campos de la matemática como por ejemplo:

a) En álgebra, el Teorema de Cayley establece que cada grupo es isomorfo a un grupo transformado de algún conjunto. La teoría de la representación estudia las propiedades de grupos abstractos a través de sus representaciones como transformaciones de espacios vectoriales. Adicionalmente, también en álgebra, el Teorema de representación de Stone para álgebras booleanas establece que cada álgebra booleana es isomorfa a un campo de conjuntos. Una variante de este teorema encauzado a los retículos establece que cada retículo distributivo es isomorfo a un subretículo conjunto potencia de algún conjunto.

b) En teoría de categorías, el Lema de Yoneda explica cómo funtores arbitrarios en la categoría de conjuntos puede ser vista como funtores homomorfos.

c) En teoría de conjuntos, el Teorema del Colapso de Mostowski establece que cada estructura extensional bien fundada es isomorfa a un conjunto transitivo con la relación de pertenencia (ϵ).

d) En el análisis funcional, el Teorema de representación de Riesz es actualmente una lista de muchos teoremas. Uno de ellos identifica el espacio dual de $C(X)$ con el conjunto de medidas regulares en X.

El presente trabajo trata de la conexión entre un espacio topológico X (principalmente de un espacio de Hausdorff compacto) y la estructura algebraica $C(X)$ del conjunto de todas las funciones continuas. Consideraremos a $C(X)$ con el orden puntual definido como un espacio métrico, como un espacio vectorial ordenado y como un espacio de Riesz. Más adelante se verá teoremas de representación que nos indica, que los espacios vectoriales dotados de una cierta estructura algebraica son isomorfos con $\mathsf{C}(\mathsf{X})$ para algún espacio compacto X.

Para obtener dicho resultado nos basaremos en resultados que han sido estudiados en topología, topología algebraica, teoría de conjuntos y análisis funcional, tales como: Teorema de Alaoglu, como una consecuencia del Teorema de Tychonoff; Teorema de Stone-Weierstrass, Lema de Zorn, Lema de Urysohn, Teorema de Hahn-Banch y diversos tópicos de las estructuras algebraicas ordenadas entre otros.

Las operaciones usuales de suma y producto de funciones, definidas de manera puntual, dan a $\mathsf{C}(\mathsf{X})$ una estructura de espacio vectorial ordenado con el orden usual de $\mathbb{R}$, lo cual induce en $\mathsf{C}(\mathsf{X})$ un orden arquimediano compatible con las operaciones de orden puntual así, con respecto a este orden $\mathsf{C}(\mathsf{X})$ se convierte en un espacio de Riesz.

Índice general

1 Espacio de funciones continuas $\mathsf{C}(\mathsf{X})$

1.1. Espacio de funciones continuas

En esta sección veremos aspectos puramente algebraicos de las estructuras algebraicas ordenadas en espacios vectoriales. Nos interesa especialmente los espacios de Riesz arquimedianos con una unidad. En nuestro contexto nos referimos a $\mathsf{C}(\mathsf{X}) = \{f/f : \mathsf{X} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continua}\}$ no sólo como una colección de funciones continuas en cada punto de un espacio topológico X, si no de una manera más abstracta, es decir, como un espacio vectorial ordenado que en concreto será, un espacio de Riesz.

Llamamos un *espacio de Riesz* a un espacio vectorial dotado de un orden (parcial) que posee una estructura de retículo (todo subconjunto finito no vació tiene supremo e ínfimo) compatible con la estructura vectorial. De donde tenemos que los espacios vectoriales ordenados clásicos, tales como, el espacio de sucesiones convergentes, el espacio de funciones continuas, el espacio de funciones integrables Lebesgue, el espacio de números reales son espacios de Riesz. Sea X un espacio topológico, $\mathsf{C}(\mathsf{X})$ es el conjunto de todas las funciones reales continuas en X, utilizando el orden puntual

$$f \leqslant g \text{ si y sólo si } f(x) \leqslant g(x) \text{ para todo } x \in \mathsf{X}$$

convierte a $\mathsf{C}(\mathsf{X})$ en un espacio de Riesz.

Más adelante presentamos al Teorema de representación de Yosida, que describe que los espacios de Riesz son isomorfos a $\mathsf{C}(\mathsf{X})$ para algún espacio de Hausdorff compacto X. En el fondo tenemos al Teorema de Alaoglu que nos da el espacio X que necesitamos. Sea E es un espacio de Riesz arquimediano con una unidad, lo cual determina una norma en E. Mientras tanto en principio desarrollamos la parte de la teoría de los espacios de Riesz y sus propiedades y que en esencia nos limitaremos a lo que es necesario y suficiente para demostrar el Teorema de representación de Yosida.

Si E y F son espacios de Riesz, una aplicación $T : E \longrightarrow F$ se llama un *homomorfismo de Riesz* si es lineal y

$$T(x \vee y) = (T_x \vee T_y) \ , \ T(x \wedge y) = (T_x) \wedge (T_y) \text{ para todo } x, y \in E.$$

Si X es un espacio de Hausdorff compacto, entonces los puntos de X de forma natural se corresponden con los homomorfismos de Riesz

$$T : C(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

que envía la función constante $\mathbb{1}$ a 1.

Otro resultado principal que presentaremos es el Lema de Yosida que describe la existencia de un homomorfismos de Riesz no trivial $E \longrightarrow \mathbb{R}$, donde E es un espacio de Riesz arquimediano con una unidad. $BC(X)$ es el espacio de las funciones continuas acotadas es arquimediano y tiene a la función constante $\mathbb{1}$ como una unidad.

1.2. Estructuras ordenadas

Definición 1.1. *Sea* $(S, \leqslant)$ *un conjunto (parcialmente) ordenado, para* $T \subset S$ *con* $T \neq \emptyset$ *decimos que:*

a) $s \in S$ *es una* ***cota superior*** *de* T *si* $t \leqslant s$ *para todo* $t \in T$.

b) $s_0 \in S$ *se llama* ***supremo*** *de* T *si es el elemento mínimo del conjunto de todas las cotas superiores de* T.

c) $s \in S$ *es una* ***cota inferior*** *de* T *si* $s \leqslant t$ *para todo* $t \in T$.

d) $s_0 \in S$ *se llama* ***ínfimo*** *de* T *si es el elemento máximo del conjunto de todas las cotas inferiores de* T.

Nota: Si $a, b \in S$ y $T = \{a, b\}$ el supremo y el ínfimo de T, si existen lo denotamos por

$$\inf\{a, b\} = a \wedge b, \sup\{a, b\} = a \vee b.$$

Definición 1.2. *Sean* $(S_1, \leqslant)$ *y* $(S_2, \preceq)$ *conjuntos parcialmente ordenados, la aplicación* $f : S_1 \longrightarrow S_2$ *es creciente o* ***preserva orden*** *si* $x \leqslant y$ *entonces* $f(x) \preceq f(y)$ *para todo* $x, y \in S_1$.

Sea f una aplicación que preserva el orden, se dice que f es un *morfismo* entre conjuntos parcialmente ordenados, además decimos que f es un:

a) *monomorfismo* si f es inyectiva

b) *epimorfismo* si f es sobreyectiva

c) *isomorfismo* si f es biyectiva

Generalmente se usan los símbolos $\leqslant, \preceq, \ll$ para denotar las relaciones de órden en un conjunto dado, pero a menudo usaremos simplemente $\leqslant$ para representar el órden, si no existe ninguna confusión alguna, de aquí en adelante.

Definición 1.3. *Sean* $(S_1, \leqslant)$ *y* $(S_2, \leqslant)$ *conjuntos ordenados, una aplicación* $f : S_1 \longrightarrow S_2$ *se llama* ***isomorfismo de orden*** *si es biyectiva y* $x \leqslant y$ *si y sólo si* $f(x) \leqslant f(y)$ *para todo* $x, y \in S_1$.

Si existe un isomorfismo de orden entre S_1 y S_2 entonces S_1 y S_2 son isomorfos y la biyección f se llama isomorfismo de orden entre S_1 y S_2. La expresión *si y sólo si* en la definición es muy importante. Por ejemplo, establece que dos elementos en S_1 son comparables siempre y cuando sus imágenes vía la biyección son comparables en S_2. Además, dice como deben compararse dos elementos en S_1 si sabemos como se comparan sus imágenes en S_2. En el caso en que se tengan conjuntos totalmente ordenados el *sólo si* puede suprimirse.

Teorema 1.1. *Sean* $(S_1, \leqslant)$ *y* $(S_2, \leqslant)$ *conjuntos ordenados y* $f : S_1 \longrightarrow S_2$ *un isomorfismo de orden, si* $T \subset S_1$ *no vació, que tiene el supremo entonces* $f(\sup T)$ *es el supremo de* $f(T)$ *en* S_2. *Similarmente, si* T *tiene ínfimo entonces* $f(\inf T)$ *es el ínfimo de* $f(T)$ *en* S_2.

Demostración. Sea s_0 el supremo de T entonces, para todo $t \in T$, $\quad t \leqslant s_0$ como f es un isomorfismo de orden, entonces $f(t) \leqslant f(s_0)$. Por lo tánto $f(s_0)$ es una cota superior de $f(T)$. Sea u una cota superior de $f(T)$ entonces $f(t) \leqslant u$ $\quad$ para todo $t \in T$, luego

$$f^{-1}(f(t)) \leqslant f^{-1}(u),$$

así,

$$t \leqslant f^{-1}(u).$$

Por lo tanto, $f^{-1}(u)$ es una cota superior de T y como s_0 es el supremo de T, entonces $s_0 \leqslant f^{-1}(u)$. Luego

$$f(s_0) \leqslant u,$$

de donde se concluye que $f(s_0)$ es el supremo de $f(T)$ en S_2. De manera similar se demuestra para el caso del ínfimo.

$\square$

Como una consecuencia del teorema anterior tenemos que, si $x, y \in S_1$ y $\{x, y\}$ tiene supremo e ínfimo, f es un isomorfismo de orden entre S_1 y S_2, entonces se tiene que:

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$$

y

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y).$$

Definición 1.4. *Un **retículo** es un conjunto parcialmente ordenado $(S, \leqslant)$ en el que, para todo $x, y \in S$, existen $x \vee y$ y $x \wedge y$.*

Nota: En un retículo S, cualquier subconjunto finito tiene supremo e ínfimo.

Teorema 1.2. *Si $(S, \leqslant)$ es un retículo, las operaciones $\vee$ y $\wedge$ satisfacen las siguientes propiedades:*
Conmutatividad

$$x \vee y = y \vee x,$$

$$x \wedge y = y \wedge x.$$

Asociatividad

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z,$$

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z.$$

Absorción

$$x \vee (x \wedge y) = x,$$

$$x \wedge (x \vee y) = x.$$

Idempotencia

$$x \vee x = x,$$

$$x \wedge x = x.$$

Consistencia

$$x \leqslant y \Leftrightarrow x \vee y = y \Leftrightarrow x \wedge y = x.$$

Propiedad *Si* $x \leqslant y$ *y* $z \leqslant t$ *entonces*

$$x \wedge z \leqslant y \wedge t,$$

$$x \vee z \leqslant y \vee t.$$

Observaciones:

1. Si S es un retículo entonces para todo $x, y, z \in S$ se tiene

$$\sup\{x, y, z\} = (x \vee y) \vee z,$$

$$\inf\{x, y, z\} = (x \wedge y) \wedge z;$$

para mayor comodidad omitimos los paréntesis y escribimos

$$x \wedge y \wedge z,$$

$$x \vee y \vee z.$$

2. Si S es un conjunto totalmente ordenado, entonces S es un retículo, ya que dados $x, y \in S$ siempre existen

$$x \vee y = \max\{x, y\}$$

y

$$x \wedge y = \min\{x, y\}.$$

Definición 1.5. *Un* ***espacio vectorial ordenado*** *es un espacio vectorial* E *sobre* $\mathbb{R}$ *dotado de una relación de orden* $\leqslant$ *compatible con la estructura vectorial, esto es:*
Si $x, y \in E$ *con* $x \leqslant y$ *entonces*

$$x + z \leqslant y + z, \qquad \textit{para todo } z \in E$$

$$\alpha x \leqslant \alpha y, \qquad \textit{para todo } \alpha \in (0, \infty).$$

Observemos que si consideramos las biyecciones $f : E \longrightarrow E$ con $f(x) = x + z$ y $g : E \longrightarrow E$ con $g(x) = \alpha x$ donde E es un espacio vectorial ordenado, las biyecciones mencionadas son crecientes es decir preservan el orden. En efecto, si $x \leqslant y$, entonces para todo $z \in E$, $\alpha \in (0, \infty)$

$$x + z \leqslant y + z \text{ y } \alpha x \leqslant \alpha y \text{ lo cual es equivalente a } f(x) \leqslant f(y) \text{ y } g(x) \leqslant g(y).$$

Además f y g son isomorfismos de orden ya que sus inversas $f^{-1} : E \longrightarrow E$ y $g^{-1} : E \longrightarrow E$ definidas como $f^{-1}(x) = x + (-z)$ y $g^{-1}(x) = \alpha^{-1}x$ preservan el orden, pues si $x \leqslant y$ entonces $x + (-z) \leqslant y + (-z)$ y $\alpha^{-1}x \leqslant \alpha^{-1}y$, donde $\alpha^{-1} > 0$. Como f y g son isomorfismos de orden, entonces tenemos:

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) \text{ y } g(x \vee y) = g(x) \vee g(y)$$

$$\text{es decir } (x \vee y) + z = (x+z) \vee (y+z), \alpha(x \vee y) = (\alpha x) \vee (\alpha y). \tag{1.1}$$

De forma similar, se tiene

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \text{ y } g(x \wedge y) = g(x) \wedge g(y)$$

$$\text{es decir } (x \wedge y) + z = (x+z) \wedge (y+z), \alpha(x \wedge y) = (\alpha x) \wedge (\alpha y). \tag{1.2}$$

Definición 1.6. *Sea E un espacio vectorial ordenado, entonces el conjunto $E^+ = \{x \in E : x \geqslant 0\}$ se denomina* ***cono positivo*** *de E.*

1.3. Propiedades de un espacio vectorial ordenado

Sea E un espacio vectorial ordenado, entonces tenemos las siguientes propiedades:

(**1**) Para todo $x, y \in E$ tenemos $x \geqslant y \Leftrightarrow x - y \in E^+$.

Demostración. Se tiene $x \geqslant y \Leftrightarrow x + (-y) \geqslant y + (-y) \Leftrightarrow x - y \geqslant 0$ por lo tanto, $x - y \in E^+$. □

(**2**) Si $x, y \in E$ entonces $x \geqslant y \Leftrightarrow -x \leqslant -y$.

Demostración. En efecto,

$$x \geqslant y \Leftrightarrow x+(-y) \geqslant y+(-y) \Leftrightarrow x-y \geqslant 0 \Leftrightarrow (x-y)+(-x) \geqslant 0+(-x) \Leftrightarrow -y \geqslant -x.$$

□

(**3**) Si $T \subset E$ no vacío que tiene supremo, entonces $-\sup T = \inf(-T)$ donde $-T = \{-x : x \in T\}$.

Demostración. Sea $\alpha = \sup T$, luego $t \leqslant \alpha$ para todo $t \in T$, de donde $-t \geqslant -\alpha$; por lo tanto, $-\alpha$ es cota inferior de $(-T)$. Sea u una cota inferior de $(-T)$ entonces $-t \geqslant u$ para todo $t \in T$, luego $t \leqslant -u$ de donde concluimos que, $-u$ es una cota superior de T, entonces $\alpha \leqslant -u$ ya que α es el supremo de T. Así, $-\alpha \geqslant u$ y por lo tanto, $-\alpha$ es el ínfimo de $(-T)$. □

(**4**) Si $x, y, x', y' \in E$ donde $x \geqslant y$, $x' \geqslant y'$ entonces $x + x' \geqslant y + y'$.

Demostración. En efecto, $x + x' \geqslant y + x'$ y $y + x' \geqslant y + y'$, luego por transitividad $x + x' \geqslant y + y'$.

$\square$

Definición 1.7. *Sea* E *un espacio vectorial ordenado, para un* $x \in E$ *si el conjunto* $\{x, -x\}$ *tiene supremo entonces a ese valor le llamamos el* ***valor absoluto*** *de* x *y es denotado por*

$$|x| = x \vee (-x).$$

Como $|x| \geqslant x$, $|x| \geqslant -x$, entonces $|x|+|x| \geqslant x+(-x)$, así $2|x| \geqslant 0$, luego $2^{-1}2|x| \geqslant 2^{-1}0$, de donde

$$|x| \geqslant 0.$$

2

Espacios de Riesz y sus propiedades

2.1. Espacios de Riesz

Definición 2.1. *Un **espacio de Riesz** (o retículo vectorial) es un espacio vectorial ordenado que posee estructura de retículo.*

Teorema 2.1. *Un espacio vectorial ordenado E es un espacio de Riesz si y sólo si, todos los elementos de E tienen valor absoluto.*

Nota. Si en un espacio vectorial E, todos los elementos tienen valor absoluto, entonces para todo $x, y \in E$

$$x \vee y = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}|x-y|$$

y

$$x \wedge y = \frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{2}|x-y|.$$

Luego E es un espacio de Riesz.

Demostración. $\Rightarrow$) Si E es un espacio de Riesz, entonces para todo $x, y \in E$, existe $x \vee y$. En particular, para $x, -x \in E$ existe

$$|x| = x \vee (-x).$$

Por lo tanto todos los elementos de E tienen valor absoluto.

$\Leftarrow$) Sean $x, y \in E$ como para cada elemento de E existe el valor absoluto, entonces en particular,

$$|x-y| = (x-y) \vee [-(x-y)] = (x-y) \vee (y-x).$$

Por otra parte, tenemos que la aplicación traslación es un isomorfismo de orden. Así, para $z = x + y$

$$\begin{aligned}|x-y|+z &= [(x-y)\vee(y-x)]+z = [(x-y)+z]\vee[(y-x)+z]\\ &= [(x-y)+(x+y)]\vee[y-x+x+y] = (2x)\vee(2y) = 2(x\vee y).\end{aligned}$$

De donde se deduce que el conjunto $\{x, y\}$ tiene supremo y

$$x\vee y = \frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{2}|x-y|. \tag{2.1}$$

Para obtener $x\wedge y$, cabe destacar que por (2.1) el conjunto $T=\{-x,-y\}$ tiene supremo que es igual a $-\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{2}|x-y|$ en efecto,

$$(-x)\vee(-y) = \frac{1}{2}(-x+(-y))+\frac{1}{2}|-x-(-y)| = -\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{2}|x-y|$$

Así, por propiedad (3) de los espacios vectoriales tenemos que $-\sup T = \inf(-T)$ luego

$$x\wedge y = \inf\{x,y\} = -\sup\{-x,-y\} = -[-\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{2}|x-y|] = \frac{1}{2}(x+y)-\frac{1}{2}|x-y|.$$

Con lo cual queda demostrado. $\square$

2.2. Ejemplos de espacios de Riesz

(1) El cuerpo de números reales $\mathbb{R}$ con el orden usual, es un espacio de Riesz ya que para todo $a\in\mathbb{R}$ existe $|a| = \sup\{a,-a\} = \max\{a,-a\}$ que también está en los números reales, porque $\mathbb{R}$ es totalmente ordenado, luego por el Teorema 2.1 $\mathbb{R}$ es un espacio de Riesz.

(2) Para cualquier conjunto X, el conjunto $\mathbb{R}^X = \{\ f/f : X \longrightarrow \mathbb{R}\ \}$ forma un espacio vectorial con las operaciones puntuales:

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x), (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \quad \forall x\in X, \quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Además, $\mathbb{R}^X$ es un espacio vectorial ordenado bajo el orden puntual dado por

$$f\leqslant g \Longleftrightarrow f(x)\leqslant g(x), \quad \text{para todo } x\in X \text{ y } f,g\in\mathbb{R}^X$$

Por lo tanto, para cualquier $f\in\mathbb{R}^X$, sea la función $h : X\longrightarrow\mathbb{R}$ la composición de las funciones $X\xrightarrow{f}\mathbb{R}\xrightarrow{|.|}\mathbb{R}$, es decir, $h(x) = |f(x)|$. Ahora verificamos que h es la más pequeña entre los elementos $g\in\mathbb{R}^X$ tales que satisfacen la condición $g\geqslant f$ y $g\geqslant -f$. En efecto, sea $D = \{g\in\mathbb{R}^X : g\geqslant f \text{ y } g\geqslant -f\}$ y $A = \{f(x), -f(x)\}$. Notemos que D es el conjunto de las cotas superiores de A. Como $h(x) = |f(x)| \geqslant f(x)$, $|f(x)| \geqslant -f(x)$ entonces $h \in D$. Ahora demostremos que h es el supremo de A, para lo cual debemos demostrar que para todo $g \in D$

$$\begin{aligned} h \leqslant g &\Leftrightarrow h(x) \leqslant g(x) \text{ para todo } x \in X \\ &\Leftrightarrow |f(x)| \leqslant g(x) \\ &\Leftrightarrow -g(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x) \\ &\Leftrightarrow \underbrace{-g(x) \leqslant f(x)}_{(1)} \quad y \quad \underbrace{f(x) \leqslant g(x)}_{(2)}. \end{aligned}$$

En efecto, como $g \in D$ entonces $g(x) \geqslant f(x)$ y $g(x) \geqslant -f(x)$ lo cual es equivalente a $-g(x) \leqslant f(x)$ y $f(x) \leqslant g(x)$. Reunimos las condiciones (1) y (2) señaladas anteriormente de donde concluimos que $h \leqslant g$ para todo $g \in D$. Así, $h = |f| = f \vee (-f) = \sup\{f, -f\}$; luego, por el Teorema 2.1, $\mathbb{R}^X$ es un espacio de Riesz. En $\mathbb{R}^X$ se verifican las siguientes propiedades:

$$(f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x)\ ,\ (f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x) \text{ para todo } x \in X; \text{para todo } f, g\ \in \mathbb{R}^X$$

En efecto, se tiene

$$\begin{aligned} f \leqslant f \vee g \Leftrightarrow f(x) \leqslant (f \vee g)(x), \\ g \leqslant f \vee g \Leftrightarrow g(x) \leqslant (f \vee g)(x), \end{aligned}$$

por definición del supremo. Luego $f(x) \vee g(x) = \sup\{f(x), g(x)\} \leqslant (f \vee g)(x)$. Por otra parte, sea $u(x)$ una cota superior de $\{f(x), g(x)\}$ entonces

$$\begin{aligned} f(x) \leqslant u(x) \Leftrightarrow f \leqslant u, \\ g(x) \leqslant u(x) \Leftrightarrow g \leqslant u. \end{aligned}$$

Luego se tiene $f \vee g \leqslant u \Leftrightarrow (f \vee g)(x) \leqslant u(x)$, así $(f \vee g)(x)$ es la mínima cota superior de $\{f(x), g(x)\}$ y por definición del supremo tenemos que $(f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x)$. Para el caso del ínfimo procedemos de manera similar y se tiene que $(f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x)$.

(3) Sea X un espacio topológico, para cualquier $f \in C(X)$ tenemos que la función $|f|$ es también continua, así $|f| \in C(X)$. Por otra parte, tenemos que $C(X)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^X$ bajo el orden puntual inducido. Por lo tanto, $|f|$ es el supremo de $\{f, -f\}$, es decir, es el valor de f. Por el Teorema 2.1, concluimos que $C(X)$ es un espacio de Riesz. Luego si $f, g \in C(X)$, entonces se tiene que:

$$f \vee g = \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}|f-g| \in C(X) \ \text{ y } \ f \wedge g = \frac{1}{2}(f+g) - \frac{1}{2}|f-g| \in C(X).$$

Así, tenemos que para todo $f, g \in C(X)$, $\;f \vee g$, $f \wedge g \in C(X)$, ya que $C(X)$ es un retículo.

(4) Consideremos el conjunto $A = \{f/f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ con } f(x) = \alpha + \beta x, \;\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ que es un espacio vectorial con las operaciones puntuales

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Es más, A es un subespacio vectorial ordenado, del espacio de Riesz $C([0,1])$ bajo el orden puntual inducido, ya que $f(x) = \alpha + \beta x$ es continua en $[0,1]$. Sin embargo, notemos que no para todo $f \in A$, $|f| \in A$. Por ejemplo, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de la figura 1, pues no existe una función afín más pequeña g que satisface la propiedad $g \geqslant f$, $g \geqslant -f$, es decir, no existe el valor absoluto $|f|$ para algunos $f \in A$, de donde concluimos que A no es un espacio de Riesz.

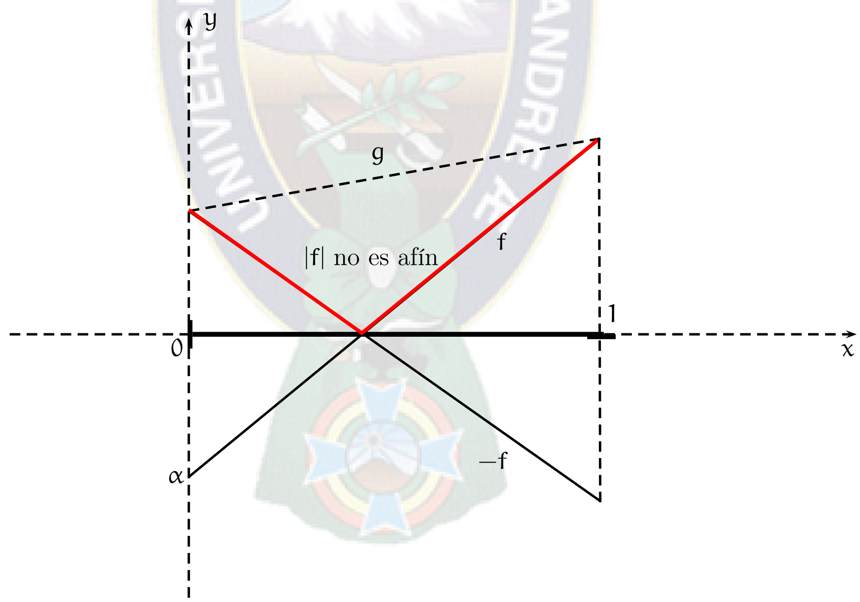

Figura 1: *No toda función afín en A tiene valor absoluto.*

(5) Un subespacio vectorial de un espacio vectorial ordenado es en sí mismo un espacio vectorial ordenado con el orden inducido. Sin embargo, un subespacio vectorial de un espacio de Riesz puede dejar de ser un espacio de Riesz, como en el siguiente ejemplo:
Sea $\mathcal{D} = \{f/f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ diferenciable}\}$. $\mathcal{D}$ es un subespacio vectorial ordenado del

espacio de Riesz $C\big([0,1]\big)$, en particular la función

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto f(t) = 2t - 1$$

es diferenciable con $f'(t) = 2$. Así $f \in \mathcal{D}$; pero $|f| \notin \mathcal{D}$ ya que no hay una función más pequeña diferenciable y con la propiedad $g \geqslant f$ y $g \geqslant -f$, como ilustra en la figura 2.

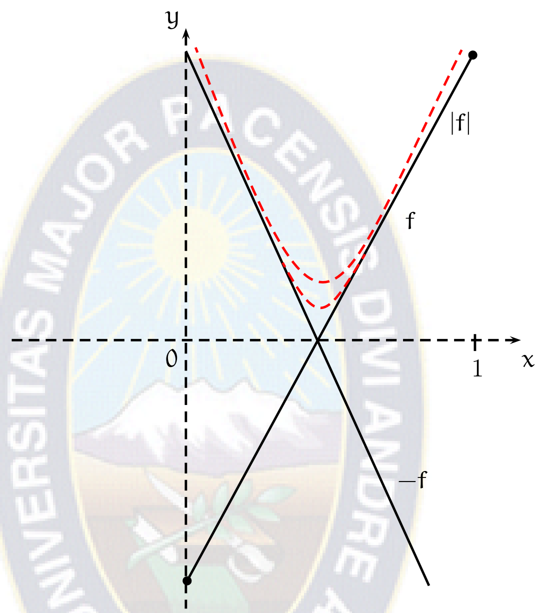

Figura 2: *No toda función diferenciable en $\mathcal{D}$ tiene valor absoluto.*

(6) Dado el conjunto $\mathcal{P} = \left\{ \, p/p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ función polinomial} \right\}$ que es un espacio vectorial con las operaciones

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x),$$
$$(\lambda p)(x) = \lambda p(x),$$

donde se define, un orden poco ortodoxo dado por:

$$p \leqslant q \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \ (\forall x \in [k, \infty)) \ p(x) \leqslant q(x),$$

con este orden $\mathcal{P}$ se convierte en un espacio vectorial ordenado. Sabemos que un polinomio no nulo tiene solo un número finito de ceros, de ello se deduce que para cualquier $p \in \mathcal{P}$, $p \leqslant 0$ o $p \geqslant 0$ estableciendo así, que $\mathcal{P}$ es totalmente ordenado, en particular $\mathcal{P}$ es un retículo, luego $\mathcal{P}$ es un espacio de Riesz.

2.3. Subespacios de Riesz

Sean E un espacio de Riesz, D un subespacio vectorial de E y si $x, y \in D$, por definición el símbolo "$x \vee y$" representa el elemento mínimo de $\{z \in E : \ z \geqslant x \text{ y } z \geqslant y\}$. D es un espacio vectorial ordenado con el orden inducido por E. Si $x \vee y$ está en D entonces "$x \vee y$" es el elemento mínimo de $\{z \in D : \ z \geqslant x \text{ y } z \geqslant y\}$, es decir, $x \vee y$ es una cota superior para el subconjunto $\{x, y\}$ del conjunto ordenado D, en particular $\{x, y\}$ es un subconjunto de D que tiene una cota superior.
Consideraciones similares son válidas para "$\wedge$" en lugar de "$\vee$", lo cual nos lleva a:

Definición 2.2. *Un **subespacio Riesz** de un espacio de Riesz E, es un subespacio vectorial D de E con la propiedad:*

$$\textit{si } x, y \in D, \ \textit{entonces}\, x \vee y, \ x \wedge y \in D. \tag{2.2}$$

Nota: Obviamente un subespacio de Riesz de un espacio de Riesz E, es un subespacio vectorial D que satisface:

$$\text{si } x \in D \text{ entonces } |x| \in D, \tag{2.3}$$

lo contrario también es válido.

Observaciones. Sea E un espacio de Riesz.

(1) Si D es un subespacio de Riesz de E, entonces D en sí mismo es un espacio de Riesz bajo el orden inducido por E y las expresiones "$x \vee y$" y "$x \wedge y$" se pueden utilizar sin ambigüedad.

(2) En el ejemplo (4) de la sección anterior de los espacios de Riesz nos presenta a

$$A = \{f/f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ con } f(x) = \alpha + \beta x \text{ una función afín } \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

como un subespacio vectorial del espacio de Riesz $C([0,1])$ bajo el orden heredado por $C([0,1])$, pero verificamos que A no es un subespacio de Riesz de $C([0,1])$. De donde concluimos que, no todo subespacio vectorial de un espacio de Riesz es de Riesz.

(3) Si D es un subespacio de Riesz de E, entonces cada subespacio de D es un subespacio Riesz de E. Ya que la inclusión es transitiva, es decir, el subespacio del subespacio es un subespacio de E y para cualquier par de elementos del cual, siempre hay supremo e ínfimo pues E es un espacio de Riesz.

Ejemplos.

A menudo la forma más sencilla de probar que un espacio vectorial ordenado, sea un espacio de Riesz es presentándolo como un subespacio vectorial de algún $\mathbb{R}^X$.

(1) Para un espacio topológico X, $C(X) = \{f/f : X \to \mathbb{R} \text{ continua}\}$ y

$$BC(X) = \{f/f : X \to \mathbb{R} \text{ continua y acotada}\}$$

son subespacios de Riesz de $\mathbb{R}^X$ ya que

$$f \in C(X) \Rightarrow |f| \in C(X) \quad \text{y} \quad f \in BC(X) \Rightarrow |f| \in BC(X).$$

(2) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{f/f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$ tiene varios subespacios de Riesz "clásicos" tales como:

$$BC(\mathbb{N}) = \ell^\infty = \{f/f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \text{ continua y acotada}\} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : |x_n| < \infty\}$$

el espacio de sucesiones reales acotadas.

$$C = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : (x_n) \text{ es convergente}\},$$
$$C_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : (x_n) \text{ converge a } 0\},$$

y el espacio

$$\ell^1 = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < +\infty\right\}.$$

(3) Una función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ es periódica si hay un $p \in \mathbb{N}$ tal que $f(n+p) = f(n)$ para $n \in \mathbb{Z}$. Estas funciones periódicas forman un subespacio de Riesz de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}} = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}\}$.

(4) Si E es un subespacio de Riesz de $C(X)$ para algún espacio topológico X y si $A \subset X$, entonces $\{f|_A : f \in E\}$ es un subespacio Riesz de $C(A)$.

Propiedades de un espacio de Riesz

Sea E un espacio de Riesz.

(1) Si $A : E \to E$ es un isomorfismo de orden, entonces por definición se tiene:

$$A(x \vee y) = A(x) \vee A(y), \quad A(x \wedge y) = A(x) \wedge A(y) \quad \text{para todo } x, y \in E.$$

Si A es lineal, entonces

$$A(|x|) = |A(x)| \quad \text{para todo } x \in E.$$

Demostración. Como A es lineal, entonces $A(-x) = -A(x)$, luego se tiene,

$$\begin{aligned} A\big(|x|\big) &= A\big(x \vee (-x)\big) \\ &= A(x) \vee A(-x) \\ &= A(x) \vee \big(-A(x)\big) \\ &= \big|A(x)\big| \qquad \forall x \in E. \end{aligned}$$

□

La aplicación $B : E \to E$ es una biyección que invierte el orden si tiene la propiedad,

$$B(x) \leqslant B(y) \Leftrightarrow x \geqslant y \ \text{ para todo } x, y \in E,$$

la inversa $B^{-1} : E \to E$ también invierte el orden. En efecto, como E es un espacio de Riesz, supongamos lo contrario. Sea $u \leqslant v$, $u, v \in E$ con $u \neq v$ y $B^{-1}(u) \leqslant B^{-1}(v)$ como B invierte el orden, entonces

$$\begin{aligned} B\big(B^{-1}(u)\big) &\geqslant B\big(B^{-1}(v)\big) \\ u &\geqslant v, \end{aligned}$$

lo cual implica por antisimetria que, $u = v$ lo cual es una contradicción. Entonces

$$\begin{aligned} B(x \vee y) &= B(x) \wedge B(y) \ \text{ para todo } x, y \in E \text{ y} \\ B(x \wedge y) &= B(x) \vee B(y) \ \text{ para todo } x, y \in E. \end{aligned}$$

En efecto, sea $T \subset E$ donde siempre existen el supremo e ínfimo de T ya que E es un espacio de Riesz, entonces afirmamos que:

$$B(\sup T) = \inf B(T).$$

Demostración. Sea $s_0 = \sup T$, entonces $t \leqslant s_0$ para todo $t \in T$, luego $B(t) \geqslant B(s_0)$. Por lo tanto, $B(s_0)$ es una cota inferior de $B(T)$. Supongamos que u es una cota inferior de $B(T)$, entonces $B(t) \geqslant u$ para todo $t \in T$, luego

$$\begin{aligned} B^{-1}\big(B(t)\big) &\leqslant B^{-1}(u) \\ t &\leqslant B^{-1}(u), \end{aligned}$$

como s_0 es el supremo de T, entonces $s_0 \leqslant B^{-1}(u)$. Así, $B(s_0) \geqslant u$.
De donde concluimos que, $B(s_0)$ es el ínfimo de $B(T)$. □

En particular, si $T = \{x, y\}$, entonces,

$$B(x \vee y) = B(x) \wedge B(y), \quad B(x \wedge y) = B(x) \vee B(y) \quad \text{para todo } x, y \in E.$$

A continuación desarrollamos una serie de fórmulas en un espacio de Riesz E, las cuales formarán una herramienta útil para el desarrollo de nuestra teoría.

(2) Para $a \in E$ y $\alpha \in (0, \infty)$ las aplicaciones $x \mapsto x + a$ y $x \mapsto \alpha x$ son isomorfismos de orden de $E \to E$, mientras $x \mapsto -x$ invierte el orden es decir, $x \leqslant y \Leftrightarrow -y \leqslant -x$ de donde tenemos que:

$$\begin{aligned} (x \vee y) + a &= (x + a) \vee (y + a), \\ (x \wedge y) + a &= (x + a) \wedge (y + a), \end{aligned}$$

$$\alpha(x \vee y) = (\alpha x) \vee (\alpha y) \quad \alpha > 0,$$

$$-(x \vee y) = (-x) \wedge (-y), \quad -(x \wedge y) = (-x) \vee (-y).$$

(3) Para todo $a \in E$ las aplicaciones $x \mapsto x \vee a$ y $x \mapsto x \wedge a$ son crecientes es decir:

$$\text{si } x \leqslant y \text{ entonces } x \vee a \leqslant y \vee a \text{ y } x \wedge a \leqslant y \wedge a.$$

Demostración. Tenemos la propiedad $x \leqslant y \Leftrightarrow \underbrace{x \wedge y = x}_{(2.4)} \Leftrightarrow \underbrace{x \vee y = y}_{(2.5)}$ (consistencia).

Primeramente demostraremos que si $x \leqslant y \Rightarrow x \wedge a \leqslant y \wedge a$, en efecto,

$$\begin{aligned} x \wedge a &= x \wedge (a \wedge a) \\ &\overset{(2.4)}{=} (x \wedge y) \wedge (a \wedge a) \\ &= (x \wedge a) \wedge (y \wedge a) \Leftrightarrow x \wedge a \leqslant y \wedge a \quad \text{para todo } a \in E. \end{aligned}$$

Ahora demostraremos que $x \vee a \leqslant y \vee a$ si $x \leqslant y$. En efecto, tenemos

$$\begin{aligned} y \vee a &= y \vee (a \vee a) \\ &\overset{(2.5)}{=} (x \vee y) \vee (a \vee a) \\ &= (x \vee a) \vee (y \vee a) \end{aligned}$$

de donde se concluye, $x \vee a \leqslant y \vee a$ para todo $a \in E$. $\square$

(4) Recordemos que tenemos definido $|x| = x \vee (-x)$ y hemos demostrado las siguientes propiedades:

$$x \vee y = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}|x-y|, \quad x \wedge y = \frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{2}|x-y|,$$

lo cual implica que

$$(x \vee y) + (x \wedge y) = x + y.$$

(5) También hemos visto que:

$$|x| \geqslant 0.$$

(6) La definición $|x| = x \vee (-x)$ implica

$$\begin{aligned} |x| \leqslant a &\Leftrightarrow x \leqslant a \text{ y } -x \leqslant a \\ &\Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a. \end{aligned}$$

Así,

$$|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a.$$

Si $a = 0$, entonces obtenemos $|x| = 0$ de donde $x = 0$.

(7) Tenemos que: $|-x| = (-x) \vee x = |x|$ de donde se deduce que

$$|\lambda x| = |\lambda|\,|x| \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{R}$$

Demostración. Primero probaremos $|\lambda x| = \lambda|x|$ si $\lambda > 0$.
En efecto, $\lambda x \leqslant \lambda|x|$ y $-\lambda x = \lambda(-x) \leqslant \lambda|x|$, entonces

$$\begin{aligned} |\lambda x| &= (\lambda x) \vee (-\lambda x) \\ &\leqslant \lambda|x|. \end{aligned}$$

Así, $\underbrace{|\lambda x| \leqslant \lambda|x|}_{(2.6)}$ si $\lambda > 0$.
En particular

$$|x| = \left|\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda x\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}|\lambda x|$$

es decir, $\underbrace{\lambda|x| \leqslant |\lambda x|}_{(2.7)}$. Así de (2.6) y (2.7) por antisimetria se tiene $|\lambda x| = \lambda|x|$ para $\lambda > 0$.

Si $\lambda = 0$, $|\lambda x| = |0| = 0|x|$.
Ahora si $\lambda < 0$, entonces

$$\begin{aligned} |\lambda x| &= |-(-\lambda)x| \\ &= -\lambda|-x| \\ &= -\lambda|x| \text{ ya que se tiene } |-x| = |x|. \end{aligned}$$

de donde concluimos, $|\lambda x| = |\lambda|\,|x|$.

$\square$

Por otra parte tenemos $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$ y $-|y| \leqslant y \leqslant |y|$, implica

$$-\big(|x| + |y|\big) \leqslant x + y \leqslant |x| + |y|,$$

de donde $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

(8) Para $x \in E$ definimos

$$x^+ = x \vee 0.$$

De la definición es evidente que

$$\text{si } x \leqslant y \text{ entonces } x^+ \leqslant y^+.$$

Demostración. Si $x \leqslant y$ entonces $x \vee 0 \leqslant y \vee 0$ por isotomia, luego $x^+ \leqslant y^+$. $\square$

Por otra parte, para todo x e y tenemos $x + y \leqslant x^+ + y^+$ y $0 \leqslant x^+ + y^+$. En efecto, como, $x \leqslant x \vee 0 = x^+$ entonces, $x \leqslant x^+$ y similarmente $y \leqslant y^+$ de donde tenemos $x + y \leqslant x^+ + y^+$. También se tiene que, $0 \leqslant x^+$, $0 \leqslant y^+$ de donde $0 \leqslant x^+ + y^+$
Por lo tanto,

$$(x + y)^+ \leqslant x^+ + y^+.$$

Por (4) obtenemos $x^+ = x \vee 0 = \frac{1}{2}(x + 0) + \frac{1}{2}|x - 0| = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}|x|$ de donde

$$x^+ = \frac{1}{2}\big(x + |x|\big).$$

De manera similar, $(-x)^+ = \frac{1}{2}\big(-x + |x|\big)$ ya que,

$$\begin{aligned} (-x)^+ = -x \vee 0 &= \frac{1}{2}(-x + 0) + \frac{1}{2}|-x - 0| \\ &= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}|x| = \frac{1}{2}\big(-x + |x|\big) \end{aligned}$$

de donde

$$x^+ + (-x)^+ = |x|, \quad x^+ - (-x)^+ = x.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} x^+ + (-x)^+ &= \frac{1}{2}\big(x + |x|\big) + \frac{1}{2}\big(-x + |x|\big) \\ &= |x|, \\ x^+ - (-x)^+ &= \frac{1}{2}\big(x + |x|\big) - \left(\frac{1}{2}\big(-x + |x|\big)\right), \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}|x| + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}|x| = x. \end{aligned}$$

(9) Por otra parte, $(x \wedge y)^+ = x^+ \wedge y^+$.

Demostración. Sea $u = x \wedge y$, tenemos que $x \wedge y \leqslant x$, $x \wedge y \leqslant y$, entonces por (8)

$$\begin{aligned} (x \wedge y)^+ &\leqslant x^+, \qquad & (x \wedge y)^+ &\leqslant y^+, \\ u^+ &\leqslant x^+, & u^+ &\leqslant y^+, \\ u^+ &\leqslant x^+ \wedge y^+. \end{aligned}$$

Para la desigualdad opuesta note que

$$\begin{aligned} u^+ &= u \vee 0 \overset{(4)}{=} u - (u \wedge 0) = x \wedge y - (u \wedge 0) \\ &= \big(x - (u \wedge 0)\big) \wedge \big(y - (u \wedge 0)\big) \\ &\geqslant \big(x - (x \wedge 0)\big) \wedge \big(y - (y \wedge 0)\big) \\ &= (x \vee 0) \wedge (y \vee 0) \\ &= x^+ \wedge y^+, \end{aligned}$$

de donde por antisimetría concluimos que $(x \wedge y)^+ = x^+ \wedge y^+$. □

(10) $(x \vee y)^+ = x^+ \vee y^+$.

Demostración. Se tiene $x \leqslant x \vee y$, $y \leqslant x \vee y$, entonces $x^+ \leqslant (x \vee y)^+$, $y^+ \leqslant (x \vee y)^+$, de donde se tiene, $x^+ \vee y^+ \leqslant (x \vee y)^+$ por la definición del supremo. Así, $(x \vee y)^+$ es una cota superior de $\{x^+, y^+\}$. Por otro lado, si z es cualquier cota superior de $\{x^+, y^+\}$, entonces $z \geqslant x^+ \geqslant x$, $z \geqslant y^+ \geqslant y \Rightarrow z \geqslant 0$, luego $z \geqslant x \vee y$, $z = z^+ \geqslant (x \vee y)^+$, así $z \geqslant (x \vee y)^+$.
Por lo tanto, $x^+ \vee y^+ = (x \vee y)^+$ por definición del supremo. □

(11) $x \vee z = (x - z)^+ + z$.

Demostración.

$$
\begin{aligned}
(x \vee z) - z &= (x - z) \vee (z - z) \\
&= (x - z) \vee 0 \\
&= (x - z)^{+},
\end{aligned}
$$

de donde concluimos, $x \vee z = (x - z)^{+} + z$. $\square$

(12) $x^{+} \wedge (-x)^{+} = 0$.

Demostración.

$$
\begin{aligned}
x^{+} \wedge (-x)^{+} &\overset{(9)}{=} \big(x \wedge (-x)\big)^{+} \\
&= \big(-|x|\big)^{+} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

$\square$

(13) Un espacio de Riesz es un retículo distributivo:

$$(x \vee z) \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee z.$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
(x \vee z) \wedge (y \vee z) &\overset{(11)}{=} \big[(x - z)^{+} + z\big] \wedge \big[(y - z)^{+} + z\big] \\
&= \big[(x - z)^{+} \wedge (y - z)^{+}\big] + z \\
&= \big[(x - z) \wedge (y - z)\big]^{+} + z \\
&= \big[(x \wedge y) - z\big]^{+} + z \\
&= (x \wedge y) \vee z.
\end{aligned}
$$

$\square$

(14) $(x \wedge z) \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$.

Demostración.

$$
\begin{aligned}
(x \wedge z) \vee (y \wedge z) &= \big[x \vee (y \wedge z)\big] \wedge \big[z \vee (y \wedge z)\big] \text{ por } (13) \\
&= \big[x \vee (y \wedge z)\big] \wedge z \\
&= \big[(x \vee y) \wedge (x \vee z)\big] \wedge z \text{ por } (13) \\
&= (x \vee y) \wedge \big[(x \vee z) \wedge z\big] \\
&= (x \vee y) \wedge z.
\end{aligned}
$$

$\square$

(15) $\frac{1}{2}(x+y) \leqslant x \vee y$.

Demostración. $x \leqslant x \vee y$, $y \leqslant x \vee y$,

$$x + y \leqslant (x \vee y) + (x \vee y) = 2(x \vee y),$$

de donde $\frac{1}{2}(x+y) \leqslant x \vee y$. □

2.4. Isomorfismos de Riesz

Sean E y F espacios de Riesz y $T : E \to F$ una biyección lineal. Si T es un isomorfismo de orden, entonces para cada $x, y \in E$.

$$T(x \vee y) = Tx \vee Ty, \quad T(x \wedge y) = Tx \wedge Ty. \tag{2.8}$$

Por otro lado, (2.8) implica que T es un isomorfismo de orden a través de las equivalencias.

$$x \leqslant y \Leftrightarrow x \vee y = y \Leftrightarrow Tx \vee Ty = Ty \Leftrightarrow T(x) \leqslant T(y).$$

Definición 2.3. *Sean E y F espacios de Riesz. Diremos que una aplicación $T : E \to F$ es un **isomorfismo de Riesz** si T es una biyección lineal con $T(x \vee y) = Tx \vee Ty$, $T(x \wedge y) = Tx \wedge Ty$ para todo $x, y \in E$.*

Observación. Una biyección lineal entre espacios de Riesz, puede preservar el orden, sin ser un isomorfismo de orden. Por ejemplo, la función:

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, x + y). \end{aligned}$$

T es lineal: Si $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} T(\alpha x + y) &= T(\alpha(x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = T(\alpha x_1 + y_1, \alpha x_2 + y_2) \\ &= (\alpha x_1 + y_1, \alpha x_1 + y_1 + \alpha x_2 + y_2) = (\alpha x_1, \alpha x_1 + \alpha x_2) + (y_1, y_1 + y_2) \\ &= \alpha(x_1, x_1 + x_2) + (y_1, y_1 + y_2) = \alpha Tx + Ty. \end{aligned}$$

Por lo tanto, T es lineal. Por otra parte, T es inyectiva en efecto, si

$$\begin{aligned} T(x) &= T(y), \\ (x_1, x_1 + x_2) &= (y_1, y_1 + y_2), \\ x_1 = y_1 \ \text{ y } \ x_1 + x_2 &= y_1 + y_2, \\ x_2 &= y_2. \end{aligned}$$

Luego $x = (x_1, x_2) = (y_1, y_2) = y$. Por lo tanto, T es inyectiva.

T es sobreyectiva: Si $T(x) = y$, entonces

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2) &= (y_1, y_2), \\ (x_1, x_1 + x_2) &= (y_1, y_2), \\ x_1 &= y_1 \text{ y } x_1 + x_2 = y_2, \\ &\text{así } x_2 = y_2 - x_1 = y_2 - y_1. \end{aligned}$$

Luego existe $x = (y_1, y_2 - y_1)$ tal que $T(x) = y$ de donde T es sobreyectiva.
Por lo tanto, T es biyectiva. Ahora demostremos que T preserva el orden:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) \leqslant (y_1, y_2) &\Leftrightarrow x_1 \leqslant y_1 \text{ y } x_2 \leqslant y_2, \\ &\Rightarrow x_1 \leqslant y_1 \text{ y } x_1 + x_2 \leqslant y_1 + y_2, \\ &\Rightarrow (x_1, x_1 + x_2) \leqslant (y_1, y_1 + y_2), \\ &\Rightarrow T(x_1, x_2) \leqslant T(y_1, y_2), \end{aligned}$$

luego T preserva el orden. Por otra parte,

$$\begin{aligned} T^{-1} : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, y - x), \end{aligned}$$

no preserva el orden. En efecto, pese a que

$$(-4, 0) \leqslant (-1, 1) \Leftrightarrow -4 \leqslant -1 \text{ y } \quad 0 \leqslant 1$$

tenemos que $T^{-1}(-4, 0) = (-4, 0 - (-4)) = (-4, 4)$

$$T^{-1}(-1, 1) = (-1, 1 - (-1)) = (-1, 2),$$

con $(-4, 4) \nleqslant (-1, 2)$, de donde concluimos que T no preserva el orden, así T no es un isomorfismo de orden.

2.5. Ejemplos de isomorfismos de Riesz

(1) Para cada espacio de Riesz E, la aplicación que sigue es un isomorfismo de Riesz

$$\begin{aligned} T : E &\to E \\ x &\mapsto 2x. \end{aligned}$$

La aplicación T es inyectiva, pues

$$\begin{aligned} T(x) &= T(y), \\ 2x &= 2y, \\ x &= y. \end{aligned}$$

T es sobreyectiva, pues si $y \in E$ entonces

$$\begin{aligned} T(x) &= y, \\ 2x &= y, \\ x &= 2^{-1}y, \end{aligned}$$

y $\quad T(x) = T(2^{-1} \cdot y) = 2(2^{-1}y) = y$.
De donde, concluimos que T es biyectiva. Además, T es lineal

$$\begin{aligned} T(\alpha x + y) &= 2(\alpha x + y), \\ &= 2\alpha x + 2y, \\ &= \alpha 2x + 2y, \\ &= \alpha Tx + Ty. \end{aligned}$$

Finalmente, se tiene que

$$\begin{aligned} T(x \vee y) = 2(x \vee y) = (2x) \vee (2y) = Tx \vee Ty, \\ T(x \wedge y) = 2(x \wedge y) = (2x) \wedge (2y) = Tx \wedge Ty, \end{aligned}$$

de donde, por definición concluimos que, T es un isomorfismo de Riesz.

(2) Definimos $T : C[0,1] \to C[0,1]$ por $(Tf)(x) = f(x^2)$ con $x \in [0,1]$ Entonces T es un isomorfismo de Riesz.

Demostración. Si ponemos $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ dada por $\varphi(x) = x^2$, entonces

$$Tf = f \circ \varphi$$

T es inyectiva: Si $Tf = Tg$, entonces

$$\begin{aligned} (Tf)(x) &= (Tg)(x) \\ (f \circ \varphi)(x) &= (g \circ \varphi)(x) \quad \forall x \in [0,1] \\ f \circ \varphi &= g \circ \varphi \quad // \varphi^{-1} \text{ por igualdad de funciones} \\ f &= g \quad \text{pues } \varphi \text{ es sobreyectiva en } [0,1]. \end{aligned}$$

De donde concluimos que T es inyectiva. Por otra parte, T es sobreyectiva ya que si, $h \in C[0,1]$ tal que

$$\begin{aligned} Tf &= h \\ f \circ \varphi &= h \\ f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} &= h \circ \varphi^{-1} \\ f &= h \circ \varphi^{-1}, \end{aligned}$$

es decir, $T(h \circ \varphi^{-1}) = (h \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi = h$.
Por lo tanto T es sobreyectiva. Luego T es biyectiva. T es lineal en efecto,

$$\begin{aligned} T(\alpha f + g) &= (\alpha f + g) \circ \varphi = (\alpha f \circ \varphi) + g \circ \varphi, \\ &= \alpha(f \circ \varphi) + (g \circ \varphi) = \alpha Tf + Tg. \end{aligned}$$

Por otra parte tenemos

$$(f \vee g)(x) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x)) + \frac{1}{2}(|f(x) + g(x)) \text{ para todo } x \in [0,1],$$

en particular para $\varphi(x) \in [0,1]$ tenemos;

$$(f \vee g)(\varphi(x)) = \frac{1}{2}(f(\varphi(x)) + g(\varphi(x)) + \frac{1}{2}(|f(\varphi(x)) + g(\varphi(x)),$$

$$\begin{aligned} [(f \vee g) \circ \varphi)](x) &= \frac{1}{2}[(f \circ \varphi)(x) + (g \circ \varphi)(x)] + \frac{1}{2}[|(f \circ \varphi)(x) + (g \circ \varphi)(x)|] \\ &= (f \circ \varphi)(x) \vee (g \circ \varphi)(x) \text{ para todo } x \in [0,1], \end{aligned}$$

de donde se concluye

$$\begin{aligned} (f \vee g) \circ \varphi &= (f \circ \varphi) \vee (g \circ \varphi), \\ T(f \vee g) &= Tf \vee Tg. \end{aligned}$$

Similarmente se tiene

$$T(f \wedge g) = Tf \wedge Tg.$$

Luego concluimos que T es un isomorfismo de Riesz. $\square$

3

Homomorfismos de Riesz e ideales

3.1. Homomorfismos de Riesz

Definición 3.1. *Sean* E *y* F *espacios de Riesz. Una aplicación* $T : E \to F$ *se dice que es un* ***homomorfismo de Riesz****, si es lineal y*

$$T(x \vee y) = Tx \vee Ty, \quad T(x \wedge y) = Tx \wedge Ty \quad \textit{para todo } x, y \in E.$$

Observe que el núcleo y la imagen de un homomorfismo de Riesz $T : E \to F$ son subespacios de Riesz de E y F respectivamente. Por otra parte si, $T : E \to F$ es un homomorfismo de Riesz, entonces T es creciente en efecto,

$$\begin{aligned} &\text{si } x \leqslant y \text{ en } E \Rightarrow x = x \wedge y, \\ &\qquad\qquad\qquad Tx = T(x \wedge y) = Tx \wedge Ty \Leftrightarrow Tx \leqslant Ty. \end{aligned}$$

Nota. No todas las aplicaciones lineales crecientes entre espacios de Riesz son homomorfismos de Riesz, por ejemplo, las aplicaciones

$$\begin{array}{ccc} T : C[0,1] \to \mathbb{R}, & & S : C[0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto f(0) & \text{y} & f \mapsto f(1). \end{array}$$

Son homomorfismos de Riesz, pero su suma no lo es. En efecto, tenemos la aplicación suma $T + S : [0,1] \to \mathbb{R}$ para la cual

$$\begin{aligned}(T+S)(\alpha f+g) &= T(\alpha f+g)+S(\alpha f+g)\\ &= (\alpha f+g)(0)+(\alpha f+g)(1)\\ &= \alpha f(0)+g(0)+\alpha f(1)+g(1)\\ &= \alpha(f(0)+f(1))+(g(0)+g(1))\\ &= \alpha(T(f)+S(f))+(T(g)+S(g))\\ &= \alpha(T+S)(f)+(T+S)(g).\end{aligned}$$

Se verifica que es lineal. Ahora verifiquemos que $T+S$ es creciente, en efecto, si $f \leqslant g$ en $C[0,1]$

$$\begin{aligned}&(T+S)(f)=T(f)+S(f)\leqslant T(g)+S(g)=(T+S)(g) \text{ de donde,}\\ &(T+S)(f)\leqslant(T+S)(g).\end{aligned}$$

Por otra parte tenemos,
$(T+S)(f\vee g)=T(f\vee g)+S(f\vee g)=(f\vee g)(0)+(f\vee g)(1)=f(0)\vee g(0)+f(1)\vee g(1)$
y
$(T+S)(f)\vee(T+S)(g)=(T(f)+S(f))\vee(T(g)+S(g))=(f(0)+f(1))\vee(g(0)+g(1)).$

Si $f(0)=0, f(1)=1, g(0)=-2$ y $g(1)=2$ entonces $(T+S)(f\vee g)=f(0)\vee g(0)+f(1)\vee g(1)$ $=0\vee -2+1\vee 2=0+2=2$ y

$(T+S)(f)\vee(T+S)(g)=(f(0)+f(1))\vee(g(0)+g(1))=(0+1)\vee(-2+2)=1\vee 0=1$ de donde $(T+S)(f\vee g)\neq(T+S)(f)\vee(T+S)(g)$. Así, $T+S$ no es un homomorfismo de Riesz.

Si $T:E\to F$ es un homomorfismo de Riesz y D un subespacio de Riesz de E, entonces la restricción de T a D es un homomorfismo de Riesz.

Teorema 3.1. *Sean E y F espacios de Riesz y $T:E\to F$ una aplicación lineal, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) T *es un homomorfismo de Riesz.*

(b) $T(x\vee y)=Tx\vee Ty$ *para todo* $x,y\in E$.

(c) $T(|x|)=|T(x)|$, $x\in E$.

(d) $T(x^+)=(Tx)^+$, $x\in E$.

(e) $x\wedge y=0$ *entonces* $(Tx)\wedge T(y)=0$ *para todo* $x,y\in E$.

Demostración. (a)⇒(b): Como T es un homomorfismo de Riesz, entonces por definición

$$T(x \vee y) = Tx \vee Ty, \quad x, y \in E.$$

(b)⇒(c): Tenemos que $T(x \vee y) = Tx \vee Ty$. Luego,

$$T(|x|) = T\big(x \vee (-x)\big) = Tx \vee T(-x) = Tx \vee (-Tx) = |Tx|, \quad x \in E.$$

(c)⇒(d): Si $T(|x|) = |Tx|$ entonces

$$T(x^+) = T\Big(\frac{1}{2}(x + |x|)\Big) = \frac{1}{2}\big(Tx + |Tx|\big) = (Tx)^+.$$

Sea (b') $T(x \wedge y) = Tx \wedge Ty \quad x, y \in E$, entonces (b)⇔(b'): En efecto, si $T(x \wedge y) = Tx \wedge Ty$, luego

$$\begin{aligned}
-(Tx \vee Ty) &= (-Tx) \wedge (-Ty) = T(-x) \wedge T(-y) \\
&\overset{\text{hip}}{=} T\big((-x) \wedge (-y)\big) \\
&= T\big(-(x \vee y)\big) = -T(x \vee y)
\end{aligned}$$

de donde $T(x \vee y) = Tx \vee Ty$.

Por otra parte, si $T(x \vee y) = Tx \vee Ty$, entonces

$$\begin{aligned}
-(Tx \wedge Ty) &= (-Tx) \vee (-Ty) = T(-x) \vee T(-y) \\
&\overset{\text{hip}}{=} T\big((-x) \vee (-y)\big) = T\big(-(x \wedge y)\big) \\
&= -T(x \wedge y).
\end{aligned}$$

De donde se tiene $Tx \wedge Ty = T(x \wedge y)$.
Mientras, que usando la definición de homomorfismo de Riesz, tenemos las equivalencias; (a)⇔(b)⇔(b').

(b')⇒(e): Si $x \wedge y = 0$, entonces $T(x \wedge y) = T(0) = 0$, de donde $Tx \wedge Ty = 0$.

(e)⇒(b'): Sea $z = x \wedge y$ entonces $(x \wedge y) - z = 0$ de donde

$$(x - z) \wedge (y - z) = 0 \Rightarrow T(x - z) \wedge T(y - z) = 0$$

$$\begin{aligned}
(Tx - Tz) \wedge (Ty - Tz) &= 0 \\
(Tx \wedge Ty) - Tz &= 0 \\
Tx \wedge Ty &= Tz \\
Tx \wedge Ty &= T(x \wedge y).
\end{aligned}$$

(b')⇒(e): Tenemos $T(x \wedge y) = Tx \wedge Ty$, luego si $x \wedge y = 0$, entonces

$$T(x \wedge y) = 0,$$
$$\text{asi, } Tx \wedge Ty = 0.$$

(d)⇒(c): Si $T(x^+) = (Tx)^+$, entonces

$$\begin{aligned} T(|x|) &= T(2x^+ - x) \\ &= 2T(x^+) - Tx \\ &= 2T(x)^+ - Tx \\ &= |Tx|. \end{aligned}$$

(c)⇒(b): Tenemos $T\big(|x|\big) = |Tx|$, luego

$$\begin{aligned} T(x \wedge y) &= T\big(2(x \wedge y)^+ - |x \wedge y|\big) \\ &= 2T\big((x \wedge y)^+\big) - T\big(|x \wedge y|\big) \\ &= 2\big(T(x \wedge y)\big)^+ - \big|T(x \wedge y)\big| \\ &= Tx \wedge Ty. \end{aligned}$$

□

Ejemplos

(1) Si D es un subespacio Riesz, de un espacio de Riesz E, entonces la aplicación inclusión $i : D \to E$ es un homomorfismo de Riesz.

Demostración. La aplicación

$$\begin{aligned} i : D &\to E \\ x &\mapsto i(x) = x, \end{aligned}$$

es lineal, ya que $i(\alpha x + y) = \alpha x + y = \alpha i(x) + i(y)$, por otra parte tenemos que,

$$i(x \vee y) = x \vee y = i(x) \vee i(y).$$

Luego por el Teorema 3.1, i es un homomorfismo de Riesz. □

Observación. Si, $i : A \to C[0,1]$ es la aplicación inclusión, donde

$$A = \Big\{ f/f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ con } f(x) = \alpha + \beta x \Big\}$$

es un subespacio vectorial de $C[0,1]$ según el ejemplo (1) i debería ser un homomorfismo de Riesz, pero no sucede, porque A no es un subespacio de Riesz de $C[0,1]$.

(2) Sea Y un espacio topológico y X un subconjunto de Y, dotado de la restricción topológica. Entonces la aplicación restricción $T : C(Y) \to C(X)$ es un homomorfismo de Riesz.

Demostración. Si $f \in C(Y)$, entonces $f : Y \to \mathbb{R}$, luego $f_X : X \to \mathbb{R}$ está en $C(X)$ de donde se tiene $C(Y) \subset C(X)$ inclusión de espacios de Riesz. Así, por el ejemplo (1), T es un homomorfismo de Riesz. □

(3) De manera más general, sean X e Y espacios topológicos y $\tau : X \to Y$ una aplicación continua, entonces

$$\begin{aligned} T : C(Y) &\to C(X) \\ f &\mapsto f \circ \tau \quad f \in C(Y), \end{aligned}$$

es un homomorfismo de Riesz.

Demostración. T es lineal

$$\begin{aligned} T(\alpha f + g) &= (\alpha f + g) \circ \tau \\ &= (\alpha f) \circ \tau + g \circ \tau \\ &= \alpha(f \circ \tau) + g \circ \tau \\ &= \alpha T_f + T_g. \end{aligned}$$

Por otra parte se tiene que, para $f, g \in C(Y)$, $(f \vee g)(y) = f(y) \vee g(y)$ para todo $y \in Y$. En particular para $\tau(x) \in Y$ tenemos $(f \vee g)(\tau(x)) = f(\tau(x)) \vee g(\tau(x))$. Es decir,

$$((f \vee g) \circ \tau)(x) = (f \circ \tau)(x) \vee (g \circ \tau)(x).$$

Así, $T(f \vee g) = (f \vee g) \circ \tau = (f \circ \tau) \vee (g \circ \tau) = Tf \vee Tg$. Luego por el Teorema 3.1, T es un homomorfismo de Riesz. □

(4) Sea $C = \{(x_n) : (x_n) \text{ es convergente}\}$, entonces las funciones coordenada

$$\begin{aligned} \delta^{37} : C &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x_{37}, \quad x \in C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{y } \delta^{\infty} : C &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \lim_{n \to \infty} x_n, \quad x \in C \end{aligned}$$

son homomorfismos de Riesz.

Demostración. Las funciones coordenada son lineales ya que

$$\delta^{37}(\alpha x + y) = (\alpha x + y)_{37} = \alpha x_{37} + y_{37} = \alpha\delta^{37}_x + \delta^{37}_y,$$

$$\begin{aligned}\delta^{\infty}(\alpha x + y) &= \lim_{n\to\infty}(\alpha x_n + y_n)\\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n\\ &= \alpha\delta^{\infty}x + \delta^{\infty}y.\end{aligned}$$

$\delta^{37}(x \vee y) = (x \vee y)_{37} = x_{37} \vee y_{37} = \delta^{37}x \vee \delta^{37}y$,
$\delta^{\infty}(x \vee y) = \lim_{n\to\infty}(x \vee y) = \lim_{n\to\infty} x \vee \ \lim_{n\to\infty} y = \delta^{\infty}x \vee \delta^{\infty}y$.
Luego por el Teorema 3.1 $\delta^{37}, \delta^{\infty}$ son homomorfismos de Riesz. □

Definición 3.2. *Sea* X *un conjunto. Cualquier elemento* $a \in X$*, determina un homomorfismo de Riesz*

$$\begin{aligned}\delta^{a} : \mathbb{R}^X &\to \mathbb{R}\\ f \ &\mapsto \delta^{a}(f) = f(a),\end{aligned}$$

llamado ***evaluación de*** f ***en*** a.

Para un subespacio Riesz E de $\mathbb{R}^X$, por ejemplo, si $E = C(X)$ donde X un espacio topológico, la restricción

$$\begin{aligned}\delta^{a}\big|_E : E &\to \mathbb{R}\\ f \ &\mapsto \delta^{a}(f) = f(a),\end{aligned}$$

es un homomorfismo de Riesz. Por otro lado, si consideramos $E = \big\{f/f : [0,1] \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \alpha + \beta x\big\}$ que no es un subespacio Riesz de $\mathbb{R}^{[0,1]}$ entonces la aplicación $f \mapsto f(\frac{1}{2})$ no es un homomorfismo de Riesz.

De especial interés para nosotros son los homomorfismos de Riesz $T : C(X) \to \mathbb{R}$ para X compacto.

Teorema 3.2. *Sea* X *un espacio topológico compacto y* $T : C(X) \to \mathbb{R}$ *un homomorfismo de Riesz con* $T_{\mathbb{1}} = 1$*. Entonces existe un punto* $a \in X$ *tal que* $T = \delta^{a}$.

Demostración. Supongamos que no hay tal a, lo cual nos llevará a una contradicción, en efecto, para todo $a \in X$, existe un $f \in C(X)$ con $T_f \neq f(a) = \delta^{a}$, haciendo

$$f^{*} = 2 \times \frac{f - (T_f)_{\mathbb{1}}}{f(a) - T_f}$$

tenemos que, $f^* \in C(X)$ tal que $T_{f^*} = 0$ pues

$$T_{f^*} = T\left(2 \times \frac{f - (T_f)\mathbb{1}}{f(a) - T_f}\right) = \frac{2}{f(a) - T_f} T\big(f - (T_f)\mathbb{1}\big)$$
$$= \frac{2}{f(a) - T_f}\big(T_f - (T_f)T_{\mathbb{1}}\big) = \frac{2}{f(a) - T_f}(T_f - T_f) = 0$$

y $f^*(a) = 2$, en efecto,

$$f^*(a) = 2 \times \frac{f(a) - (T_f)\mathbb{1}(a)}{f(a) - T_f} = 2 \times \frac{f(a) - T_f}{f(a) - T_f} = 2.$$

De donde tenemos que los conjuntos abiertos $\{x \in X : g(x) > 1\} = g^{-1}(1, \infty)$ con $g \in C(X)$ y $T_g = 0$ cubre X. Luego por compacidad, existe una sucesión finita, $g_1, g_2, \ldots, g_N \in C(X)$ con

$$T_{g_1} = T_{g_2} = \cdots = T_{g_N} = 0$$

y

$$X = \bigcup_{n=1}^{N} = \{x : g_n(x) > 1\}.$$

Sea $g = g_1 \vee g_2 \vee \cdots \vee g_N$. Entonces,

$$T_g = T(g_1 \vee \cdots \vee g_N) = T_{g_1} \vee T_{g_2} \vee \cdots \vee T_{g_N} = 0.$$

Sin embargo $g \geqslant \mathbb{1}$, así $T_g \geqslant T_{\mathbb{1}} = 1$. Lo cual es una contradicción.

□

3.2. Ideales de Riesz

Un tipo especial de subespacios de Riesz son los "Ideales de Riesz".

Definición 3.3. *Un **ideal de Riesz** de un espacio de Riesz E es un subespacio vectorial D de E con la siguiente propiedad:*

$$a \in D, \quad x \in E, \quad |x| \leqslant |a| \text{ entonces } x \in D. \tag{3.1}$$

Proposición 3.1. *Todo ideal de Riesz D de un espacio de Riesz E, es un subespacio de Riesz de E.*

Demostración. Si $a \in D$, entonces $|a| \in E$ porque E es un espacio de Riesz, luego si,

$$|a| = ||a|| \leqslant |a| \text{ entonces } |a| \in D$$

porque D es un ideal de Riesz. Luego D es un subespacio de Riesz de E. □

Ejemplos específicos de ideales de Riesz

(1) *ℓ^∞ es un ideal de Riesz de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

En efecto, tenemos que $\ell^\infty = \{(x_n) : |x_n| \leqslant k$ para algún $k \in \mathbb{R}\}$, luego para $(x_n) \in \ell^\infty$ existe $k \in \mathbb{R}$, tal que $|x_n| \leqslant k$ y sea $(y_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ luego sí,

$$|y_n| \leqslant |x_n| \leqslant k \Rightarrow |y_n| \leqslant k.$$

Así, $(y_n) \in \ell^\infty$, luego por definición de ideal de Riesz, ℓ^∞ es in ideal de Riesz de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(2) *C_0 es un ideal de Riesz de ℓ^∞ y $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

En efecto, tenemos $C_0 = \{(x_n) : x_n \to 0\}$. Luego para $(x_n) \in C_0$, $(y_n) \in \ell^\infty$ con $|y_n| \leqslant |x_n|$, se tiene que $0 \leqslant |y_n| \leqslant |x_n|$ de donde $\lim\limits_{n\to\infty} 0 \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} |y_n| \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} |x_n|$.
Así, por el Teorema de Sandwich $\lim\limits_{n\to\infty} |y_n| = 0$ lo cual es equivalente a $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0.$
Así, $(y_n) \in C_0$. De donde concluimos que, C_0 es un ideal de Riesz de ℓ^∞. Por otra parte, sea $(x_n) \in C_0$, $(y_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con $|y_n| \leqslant |x_n|$, se tiene $0 \leqslant |y_n| \leqslant |x_n|$ por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} 0 \leqslant \lim_{n\to\infty} |y_n| \leqslant \lim_{n\to\infty} |x_n| \text{ entonces } \lim_{n\to\infty} |y_n| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = 0.$$

Así, $(y_n) \in C_0$. Luego C_0 es un ideal de Riesz de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(3) *C no es un ideal de Riesz de ℓ^∞ o $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

En efecto, se tiene que $C = \{(x_n) : (x_n)$ es convergente$\}$. Luego para $(x_n) \in C$, $(y_n) \in \ell^\infty$ con $|y_n| \leqslant |x_n|$. Por demostrar $(y_n) \in C$. Para lo cual, si $x_n = 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $y_n = (-1)^{n+1}$, entonces $1 = |y_n| \leqslant |x_n| = 2$, pero (y_n) no es convergente. Así, $(y_n) \notin C$. Luego C no es un ideal de Riesz de ℓ^∞ o $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(4) *Sea X es un espacio topológico y $a \in X$, entonces $\{f \in C(X) : f(a) = 0\}$ es un ideal de Riesz de $C(X)$.*

En efecto, sea $D = \{f \in C(X) : f(a) = 0\}$, para $a \in X$. D es un subespacio vectorial de $C(X)$. Si $f \in D$, $g \in C(X)$ con $|g| \leqslant |f|$, es decir $0 \leqslant |g(x)| \leqslant |f(x)| = 0$, luego,

$$|g(x)| = 0, \text{ es decir } |g(a)| = 0, \text{ de donde } g(a) = 0.$$

Así, $g \in D$, luego por definición, D es un ideal de Riesz de $C(X)$.

Ejemplos generales de los ideales de Riesz

Sea E un espacio de Riesz.

(1) *$\{0\}$ y E son ideales de Riesz de E. Los únicos ideales de Riesz de $\mathbb{R}$ son $\{0\}$ y $\mathbb{R}$.*

Demostración. En efecto, $\{0\}$ y E son subespacios vectoriales de E, entonces sea $0 \in \{0\}$, $x \in E$ con $|x| \leqslant |0| = 0$, así $x = 0$, luego $x \in \{0\}$. Por lo tanto, $\{0\}$ es un ideal de Riesz de E. Por otra parte, sea $x \in E$, $y \in E$ con $|y| \leqslant |x|$, lo que implica $y \in E$. Así, E es un ideal de Riesz de E. En particular $\{0\}$, $\mathbb{R}$ son ideales de Riesz de $\mathbb{R}$. Ahora veamos que son los únicos ideales de Riesz de $\mathbb{R}$, para ello supongamos que existe otro ideal de Riesz $D \subset \mathbb{R}$, para lo cual dividamos en dos casos:

1. Si $D \neq \{0\}$ entonces existe $a \neq 0$ tal que, $a \in D$. Sea $x \in \mathbb{R}$, por la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|x| \leqslant |na|$. Como $na \in D$ y D es ideal entonces $x \in D$. Así, $\mathbb{R} \subset D$ como $D \subset \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} = D$.
2. Si $D = \{0\}$ no hay nada que hacer.

Por lo tanto, las únicas posibilidades para D son: $D = \mathbb{R}$ o $D = \{0\}$. $\square$

(2) *Si* $c \in E^+$, *entonces*

$$\left\{x \in E : |x| \leqslant tc \ \textit{ para algún } t \in (0, \infty)\right\}$$

es un ideal de Riesz de E*; es el ideal de Riesz más pequeño de* E *que contiene a* c.

Demostración. En efecto, sea $D = \left\{x \in E : |x| \leqslant tc \ \text{ para algún } t \in (0, \infty)\right\}$, tenemos que $D \subset E$. Sea $a \in D$, $x \in E$ con $|x| \leqslant |a|$, como $a \in D$, entonces $|a| \leqslant tc$ para algún $t \in (0, \infty)$ de donde

$$\begin{aligned} |x| &\leqslant |a| \leqslant tc, \\ |x| &\leqslant tc. \end{aligned}$$

Así, $x \in D$. Luego D es un ideal de Riesz de E. Note que $|c| \leqslant tc \Rightarrow c \in D$. Ahora veamos que D es el ideal de Riesz, más pequeña de E que contiene a c.
En efecto, supongamos que, A es un ideal de Riesz de E cualesquiera, tal que $c \in A$, por demostrar que $D \subset A$. Sea $a \in D \Rightarrow |a| \leqslant tc$ para algún $t \in (0, \infty)$

$$|a| \leqslant tc = |tc|,$$

como $c \in A \Rightarrow ct \in A$. Luego $|a| \leqslant |tc| \Rightarrow a \in A$, pues A es un ideal de Riesz de E, de donde $D \subset A$. $\square$

(3) *Si* $c \in E^+$, *entonces*

$$\left\{x \in E : |x| \leqslant tc \quad \forall t \in (0, \infty)\right\}$$

es un ideal de Riesz en E.
La demostración es análogo al ejercicio anterior.

(4) *Si* $c \in E^+$, *entonces* $\{x \in E : |x| \wedge c = 0\}$ *es un ideal de Riesz de* E.

Demostración. Sea $D = \{x \in E : |x| \wedge c = 0\}$. Primero vamos a probar que D, es un espacio vectorial, para el cual sí, $x \in D$ y $t \in \mathbb{R}$, veamos si $tx \in D$. En efecto, haciendo $s = |t| + 1$, se tiene que:

$$c \leqslant sc \quad \text{y}$$
$$|tx| = |t|\,|x| \leqslant s|x|.$$

Luego $|tx| \wedge c \leqslant s|x| \wedge sc = s(|x| \wedge c) = 0$, así $tx \in D$. Por otra parte si, $x, y \in D$, entonces

$$\left|\frac{1}{2}(x+y)\right| \wedge c \leqslant \frac{1}{2}(|x|+|y|) \wedge c \leqslant \big(|x| \vee |y|\big) \wedge c = \big(|x| \wedge c\big) \vee \big(|y| \wedge c\big) = 0,$$

de donde $\frac{1}{2}(x+y) \in D$, es más, $x+y \in D$. Ahora demostraremos que D es un ideal de Riesz de E. Sea $a \in D$, $x \in E$ con $|x| \leqslant |a|$, como $a \in D$, entonces $|a| \wedge c = 0$,

$$|x| \wedge c \leqslant |a| \wedge c = 0.$$

Así, $|x| \wedge c = 0$, luego $x \in D$. Por lo tanto, D es un ideal de Riesz de E. □

(5) *Si* T *es un homomorfismo de Riesz de* E, *en otro espacio de Riesz entonces*

$$\{x \in E : T_x = 0\}$$

es un ideal de Riesz de E.

Demostración. Sea $T : E \to F$ un homomorfismo de Riesz. Sea $D = \{x \in E : T_x = 0\}$. Si $a \in D$, $x \in E$ con $|x| \leqslant |a|$ como $a \in D$, entonces $T_a = 0$,

$$|x| \leqslant |a| \Rightarrow |T_x| = T_{|x|} \leqslant T_{|a|} = |T_a| = |0| = 0.$$

Así, $|T_x| = 0$ de donde $T_x = 0$. Luego $x \in D$. Así, D es un ideal de Riesz de E. □

(6) *Si* T *es un aplicación lineal creciente, de un espacio de Riesz* E *en un espacio vectorial ordenado, entonces*

$$\{x \in E : T(|x|) = 0\}$$

es un ideal de Riesz de E.

Demostración. Sea $\mathsf{D} = \{x \in : \mathsf{T}(|x|) = 0\}$. Veamos que D es un espacio vectorial, en efecto, si $x, y \in \mathsf{D}$. Por demostrar $x + y \in \mathsf{D}$, como

$$0 \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

Luego $0 \leqslant \mathsf{T}(|x + y|) \leqslant \mathsf{T}(|x|) + \mathsf{T}(|y|) = 0 + 0 = 0$, de donde $\mathsf{T}(|x + y|) = 0$. Así, $x + y \in \mathsf{D}$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathsf{D}$,

$$\mathsf{T}(|\lambda x|) = \mathsf{T}(|\lambda|\,|x|) = |\lambda|\mathsf{T}(|x|) = 0.$$

Así, $\lambda x \in \mathsf{D}$, de donde concluimos que, D es un subespacio vectorial de E. Por otra parte, si $a \in \mathsf{D}$, $x \in \mathsf{E}$ con $|x| \leqslant |a|$ como $a \in \mathsf{D}$, entonces $\mathsf{T}(|a|) = 0$

$$\begin{aligned} |x| &\leqslant |a| \\ 0 \leqslant \mathsf{T}(|x|) &\leqslant \mathsf{T}(|a|) = 0 \\ &\Rightarrow \mathsf{T}(|x|) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x \in \mathsf{D}$. Así, D es un ideal de Riesz de E. $\square$

Lema 3.1. *Sea* E *un espacio de Riesz, con* $\mathsf{E} \neq \{0\}$*. Si los únicos ideales de Riesz que admite* E*, son:* $\{0\}$ *y* E*, entonces* E *es Riesz isomorfo a* $\mathbb{R}$*.*

Demostración. **(I)** *Si* $a, b \in \mathsf{E}$*,* $b > 0$ *y* $a \leqslant tb$ *para todo* $t \in (0, \infty)$*, entonces* $a \leqslant 0$*.*
En efecto, el conjunto $\mathsf{D} = \{x \in \mathsf{E} : |x| \leqslant tb \text{ para todo } t \in (0, \infty)\}$ es un ideal de Riesz de E según el ejemplo (3) de los ideales de Riesz. Luego tenemos que $b \notin \mathsf{D}$, entonces $\mathsf{D} \neq \mathsf{E}$, luego $\mathsf{D} = \{0\}$ ya que E y $\{0\}$ son los únicos ideales de Riesz de E. Así, para todo $t \in (0, \infty)$ se tiene $a^+ \leqslant tb$ pues

$$a \leqslant tb \Rightarrow a^+ \leqslant (tb)^+ = tb.$$

Por lo tanto, $a^+ \in \mathsf{D}$, así, $a^+ = 0$ de donde se tiene que $a \leqslant 0$, ya que $a \leqslant a^+$.

(II) *Si* $a, b \in \mathsf{E}$*,* $a \wedge b = 0$*, entonces* $a = 0$ *o* $b = 0$*.*
Prueba: Como $a \wedge b = 0$, entonces $a, b \geqslant 0$. Así, el conjunto $\mathsf{D} = \{x \in \mathsf{E} : x \wedge b = 0\}$ es un ideal de Riesz de E, según el ejemplo (4) de los ideales de Riesz. Si $\mathsf{D} = \{0\}$, entonces $a = 0$, de lo contrario si $\mathsf{D} \neq \{0\}$ entonces $\mathsf{D} = \mathsf{E}$, ya que $\{0\}$ y E son los únicos ideales de Riesz de E. Así, para todo $x \in \mathsf{E}$, $x \wedge b = 0$ en particular para $x = b$, $b \wedge b = b = 0$.

(III) Para todo $x \in \mathsf{E}$, tenemos $x^+ \wedge (-x)^+ = 0$, según la propiedad (12) de los espacios de Riesz. Luego por (II) $x^+ = 0$ o $(-x)^+ = 0$, de donde, se tiene que $x \leqslant 0$ o $-x \leqslant 0$, para todo $x \in \mathsf{E}$, entonces E es totalmente ordenado.

(IV) Eligiendo $c \in E^+$, $c \neq 0$ porque, $E \neq \{0\}$. La aplicación definida como,

$$\varphi : \mathbb{R} \to E$$
$$t \mapsto \varphi(t) = tc,$$

es estrictamente creciente, es decir si, $r < s$ entonces $\varphi(r) = cr < cs = \varphi(s)$ donde $c \in E^+$ $r, s \in \mathbb{R}$. De donde concluimos que φ es inyectiva.

Si f es sobreyectiva, hemos terminado la demostración. Así, tomando un $x \in E$; buscamos un número $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que, $\varphi(t_0) = x$ es decir, $t_0 c = x$, lo cual define dos subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$T_1 = \{t \in \mathbb{R} : x \leqslant tc\}, \quad T_2 = \{t \in \mathbb{R} : x \geqslant tc\}.$$

Por el orden total de E, $T_1 \cup T_2 = \mathbb{R}$. Además, si $t \in T_1$, entonces $(t, \infty) \subset T_1$; si $t \in T_2$, entonces $(-\infty, t) \subset T_2$; y $T_1 \cap T_2$ contiene a lo sumo un elemento.
Si $T_2 = \mathbb{R}$, entonces para todo $t \in (0, \infty)$, se tiene que, $t^{-1} \in \mathbb{R} = T_2$, lo cual verifica $x \geqslant t^{-1}c$, es decir, $c \leqslant tx$. De donde tenemos $x, c \in E$ y $c > 0$ y $c \leqslant tx$, para todo $t \in (0, \infty)$ por (I), $c \leqslant 0$, lo cual es una contradicción.
Si $T_1 = \mathbb{R}$, entonces para todo, $t \in (0, \infty)$, se tiene $(-t)^{-1} \in \mathbb{R} = T_1$ lo cual verifica la siguiente propiedad, $x \leqslant \left[(-t)^{-1}\right]c$, es decir, $c \leqslant t(-x)$. Así, tenemos $x, c \in E$, $c > 0$ y $c \leqslant t(-x)$, para todo $t \in (0, \infty)$, luego por (I), $c \leqslant 0$, lo cual es una contradicción.
Por lo tanto, en consecuencia existe un número t_0 tal que $(t_0, \infty) \subset T_1$ y $(-\infty, t_0) \subset T_2$ de donde tenemos, $x - t_0 c \leqslant sc$ y $t_0 c - x \leqslant sc$, para $s \in (0, \infty)$, en efecto, como

$$t_0 < t_0 + s \Rightarrow t_0 + s \in T_1 \Rightarrow x \leqslant (t_0 + s)c \Rightarrow x \leqslant t_0 c + sc. \text{ Así, } x - t_0 c \leqslant sc.$$

$$t_0 - s < t_0 \;\Rightarrow\; t_0 - s \in T_2 \Rightarrow x \geqslant (t_0 - s)c \Rightarrow x \geqslant t_0 c - sc \Rightarrow x - t_0 c \geqslant -sc.$$

Así, $t_0 c - x \leqslant sc$. Luego, aplicando la propiedad (I) a $x - t_0 c$, $c > 0$ que están en E, para todo $s \in (0, \infty)$,

$$x - t_0 c \leqslant sc, \qquad t_0 c - x \leqslant sc.$$

Se tiene

$$\begin{aligned} x - t_0 c &\leqslant 0, & \qquad t_0 c - x &\leqslant 0, \\ x &\leqslant t_0 c, & t_0 c &\leqslant x, \end{aligned}$$

por antisimetría $x = t_0 c$. Así, φ es sobreyectiva. Por otro lado tenemos

$$\varphi(|t|) = |t|c = |t||c| = |tc| = |\varphi(t)|.$$

Así, $\varphi : \mathbb{R} \to E$ es un isomorfismo de Riesz.

$\square$

Teorema 3.3. *Sea* D *un ideal de Riesz de un espacio de Riesz* E *y* $Q : E \to E/D$*, una aplicación lineal cociente. Definimos en* E/D *una relación de órden* $\leqslant$ *dada por:*

$$Qx \leqslant Qy \Leftrightarrow Qy - Qx \in Q(E^+) \quad \textit{para todo } x, y \in E.$$

Entonces $\leqslant$ *es un orden, que transforma a* E/D*, en un espacio de Riesz y a* Q *en un homomorfismo de Riesz.*

Demostración. **(I)** (Una descripción del orden en E/D). Tenemos la aplicación lineal cociente

$$\begin{aligned} Q : E &\to E/D \\ x &\mapsto Qx = [x] = \{x + x' : x' \in D\}. \end{aligned}$$

Luego para cada $x, y \in E$,

$$\begin{aligned} Qx \leqslant Qy &\Leftrightarrow \text{existe un } z \in E^+ \text{ tal que } Qy - Qx = Qz \text{ es decir, } Q(y - x) = Qz, \\ &\Leftrightarrow \text{existe un } z \in E^+ \text{ tal que } y - x - z \in D, \\ &\Leftrightarrow \text{existe } u \in D \text{ tal que } y - x - z = u, \ \ y - x - u = z \in E^+, \end{aligned}$$

luego se tiene, $y - x - u \in E^+$. Así, $Qx \leqslant Qy \Leftrightarrow$ existe un $u \in D$ con $y - x \geqslant u$.

(II) *Antisimetría.* Sean $x, y \in E$, asumiendo $Qx \leqslant Qy$ y $Qy \leqslant Qx$, vamos a demostrar que $Qx = Qy$. Así, por hipótesis existen $u, v \in D$ tal que $y - x \geqslant u$ y $x - y \geqslant v$, de donde se tiene que,

$$y - x \leqslant -v \leqslant |v| \leqslant |u| + |v|,$$

$-u \leqslant |u|$, $-|v| - |u| \leqslant -|u| \leqslant u$, $u \leqslant y - x \leqslant -v$, de donde $|y - x| \leqslant |u| + |v|$.
Por lo tanto, se tiene que, $|u| + |v| \in D$ e $y - x \in E$ con $|y - x| \leqslant \big||u| + |v|\big|$ como D es un ideal de Riesz, entonces $y - x \in D$, entonces, $Q(y - x) = [0]$, es decir, $Qy - Qx = [0]$, $[y] - [x] = [0]$, $[y] = [x - 0] = [x]$ lo cual es equivalente a, $Qx = Qy$.
Reflexividad. Sea $x \in E$, luego se tiene que, $0 = x - x \geqslant 0$ es decir, existe $0 \in D$ de donde, $Qx \leqslant Qx$.

Transitividad. Para todo $x, y, z \in E$. Supongamos que $Qx \leqslant Qy$ y $Qy \leqslant Qz$, entonces existen $u, v \in D$ tal que,

$$y - x \geqslant u \text{ y } z - y \geqslant v,$$

sumando miembro a miembro tenemos,

$$\begin{aligned} y - x + z - y &\geqslant u + v \\ z - x &\geqslant u + v \in D. \end{aligned}$$

Así, $Qx \leqslant Qz$. Luego concluimos que E/D es un espacio vectorial ordenado.

(III) Sea $x \in E$, mostraremos en E/D que $Q\big(|x|\big)$ es la cota superior de $\{Qx, -Qx\}$. (Se deduce entonces que E/D es un espacio de Riesz y Q un homomorfismo de Riesz). Evidentemente, se tiene que Q es creciente, ya que

$$x \leqslant y \Rightarrow y - x \geqslant 0 \in D \Leftrightarrow Qx \leqslant Qy.$$

Por otra parte se tiene

$$\begin{cases} x \leqslant |x| \\ -x \leqslant |x| \end{cases} \text{entonces} \begin{cases} Qx \leqslant Q\big(|x|\big) \\ -Qx \leqslant Q\big(|x|\big). \end{cases}$$

Por lo tanto, $Q\big(|x|\big)$ es una cota superior de $\{Qx, -Qx\}$. Luego supongamos que, Qy es una cota superior de $\{Qx, -Qx\}$, siempre y cuando $y \in E$. Así, se tiene que

$$Qx \leqslant Qy \text{ y } Q(-x) \leqslant Qy,$$

por definición existen $u, v \in D$ tal que,

$$y - x \geqslant u, \quad y - (-x) \geqslant v.$$

Luego, $y - |x| = y - \big(x \vee (-x)\big) = (y - x) \wedge (y + x) \geqslant u \wedge v \in D$, de donde $Q\big(|x|\big) \leqslant Qy$. Así, $Q\big(|x|\big)$ es la mínima cota superior de $\{Qx, -Qx\}$. Por lo tanto, $Q\big(|x|\big) = \big|Qx\big|$, luego por el Teorema 3.1 Q es un homomorfismo de Riesz.

$\square$

3.3. Espacios de Riesz arquimedianos

Definición 3.4. *Un espacio de Riesz* E *se llama **arquimediano** si*

$$x, y \in E \quad x \leqslant n^{-1} y \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N} \textit{ entonces } x \leqslant 0.$$

Ejemplos

1. *$\mathbb{R}$ es un espacio de Riesz arquimediano.*
   Sean $x, y \in \mathbb{R}$, tal que $x \leqslant n^{-1}y$, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{luego} \quad \lim_{n\to 0} x \leqslant \lim_{n\to 0} n^{-1}y,$$
$$x \leqslant 0.$$

   Así, $\mathbb{R}$ es un espacio de Riesz arquimediano.

2. $\mathbb{R}^X = \{f/f : X \to \mathbb{R}\}$ *es un espacio de Riesz arquimediano.*
   Sean $f, g \in \mathbb{R}^X$, tal que $f \leqslant n^{-1}g$ para todo, $n \in \mathbb{N}$

$$f \leqslant \frac{1}{n}g \Leftrightarrow f(x) \leqslant \frac{1}{n}g(x) \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}$$
$$\text{entonces} \quad f(x) \leqslant 0 \quad \text{por el ejemplo (1).}$$

   Luego, $f \leqslant 0$. Por lo tanto $\mathbb{R}^X$ es un espacio Riesz arquimediano.

3. *Sea* X *un espacio topológico,* $C(X) = \{f/f : X \to \mathbb{R}$ *continua*$\}$ *es un espacio de Riesz arquimediano.*
   Sean $f, g \in C(X)$ tal que,

$$f \leqslant n^{-1}g \Leftrightarrow f(x) \leqslant \frac{1}{n}g(x) \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N},$$

   entonces $f(x) \leqslant 0$, luego $f \leqslant 0$ de donde concluimos que, $C(X)$ es un espacio de Riesz arquimediano.

4. Los conjuntos $A = \{f/f : [0,1] \to \mathbb{R} \;\; f(x) = \alpha + \beta x\}$, $C'([0,1]) = \{f/f : [0,1] \to \mathbb{R}$ diferenciable$\}$ no son espacios de Riesz, por lo tanto, no pueden ser espacios de Riesz arquimedianos.

5. Sea $\mathcal{P} = \{p/p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, una colección de funciones polinomiales, donde el orden esta definido por, $f \leqslant g \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leqslant g(x)$, para todo $x \in [k, \infty]$ hemos visto que $\mathcal{P}$ es un espacio de Riesz, ahora veamos si es un espacio de Riesz arquimediano para lo cual, sean $f, g \in \mathcal{P}$ con

$$f(x) = 1, \quad g(x) = x^2 + 5$$

$$f \leqslant g \Leftrightarrow \quad \text{existe} \quad -1 \in \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad 1 \leqslant x^2 + 5 \quad \text{para todo} \quad x \in [-1, \infty).$$

   Por otra parte, si consideramos la desigualdad, $1 \leqslant \dfrac{1}{n}(x^2 + 5)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathbb{1} \leqslant 0$, lo cual no es cierto, de donde concluimos que, $\mathcal{P}$ no es un espacio de Riesz arquimediano. Un ejemplo similar tenemos si, consideramos $\mathbb{1} \leqslant \frac{1}{n} i$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde

$$\begin{aligned} \mathbb{1} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \mathbb{1}(x) = 1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} i : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto i(x) = x, \end{aligned}$$

son polinomios,

$$\mathbb{1} \leqslant \frac{1}{n} i \Leftrightarrow 1 \leqslant \frac{1}{n} x, \text{ de donde se concluye que,} \mathbb{1} \leqslant 0, \text{pero } \mathbb{1} \nleqslant 0.$$

Por lo tanto, $\mathcal{P}$ no es un espacio de Riesz arquimediano.

Observación. Cada subespacio Riesz de un espacio de Riesz arquimediano es arquimediano.

Proposición 3.2. *Sea* E *un espacio de Riesz. Decimos que* E *es arquimediano si y soló si*

$$x, y \in E^+, \quad nx \leqslant y \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 0.$$

Demostración.

$$\text{Si } x \leqslant y \Rightarrow x^+ \leqslant y^+, \text{ así } 0 \leqslant x^+ \leqslant y^+ \tag{3.2}$$

$(\Rightarrow)$ Si E es arquimediano, luego si, $x, y \in E^+$, $nx \leqslant y$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, $x \leqslant \frac{1}{n} y$ entonces $x \leqslant 0$ y como $x \in E^+$ por antisimetría, tenemos que $x = 0$.

$(\Leftarrow)$ Asumamos que $x, y \in E^+$, $nx \leqslant y$ para todo $n \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 0$. Si $x, y \in E$ con $x \leqslant n^{-1} y$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces por (3.2),

$$nx^+ = (nx)^+ \leqslant y^+ = y.$$

Así, $nx^+ \leqslant y$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego tenemos que, $x^+ = 0$, es decir, $x \leqslant x^+$. Por lo tanto, $x \leqslant 0$, de donde concluimos que E es un espacio de Riesz arquimediano. $\square$

Definición 3.5. *Sea* E *un espacio de Riesz arquimediano con* $E \neq \{0\}$*. Un elemento* $u \in E^+$ *se dice que es una* ***unidad****, si para todo* $x \in E$*, existe un número* $\lambda \in [0, \infty)$ *con* $-\lambda u \leqslant x \leqslant \lambda u$.

Observe que:

$$-\lambda u \leqslant x \leqslant \lambda u \Leftrightarrow |x| \leqslant \lambda u.$$

Ejemplos

(1) Para un conjunto no vacío X, la función constante $\mathbb{I}$, es una unidad en el espacio de funciones acotadas,

$$A = \big\{f/f : X \to \mathbb{R},\ |f(x)| \leqslant k \text{ para algún } k \in \mathbb{R}\big\}.$$

Hemos visto que A es un espacio de Riesz, es más A es un subespacio de Riesz de un espacio de Riesz arquimediano $\mathbb{R}^X$, luego concluimos que, A es un espacio de Riesz arquimediano. En efecto, tenemos que $\mathbb{I} \in A^+$ y

$$\begin{aligned} \mathbb{I} : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \mathbb{I}(x) = 1, \quad \text{para todo } x \in X. \end{aligned}$$

Así, para todo $f \in A$, existe un $\lambda \geqslant 0$ tal que

$$|f(x)| \leqslant \lambda \Leftrightarrow -\lambda \leqslant f(x) \leqslant \lambda \Leftrightarrow -\lambda\mathbb{I} \leqslant f \leqslant \mathbb{I}\lambda.$$

Por lo tanto, $\mathbb{I}$ es una unidad en A.

(2) El espacio $C(\mathbb{R})$ no tiene ninguna unidad.

En efecto, afirmamos que, $C(\mathbb{R}) = \big\{f/f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ continua}\big\}$, no tiene ninguna unidad, es decir no existe $u \in \big[C(\mathbb{R})\big]^+$ tal que, para todo $f \in C(\mathbb{R})$, verifique la siguiente propiedad:

$$\begin{gathered} -\lambda u \leqslant f \leqslant \lambda u \quad \text{para algún } \lambda \in [0, \infty) \\ \Updownarrow \\ -\lambda u(x) \leqslant f(x) \leqslant \lambda u(x) \\ \Updownarrow \\ |f(x)| \leqslant \lambda u(x). \end{gathered}$$

(3) En $C[0,1]$, la función $g(x) = x + 1$ es una unidad, pero en cambio $h(x) = x$, no lo es.

En efecto, tenemos que si, $g, h \in C[0,1]$ entonces, $g(x) \geqslant 1$ y $h(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [0,1]$ ambos pertenecen al conjunto $C[0,1]^+$. Por otra parte para cualquier, $f \in C[0,1]$, tenemos que $\frac{f}{g} : [0,1] \to \mathbb{R}$ es continua. Por lo tanto, existen $m = \text{mín}(\frac{f}{g})$, $M = \text{máx}(\frac{f}{g})$, haciendo $\lambda = \text{máx}\big\{|m|, |M|\big\}$, se tiene que

$$\left|\frac{f}{g}(x)\right| \leqslant \lambda \Leftrightarrow \left|\frac{f(x)}{x+1}\right| \leqslant \lambda \Leftrightarrow |f(x)| \leqslant \lambda(x+1).$$

de donde g es una unidad. Por otra parte, la función h, no reúne las condiciones para ser una unidad.

3.4. Espacios de Riesz arquimedianos con unidades

Definición 3.6. *Sea* u *una unidad en el espacio de Riesz arquimediano* E*, con* $E \neq \{0\}$*. Para* $x \in E$*, definimos el número real no negativo* $\|x\|_u$ *por*

$$\|x\|_u = \text{ínf}\left\{\lambda \in [0,\infty) : |x| \leqslant \lambda u\right\}.$$

Proposición 3.3. *Sea* u *una unidad en el espacio de Riesz arquimediano* $E \neq \{0\}$*, entonces*

$$|x| \leqslant \|x\|_u u.$$

Demostración. En efecto, tenemos que

$$\|x\|_u = \text{ínf}\,\{\underbrace{\lambda \in [0,\infty) : |x| \leqslant \lambda u}_{A}\}.$$

Luego por definición de ínfimo, para todo $\epsilon_n > 0$, con $\epsilon_n \in (0, \frac{1}{n}]$ existe $\lambda_0 \in A$ tal que $\lambda_0 < \|x\|_u + \epsilon_n$, como $\lambda_0 \in A \Rightarrow |x| \leqslant \lambda_0 u$, luego,

$$\lambda_0 u < \big(\|x\|_u + \epsilon_n\big)u,$$

de donde se tiene, $|x| \leqslant \big(\|x\|_u + \epsilon_n\big)u = \|x\|_u u + \epsilon_n u$, entonces $|x| - \|x\|_u u \leqslant \epsilon_n u \leqslant n^{-1}u$. Por lo tanto,

$$|x| - \|x\|_u u \leqslant \frac{1}{n}u \ \text{ para todo } \ n \in \mathbb{N}, \ \text{ luego como } E\text{, es arquimediano entonces,}$$
$$|x| - \|x\|_u u \leqslant 0.$$

Así, se tiene $|x| \leqslant \|x\|_u u$. □

Proposición 3.4. *Sea* $E \neq \{0\}$ *un espacio de Riesz arquimediano con una unidad* u*, entonces para todo* $x, y \in E$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$*, tenemos:*

(α) $\|x\|_u \leqslant \lambda \Leftrightarrow -\lambda u \leqslant x \leqslant \lambda u$,

(β) $\big\||x|\big\|_u = \|x\|_u$,

(γ) $|x| \leqslant |y| \Rightarrow \|x\|_u \leqslant \|y\|_u$,

(ϵ) $\|x + y\|_u \leqslant \|x\|_u + \|y\|_u$,

(θ) $\|\lambda x\|_u = |\lambda|\,\|x\|_u$,

(Ω) $\|x\|_u = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

En particular, $\|\cdot\|_u$ *es una norma.*

Demostración. (α) Si $\|x\|_u \leqslant \lambda$, entonces se tiene $|x| \leqslant \|x\|_u u \leqslant \lambda u$. Así, $|x| \leqslant \lambda u$ de donde $-\lambda u \leqslant x \leqslant \lambda u$. Por otra parte si, $|x| \leqslant \lambda u$. Sea $A = \left\{\lambda \in [0,\infty) : |x| \leqslant \lambda u\right\}$, así $\lambda \in A$, luego $\|x\|_u \leqslant \lambda$, porque $\|x\|_u$ es el ínfimo.

(β) $\big\||x|\big\|_u = \|x\|_u$. En efecto, tenemos que, $|x| \leqslant \|x\|_u u$, lo cual es equivalente a, $-\|x\|_u u \leqslant |x| \leqslant \|x\|_u u$, luego por ($\alpha$) concluimos que

$$\big\||x|\big\| \leqslant \|x\|_u. \tag{3.3}$$

Por otra parte se tiene

$$x \leqslant |x| \leqslant \big||x|\big| \leqslant \big\||x|\big\|_u u \Rightarrow x \leqslant \big\||x|\big\|_u u,$$

$$-x \leqslant |x| \leqslant \big||x|\big| \leqslant \big\||x|\big\|_u u \Rightarrow -\big\||x|\big\|_u u \leqslant x.$$

Por lo tanto, $-\big\||x|\big\|_u u \leqslant x \leqslant \big\||x|\big\|_u u$. Así, por ($\alpha$) concluimos que

$$\|x\| \leqslant \big\||x|\big\|_u. \tag{3.4}$$

Luego por,(3.3) y (3.4) por antisimetría $\big\||x|\big\|_u = \|x\|_u$.

(γ) $|x| \leqslant |y| \Rightarrow \|x\|_u \leqslant \|y\|_u$. En efecto, tenemos $x \leqslant |x| \leqslant |y| \leqslant \|y\|_u u$, entonces $x \leqslant \|y\|_u u$. Por otra parte, $-x \leqslant |x| \leqslant |y| \leqslant \|y\|_u u$, entonces $-\|y\|_u u \leqslant x$. Así, $-\|y\|_u u \leqslant x \leqslant \|y\|_u u$, de donde por la propiedad (α) tenemos $\|x\|_u \leqslant \|y\|_u$.

(δ) $\|x+y\|_u \leqslant \|x\|_u + \|y\|_u$. En efecto, tenemos que

$$\begin{cases} x \leqslant |x| \leqslant \|x\|_u u \\ y \leqslant |y| \leqslant \|y\|_u u, \end{cases} \Rightarrow \quad x + y \leqslant \|x\|_u u + \|y\|_u u. \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} -x \leqslant |x| \leqslant \|x\|_u u \\ -y \leqslant |y| \leqslant \|y\|_u u, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\|x\|_u u \leqslant x \\ -\|y\|_u u \leqslant y. \end{cases}$$

De donde se tiene que

$$-\big(\|x\|_u + \|y\|_u\big)u \leqslant x + y. \tag{3.6}$$

Luego de (3.5) y (3.6),

$$-\big(\|x\|_u + \|y\|_u\big)u \leqslant x + y \leqslant \big(\|x\|_u + \|y\|_u\big)u,$$

así, por la propiedad (α): $\|x+y\|_u \leqslant \|x\|_u + \|y\|_u$.

(θ) $\|\lambda x\|_u = |\lambda|\,\|x\|_u$. En efecto, se tiene $|x| \leqslant \|x\|_u u$, y $\lambda x \leqslant |\lambda x| = |\lambda|\,|x| \leqslant |\lambda|\,\|x\|_u u$, de donde

$$\lambda x \leqslant |\lambda|\,\|x\|_u u. \tag{3.7}$$

Por otra parte, $-\lambda x \leqslant |\lambda x| = |\lambda|\,|x| \leqslant |\lambda|\,\|x\|_u u$, así,

$$-|\lambda|\,\|x\|_u u \leqslant \lambda x. \tag{3.8}$$

Luego de (3.7) y (3.8),: $-|\lambda|\,\|x\|_u u \leqslant \lambda x \leqslant |\lambda|\,\|x\|_u u$, de donde por la propiedad (α),

$$\|\lambda x\|_u \leqslant |\lambda|\,\|x\|_u u. \tag{3.9}$$

Ahora consideremos, $\lambda \neq 0$, de donde $|\lambda| \neq 0$, entonces

$$|\lambda|\,|x| = |\lambda x| \leqslant \|\lambda x\|_u u, \qquad // \, |\lambda|^{-1}$$

$$x \leqslant |x| \leqslant |\lambda|^{-1}\|\lambda x\|_u u,$$

$$\text{así, } x \leqslant |\lambda|^{-1}\|\lambda x\|_u u, \tag{3.10}$$

$$-x \leqslant |x| \leqslant |\lambda|^{-1}\|\lambda x\|_u u,$$

$$\text{de donde } -|\lambda|^{-1}\|\lambda x\|_u u \leqslant x. \tag{3.11}$$

de (3.10) y (3.11): $-|\lambda|^{-1}\|\lambda x\|_u u \leqslant x \leqslant |\lambda|^{-1}\|\lambda x\|_u u$,

$$\text{así, por } (\alpha) \ \|x\|_u \leqslant |\lambda|^{-1}\|\lambda x\|_u$$

$$\text{de donde concluimos, } |\lambda|\,\|x\|_u \leqslant \|\lambda x\|_u. \tag{3.12}$$

Si $\lambda = 0$, se da la desigualdad trivialmente. Así, de (3.9) y (3.12)

$$\|\lambda x\|_u = |\lambda|\,\|x\|_u.$$

(Ω) $\|x\|_u = 0 \Leftrightarrow x = 0$. En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \|x\|_u \leqslant 0 &\Leftrightarrow -0\cdot u \leqslant x \leqslant 0\cdot u \\ &\Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

En particular, $\|\cdot\|_u$ es una norma, ya que verifica las siguientes propiedades:

$\|x\|_u = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $\|\lambda x\|_u = |\lambda|\,\|x\|_u$ y $\|x+y\|_u \leqslant \|x\|_u + \|y\|_u$.

□

Ejemplo: *Sea* X *un conjunto no vacío,* $\ell^\infty(X)$ *el conjunto de todas las funciones acotadas en* X. $\ell^\infty(X)$ *es un espacio de Riesz arquimediano que tiene a* $\mathbb{1}$ *como unidad. Para* $f \in \ell^\infty(X)$*, se tiene*

$$\|f\|_{\mathbb{1}} = \sup\left\{|f(x)| : x \in X\right\}.$$

La norma $\|\cdot\|_{\mathbb{1}}$ *es precisamente la norma del supremo* $\|\cdot\|_\infty$.

En efecto, se tiene

$$\ell^\infty(X) = \Big\{f/f : X \to \mathbb{R} \text{ tal que } |f(x)| \leqslant k, \ \text{ para todo } \ x \in X\Big\}.$$

Si $f \in \ell^\infty(X)$, entonces

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathbb{1}} &= \text{ínf}\left\{\lambda \in [0,\infty) : |f| \leqslant \lambda \mathbb{1}\right\} \\ &= \text{ínf}\underbrace{\{\lambda \in [0,\infty) : |f(x)| \leqslant \lambda\}}_{C}. \end{aligned}$$

Por otra parte tenemos: $\|f\|_\infty = \sup\underbrace{\{|f(x)| : x \in X\}}_{B}$. Por demostrar que ínf $C = \sup B$. En efecto, si $\lambda \in C$ entonces $|f(x)| \leqslant \lambda$ para todo $x \in X$, luego $\sup B \leqslant \lambda$, y

$$\sup B \leqslant \text{ínf}\, C. \tag{3.13}$$

Por otro lado, tenemos que $|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty$ para todo $x \in X$, entonces $\|f\|_\infty \in C$ por lo tanto, se tiene

$$\text{ínf}\, C \leqslant \sup B. \tag{3.14}$$

Así, de (3.13) y (3.14) por antisimetría se tiene ínf $C = \sup B$.

4

Teorema de representación de Yosida

Nuestro resultado principal, como se menciona en el preámbulo, es el Teorema de representación, de Yosida. La caracterización de los espacios de Riesz, que son isomorfos a $C(X)$, para algún espacio de Hausdorff compacto X. En el fondo tenemos al Teorema de Alaoglu, que nos da el espacio X que necesitamos. De hecho, sea E un espacio de Riesz arquimediano y con una unidad u, la unidad determina una norma $\|\cdot\|_u$ en E. Sea Φ el conjunto de todos los homomorfismos de Riesz $\varphi : E \to \mathbb{R}$, para los cuales $\varphi(u) = 1$. Si A es el espacio de todas las funciones lineales en E que son continuas con respecto a la norma $\|\cdot\|_u$, entonces $\Phi \subset A$. A partir del Teorema de Alaoglu se ve que Φ es compacta bajo w'-topología de A.

Por otra parte, cada $a \in E$ induce un elemento $\widehat{a} \in C(\Phi)$. Usando el Lema de Yosida se demuestra que la correspondencia $a \mapsto \widehat{a}$ es un isomorfismo de E en $C(\Phi)$. Si E es "uniformemente completo", es decir, completo con respecto a la norma $\|\cdot\|_u$, la correspondencia $a \mapsto \widehat{a}$ preserva no sólo la estructura de espacio de Riesz, sino también la norma.

Hemos mencionado que nuestro resultado principal, es el Teorema de representación de Yosida, que básicamente es un embellecimiento del Lema de Yosida.

4.1. Lema de Yosida

Lema 4.1 (Lema de Yosida). *Sea E un espacio de Riesz arquimediano con una unidad u. Para cualquier $a \in E^+$, existe un homomorfismo de Riesz $\varphi : E \to \mathbb{R}$, con $\varphi(u) = 1$ y $\varphi(a) = \|a\|_u$.*

Demostración. Sea $c = \|a\|_u u - a$, entonces $c \geqslant 0$, en efecto se tiene que $a \leqslant |a| \leqslant \|a\|_u u$, de donde $\|a\|_u u - a \geqslant 0$. Definimos el conjunto

$$D_0 = \{x \in E : |x| \leqslant tc \text{ para algún } t \in (0, \infty)\}$$

que es un ideal de Riesz en E según el ejemplo (2) de los ideales de Riesz.

Si $u \in D_0$, entonces existe un $t \in (0, \infty)$, tal que $u \leqslant tc \leqslant t(\|a\|_u u - a)$. En efecto $u \leqslant |u| \leqslant tc = t(\|a\|_u u - a)$ lo que implica $a \leqslant (\|a\|_u - t^{-1})u$, ya que

$$\begin{aligned} u &\leqslant t(\|a\|_u u - a), \qquad // \, t^{-1} \\ t^{-1}u &\leqslant \|a\|_u u - a, \end{aligned}$$

$|a| = a \leqslant \|a\|_u u - t^{-1}u = (\|a\|_u - t^{-1})u$, es decir,

$$|a| \leqslant (\|a\|_u - t^{-1})u. \tag{4.1}$$

Lo que contradice la definición de $\|a\|_u = \text{ínf}\left\{\underbrace{\lambda \in [0, \infty) : |a| \leqslant \lambda u}_{A}\right\}$. De (4.1) $\|a\|_u - t^{-1} \in A$, luego por definición del ínfimo, $\|a\|_u \leqslant \|a\|_u - t^{-1}$, es decir $0 \leqslant -t^{-1}$. Lo cual es una contradicción, ya que $t \in (0, \infty)$. Por tanto $u \notin D_0$.

El Lema de Zorn[1] implica la existencia de un conjunto D, tal que $D_0 \subset D$ que es el maximal entre los ideales de Riesz de E que no contienen a u. En efecto, sea

$$Z = \{D : D \text{ ideal de Riesz de } E \text{, que no contienen a } u\}.$$

Por otra parte consideremos $\{C_i\}_{i \in I}$ subconjuntos de Z que están totalmente ordenados (cadenas) por inclusión. Luego como D_0 es un ideal de Riesz de E mas pequeño que no contiene a u, por lo tanto, $D_0 \in Z$. Así, existe un C_i tal que $D_0 \in C_i$. Por otra parte sea $S = \{D \in Z : D_0 \subset D\}$, y supongamos que los $\{D_i\}$ son elementos de S entonces $\bigcup_{i \in I} D_i$ es un ideal de Riesz que contiene a D_0 y una cota superior de los elementos de S. En efecto, si $a \in \bigcup_{i \in I} D_i$, $x \in E$ con $|x| \leqslant |a|$ luego existe un D_k tal que $a \in D_k$ entonces $x \in D_k$ por que es un ideal de Riesz, de donde se tiene que $x \in \bigcup_{i \in I} D_i$ es mas $u \notin \bigcup_{i \in I} D_i$ y claramente $\bigcup_{i \in I} D_i$ es un subespacio vectorial de E.

Luego por el Lema de Zorn existe un conjunto D, tal que $D_0 \subset D$ que es maximal entre los ideales de Riesz de E que no contiene a u.

Sea F el espacio cociente de Riesz, es decir $F = E/D$ y $Q : E \to F$ la aplicación lineal cociente es decir,

$$\begin{aligned} Q : E &\to E/D \\ x &\mapsto Qx = [x]. \end{aligned}$$

[1]**Lema de Zorn.** Sea Z un conjunto no vacío parcialmente ordenado, en el que toda cadena C tiene una cota superior en Z, entonces Z posee al menos un elemento maximal.

Recordemos que, $\|a\|_u u - a = c \in D_0 \subset D$, ya que $|c| \leqslant c$ con $t = 1$ así, $c \in D$ y $u \notin D$, como $\|a\|_u u - a = c$, entonces,

$$Q(\|a\|_u u - a) = Qc \Leftrightarrow \|a\|_u Qu - Qa = 0 \Leftrightarrow Q_a = \|a\|_u Qu.$$

Y tenemos que, $Qu > 0$ pues $E \neq \{0\}$.

Si F fuera un isomorfismo de Riesz con $\mathbb{R}$, entonces tiene que existir un isomorfismo de Riesz, $\Phi : F \to \mathbb{R}$ con $\Phi(Qu) = 1$. En efecto, como D es un ideal de Riesz maximal de E entonces E/D es un espacio vectorial de dimension 1, además como $u \notin D$ es decir $Qu > 0$ por lo tanto la composición $\varphi = \Phi \circ Q$, donde $E \xrightarrow{Q} F \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}$, satisface nuestros requerimientos es decir,

$$\begin{aligned}
&\varphi(u) = (\Phi \circ Q)(u) = \Phi(Qu) = 1 \text{ donde } \lambda Qu \mapsto \lambda, \\
&\varphi(a) = (\Phi \circ Q)(a) = \Phi(Qa) = \Phi(\|a\|_u Q_u) = \|a\|_u \Phi(Qu) = \|a\|_u.
\end{aligned}$$

En efecto, vamos a demostrar que F es un isomorfismo con $\mathbb{R}$, para el cual supongamos que J es un ideal de Riesz de F, por demostrar que J es $\{0\}$ o F. Si $J \neq \{0\}$ entonces $Q^{-1}(J)$ es un ideal de Riesz de E, que contiene a $Q^{-1}(\{0\}) = D$, es decir $D \subset Q^{-1}(J)$. Por lo tanto, un ideal de Riesz de E, que contiene una unidad de E, sólo puede ser ella misma. En efecto, sea G un ideal de Riesz que contiene una unidad $u \in E$, entonces tenemos que, $\lambda u \in G$ tal que $\lambda \in [0, \infty)$. Luego si,

$$\lambda u \in G,\ x \in E \text{ con } |x| \leqslant \lambda u \Rightarrow x \in G, \text{ pues } G \text{ es ideal de Riesz de } E.$$

Así, se tiene que $E \subset G$ y $G \subset E$ de donde $E = G$.

Por otro lado, si $u \in Q^{-1}(J)$, entonces $Q^{-1}(J) = E$, por lo que vimos así $J = Q(E) = F$, ya que Q es sobreyectiva. Por otro lado, si $u \notin Q^{-1}(J)$ y $D \subset Q^{-1}(J)$ entonces por la maximalidad de D, tenemos $Q^{-1}(J) = D$. Por lo tanto $J = Q(D) = \{0\}$. $\square$

Lema 4.2. *Para un espacio de Riesz E, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(α) *Hay un conjunto S tal que E es Riesz isomorfo a un subespacio Riesz de $\mathbb{R}^S$.*

(β) *Los homomorfismos de Riesz $E \to \mathbb{R}$ separan los puntos de E.*

(γ) *Si $e \in E^+$, $e \neq 0$ existe un homomorfismo de Riesz $\varphi : E \to \mathbb{R}$ con $\varphi(e) = 1$.*

Demostración. $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$. Sea S un conjunto y A un isomorfismo de Riesz de E en un subespacio Riesz de $\mathbb{R}^S$, es decir tenemos a $A : E \to D \subset \mathbb{R}^S = \{f/f : S \to \mathbb{R}\}$. Tomando $x, y \in E$, con $x \neq y$, entonces $Ax, Ay \in \mathbb{R}^S$, son funciones distintas, ya que A es inyectiva.

Así, existe un $s \in S$ donde $(Ax)(s) \neq (Ay)(s)$, es decir, teniendo a $\delta^s : \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}$ que es un homomorfismo de Riesz, tal que $\delta^s(f) = f(s)$, se tiene,

$$\begin{aligned}(\delta^s \circ A)(x) &= \delta^s(Ax) = (Ax)(s),\\ (\delta^s \circ A)(y) &= \delta^s(Ay) = (Ay)(s).\end{aligned}$$

Así, $\delta^s(Ax) \neq \delta^s(Ay)$. Entonces la composición $\delta^s \circ A$: $E \to \mathbb{R}$ es un homomorfismo de Riesz, ya que es composición de homomorfismos.

$$E \xrightarrow{A} D \subset \mathbb{R}^S \xrightarrow{\delta^s} \mathbb{R}.$$

En conclusión para diferentes valores x e y, se tiene, $(\delta^s \circ A)(x) \neq (\delta^s \circ A)(y)$. Así, los homomorfismos de Riesz $\delta^s \circ A : E \to \mathbb{R}$ separan los puntos de E.

$(\beta) \Rightarrow (\alpha)$. Sea S el conjunto de todos los homomorfismo de Riesz $E \to \mathbb{R}$. Define,

$$\begin{aligned}A : E &\to \mathbb{R}^S\\ x &\mapsto Ax : S \to \mathbb{R}\\ &\qquad\qquad s \mapsto (Ax)(s) = s(x),\end{aligned}$$

para $s \in S$, Ax es la función $s \to s(x)$ en S. A es un homomorfismo de Riesz. En efecto, primero veamos que A es lineal:

$$\begin{aligned}\big(A(\lambda x + y)\big)(s) &= s(\lambda x + y)\\ &= \lambda s(x) + s(y) \quad \text{pues s(x) es homomorfismo de Riesz}\\ &= \lambda(Ax)(s) + (Ay)(s)\\ &= \big(\lambda A(x) + A(y)\big)(s) \quad \text{para todo } \ s \in S,\end{aligned}$$

de donde $A(\alpha x + y) = \lambda A(x) + A(y)$ por igualdad de funciones.

Por otra parte, $A(|x|)(s) = s(|x|) = |s(x)| = |(Ax)(s)|$ para todo $s \in S$, entonces $A(|x|) = |(Ax)|$. De donde se tiene que, $A(E)$ es un subespacio de Riesz de $\mathbb{R}^S$. La aplicación A es inyectiva porque S separa los puntos de E. Por lo tanto la aplicación A: $E \to A(E)$ es un isomorfismo de Riesz.

$(\beta) \Rightarrow (\gamma)$. Dado, $e \in E^+$ tal que $e \neq 0$ por hipótesis existe un homomorfismo de Riesz $\varphi : E \to \mathbb{R}$ con $\varphi(e) \neq 0$. Luego tomando los subespacios vectoriales complementarios $\langle e \rangle$ y D del espacio de Riesz E, se tiene que, E/D es de dimension 1. Así, cada elemento de E/D es de la forma λQe donde $\lambda \in \mathbb{R}$, luego definimos la aplicación lineal

$$\begin{aligned}\Phi : E/D &\to \mathbb{R}\\ \lambda Qe &\mapsto \lambda.\end{aligned}$$

Luego realizamos una composición de aplicaciones lineales

$$\begin{aligned} E \xrightarrow{Q} E/D &\xrightarrow{\Phi} \mathbb{R} \\ e \mapsto Qe & \\ \lambda Qe &\mapsto \lambda. \end{aligned}$$

Así, finalmente hemos encontrado el homomorfismo de Riesz $\varphi : E \to \mathbb{R}$ con $\varphi(e) = 1$. donde $\varphi(e) = (\Phi \circ Q)(e) = \Phi(Qe) = 1$.

$(\gamma) \Rightarrow (\beta)$. Si $x, y \in E$, con $x \neq y$, entonces $|x - y| \in E^+$ y $|x - y| \neq 0$. Por hipótesis, existe un homomorfismo de Riesz, $\varphi : E \to \mathbb{R}$ con,

$$1 = \varphi(|x - y|) = |\varphi(x - y)| = |\varphi(x) - \varphi(y)|.$$

Así, $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ de donde concluimos que φ separa los puntos de E. □

Ejemplo 4.1. *Sea* $E = \{(x_n) : |x_n| \leqslant k$ *para algún* $k \in (0, \infty)\} = \ell^\infty$ *el espacio de todas las sucesiones de números reales acotadas con una unidad* $\mathbb{1}$. *Las funciones coordenadas,*

$$\begin{aligned} \delta^n : \ell^\infty &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x_n, \end{aligned}$$

son homomorfismo de Riesz, donde $\mathbb{1}(x) = 1$.

En efecto, el Lema de Yosida implica que hay otros, de hecho si, $a \in \ell^\infty$ con $a = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\right)$, entonces existe un homomorfismo de Riesz $\varphi : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ con $\varphi(\mathbb{1}) = 1$ y $\varphi(a) = 1$, es decir,

$$\begin{aligned} \varphi(a) = \|a\|_{\mathbb{1}} &= \text{ínf}\left\{\lambda \in [0, \infty) : |a| \leqslant \lambda \mathbb{1}\right\} \\ &= \text{ínf}\left\{\lambda \in [0, \infty) : |a| \leqslant \lambda\right\}, \end{aligned}$$

y

$$|a| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{n}{n+1} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Claramente φ no es una función coordenada.

Como una consecuencia del Lema de Yosida tenemos a:

Corolario 4.1 (Corolario de Yudin). *Sea* E *un espacio de Riesz arquimediano de dimensión finita, entonces* E *es Riesz isomorfo a* $\mathbb{R}^{\dim E}$.

Demostración. Sea $N = \dim E$ y $u = |u_1| + \cdots + |u_N|$ así, $u \in E^+$, donde $\{u_1, \ldots, u_N\}$ es una base de vectores de E, luego para cualquier $x \in E$, existen los números $\{c_1, \ldots, c_N\}$ tal que, $x = \sum_{i=1}^N c_i u_i$ así,

$$\begin{aligned} |x| &= \left| \sum_{i=1}^N c_i u_i \right| \leqslant \sum_{i=1}^N |c_i u_i| = \sum_{i=1}^N |c_i|\,|u_i|, \\ &\leqslant \big(|c_1| + |c_2| + \cdots + |c_N|\big) u = \left(\sum_{i=1}^N |c_i| \right) u. \end{aligned}$$

En efecto,

$$\begin{cases} |u_1| \leqslant u \\ \vdots \\ |u_N| \leqslant u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |c_1|\,|u_1| \leqslant u|c_1|, \\ \vdots \\ |c_N|\,|u_N| \leqslant u|c_N| \end{cases},$$

de donde,

$$\sum_{i=1}^N |c_i|\,|u_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^N |c_i| \right) u,$$

es decir, tenemos $|x| \leqslant \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N |c_i| \right)}_{\lambda} u$, así u es un unidad.

Así por el Lema de Yosida para todo $a \in E^+$, existen homomorfismos de Riesz $\varphi : E \to \mathbb{R}$ con $\varphi(u) = 1$ y $\varphi(a) = \|a\|_u$. Y por el Lema 4.2, los homomorfismos de Riesz $E \to \mathbb{R}$ separan los puntos de E.

Entonces si, $\Phi = \{\varphi/\varphi : E \to \mathbb{R}$ homomorfismos de Riesz con $\varphi(u) = 1\}$, y $E^* = \{\varphi/\varphi : E \to \mathbb{R}$ lineal $\}$, entonces $\Phi \subset E^*$ donde, $\dim E^* = N$. Por lo tanto existen $M \leqslant N$ y $\varphi_1, \ldots, \varphi_M \in \Phi$ tal que $\Phi \subset \langle \{\varphi_1, \ldots, \varphi_M\} \rangle$. De ello se sigue $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_M\}$ separa los puntos de E. Esto significa precisamente que la aplicación

$$\begin{aligned} T : E &\to \mathbb{R}^M \\ x &\mapsto \big(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_M(x)\big), \end{aligned}$$

es inyectiva y es claramente lineal, así $M = N$ y de donde T es sobreyectiva. Y como cada φ_n es un homomorfismo de Riesz, también lo es T. Entonces T es un isomorfismo de Riesz. $\square$

4.2. Teorema de representación Yosida

Sea E un espacio de Riesz arquimediano con una unidad u.

Teorema de Yosida.

1. Recordar que una unidad u, induce una norma $\|\cdot\|_u$ en E satisfaciendo, que para todo $x \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$-\lambda u \leqslant x \leqslant \lambda u \Leftrightarrow |x| \leqslant \lambda u \Leftrightarrow \|x\|_u \leqslant \lambda.$$

2. Sea $\Phi = \{\varphi/\varphi : E \to \mathbb{R} \quad \text{homomorfismos de Riesz tal que } \varphi(u) = 1\}$, es decir es el conjunto de todas las aplicaciones $\varphi : E \to \mathbb{R}$ que satisfacen:

   - φ es lineal,
   - $\varphi(|x|) = |\varphi(x)|$, para todo $x \in E$,
   - $\varphi(u) = 1$.

3. Si $\varphi : E \to \mathbb{R}$ es un homomorfismo de Riesz, entonces la desigualdad $|x| \leqslant \|x\|_u u$ implica que $\varphi(|x|) \leqslant \varphi(\|x\|_u u)$. Así, $|\varphi(x)| \leqslant \|x\|_u \varphi(u)$ y como $\varphi(u) = 1$ de donde se tiene,

$$|\varphi(x)| \leqslant \|x\|_u \quad \text{para todo } \ x \in E, \ \ \varphi \in \Phi.$$

4. Por el Lema de Yosida, aplicando a $a = |x|$, para cada $x \in E$ existe un $\varphi \in \Phi$ tal que $\varphi(|x|) = \big\||x|\big\|_u = \|x\|_u$, luego se tiene $|\varphi(x)| = \|x\|_u$.

5. Cada elemento $x \in E$ determina una función:

$$\begin{aligned} \widehat{x} : \Phi &\to \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \widehat{x}(\varphi) = \varphi(x) \ \text{ para todo } \ \varphi \in \Phi. \end{aligned}$$

   Trivialmente se verifica que $\widehat{u} = \mathbb{1}$ es decir $\widehat{u}(\varphi) = \varphi(u) = 1$.

6. A partir de 3. y 4. vemos que cada $\widehat{x}$ está acotada y satisface $\|\widehat{x}\|_\infty = \|x\|_u$. En efecto como:

$$\|\widehat{x}\|_\infty = \sup\{|\widehat{x}(\varphi)| : \varphi \in \Phi\},$$

   entonces $|\widehat{x}(\varphi)| \leqslant \|\widehat{x}\|_\infty$ y como $\widehat{x}(\varphi) = \varphi(x)$, de donde se tiene $\|x\|_u = |\varphi(x)| \leqslant \|\widehat{x}\|_\infty$. Por otra parte de 3. $|\widehat{x}(\varphi)| = |\varphi(x)| \leqslant \|x\|_u$ para todo $x \in E$, $\varphi \in \Phi$

entonces $\sup\{|\widehat{x}(\varphi)| : \varphi \in \Phi\} \leqslant \|x\|_u$ es decir $\|\widehat{x}\|_\infty \leqslant \|x\|_u$ luego por antisimetría $\|\widehat{x}\|_\infty = \|x\|_u$. Por lo tanto, tenemos una aplicación lineal

$$\begin{aligned} T : E &\to \ell^\infty(\Phi) \\ x &\mapsto \widehat{x} \text{ para todo } x \in E. \end{aligned}$$

Que es una isometría en relación a las normas $\|\cdot\|_u$ y $\|\cdot\|_\infty$ y por lo tanto es inyectiva. Afirmamos que esta aplicación es un homomorfismo de Riesz ya que para cada $x \in E$ y $\varphi \in \Phi$ se tiene,

$$(\widehat{|x|})(\varphi) = \varphi(|x|) = |\varphi(x)| = |\widehat{x}(\varphi)| = (|\widehat{x}|)(\varphi), \text{ para todo } \varphi \in \Phi.$$

$$T(|x|) = \widehat{|x|} = |\widehat{x}| = |T(x)|.$$

7. Retornando al mundo del Teorema de Alaoglu. En $\mathbb{R}^E$ consideramos la topología producto. Bajo la norma $\|\cdot\|_u$ E es un espacio vectorial normado. Como tal tiene un espacio vectorial conjugado $E' = \{\varphi/\varphi : E \to \mathbb{R}$ lineal y continua $\}$ dotado de una norma que se define como:

$$\|\varphi\|'_u = \inf\{s \in [0, \infty) : |\varphi(x)| \leqslant s\|x\|_u \text{ para todo } x \in E\}.$$

Así en nuestro caso el conjunto, $S = \left\{f \in E' : \|f\|'_u \leqslant 1\right\}$ es compacto en $\mathbb{R}^E$ según el teorema de Alaoglu[2]. Por (3.) afirmamos que Φ está contenida en S, es decir si $\varphi \in \Phi$ entonces $\varphi : E \to \mathbb{R}$ es lineal y como $|\varphi(x)| \leqslant \|x\|_u$ luego φ es continua así, $\varphi \in E'$ y además se tiene que, $\|\varphi\|'_u \leqslant 1$.

Por otra parte podemos ver que Φ es precisamente la intersección de S con el conjunto,

$$\bigcap_{x \in E} \left\{\varphi \in \mathbb{R}^E : \varphi(|x|) = |\varphi(x)|\right\} \cap \left\{\varphi \in \mathbb{R}^E : \varphi(u) = 1\right\}.$$

Este último conjunto es cerrado en $\mathbb{R}^E$. Por lo tanto Φ es compacto en $\mathbb{R}^E$. En efecto estamos afirmando que:

$$\Phi = S \cap [\bigcap_{x \in E} \left\{\varphi \in \mathbb{R}^E : \varphi(|x|) = |\varphi(x)|\right\} \cap \left\{\varphi \in \mathbb{R}^E : \varphi(u) = 1\right\}].$$

8. Ahora vamos a dotar a Φ con la topología inducida por $\mathbb{R}^E$. Sea $\widehat{E} = \left\{\widehat{x} : x \in E\right\}$, que es un subespacio de Riesz de $\mathbb{R}^\Phi$, y Riesz isomorfo a E. Luego por definición de

[2] El **teorema del Alaoglu** (*Sea* E *un espacio vectorial normado. Entonces el conjunto* $\{f \in E' : \|f\|' \leqslant 1\}$ *es* w'*-compacto*)(ver C.1 apéndice).

topología producto, cada $\widehat{x}$ es continua, así $\widehat{E}$ es un subespacio de Riesz de $C(\Phi)$. Por otra parte si $\varphi, \psi \in \Phi$ y $\varphi \neq \psi$, entonces de supuesto existe un $x \in E$ con $\varphi(x) \neq \psi(x)$. Vemos que $\widehat{E}$ separa los puntos de Φ, con $\mathbb{I} = \widehat{u} \in \widehat{E}$.

Ahora podemos acudir al Stone-Weierstrass. [3] De donde concluimos que $\widehat{E}$ es denso en $C(\Phi)$.

Recopilando los resultados obtenemos:

Teorema 4.1. (**Teorema de representación de Yosida**) *Sea* E *un espacio de Riesz arquimediano con una unidad* u*, y*

$$\Phi = \{\varphi/\varphi : E \to \mathbb{R} \quad \textit{homomorfismo de Riesz tal que } \varphi(u) = 1\};$$

topologizando Φ *como un subconjunto de* $\mathbb{R}^E$. *Para cada* $x \in E$ *sea la función,*

$$\begin{aligned} \widehat{x} : \Phi &\to \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \widehat{x}(\varphi) = \varphi(x) \quad \textit{para todo} \quad \varphi \in \Phi. \end{aligned}$$

Definamos el conjunto $\widehat{E} = \left\{\widehat{x} : x \in E\right\}$. *Entonces:*

1. Φ *es un espacio de Hausdorff compacto.*

2. $\widehat{E}$ *es un subespacio de Riesz denso en* $C(\Phi)$ (bajo la norma $\|\cdot\|_\infty$)

3. *La aplicación lineal*

$$\begin{aligned} T : E &\to \widehat{E} \\ x &\mapsto \widehat{x} \quad \textit{para todo}\, x \in E, \end{aligned}$$

es un isomorfismo de Riesz, con $\widehat{u} = \mathbb{I}$ *y* $\|\widehat{x}\|_\infty = \|x\|_u \quad (x \in E)$.

El conjunto Φ *es llamado espacio de representación Yosida de* E.

---

[3] **Teorema B.1 Stone-Weierstrass**:

Sea X *compacto y* D *un subespacio vectorial de* $C(X)$ *que satisface las condiciones:*

(a) Si $a, b \in X$, $a \neq b$ *y* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *existe un* $f \in D$ *con* $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$.

(b) Para cualquier $f \in D \Rightarrow |f| \in D \qquad o \qquad f \in D \Rightarrow f^2 \in D$.

Entonces D *es denso en* $C(X)$ (relativo a la norma $\|\cdot\|_\infty$) (ver apéndice B).

$\mathcal{A}$

Apéndice

A.1. Propiedades en un espacio vectorial normado

Definición A.1. *Una norma en un espacio vectorial* E*, es una función*

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\|, \end{aligned}$$

que satisface las siguientes condiciones:

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *para todo* $x \in E$*,*

2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ *para todo* $x \in E$*,* $\alpha \in \mathbb{R}$*,*

3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *para todo* $x, y \in E$*.*

Decimos que el par $(E, \|\cdot\|)$ en un espacio vectorial normado.

Observación A.1. 1. *Si* $\|\cdot\|$ *es una norma en* E *y* D *un subespacio vectorial de* E*, entonces la restricción de* $\|\cdot\|$ *a* D *es una norma en* D*.*

2. *Una norma* $\|\cdot\|$ *en* E *induce una métrica* d *que es definida por*

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad \textit{para todo} \quad x, y \in E.$$

Donde d *es llamada distancia inducida por la norma* $\|\cdot\|$*.*

Para cualquier conjunto X, $\ell^\infty(X)$ denota el espacio vectorial de todas las funciones acotadas en X. La norma del supremo en $\ell^\infty(X)$ es definida por:

$$\|f\|_\infty = \sup \big\{ |f(x)| : x \in X \big\}, \quad f \in \ell^\infty(X).$$

A.2. Funciones Continuas y convergencia uniforme

Sea X un conjunto y sean $g, f_1, f_2, \dots$ funciones en X. Se dice que $f_n \to g$ uniformemente si para todo $\epsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geqslant n_0, \ x \in X \Rightarrow |f_n(x) - g(x)| \leqslant \epsilon.$$

De este modo la convergencia es asociada con la norma $\|\cdot\|_\infty$. En efecto,

$$f_n \to g \text{ uniformemente} \Leftrightarrow \|f_n - g\|_\infty \to 0.$$

Demostración. Observe que para $f, g : X \to \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$ la expresión $|f(x) - g(x)| \leqslant \epsilon$, para todo $x \in X$ implica que $f - g \in \ell^\infty(X)$ y es equivalente a $\|f - g\|_\infty \leqslant \epsilon$. □

Teorema A.1. *Sea X un espacio topológico y $g, f_1, f_2, \dots$ funciones en X. Suponga que cada f_n es continua y que $f_n \to g$ uniformemente. Entonces g es continua.*

Definición A.2. *Un espacio vectorial normado es de Banach si es completo con respecto a la métrica inducida por la norma.*

Recordemos que un espacio métrico es "completo" si toda sucesión de Cauchy converge. Mientras que en un espacio métrico, una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de "Cauchy" si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \text{ tal que si } m, n \geqslant N \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \epsilon \text{ o } d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

Teorema A.2.

1. *Si X es cualquier conjunto, entonces $\ell^\infty(X)$ es un espacio de Banach bajo la norma $\|\cdot\|_\infty$.*
2. *Si X es un espacio topológico, entonces $BC(X)$ es un espacio de Banach bajo la norma $\|\cdot\|_\infty$.*

Teorema A.3 (Teorema de Hanh - Banach). *Sea D un subespacio vectorial de un espacio vectorial normado E y sea $f : D \to \mathbb{R}$ lineal tal que*

$$|f(x)| \leqslant \|x\| \quad \textit{para todo } x \in D.$$

Entonces f tiene una extensión lineal $\bar{f} : E \to \mathbb{R}$ con $|\bar{f}(x)| \leqslant \|x\|$ para todo $x \in E$.

Corolario A.1. *Sea E un espacio vectorial normado y $a \in E$, $a \neq 0$, entonces existe un $f \in E'$ con $f(a) = \|a\|$, $\|f\|' = 1$.*

Apéndice B

B.1. El teorema de Stone-Weierstrass

Un resultado importante en el análisis elemental es el teorema de Weierstrass, afirmando que, en un intervalo cerrado acotado toda función continua se puede aproximar de manera uniforme por funciones polinómicas, ahora veremos una extensión de este resultado. El teorema en sí se encuentra fuera de nuestra esfera de interés, pero es crucial para los teoremas de representación.

Lema B.1. *Definamos las funciones polinómicas* $P_1, P_2, \ldots$ *en* $[-1,1]$ *dadas por*

$$\begin{aligned} P_1(t) &= 0 && \textit{para todo } t \in [-1,1], \\ P_{n+1}(t) &= P_n(t) - \frac{1}{2}\big(P_n(t)^2 - t^2\big) && \textit{para todo } t \in [-1,1],\ n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Entonces la sucesión $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a la función* $t \mapsto |t|$ *uniformemente en* $[-1,1]$.

Demostración. Primero recordemos el **Teorema de Dinis** que menciona lo siguiente:

Sea X *un espacio compacto y* $f_1, f_2, \ldots$ *funciones continuas* $X \to \mathbb{R}$ *tal que, para todo* $x \in X$,

$$f_1(x) \geqslant f_2(x) \geqslant \cdots \ \textit{y} \ \lim_n f_n(x) = 0.$$

Entonces $f_n \to 0$ *uniformemente, es decir, para todo* $\epsilon > 0$ *existe un* N *tal que* $f_n(x) < \epsilon$ *para todo* $n \geqslant N$ *y* $x \in X$.

Luego una aplicación del Teorema de Dinis a las funciones $t \mapsto |t| - P_n(t)$ es suficiente probar que para todo $a \in [-1,1]$:

$$P_1(a) \leqslant P_2(a) \leqslant \cdots \text{ y } P_n(a) \to |a|.$$

Por tanto, para $a \in [-1,1]$. Definimos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = x - \frac{1}{2}(x^2 - a^2) \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

tenemos que $P_{n+1}(a) = g\big(P_n(a)\big)$.

Note que $g(|a|) = |a|$, $g(0) \geqslant 0$ y g es creciente en el intervalo $[0,|a|]$. De ahí se deduce que la aplicación $g : [0,|a|] \to [0,|a|]$ es creciente. Entonces los números $0, g(0), g\big(g(0)\big), ...$ forma una sucesión creciente en $[0,|a|]$, que converge a un punto b de $[0,|a|]$ con $g(b) = b$. Esto significa precisamente que $\big(P_n(a)\big)_n$ es una sucesión creciente en $[0,|a|]$ convergiendo a un punto b de $[0,|a|]$ que satisface $b^2 = a^2$ y por lo tanto debe ser $|a|$.

□

Teorema B.1 (Teorema de Stone-Weierstrass). *Sea* X *compacto y* D *un subespacio vectorial de* $C(X)$ *que satisface las condiciones (a) y (b):*

(a) Si $a, b \in X$, $a \neq b$ *y si* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *entonces existe un* $f \in D$ *con* $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$.

(b) Para cualquier $f \in D \Rightarrow |f| \in D$ *o* $f \in D \Rightarrow f^2 \in D$.

Entonces D *es denso en* $C(X)$ *(relativo a la norma* $\|\cdot\|_\infty$*).*

Demostración. **(I)** Asumimos que si, $f \in D \Rightarrow |f| \in D$. Observe que para $s, t \in \mathbb{R}$, $s \vee t = \text{máx}\{s,t\}$, $s \wedge t = \text{mín}\{s,t\}$ y $s^+ = s \vee 0$. Por otra parte para las funciones f, g en $C(X)$, $f \vee g$, $f \wedge g$ y f^+ están definidas como:

$$x \mapsto f(x) \vee g(x),\ x \mapsto f(x) \wedge g(x) \text{ y } \ x \mapsto f(x)^+.$$

Así,

$$\text{si } f, g \in D \Rightarrow f \vee g \in D,\ f \wedge g \in D,$$

donde el supremo e ínfimo están definidas como:

$$f \vee g = \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}|f-g| \ \text{ y } \ f \wedge g = \frac{1}{2}(f+g) - \frac{1}{2}|f-g|.$$

Sean $h \in C(X)$ y $\epsilon \in (0,\infty)$. Termina la demostración si encontramos un $f \in D$ tal que $\|h - f\|_\infty \leqslant \epsilon$, es decir, $h - \epsilon\mathbb{1} \leqslant f \leqslant h + \epsilon\mathbb{1}$. Tomando cualquier punto $a \in X$, sea $D_a = \{j \in D :\ j(a) = h(a)\}$, donde D_a es un subespacio vectorial de $C(X)$. Luego por hipótesis a), para cada $b \in X$, existe un j en D_a con $j(b) = h(b)$, de donde, $j(b) > h(b) - \epsilon$. En consecuencia los conjuntos abiertos $\{x :\ j(x) > h(x) - \epsilon\}$, donde j corre a través de D_a, cubre X. Por compacidad existen $j_1, \ldots, j_N$ en D_a tal que,

$$\bigcup_{n=1}^{N} \{x :\ j(x) > h(x) - \epsilon\} = X.$$

Haciendo $g = j_1 \vee \cdots \vee j_N$, nosotros encontramos $g \in D$, tal que $g(a) = h(a)$, y $g(x) > h(x) - \epsilon$ para todo $x \in X$. Sea $D_{\geqslant\epsilon} = \{g \in D :\ g \geqslant h - \epsilon\mathbb{1}\}$. Por lo anterior, para cada punto $a \in X$ hay un $g \in D_{\geqslant \epsilon}$ con $g(a) = h(a)$ entonces $g(a) < h(a) + \epsilon$. De ello se desprende que los conjuntos abiertos $\{x : g(x) < h(x) + \epsilon\}$, donde g corre a través de $D_{\geqslant \epsilon}$, cubre X. Por lo tanto existen $g_1, \ldots, g_M \in D_{\geqslant \epsilon}$ tal que,

$$\bigcup_{m=1}^{M} \{x : g_m(x) < h(x) + \epsilon\} = X.$$

Entonces haciendo $f = g_1 \wedge \cdots \wedge g_n$, encontramos $f \in D$, tal que verifica la propiedad, $h - \epsilon \mathbb{I} \leqslant f \leqslant h + \epsilon \mathbb{I}$.

(II) Ahora supongamos que si $f \in D \Rightarrow f^2 \in D$. Sea $\overline{D}$ la clausura de D en $C(X)$ (relativo a la norma $\|\cdot\|_\infty$). Es sencillo verificar que $\overline{D}$ es un subespacio vectorial de $C(X)$ y que

$$f \in \overline{D} \Rightarrow f^2 \in \overline{D}.$$

A través de la identidad

$$2fg = (f+g)^2 - f^2 - g^2, \text{ esto implica que si } f, g \in \overline{D} \Rightarrow fg \in \overline{D}.$$

De donde $f \in \overline{D} \Rightarrow P(f) \in \overline{D}$ para cada polinomio con $p(0) = 0$. Tomando $P_n (n \in \mathbb{N})$ como en el lema B.1 y observe que $P_n(0) = 0$ para cada n. Por lo tanto, si $f \in \overline{D}$ y $\|f\|_\infty \leqslant 1$, entonces $P_n(f) \in \overline{D}$ para cada n, así $|f| \in \overline{D}$ porque $P_n(f) \to |f|$ uniformemente, por lema B.1. De ello se sigue que $|f| \in \overline{D}$ para cada $f \in \overline{D}$. Luego aplicando la propiedad (I) al espacio $\overline{D}$. Concluimos que $\overline{D}$ es denso en $C(X)$.

$\square$

Apéndice C

C.1. Espacios vectoriales Normados y la w'-topología

Sea E un espacio vectorial normado, con una norma $\|\cdot\|$. Luego definimos el espacio dual topológico $E' = \{\varphi / \varphi : E \to \mathbb{R}$ lineal y continua $\}$ que es un espacio vectorial normado, es decir para cada $f \in E'$ podemos asignar un número $\|f\|'$ por:

$$\|f\|' = \text{ínf}\left\{s \in [0, \infty) : \ |f(x)| \leqslant s\|x\| \quad \text{para todo } x \in E\right\}.$$

Si $f : E \to \mathbb{R}$ es una función lineal para el cual existe un numero $s \in [0, \infty)$ tal que $|f(x)| \leqslant s\|x\|$ para todo $x \in E$, entonces f es continua. De donde obtenemos la topología débil en E', generalmente llamado la w' - topología (o a veces w^* - topología). Una red $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ en E', w' - converge a un elemento f de E' si y solo si

$$f_\alpha(x) \to f(x) \quad \text{para todo } x \in E.$$

De manera similar vamos a utilizar términos como "w' - continua" o w' - cerrado". Observe que la w' - topología es automáticamente de Hausdorff y se puede demostrar que es metrizable sólo si E es de dimensión finita.

1. Para cada $f \in E'$ podemos asignar un número $\|f\|'$ por,

   $$\|f\|' = \text{ínf}\left\{s \in [0, \infty) : \ |f(x)| \leqslant s\|x\| \quad \text{para todo } x \in E\right\}.$$

   Entonces

   $$|f(x)| \leqslant \|f\|'\|x\| \quad \text{para todo } x \in E, f \in E',$$

   $$|f(x) - f(y)| \leqslant \|f\|'\|x - y\| \quad \text{para todo } x, y \in E, \ \ f \in E'.$$

2. La función $\|\cdot\|'$ es una norma en E'.

3. **Teorema** (Si E no es solo $\{0\}$). Para todo $x \in E$ existe $f \in E'$ tal que $f(x) = \|x\|$, $\|f\|' = 1$. Este es un caso especial del teorema de Hahn-Banach.

4. Se deduce que E' separa los puntos de E.

5. En E', la convergencia en el sentido de la norma $\|\cdot\|'$ implica $w'-$ convergencia. En general, los dos son bastante diferentes.

Definición C.1. *Sean* E *y* F *espacios vectoriales normados con las normas* $\|\cdot\|_E$ *y* $\|\cdot\|_F$*, respectivamente. Se dice que* E *es isométricamente isomorfo con* F *si existe una biyección lineal* $T : E \to F$ *con*

$$\|T_x\|_F = \|x\|_E \quad \textit{para todo } \ x \in E.$$

Tal T se llama isometría lineal de E en F, siendo una isometría con respecto a la métrica determinada por la norma.

C.2. Teorema de Alaoglu

Teorema C.1 (**Teorema de Alaoglu**)**.** *Sea* E *un espacio vectorial normado. Entonces el conjunto* $\{f \in E' : \|f\|' \leqslant 1\}$ *es* w' *- compacto* (es decir, compacto en relación con la w' - topología en E').

Demostración. Vamos a llevar una serie de pasos, cada paso es elemental a excepción de la aplicación del Teorema de Tychonoff. Imponemos la topología producto en $\mathbb{R}^E$.

(I) Para todo $x \in E$ la función $f \mapsto f(x) \quad (f \in \mathbb{R}^E)$ es continua.

(II) Si $x, y \in E$, entonces el conjunto $\{f \in \mathbb{R}^E : \ f(x) + f(y) = f(x+y)\}$ es cerrado en $\mathbb{R}^E$.

(III) El conjunto $L = \{\varphi/\varphi : E \to \mathbb{R}$ funciones lineales $\}$ es cerrado en $\mathbb{R}^E$.

(IV) Definimos

$$\Delta = \prod_{x \in E} [-\|x\|, \|x\|].$$

Por el teorema de Tychonoff, Δ es compacto en la topología producto.

(V) Δ es el subconjunto de $\{ \ f \in \mathbb{R}^E : \ |f(x)| \leqslant \|x\| \ \ \text{para todo} \ \ x \ \}$ de $\mathbb{R}^E$. La topología producto de Δ, es la restricción a Δ de la topología producto de $\mathbb{R}^E$. Por lo tanto Δ es compacto como subconjunto de $\mathbb{R}^E$.

(VI) $\{f \in E' : \|f\|' \leqslant 1\}$ es precisamente $L \cap \Delta$, por lo tanto es compacto en $\mathbb{R}^E$.

(VII) E' es un subconjunto de $\mathbb{R}^{\mathsf{E}}$ y la w' - topología de E' es la restricción de la topología producto de $\mathbb{R}^{\mathsf{E}}$. Por lo tanto $\{\mathsf{f} \in \mathsf{E} : \ \|\mathsf{f}\|' \leqslant 1\}$ es w' - compacto.

$\square$

Bibliografía

[1] Space of Continuous Functions, G.L.M. Groenewegen, A.C.M. Van Rooij Atlantis. Volume 4, 2016.

[2] Análisis funcional. Walter Rudin. Editorial Reverté .

[3] Teoría de Conjuntos, Hernandez Hernandez. Sociedad Matemática Mexicana. 1998.

[4] Topologia. James R. Munkres Massachusetts Institute of Technology.

[5] Lattice Theory, G. Birkhoff, Tercera edición.

[6] Introduction to Operator Theory in Riesz Spaces, Adriaan C. Zaanen, Springer, 1997.

[7] Introduction to Riesz spaces, Mathematisch Centrum, E. de Jonge, A.C.M. Van Rooij, Amsterdam 1977.

[8] Caracterización del Álgebra Topológica de las Funciones reales y continuas sobre un espacio topológico, Tesis Doctoral de Antonio Pulgarín García. Universidad de Extremadura.