Universidad Mayor de San Andrés
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Carrera de Matemática

ESTABILIDAD ESTRUCTURAL DE LYAPUNOV

(Ecuaciones Diferenciales)

Univ. Hugo Paredes Barra

PROYECTO DE GRADO

PARA OBTENER EL GRADO DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

TUTOR: Msc. Miguel Yucra Calle

La Paz–Bolivia
2011

ESTABILIDAD ESTRUCTURAL DE LYAPUNOV

(Ecuaciones diferenciales)

Por

Hugo Paredes Barra

Remitido en cumplimiento parcial de los requisitos para la obtención del grado de licenciado en matemática en la Universidad Mayor de San Andrés.

La Paz–Bolivia

Diciembre de 2011

A mis queridos padres

Nicolás, Albertina y a mi tio Pablo

Agradecimientos

Primeramente quiero agradecer A Dios por guiar mi camino. Quiero dar mi más sincero agradecimiento Al Msc. Miguel Yucra Calle mi profesor tutor por todo el apoyo y sugerencia para la conclución de este trabajo de grado. Así mismo quiero agradecer a mis dos tribunales: Dr. Efrain Cruz Mullisaca y Al Lic. Oscar Bobarín Flores, por la confianza que tubieron conmigo. Del mismo modo quiero agradecer al Seminario de Teoría de Control de la Carrera de Matemática que esta acargo del profesor: Msc. Willy Condori Equice. También quiero agradecer a todos los Docentes de la Carrera de Matemática.

Y de manera especial agradecer a mi Padre Nicolas Paredes M. por la confianza que tuvo conmigo y sobre todo a mi querida Madre Albertina Barra Ch. por su paciencia a apoyo y también a Mi tío Pablo por la ayuda incondicional. Quiero agradecer a mi hermano David por su apoyo en los momentos dificiles, a mi hermana Sara por todo los concejos y a mis queridos sobrinos Arón y Dávita.

Tambien quiero agradecer a mis queridos amigos Jose Laura, Diego Mendoza, Hernán, Ramiro, Leonardo, Victor, Roberto, Moises, Freddy, Vither, Alejandro, Juan Carlos H. S., Nelson, Hector, Iver y puedo seguir nombrando a muchos más, pero no hay espacio para nombrar a todos, pero con quienes estoy muy agradecido. Quisiera terminar agradeciendo de manera especial A Olivia por su apoyo y comprensión en todo este tiempo.

Introducción

La Teoría de Estabilidad juega un rol central en la Teoría de Sistemas Dinámicos. Un Sistema Dinámico es un sistema que varía con el tiempo. Cambian los estados del sistema. Viene descrito por un espacio de estados que en nuestro caso será $\mathbb{R}^n$ junto con una regla que determina la dinámica del sistema. El Sistema Dinámico define un sistema de ecuaciones lineales y no lineales definidas en $\mathbb{R}^n$ de la forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad x(0) = x_0 \quad t \geqslant 0. \tag{1}$$

En este trabajo vamos a tratar estabilidad en puntos de equilibrio. Un punto de equilibrio se dice estable si todas las soluciones de (1) que se inicien en las cercanías del punto de equilibrio permanecen en cercanías del punto de equilibrio. Un punto de equilibrio se dice asintóticamente estable si toda las soluciones de (1) que se inicien en las cercanías del punto de equilibrio no solo permanecen en las cercanías, sino que además tienden al punto de equilibrio a medida que el tiempo se aproxima al infinito.

El propósito del presente trabajo es, realizar un análisis detallado de la estabilidad (según Lyapunov) en puntos de equilibrio del sistema (1)

Si el sistema (1) fuese lineal, en ese caso son sencillos de analizar y de trabajar, ya que la solución del sistema sujetas a condiciones complejas se puede lograr simplificando el problema a la suma de respuestas del sistema con condiciones más sencillas. Existen técnicas ampliamente usadas para analizar estos sistemas por ejemplo la transformadas de Laplace. Por lo anterior es usual encontrar soluciones analíticas exactas de sistemas lineales.

Sin embargo si el sistema (1) es no lineal. Entonces el hecho de ser no lineal hace de que su análisis sea más complejo (ya que no se puede simplificar a instancias más sencillas). En la mayoría de las ocasiones no se podrá encontrar soluciones analíticas exactas a los problemas no lineales, por tanto la representación de la dinámica del sistema se auxilia mucho de las técnicas geométricas de visualización y en el análisis en puntos de equilibrio del sistema (1). El presente trabajo esta dividido en tres capítulos y un apéndice.

En el primer capítulo estudiaremos las propiedades de las soluciones del sistema no lineal (1) y la relación que existe con los conjuntos invariantes.

En el segundo capítulo desarrollamos los conceptos fundamentales y resultados de la estabilidad (según Lyapunov) del sistema no lineal (1) tanto local como global.

En el tercer capítulo damos tres construcciones sistemáticas de funciones de Lyapunov que hacen que el punto de equilibrio del sistema (1) sea estable o asintóticamente estable y finalmente veremos la estabilidad del sistema lineal.

Índice general

CAPÍTULO 1

Preliminares

En este capítulo introduciremos algunas nociones previas para el estudio de estabilidad.

1.1. Sistemas Dinámicos

Definición 1.1. *Un sistema dinámico sobre* $D \subset \mathbb{R}^n$ *es una terna* $(D, \mathbb{R}, \phi)$*, donde* $\phi : \mathbb{R} \times D \to D$ *es una función que satisface:*

(i) ϕ *es continua*

(ii) *Para cualquier* $x_0 \in D$ *fijo,*

$$\begin{aligned} \phi_{x_0} : \mathbb{R} &\to D \\ t &\mapsto \phi(t, x_0) \end{aligned}$$

es de clase C^1.

(iii) $\phi(0, x) = x$*, para todo* $x \in D$ *y* $\phi(\tau + t, \phi(x)) = \phi(\tau, \phi(t, x))$*, para todo* $x \in D$ *y para todo* $\tau, t \in \mathbb{R}$.

De ahora en adelante denotaremos el sistema dinámico $(D, \mathbb{R}, \phi)$ por $\mathcal{G}$ y nos referiremos a la función ϕ como el flujo de $\mathcal{G}$.

La función $x : [\alpha, \beta] \to D$ donde $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, describe un camino entonces sin dar lugar a confusiones vamos a denotar $\phi_{x_0}(t)$ por $x(t)$ para todo $t \in [\alpha, \beta]$. Dado cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$ fijo definimos la función

$$\begin{aligned} \phi_{t_0} : D &\to D \\ x &\mapsto \phi(t_0, x) \end{aligned}$$

Definición 1.2. *Diremos que* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *con* D *abierto en* $\mathbb{R}^n$ *es un campo vectorial si* f *es continua sobre* D.

Como un sistema dinámico $\mathcal{G}$ consiste de una función ϕ que describe el movimiento de $x \in D$ para todo $t \in \mathbb{R}$, genera una ecuación diferencial sobre D. En efecto como ϕ_x es de clase C^1 entonces la función

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \frac{d}{dt}\phi(t,x)\Big|_{t=0} \end{aligned} \tag{1.1}$$

define un campo vectorial. Geométricamente podemos interpretar como sigue, cada $x \in D$ se corresponde con el vector tangente a la curva $\phi_x(t)$ en $t = 0$. Se desprende de (1.1) que:

$$\begin{aligned} f(x(t)) &= \frac{d}{dr}\phi(r, x(t))\Big|_{r=0} \\ &= \frac{d}{dr}\phi(r, \phi(t, x_0))\Big|_{r=0} \\ &= \frac{d}{dr}\phi(r+t, x_0)\Big|_{r=0} \\ &= \frac{d}{dr}x(r+t)\Big|_{r=0} \\ &= \lim_{r\to 0}\frac{x(r+t)-x(t)}{r} \\ &= \dot{x}(t) \end{aligned}$$

por lo tanto tenemos la ecuación diferencial,

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad t \in I_{x_0}. \tag{1.2}$$

Donde la solución de (1.2) es la función $x : I_{x_0} \to D$ de clase C^1 en el intervalo $I_{x_0} \subset \mathbb{R}$ tal que, $0 \in I_{x_0}$ y satisface $\dot{x}(t) = f(x(t))$, con la condición inicial $x(0) = x_0$.

Observación 1.1. *Si conocemos una solución* $x : I_{x_0} \to D$ *de (1.2) definida en algún intervalo* $I_{x_0} \subset \mathbb{R}$*, entonces también podemos determinar soluciones con cualquier condición inicial. En efecto, si* $t_1 \in \mathbb{R}$ *y* $x_1 \in x(I_{x_0})$ *(es decir, existe* $t^* \in I_{x_0}$ *con* $x_1 = x(t^*)$*) entonces* $\bar{x}(t) = x(t - t_1 + t^*)$ *define un camino en el intervalo trasladado*

$$J = I_{x_0} + t_1 - t^* = \{t + t_1 - t^* \quad : \quad t \in I_{x_0}\}$$

tal que $\bar{x}(t_1) = x_1$ *y* $\dot{\bar{x}}(t) = \dot{x}(t - t_1 + t^*) = f(x(t - t_1 + t^*)) = f(\bar{x}(t))$ *para cada* $t \in J$*. Así vemos que* $\bar{x} : J \to D$ *es una solución de (1.2) tal que* $\bar{x}(t_1) = x_1$.

Ejemplo 1.1. *En este ejemplo analicemos el flujo* $\phi : [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *definido por* $\phi(t,x) = e^{At}x$*, donde* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$*. Notemos que* $e^0 = I_n$ *y* $e^{A(t+\tau)} = e^{At}e^{A\tau}$ *y además se cumplen las condiciones (i) e (ii) de la definición (1.1), las demostraciones lo podemos ver en [2], por tanto* $([0,\infty), \mathbb{R}^n, \phi)$ *es un sistema dinámico. Además dado* $x_0 \in D$ *fijo tenemos que* $\phi_{x_0} : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ *describe la trayectoria del sistema. Finalmente mostremos que* $\phi(t,x) = e^{At}x$ *genera la ecuación diferencial lineal sobre* $\mathbb{R}^n$*, en efecto* $f(x) = \frac{d}{dt}\phi(t,x)\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}e^{At}x\big|_{t=0} = Ax$*. Por lo tanto tenemos la ecuación diferencial lineal:*

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \geqslant 0. \tag{1.3}$$

Posteriormente probaremos que el sistema (1.2) tiene una única solución, para esto definimos el siguiente concepto.

Definición 1.3. *Sea* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *con* $D \subseteq \mathbb{R}^n$*, entonces* f *es Lipschitz continuo sobre* D *si existe* $L > 0$ *tal que*

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant L\|x - y\| \quad \textit{para todo} \quad x, y \in D \tag{1.4}$$

y si $L \in [0,1)$ *entonces diremos que* f *es una contracción.*

Teorema 1.1. *Sea* $\mathcal{X}$ *un espacio de Banach con norma* $\|\cdot\| : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$*, sea* $\mathcal{S}$ *un subconjunto cerrado de* $\mathcal{X}$ *y sea* $T : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$*. supongamos que existe una constante* $\rho \in [0,1)$ *tal que*

$$\|T(x) - T(y)\| \leqslant \rho\|x - y\| \quad \textit{para todo } x, y \in \mathcal{S}$$

entonces existe un único $x^* \in \mathcal{S}$ *tal que* $T(x^*) = x^*$

Demostración. Tomemos un vector arbitrario $x_1 \in \mathcal{S}$ y definamos la sucesión $\{x_k\}$ dado por $x_{k+1} = T(x_k)$. Como T es una función de $\mathcal{S}$ en $\mathcal{S}$, $x_k \in \mathcal{S}$ para todo $k \geqslant 1$. El primer paso de la demostración es mostrar que la sucesión $\{x_k\}$ es de Cauchy, en efecto

$$\begin{aligned}
\big\|x_{k+1} - x_k\big\| &= \big\|T(x_k) - T(x_{k-1})\big\| \\
&\leqslant \rho\big\|x_k - x_{k-1}\big\| \\
&= \rho\big\|T(x_{k-1}) - T(x_{k-2})\big\| \\
&\leqslant \rho^2\big\|x_{k-1} - x_{k-2}\big\| \\
&\ \vdots \\
&\leqslant \rho^{k-1}\big\|x_2 - x_1\big\|.
\end{aligned}$$

Se sigue que:

$$\begin{aligned}\|x_{k+r} - x_k\| &\leqslant \|x_{k+r} - x_{k+r-1}\| + \|x_{k+r-1} - x_{k+r-2}\| + \ldots + \|x_{k+1} - x_k\| \\ &\leqslant (\rho^{k+r-2} + \rho^{k+r-3} + \cdots + \rho^{k-1})\|x_2 - x_1\| \\ &\leqslant \frac{\rho^{k-1}}{1-\rho}\|x_2 - x_1\|.\end{aligned}$$

El lado derecho tiende a cero cuando $k \to \infty$. Por lo tanto, la sucesión es de Cauchy. Como $\mathcal{X}$ es un espacio de Banach, $x_k \to x^* \in \mathcal{X}$ cuando $k \to \infty$. Además, como $\mathcal{S}$ es cerrado, en particular $x^* \in \mathcal{S}$. Ahora mostraremos que $x^* = T(x^*)$, para cualquier $x_k = T(x_{k-1})$ tenemos que

$$\begin{aligned}\|x^* - T(x^*)\| &= \|x^* - x_k\| + \|x_k - T(x^*)\| \\ &\leqslant \|x^* - x_k\| + \rho\|x_{k-1} - x^*\|.\end{aligned}$$

Eligiendo k suficientemente grande en el lado derecho de la desigualdad se puede hacerse arbitrariamente pequeño. Así tenemos que $\|x^* - T(x^*)\| = 0$ es decir que $x^* = T(x^*)$. Falta probar que x^* es el único punto fijo de T en $\mathcal{S}$. Supongamos que existen dos puntos fijos x^* y y^*. Entonces

$$\begin{aligned}\|x^* - y^*\| &= \|T(x^*) - T(y^*)\| \\ &\leqslant \rho\|x^* - y^*\|.\end{aligned}$$

Como $\rho < 1$, necesariamente $x^* = y^*$. □

Como un Sistema Dinámico define un sistema de ecuaciones diferenciales. Es decir un sistema dinámico puede venir formulado por un sistema de ecuaciónes diferenciales. Por lo tanto seguidamente estudiaremos las propiedades del sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de la forma:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in I_{x_0}. \tag{1.5}$$

Donde $f : D \to \mathbb{R}^n$ *es continuo en el abierto* $D \subset \mathbb{R}^n$ *y la función* $x : I_{x_0} \to D$ *de clase* C^1 *es una solución de (1.5) sobre el intervalo* $I_{x_0} \subset \mathbb{R}$ *que contiene a* t_0*, con la condición inicial* $x(t_0) = x_0$.

Una ecuación diferencial con una condición inicial puede tener varias soluciones como ilustramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2. *Consideremos el siguiente sistema no lineal dado por:*

$$\dot{x}(t) = 3x(t)^{2/3}, \quad x(0) = 0, \quad t \geqslant 0$$

Este sistema tiene dos soluciones dado por $x(t) = t^3$ *y* $x(t) = 0$. *Notemos que la función* $f(x) = 3x^{2/3}$ *es continuo en* $x = 0$, *pero no es Lipchitz continua en* $x = 0$.

Por lo tanto es claro que la condición de continuidad de f *no es suficiente para asegurar la unicidad de la solución de (1.5). En el siguiente teorema vamos a utilizar una condición que garantiza la exitencia y la unicidad de la solución de (1.5).*

Antes de la demostración notemos que si x *es una solución de (1.5), entonces por el segundo teorema fundamental del cálculo tenemos:*

$$\int_{t_0}^{t} f(x(s))\, ds = \int_{t_0}^{t} \dot{x}(s)\, ds = x(t) - x(t_0) \tag{1.6}$$

entonces

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x(s))\, ds. \tag{1.7}$$

Reciprocamente, si x *es una solución de la ecuación integral*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s))\, ds \tag{1.8}$$

entonces $x(t_0) = x_0$ *y según el primer teorema fundamental del cálculo tenemos:*

$$\dot{x}(t) = f(x(t)). \tag{1.9}$$

Por lo tanto esto quiere decir que hallar una solución de (1.5) es equivalente a hallar una solución de la ecuación integral $x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x(s))\, ds$.

En el siguiente teorema que viene a continuación consideraremos el espacio de funciones continuas $C([t_0, \tau])$ *con la norma del máximo.*

Teorema 1.2. *Consideremos el sistema no lineal (1.5). Supongamos que* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *es Lipchitz continuo sobre* D, *entonces para todo* $x_0 \in D$, *existe* $\tau \in (t_0, t_1)$ *tal que (1.5) tiene una única solución* $x : [t_0, \tau] \to \mathbb{R}^n$.

Demostración. Sea $r > 0$ tal que $B_r[x_0] \subseteq D$ donde $B_r[x_0] = \{x \in D : \quad \|x - x_0\| \leqslant r\}$ observar la figura (1.1), como la norma $\|\cdot\|$ definida en $\mathbb{R}^n$ es continua y f es continua sobre el compacto $B_r[x_0]$, entonces existe $M = \max\{\|f(x)\| : \ x \in B_r[x_0]\}$.

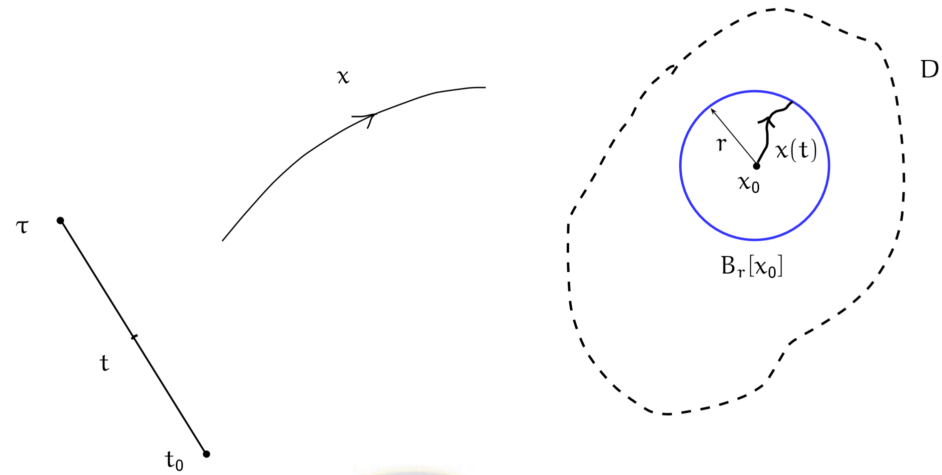

Figura 1.1:

$$\text{Sea} \quad S = \Big\{ x \in C[t_0, \tau] : \ \|x - x_0\| \leqslant r, \ \ x(t_0) = x_0, \ \ t \in [t_0, \tau] \Big\}$$

donde $\tau = t_0 + \delta$. Sea $P : C[t_0, \tau] \to C[t_0, \tau]$ dado por:

$$(Px)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s))\, ds, \qquad t \in [t_0, \tau] \tag{1.10}$$

Como $f : D \to \mathbb{R}^n$ es Lipchitz continuo sobre D y $\|x(t) - x_0\| \leqslant r$, $\ t \in [t_0, \tau]$, resulta que para cada $x \in S$ y $t \in [t_0, \tau]$

$$\begin{aligned}
\Big\|(Px)(t) - x_0\Big\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} f(x(s))\, ds \right\| \\
&= \left\| \int_{t_0}^{t} \big[f(x(s)) - f(x_0) + f(x_0) \big]\, ds \right\| \\
&\leqslant \int_{t_0}^{t} [\|f(x(s)) - f(x_0)\| + \|f(x_0)\|]\, ds \\
&\leqslant \int_{t_0}^{t} [L\|x(s) - x_0\| + \alpha]\, ds \\
&\leqslant \int_{t_0}^{t} (Lr + \alpha)\, ds \\
&= (t - t_0)(Lr + \alpha) \\
&\leqslant (\tau - t_0)(Lr + \alpha),
\end{aligned}$$

donde $L > 0$ es la constante de Lipchitz y $\alpha = \|f(x_0)\|$. Como $Px - x_0$ está acotado, entonces tomamos la norma definida por:

$$\|Px - x_0\| = \max_{t \in [t_0, \tau]} \|(Px)(t) - x_0\|$$

entonces

$$\|Px - x_0\| = \max_{t\in[t_0,\tau]} \|(Px)(t) - x_0\| \leqslant (\tau - t_0)(Lr + \alpha)\,.$$

Ahora, haciendo $\tau - t_0 \leqslant \frac{r}{Lr+\alpha}$ tenemos que $\|Px - x_0\| \leqslant r$ y por lo tanto $P : S \to S$.
Ahora vamos a probar que $P : S \to S$ es una contracción, sean x y $y \in S$ tal que $x(t)$, $y(t) \in B_r[x_0]$ para todo $t \in [t_0, \tau]$, entonces como

$$(Px)(t) - (Py)(t) = \int_{t_0}^{t} [f(x(s)) - f(y(s))]\, ds\,,$$

entonces

$$\begin{aligned}
\|(Px)(t) - (Py)(t)\| &\leqslant \int_{t_0}^{t} \|f(x(s)) - f(y(s))\|\, ds \\
&\leqslant \int_{t_0}^{t} L\|x(s) - y(s)\|\, ds \\
&\leqslant L\|x - y\| \int_{t_0}^{t} ds \\
&= L(t - t_0)\|x - y\| \\
&\leqslant \rho\|x - y\|
\end{aligned}$$

donde $\|x - y\| = \max_{t\in[t_0,\tau]} \|x(t) - y(t)\|$ y $L(t - t_0) \leqslant L(\tau - t_0) \leqslant \rho$.
Entonces

$$\|Px - Py\| = \max_{t\in[t_0,\tau]} \|(Px)(t) - (Py)(t)\| \leqslant \rho\|x - y\|$$

Haciendo $(\tau - t_0) \leqslant \rho/L$ y $\rho < 1$ tenemos que $P : S \to S$ es una contracción. Entonces para $\tau - t_0 \leqslant \min\left\{t_1 - t_0, \dfrac{r}{Lr + \alpha}, \dfrac{\rho}{L}\right\}$ y aplicando el teorema (1.1), tenemos que (1.5) tiene una única solución en S.

Finalmente, nos falta probar que la solución $x(t)$ de (1.5) tiene una única solución en $C[t_0, \tau]$.

Sea $x \in C[t_0, \tau]$ tal que satisface (1.10). Como $x(t_0) = x_0 \in B_r[x_0]$ y x es continuo sobre $[t_0, \tau]$, entonces $x(t) \in B_r[x_0]$ para todo $t \in [t_0, \tau]$. En efecto supongamos lo contrario, es decir que existe $\widehat{\tau} \in (t_0, \tau)$ tal que $x(\widehat{\tau}) \notin B_r[x_0]$, entonces $\|x(\widehat{\tau}) - x_0\| > r$.

Como $\|x(t_0) - x_0\| = 0$, entonces existe $\tau^* < \widehat{\tau} < \tau$ tal que $\|x(t) - x_0\| < r$ para todo $t \in [t_0, \tau^*)$ y $\|x(\tau^*) - x_0\| = r$, tal como se muestra en la figura (1.2).

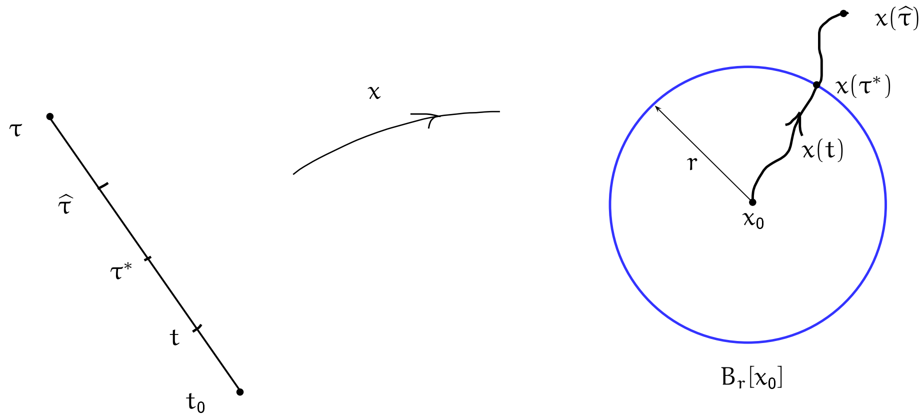

Figura 1.2:

Luego, para todo $t \leqslant \tau^*$ tenemos

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_0\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} f(x(s))\, ds \right\| \\ &= \left\| \int_{t_0}^{t} [f(x(s)) - f(x_0) + f(x_0)]\, ds \right\| \\ &\leqslant \int_{t_0}^{t} L\|x(s) - x_0\|\, ds + \alpha(t - t_0) \\ &\leqslant (t - t_0)(Lr + \alpha) \\ &\leqslant (\tau^* - t_0)(Lr + \alpha) \end{aligned}$$

en particular para $t = \tau^*$ tenemos que $r = \|x(\tau^*) - x_0\| \leqslant (\tau^* - t_0)(Lr + \alpha)$. Por lo tanto, $\tau^* - t_0 \geqslant \frac{r}{Lr+\alpha} \geqslant \tau - t_0$, entonces $\tau^* \geqslant \tau$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, si $x \in C[t_0, \tau]$ y satisface (1.5) tal que $\tau - t_0 \leqslant \min\{t_1 - t_0, \frac{r}{Lr+\alpha}, \frac{\rho}{L}\}$, entonces $x \in S$. Asi toda solución en $C[t_0, \tau]$ debe estar en S. En consecuencia, unicidad de la solución de (1.5) en S implica unicidad de la solución de (1.5) en $C[t_0, \tau]$. □

Ejemplo 1.3. *Consideremos el siguiente sistema no lineal dado por:*

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = 0. \tag{1.11}$$

Mostraremos que la función $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x(t)) = x^2(t)$, *es lipchitz continuo sobre* $S = \{x \in C[0, \tau] : |x(t)| \leqslant 1, x(0) = 0, t \in [0, \tau]\} \subset D$. *En efecto;*

$$\begin{aligned} |f(x(t)) - f(y(t))| &= |x^2(t) - y^2(t)| \qquad (1.12) \\ &= |x(t) + y(t)||x(t) - y(t)| \qquad (1.13) \\ &\leqslant 2|x(t) - y(t)| \qquad (1.14) \end{aligned}$$

Por lo tanto observando el Teorema (1.2) tenemos que la constante de Lipchitz es $L = 2$ *y* $r = 1$. *Si* $\rho = \frac{1}{2}$, *entonces* $\tau \leqslant \text{mín}\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\}$, *luego podemos tomar* $\tau = \frac{1}{4}$. *Así por el Teorema (1.2), existe una única solución* $x : [0, \frac{1}{4}] \to \mathbb{R}$ *definida sobre* $[0, \frac{1}{4}]$ *de (1.11).*

Hasta el momento hemos mostrado que con las condiciones de Lipschitz continuo, el sistema no lineal (1.5) garantiza la unicidad de la solución en el intervalo cerrado $[t_0, \tau]$. *Seguidamente consideraremos la posibilidad de extender la solución* $x : [t_0, \tau] \to D$ *de (1.5) para un intervalo mayor. La idea es como sigue, como la solución del sistema no lineal (1.5) tiene una solución única en el intervalo* $[t_0, \tau]$, *entonces podemos aplicar el Teorema (1.2) con la condición inicial* $x(\tau)$, *luego repetir el proceso hasta lograr una solución máxima. Por lo tanto, la solución va a existir en el intervalo semiabierto* $[t_0, \tau_{\text{máx}})$, *y análogamente para* $(\tau_{\text{mín}}, t_0]$.

Teorema 1.3. *Consideremos el sistema no lineal (1.5). Asumimos que* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *es Lipschitz continua sobre* D. *Además, sea* $x(t)$ *la solución de (1.5) sobre el intervalo maximal* $I_{x_0} = [0, \tau_{\text{máx}})$ *con* $\tau_{\text{máx}} < \infty$. *Entonces dado cualquier conjunto compacto* $D_c \subset D$, *existe* $t \in I_{x_0}$ *tal que* $x(t) \notin D_c$.

Demostración. Sea $x(t)$ la solución de (1.5) definida en $I_{x_0} = [0, \tau_{\text{máx}})$ con $\tau_{\text{máx}} < \infty$. Supongamos que existe un compacto $D_c \subset D$ tal que $x(t) \in D_c$ para todo $t \in I_{x_0}$. Como $f : D \to \mathbb{R}^n$ es continuo, la aplicación f es acotada en el compacto D_c, de modo que existe $\alpha > 0$ tal que $\|f(x)\| \leqslant \alpha$ para todo $x \in D_c$. Luego sean $t_0, t \in [0, \tau_{\text{máx}})$ entonces,

$$
\begin{aligned}
\|x(t) - x(t_0)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} f(x(s))\, ds \right\| \\
&\leqslant \int_{t_0}^{t} \|f(x(s))\|\, ds \\
&\leqslant \alpha(t - t_0),
\end{aligned}
$$

con esto mostramos que x es uniformemente continua sobre I_{x_0}.

Como x es uniformemente continuo sobre $I_{x_0} = [0, \tau_{\text{máx}})$, entonces x posee una extención continua $\bar{x} : [0, \tau_{\text{máx}}] \to D$ con $\bar{x}(\tau_{\text{máx}}) = \lim\limits_{r \to \tau_{\text{máx}}^-} x(r)$ luego tenemos lo siguiente

$$
\begin{aligned}
\bar{x}(\tau_{\text{máx}}) - \bar{x}(t) &= \lim_{r \to \tau_{\text{máx}}^-} x(r) - x(t) \\
&= \lim_{r \to \tau_{\text{máx}}^-} [x(r) - x(t)] \\
&= \lim_{t \to \tau_{\text{máx}}} \int_{t}^{r} f(x(s))\, ds \\
&= \int_{t}^{\tau_{\text{máx}}} f(\bar{x}(s))\, ds
\end{aligned}
$$

Entonces $\dot{x}(\tau_{máx}) = f(x(\tau_{máx}))$. En efecto,

$$\begin{aligned}\frac{\bar{x}(\tau_{máx}) - \bar{x}(t)}{\tau_{máx} - t} - f(x(\tau_{máx})) &= \frac{1}{\tau_{máx} - t}[\bar{x}(\tau_{máx}) - \bar{x}(t)] - \frac{f(x(\tau_{máx}))}{\tau_{máx} - t}\int_t^{\tau_{máx}} ds\\ &= \frac{1}{\tau_{máx} - t}\int_t^{\tau_{máx}} [f(\bar{x}(s)) - f(\bar{x}(\tau_{máx}))]\, ds\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\bar{x}(\tau_{máx}) - \bar{x}(t)}{\tau_{máx} - t} - f(x(\tau_{máx}))\right\| &\leqslant \frac{1}{\tau_{máx} - t}\int_t^{\tau_{máx}} \|f(\bar{x}(s)) - f(\bar{x}(\tau_{máx}))\|\, ds\\ &\leqslant \max_{t\leqslant s\leqslant \tau_{máx}} \|f(\bar{x}(s)) - f(\bar{x}(\tau_{máx}))\| \to 0,\end{aligned}$$

cuando $t \to \tau_{máx}$.

Luego por el Teorema (1.2) la solución $x(t)$ de (1.5) se extiende al intervalo $[0, \tau^*)$ donde $\tau^* > \tau_{máx}$. Lo cual es una contradicción al hecho de que $I_{x_0} = [0, \tau_{máx})$ es el intervalo maximal de la existencia de solución de (1.5). □

Corolario 1.1. *Consideremos el sistema no lineal (1.5). Asumimos que* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *es Lipschitz continua sobre* D. *Además, sea* $D_c \subset D$ *un conjunto compacto y supongamos* $x_0 \in D$ *y la solución* $x : [0, \tau) \to D$ *esta enteramente contenido en* D_c *entonces existe una única solución* $x : [0, \infty) \to D$ *de (1.5) para todo* $t \geqslant 0$.

Demostración. Sea $[0, \tau)$ el intervalo maximal de existencia de la solución $x(t)$ de (1.5), que esta totalmente contenido en D_c, entonces τ se extiende a ∞. En efecto supongamos lo contrario es decir que τ es finito, entonces por el Teorema (1.3) existe $t \in [0, \tau)$ tal que $x(t) \notin D_c$, lo cual es una contradicción, pués por hipótesis tenemos que $x([0, \tau)) \subset D_c$ □

1.2. Punto límite y conjunto límite

En esta sección introduciremos la noción de invarianza de un conjunto $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ *con respecto al flujo* ϕ_t *del sistema no lineal, dado por:*

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0, \infty). \tag{1.15}$$

Donde D *es un subconjunto abierto de* $\mathbb{R}^n$ *y* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *es Lipschitz continua sobre* D. *Además* $x(t)$ *es la solución de (1.15) definida en* $[0, \infty)$ *(esto se puede lograr gracias al corolario (1.1)) con la condición inicial* $x(0) = x_0$.

Definición 1.4. *La órbita positiva en el punto $x_0 \in D$ es el conjunto definido por:*

$$\mathcal{O}^+_{x_0} = \left\{x \in D : \; x = \phi(x_0, t), \;\; t \geqslant 0\right\}.$$

Definición 1.5. *Un punto $p \in D \subset \mathbb{R}^n$ es un punto límite positivo de la trayectoria $x(t) = \phi_{x_0}(t)$ de (1.15) si existe una secuencia monótona de números positivos, con $t_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$, tal que $\phi(t_n, x_0) \to p$ cuando $n \to \infty$. El conjunto de todos los puntos límites positivos es el conjunto límite positivo $\omega(x_0)$ de $x(t) = \phi_{x_0}(t)$ de (1.15).*

Definición 1.6. *Un conjunto $\mathcal{M} \subset D \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto invariante positivo con respecto al sistema no lineal (1.15). Si $\phi_t(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$ para todo $t \geqslant 0$, donde el conjunto $\phi_t(\mathcal{M})$ esta dado por: $\phi_t(\mathcal{M}) = \left\{\phi_t(x) : \; x \in \mathcal{M}\right\}$. Si $\phi_t(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ entonces diremos que $\mathcal{M}$ es invariante.*

Usaremos la notación $x(t) \to \mathcal{M}$ cuando $t \to \infty$, donde $\mathcal{M} \subset D \subset \mathbb{R}^n$, para referirnos a que para cualquier $\epsilon > 0$ existe $T > 0$ tal que dist$(x(t), \mathcal{M}) < \epsilon$ para todo $t > T$, donde dist$(p, \mathcal{M}) = \inf_{x \in \mathcal{M}} \|p - x\|$

Teorema 1.4. *Supongamos que la solución $x(t)$ de (1.15) correspondiente a una condición inicial $x(0) = x_0$ es acotada para todo $t \geqslant 0$. Entonces el conjunto límite positivo $\omega(x_0)$ de $x(t)$, es no vacío, compacto, invariante y conexo. Además, $x(t) \to \omega(x_0)$ cuando $t \to \infty$.*

Demostración. Sea $x(t)$, $t \geqslant 0$, o equivalentemente, $\phi(t, x_0)$ $t \geqslant 0$ denota la solución de (1.15) correspondiente a la condición inicial $x(0) = x_0$. Luego como $x(t)$ es acotada para todo $t \geqslant 0$, entonces toda sucesión en la órbita positiva $\mathcal{O}^+_{x_0} = \left\{\phi(t, x_0) : \quad t \in [0, \infty)\right\}$ tiene un punto de acumulación $p \in D$ cuando $t \to \infty$, y por tanto $\omega(x_0)$ es no vacío. Ahora mostraremos que $\omega(x_0)$ es acotado para esto sea $p \in \omega(x_0)$, entonces existe una sucesión $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$, con $t_0 = 0$, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x(t_n) = p$, entonces $\|\lim\limits_{n\to\infty} x(t_n)\| = \|p\|$, como $\|x(t_n)\| \leqslant \alpha$ para algún $\alpha > 0$ (pués la solución $x(t)$ de (1.15) es acotada), entonces $\|p\| < \alpha$ para todo $p \in \omega(x_0)$, así $\omega(x_0)$ es acotado. Ahora probaremos, que $\omega(x_0)$ es cerrada, para esto tomemos una sucesión $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$ contenido en $\omega(x_0)$, tal que $\lim\limits_{i\to\infty} p_i = p$, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $i \geqslant j$ entonces $\|p - p_i\| < \epsilon/2$, por otro lado como $p_i \in \omega(x_0)$ entonces existe $T > 0$ tal que $t \geqslant T$ tenemos $\|p_i - x(t)\| < \epsilon/2$. Entonces existe $\tau = \max\{T, j\}$ tal que $\|p - x(t)\| \leqslant \|p_i - x(t)\| + \|p - p_i\| < \epsilon/2 + \epsilon/2 < \epsilon$, y por tanto $p \in \omega(x_0)$, Así $\omega(x_0)$ es cerrado. Luego $\omega(x_0)$ es acotado y cerrado es decir $\omega(x_0)$ es un conjunto compacto.

Ahora mostraremos la invarianza positiva de $\omega(x_0)$. Sea $p \in \omega(x_0)$, entonces existe una sucesión $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ tal que $x(t_n) \to p$ cuando $n \to \infty$. Como la solución $x(t)$ es única para todo

$t \geqslant 0$ en (1.15), entonces $\phi(t+t_n, x_0) = \phi(t, \phi(t_n, x_0)) = \phi(t, x(t_n))$. Como ϕ es continua entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \phi(t+t_n, x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \phi(t, x(t_n)) = \phi(t, p)$, luego $\phi(t, p) \in \omega(x_0)$. Por tanto, $\phi_t(\omega(x_0)) \subseteq \omega(x_0)$, para todo $t \geqslant 0$, así $\omega(x_0)$ es invariante positivo.

A continuación demostraremos la invarianza de $\omega(x_0)$. Sea $y \in \omega(x_0)$, entonces existe una sucesión $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ tal que $\phi(t_n, x_0) \to y$ cuando $n \to \infty$, como $\phi(t, \phi(t_n - t, x_0)) = \phi(t_n, x_0)$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \phi(t, \phi(t_n - t, x_0)) = y$. Ahora, como $x(t)$ es acotada entonces existe una subsucesión $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de la sucesión $z_n = \phi(t_n - t, x_0)$, tal que $\lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k} = z$, entonces $z \in \omega(x_0)$. Luego como el flujo ϕ es continuo, entonces $\lim\limits_{k\to\infty} \phi(t, z_{n_k}) = \phi(t, \lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k}) = \phi(t, z)$. Por lo tanto $y = \phi(t, z)$, entonces $\omega(x_0) \subset \phi_t(\omega(x_0))$, $t \in [0, \infty)$. Ahora usando la invarianza de $\omega(x_0)$ tenemos $\phi_t(\omega(x_0)) = \omega(x_0)$ para todo $t \geqslant 0$, asi establecemos la invarianza del conjunto límite $\omega(x_0)$.

Ahora, mostraremos la conexidad de $\omega(x_0)$, demostraremos por contradicción. Supongamos que $\omega(x_0)$ no es conexo, entonces existen dos conjuntos cerrados no vacios $\mathcal{P}_1^+$ y $\mathcal{P}_2^+$ tal que $\mathcal{P}_1^+ \cap \mathcal{P}_2^+ = \emptyset$ y $\omega(x_0) = \mathcal{P}_1^+ \cup \mathcal{P}_2^+$. Como $\mathcal{P}_1^+$ y $\mathcal{P}_2^+$ son cerrados y disjuntos, entonces existen dos conjuntos abiertos $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ tal que $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \emptyset$, $\mathcal{P}_1^+ \subset \mathcal{S}_1$, y $\mathcal{P}_2^+ \subset \mathcal{S}_2$. Como $\mathcal{P}_1^+$ y $\mathcal{P}_2^+$ son no vacios entonces existen $p \in \mathcal{P}_1^+$ y $q \in \mathcal{P}_2^+$, lo que implica que existen sucesiones $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{\tau_k\}_{k=0}^{\infty}$ tales que $x(t_n) \to p$ cuando $n \to \infty$ y $x(\tau_k) \to p$ cuando $k \to \infty$. Luego, por la continuidad de x y el hecho de que $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \emptyset$ implica que existe una sucesión $\{\tau'_m\}_{m=0}^{\infty}$ tal que $x(\tau'_m) \notin \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, ver figura (1.3), luego como la solución $x(t)$, de (1.15) es una función acotada para todo $t \geqslant 0$, entonces existe una subsucesión $\{\tau'_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{\tau'_m\}_{m=0}^{\infty}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x(\tau'_{m_k}) = \widehat{p} \notin \omega(x_0)$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $\omega(x_0)$ es un conjunto conexo.

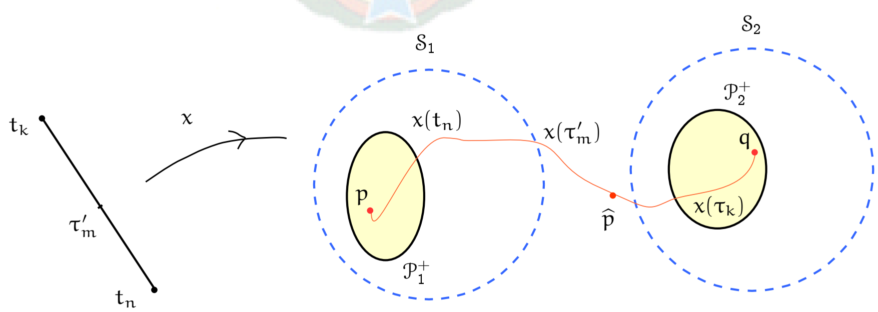

Figura 1.3:

Finalmente, probaremos que $x(t) \to \omega(x_0)$ cuando $t \to \infty$, demostraremos por contradicción, supongamos que $x(t) \not\to \omega(x_0)$ cuando $t \to \infty$ entonces existe una sucesión $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$, con $t_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$, tal que $\operatorname{dist}(x(t_n), \omega(x_0)) > \epsilon$ Como

$$\operatorname{dist}(x(t_n), \omega(x_0)) = \inf_{p \in \omega(x_0)} \|x(t_n) - p\| \tag{1.16}$$

entonces,

$$\|x(t_n) - p\| \geqslant \inf_{p \in \omega(x_0)} \|x(t_n) - p\| > \epsilon, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.17}$$

luego como $x(t)$ es una sucesión acotada para todo $t \geqslant 0$, entonces la sucesión $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ contiene una subsucesión $\{t_n^*\}_{n=0}^{\infty}$ tal que $x(t_n^*) \to p^*$, entonces $p^* \in \omega(x_0)$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $x(t) \to \omega(x_0)$ cuando $t \to \infty$. □

Ejemplo 1.4. *Consideremos el siguiente sistema no lineal*

$$\dot{x}_1(t) = -x_2(t) + x_1(t)[1 - x_1^2(t) - x_2^2(t)], \quad x_1(0) = x_{10}, \tag{1.18}$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_2(t)[1 - x_1^2(t) - x_2^2(t)], \quad x_2(0) = x_{20}, . \tag{1.19}$$

Reescribiendo (1.18) y (1.19) en terminos de coordenadas polares tenemos:

$$x_1(t) = r(t)\cos\theta, \qquad x_2(t) = r(t)\sin\theta. \tag{1.20}$$

Entonces

$$x_1^2 + x_2^2 = r^2 \quad y \quad \theta = \tan^{-1}(\frac{x_2}{x_1}) \tag{1.21}$$

derivando (1.21) se tiene;

$$x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = r\dot{r}, \qquad x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1 = r^2\dot{\theta}. \tag{1.22}$$

Multiplicando (1.18) por x y (1.19) por y y sumando obtenemos;

$$r\dot{r} = r^2(1 - r^2). \tag{1.23}$$

Multiplicando (1.18) por y y (1.19) por x y restando obtenemos;

$$r^2\dot{\theta} = r^2.$$

Luego supongamos que $r > 0$ entonces;

$$\dot{r} = r(1 - r^2), \qquad \dot{\theta} = 1. \tag{1.24}$$

Resolviendo obtenemos;

$$r = \frac{1}{\sqrt{1+Ke^{-2t}}}, \qquad \theta = t + t_0. \tag{1.25}$$

R eeplazando (1.25) en (1.20);

$$x_1(t) = \frac{\cos(t+t_0)}{\sqrt{1+Ke^{-2t}}}, \qquad x_2(t) = \frac{\sin(t+t_0)}{\sqrt{1+Ke^{-2t}}} \tag{1.26}$$

Interpretación geometrica:

Si $K = 0$ *entonces tenemos que* $r = 1$ *y* $\theta = t + t_0$ *lo cual describe la trayectoria circular* $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$.

Si $K < 0$ *entonces* $r > 1$ *y* $r \to 1$ *cuando* $t \to \infty$

Si $K > 0$ *entonces* $r < 1$ *y* $r \to 1$ *cuando* $t \to \infty$

Por lo tanto la solución de (1.18) en (1.19) esta acotada y convergen a C, *tal como se muestra en la figura (1.4)*

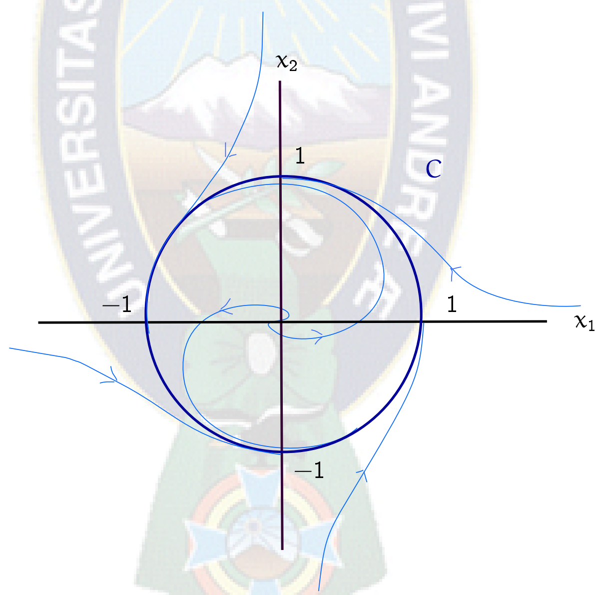

Figura 1.4:

CAPÍTULO 2

Estabilidad en Sistemas No Lineales

En este capítulo desarrollaremos en detalle todo los resultados sobre la estabilidad según Lyapunov. Específicamente, enfatizar los resultados que garantizan la estabilidad de sistemas no lineales alrededor de puntos de equilibrio, tanto a nivel local como global, tal como se muestra a continuación.

2.1. Estabilidad según Lyapunov

Definición 2.1. *Dado un campo* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *y* D *abierto en* $\mathbb{R}^n$ *diremos que* $x_0 \in D$ *es un punto de equilibrio del campo* f *si* $f(x_0) = 0$.

Consideremos el siguiente sistema no lineal

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad t \in I_{x_o}, \tag{2.1}$$

donde $f : D \to \mathbb{R}^n$ *es Lipchitz continuo sobre* $D \subset \mathbb{R}^n$ *que contiene al origen, con la condición inicial* $x(0) = x_0$*, luego por el teorema (1.2) existe* $\tau > 0$ *tal que (2.1) tiene una única solución* $x : I_{x_o} \to D$*, donde* $I_{x_o} = [0, \tau]$.

Observación 2.1. *Si asumimos que* $f(0) = 0$ *y definimos* $x(t) \equiv 0$ $(x(t) = 0$ *para todo* $t \geqslant 0)$*, observamos que* $x(t) \equiv 0$ *satisface (2.1), entonces* $x(t) \equiv 0$ *es una solución de (2.1). Además la solución cero cumple la definición (2.1), entonces la solución* $x(t) \equiv 0$ *se llamará solución de equilibrio.*

Observación 2.2. *Estudiaremos estabilidad en la solución* $x(t) \equiv 0$ *de (2.1) donde* $t \in I_{x_o} = [0, \infty)$ *(esto por el corolario (1.1)). Si la solución de equilibrio fuese distinto de cero, es decir* $x(t) = x_1$ *para todo* $t \geqslant 0$, *donde* $x_1 \neq 0$ *entonces definimos* $y = x - x_1$ *y trabajamos con la ecuación* $\dot{y} = g(y)$, *donde* $g(y) = f(y + x_1)$ *que tiene un punto de equilibrio en el origen. Entonces es suficiente estudiar estabilidad en la solución* $x(t) \equiv 0$ *de (2.1).*

Definición 2.2. *Consideremos el sistema no lineal (2.1) y definimos los siguientes conceptos.*

(i) *La solución cero* $x(t) \equiv 0$ *de (2.1) es Lyapunov estable si y sólo si para todo* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $|x(0)| < \delta$, *entonces* $|x(t)| < \varepsilon$, $t \geqslant 0$. *(ver figura 2.1)*

(ii) *La solución* $x(t) \equiv 0$ *de (2.1) es (localmente) asintóticamente estable si y sólo si es Lyapunov estable y existe* $\delta > 0$ *tal que si* $|x(0)| < \delta$, *entonces* $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = 0$.

(iii) *La solución* $x(t) \equiv 0$ *de (2.1) es global asintóticamente estable* (G.A.E) *si y sólo si es Lyapunov estable y para todo* $x(0) \in \mathbb{R}^n$, $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = 0$.

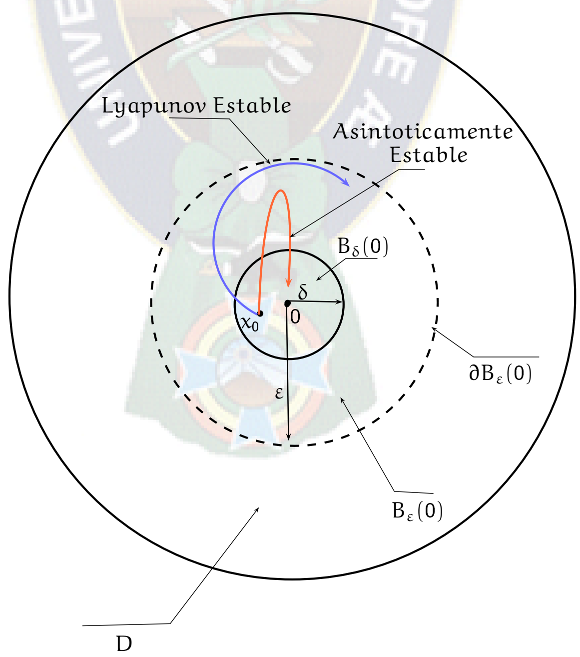

Figura 2.1:

Para el siguiente resultado consideremos una función $V : D \to \mathbb{R}$ *de clase* C^1 *con* D *abierto en* $\mathbb{R}^n$ *que contiene al cero. La derivada a lo largo del flujo* $\phi(t, x)$ *en* $t = 0$ *es* *dado por* $\frac{d}{dt}V(\phi(t,x))\big|_{t=0} = V'(x)f(x)$, *el cual denotaremos por* $\dot{V}(x)$, *es decir que podemos escribir como* $\dot{V}(x) = V'(x)f(x)$. *Si* $\dot{V}(x)$ *es negativo, entonces* $V(x)$ *es decreciente a lo largo de la solución* $x(t)$ *de (2.1).*

Teorema 2.1 (Teorema de Lyapunov). *Consideremos el sistema no lineal (2.1) y supongamos que existe una función* $V : D \to \mathbb{R}$ *de clase* C^1 *tal que*

$$V(0) = 0 \tag{2.2}$$

$$V(x) > 0, \quad x \in D\,,\ x \neq 0 \tag{2.3}$$

$$V'(x)f(x) \leqslant 0, \quad x \in D. \tag{2.4}$$

Entonces la solución cero de (2.1) es Lyapunov estable. Además si

$$V'(x)f(x) < 0 \quad x \in D, \ x \neq 0. \tag{2.5}$$

Entonces la solución $x(t) \equiv 0$ *de (2.1) es asintóticamente estable.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(0) = \{x \in D : \|x\| < \epsilon\} \subseteq D$. Como la frontera de $B_\epsilon(0)$, $(\partial B_\varepsilon(0))$ es compacto y V es continua, entonces $V(\partial B_\varepsilon(0))$ es compacto, por tanto existe $\alpha = \min_{x\in\partial B_\varepsilon(0)} V(x)$.

Notemos que $\alpha > 0$, pues $0 \notin \partial B_\varepsilon(0)$ y $V(x) > 0$ para $x \in D$, $x \neq 0$. Sea $\beta \in (0, \alpha)$ y definimos el conjunto $D_\beta = \left\{x \in D : \ V(x) \leqslant \beta\right\}$. Notemos que $D_\beta \subset B_\varepsilon(0)$ (ver figura 2.2). En efecto si suponemos que $D_\beta \nsubseteq B_\varepsilon(0)$, entonces existe $p \in D_\beta$ y $p \in \partial B_\varepsilon(0)$ y por tanto $V(p) \geqslant \alpha > \beta$ lo cual es una contradicción.

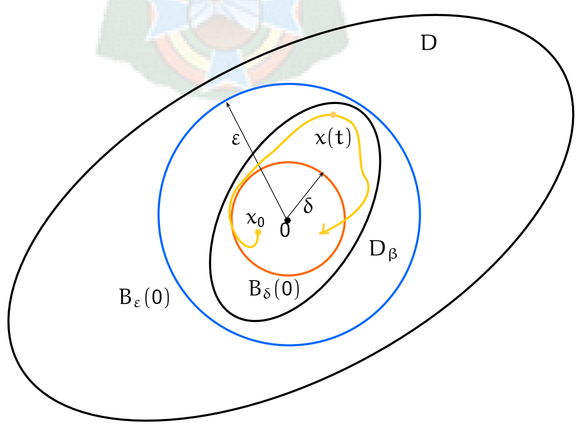

Figura 2.2:

Por otra parte, como $\dot{V}(x) \leqslant 0$, se tiene

$$V(x(t)) - V(x(0)) = \int_0^t V'(x(s))f(x(s))\,ds \leqslant 0, \quad t \geqslant 0,$$

por tanto si $x(0) \in D_\beta$ entonces $V(x(t)) \leqslant V(x(0)) \leqslant \beta$, para todo $t \geqslant 0$. Además el conjunto D_β es compacto. En efecto D_β es acotado (pues $D_\beta \subset B_\varepsilon(0)$) y es cerrado por que $D_\beta^c = \{x \in D : \ V(x) > \beta\}$ es abierto (pues si, $x \in D_\beta^c$ entonces $V(x) > \beta$ entonces por continuidad de V existe $\delta > 0$ tal que $z \in B(x, \delta)$ con $V(z) > \beta$, por tanto existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset D_\beta^c$). Luego por el corolario (1.1) tenemos que para $x(0) \in D_\beta$, (2.1) tiene una única solución definido para todo $t \geqslant 0$.

Como V es continua y $V(0) = 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $V(x) < \beta$, para $x \in B_\delta(0)$. Sea $x(t)$, la solución de (2.1) con la condición inicial $x(0) \neq 0$ tal que $|x(0)| < \delta$. Como $B_\delta(0) \subset D_\beta \subset B_\varepsilon(0) \subseteq D$ y $V'(x)f(x) \leqslant 0$, $x \in D$, entonces para todo $x(0) \in B_\delta(0)$

$$V(x(t)) \leqslant V(x(0)) < \beta, \quad t \geqslant 0.$$

Como $V(x) \geqslant \alpha$ para $x \in \partial B_\epsilon(0)$, y $\beta \in (0, \alpha)$ entonces $x(t) \notin \partial B_\varepsilon(0)$, para todo $t \geqslant 0$. Por tanto para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x(0)| < \delta$, entonces $|x(t)| < \varepsilon$, para todo $t \geqslant 0$. Por tanto hemos probado que la solución $x(t) \equiv 0$ es Lyapunov estable.

Seguidamente probaremos que la solución $x(t) \equiv 0$ de (2.1) es asintóticamente estable. Como $\dot{V}(x) < 0$, $x \in D$, $x \neq 0$, entonces la solución $x(t) \equiv 0$ de (2.1) es Lyapunov estable, ahora lo que nos falta demostrar es que $\lim\limits_{t\to\infty}(x(t)) = 0$. Demostraremos por contradicción, supongamos que $\lim\limits_{t\to\infty}(x(t)) = y$ con $y \neq 0$. Como la solución $x(t) \equiv 0$ de (2.1) es Lyapunov estable entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, si $x(0) \in B_\delta(0)$ implica que $x(t) \in B_\varepsilon(0)$, para todo $t \geqslant 0$. Como V es continua entonces $\lim\limits_{t\to\infty} V(x(t)) = V(y) > 0$. Por otro lado como $V(x(t))$ es decreciente y acotado inferiormente por cero (esto es por (2.3) y (2.5)) entonces $\lim\limits_{t\to\infty} V(x(t)) = \inf\limits_{t\geqslant 0} V(x(t)) = L$, luego por definición de ínfimo tenemos que existe $L > 0$ tal que $V(x(t)) \geqslant L > 0$, $t \geqslant 0$. Por otro lado por la continuidad de V, tenemos que existe $\delta' > 0$ tal que $V(x) < L$ para $x \in B_{\delta'}(0)$, lo cual implica que $x(t) \notin B_{\delta'}(0)$, para todo $t \geqslant 0$.

Sea $L_1 = \min_{\delta' \leqslant \|x\| \leqslant \varepsilon} -V'(x)f(x)$, entonces $-V'(x)f(x) \geqslant L_1$, $\delta' \leqslant \|x\| \leqslant \varepsilon$ (ver figura 2.3) por tanto tenemos lo siguiente,

$$V(x(t)) - V(x(0)) = \int_0^t V'(x(s))f(x(s))\,ds \leqslant -L_1 t$$

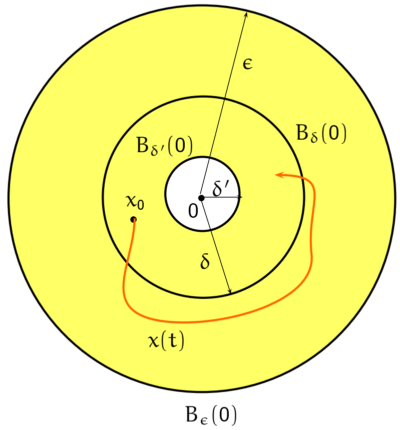

Figura 2.3:

Luego para $x(0) \in B_\delta(0)$ tenemos,

$$V(x(t)) \leqslant V(x(0)) - L_1 t$$

luego para $t \in (0, \infty)$ tal que $t > \frac{V(x(0))-L}{L_1} \geqslant 0$, tenemos $V(x(t)) \leqslant V(x(0)) - L_1 t < L$ lo cual es una contradicción por tanto la solución $x(t) \equiv 0$ de $(1,1)$ es asintóticamente estable. □

Observación 2.3. *La función $V : D \to \mathbb{R}$ de clase C^1 que cumple (3.2),(2.3) y (2.4) se denomina función de Lyapunov. El teorema de Lyapunov presenta dos desventajas. La primera es que no hay un método sistemático para hallar una función de Lyapunov, por lo tanto hay que proponer una función candidata a función de Lyapunov y probar si la misma cumple las hipótesis del teorema de Lyapunov. La segunda es que el teorema de Lyapunov sólo brinda condiciones suficientes por lo tanto el hecho de no encontrar una función candidata a Lyapunov que satisfaga las condiciones del teorema de Lyapunov no significa que la solución cero $x(t) \equiv 0$ sea no estable o no asintóticamente estable.*

Ejemplo 2.1. *Consideremos el siguiente sistema no lineal dado por:*

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -\operatorname{sen}(x_1(t))$$

Sea la función definida por:

$$V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x_1, x_2) \mapsto \frac{x_2^2}{2} + 1 - \cos(x_1),$$

podemos observar que V es una función de Lyapunov. En efecto,

- $V(0,0) = 0$,
- $V(x_1, x_2) = \dfrac{x_2^2}{2} + 1 - \cos(x_1) > 0$, *para todo* $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 - \{0, 0\}$,
- $\dot{V}(x_1, x_2) = V'(x_1, x_2) \cdot f(x_1, x_2) = x_2 \operatorname{sen} x_1 + (-x_2 \operatorname{sen} x_1) = 0$,

entonces por el teorema (2.1) tenemos que la solución $(x_1(t), x_2(t)) \equiv (0, 0)$ *es Liapunov estable.*

Ejemplo 2.2. *consideremos el sistema no lineal dado por:*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_2(t) - x_1^3(t) \\ \dot{x}_1(t) &= x_1(t) - x_2^3(t) \end{aligned}$$

sea la función definida por:

$$\begin{aligned} V : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) &\mapsto x_1^2 + x_2^2, \end{aligned}$$

entonces podemos observar que V *es una función de Lyapunov. En efecto:*

- $V(0,0) = 0$,
- $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 > 0$ *para todo* $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$,
- *además*

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= V'(x_1, x_2) \cdot f(x_1, x_2) \\ &= 2x_1(-x_2 - x_1^3) + 2x_2(x_1 - x_2^3) \\ &= -2x_1x_2 - 2x_1^4 + 2x_1x_2 - 2x_2^4 \\ &= -2x_1^4 - 2x_2^4 < 0 \quad \text{para todo } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}. \end{aligned}$$

Entonces por el teorema (2.1) tenemos que la solución $(x_1(t), x_2(t)) \equiv (0, 0)$ *es asintóticamente estable*

2.2. Dominio de atracción y estabilidad global

Definición 2.3. *Supongamos que la solución cero* $x(t) \equiv 0$ *de (2.1) es asintóticamente estable. Entonces el dominio de atracción* $D_0 \subset D$ *de (2.1) es el conjunto dado por:*

$$D_0 = \left\{ x_0 \in D : \text{ si } x(0) = x_0 \text{ entonces } \lim_{t \to \infty} x(t) = 0 \right\}$$

En el teorema (2.1) sabemos que si existe una función de Lyapunov que satisface la estabilidad asintótica en un dominio D *y si* $D_\beta = \{x \in D : \ V(x) \leqslant \beta\}$ *esta acotado, entonces toda trayectoria que comienza en* D_β *permanece en* D_β *y tiende al origen cuando* $t \to \infty$*. Por lo tanto* D_β *es una estimación como dominio de atracción.*

Queremos saber bajo que condiciones el dominio de atracción es todo el espacio $\mathbb{R}^n$*. Esto será así si podemos probar que para todo* $x \in \mathbb{R}^n$*, la solución de (2.1) tiende al origen cuando* $t \to \infty$*, sin importar cuan grande es* $\|x\|$*, si un punto de equilibrio asintóticamente estable tiene esta propiedad se dice que es globalmente asintóticamente estable* (G.A.E)*. Recordando en la demostración del teorema (2.1) vemos que se puede probar que la solución cero* $x(t) \equiv 0$ *de (2.1) es* (G.A.E)*, si se puede asegurar que para cada punto* $x \in \mathbb{R}^n$ *puede incluirse en el interior de un conjunto acotado* D_β*.*

Teorema 2.2. *Consideremos el sistema no lineal (2.1) y supongamos que existe una función* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *de clase* C^1 *tal que:*

$$V(0) = 0, \tag{2.6}$$

$$V(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad x \neq 0, \tag{2.7}$$

$$\dot{V}(x) = V'(x) \cdot f(x) < 0, \ \ x \in \mathbb{R}^n, \quad x \neq 0, \tag{2.8}$$

$$V(x) \to \infty \quad \textit{cuando} \ \ \|x\| \to \infty. \tag{2.9}$$

entonces la solución cero $x(t) \equiv 0$ *de (2.1) es* G.A.E.

Demostración. Sean $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\beta = V(x_0)$, entonces por (2.9) existe $\epsilon > 0$ tal que $\|x\| \geqslant \epsilon$, entonces $V(x) > \beta$. Por tanto, de (2.8) tenemos que $V(x(t)) \leqslant V(x_0) = \beta$, lo cual implica que $x(t) \in B_\epsilon(0)$, para todo $t \geqslant 0$.

Seguidamente probaremos que $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$. Demostraremos por contradicción, supongamos que $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = y$ con $y \neq 0$. Como la solución $x(t) \equiv 0$ de (2.1) es Lyapunov estable (hipótesis (2.8)), entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, si $x(0) \in B_\delta(0)$ implica que $x(t) \in B_\varepsilon(0)$, para todo $t \geqslant 0$. Como V es continua entonces $\lim\limits_{t\to\infty} V(x(t)) = V(y) > 0$. Por otro lado como $V(x(t))$ es decreciente y acotado inferiormente por cero (esto es por (2.7) y (2.8)) entonces $\lim\limits_{t\to\infty} V(x(t)) = \inf\limits_{t\geqslant 0} V(x(t)) = L$, luego por definición de ínfimo tenemos que existe $L > 0$ tal que $V(x(t)) \geqslant L > 0$, $t \geqslant 0$. Por otro lado por la continuidad de V, tenemos que existe $\delta' > 0$ tal que $V(x) < L$ para $x \in B_{\delta'}(x)$, lo cual implica que $x(t) \notin B_{\delta'}(0)$. Sea $L_1 = \min_{\delta' \leqslant \|x\| \leqslant \varepsilon} -V'(x)f(x)$, entonces $-V'(x)f(x) \geqslant L_1$, $\delta' \leqslant \|x\| \leqslant \varepsilon$ por tanto tenemos lo siguiente:

$$V(x(t)) - V(x(0)) = \int_0^t V'(x(s))f(x(s))\, ds \leqslant -L_1 t$$

luego para $x(0) \in \mathbb{R}^n$ tenemos:

$$V(x(t)) \leqslant V(x(0)) - L_1 t,$$

luego para $t \in (0,\infty)$ tal que $t > \frac{V(x(0))-L}{L_1} \geqslant 0$, tenemos $V(x(t)) \leqslant V(x(0)) - L_1 t < L$ lo cual es una contradicción. Por tanto la solución $x(t) \equiv 0$ de (2.1) es G.A.E. $\square$

Nota 2.1. *La función* V *que satisface la condición (2.9) es llamado radialmente no acotado.*

Existen sistemas no lineales de la forma (2.1) donde la solución cero $x(t) \equiv 0$ *es Lyapunov estable pero no* G.A.E *como ilustramos en el siguiente ejemplo.*

Ejemplo 2.3. *Consideremos el siguiente sistema no lineal*

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{6x_1(t)}{[1+x_1^2(t)]^2} + 2x_2(t), \qquad x_1(0) = x_{10}, \quad t \geqslant 0 \tag{1'}$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{2[x_1(t)+x_2(t)]}{[1+x_1^2(t)]^2}, \qquad x_2(0) = x_{20}. \tag{2'}$$

Para examinar la estabilidad de este sistema no lineal, consideremos la función candidata de Lyapunov $V(x_1,x_2) = x_1^2/(1+x_1^2) + x_2^2$*. Notemos que* $V(0,0) = 0$ *y* $V(x_1,x_2) > 0$, $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $(x_1,x_2) \neq (0,0)$*, derivando tenemos:*

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x_1,x_2) &= \left[\frac{2x_1(1+x_1^2) - 2x_1^3}{(1+x_1^2)^2}\right]\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\
&= \frac{2x_1}{(1+x_1^2)^2}\left[-\frac{6x_1}{(1+x_1^2)^2} + 2x_2\right] - \frac{4x_2(x_1+x_2)}{(1+x_1^2)^2} \\
&= -\frac{12x_1^2}{(1+x_1^2)^4} - \frac{4x_2^2}{(1+x_1^2)^2} \\
&< 0, \quad (x_1,x_2) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \quad (x_1,x_2) \neq (0,0).
\end{aligned}$$

Entonces la solución cero $(x_1(t),x_2(t)) \equiv (0,0)$ *de* $(1')$ *y* $(2')$ *es asintóticamente estable.*

Sin embargo para demostrar que $(1')$ *y* $(2')$ *no es globalmente estable, consideremos la hipérbola* $x_2 = 2/(x_1-\sqrt{2})$ *en* $\mathbb{R}^n$*. Luego sobre la hipérbola,* $\dfrac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1}$ *es dado por:*

$$\left.\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1}\right|_{x_2=\frac{2}{x_1-\sqrt{2}}} = \left.\frac{-2(x_1+x_2)}{-6x_1+2x_2(1+x_1^2)^2}\right|_{x_2=\frac{2}{x_1-\sqrt{2}}} = -\frac{1}{2x_1^2+2\sqrt{2}\,x_1+1} \tag{$*$}$$

mientras que la pendiente de la hipérbola está dado por

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{2}{(x_1-\sqrt{2})^2} = -\frac{1}{\frac{1}{2}x_1^2 - \sqrt{2}\,x_1 + 1} \tag{$**$}$$

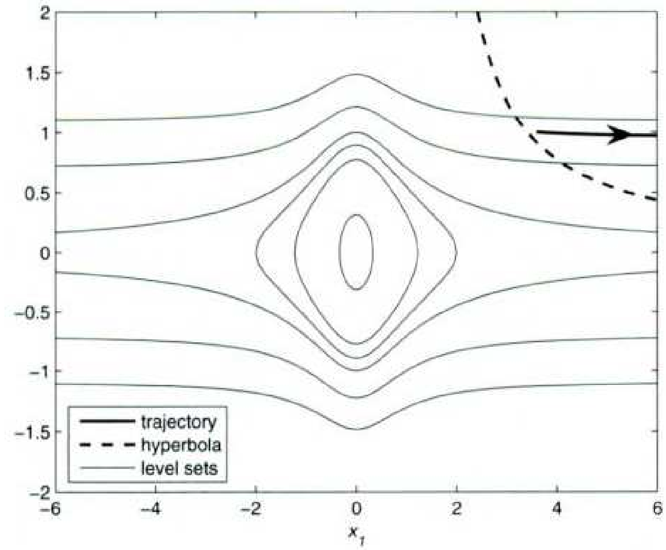

Figura 2.4:

De $(*)$ *y* $(**)$ *y para* $x_1 > \sqrt{2}$*, tenemos que;*

$$2x_1^2 + 2\sqrt{2}x_1 + 1 > \frac{1}{2}x_1^2 - \sqrt{2}x_1 + 1\,,$$

y por tanto

$$\left.\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1}\right|_{x_2=\frac{2}{x_1-\sqrt{2}}} > \frac{dx_2}{dx_1}\,,$$

Además notemos que para $x_1 > \sqrt{2}$*, se tiene que*

$$\begin{aligned}\left.\dot{x}_1\right|_{x_2=\frac{2}{x_1-\sqrt{2}}} &= -\frac{6x_1}{(1+x_1^2)^2} + \frac{4}{x_1-\sqrt{2}} \\ &= \frac{4+6\sqrt{2}x_1+2x_1^2+4x_1^4}{(1+x_1^2)^2(x_1-\sqrt{2})} \\ &> 0.\end{aligned}$$

Como en la hipérbola $\dot{x}_1 > 0$ *para* $x_1 > \sqrt{2}$*, se deduce que las trayectorias de* $(1')$ *y* $(2')$ *no puede cortar la rama de la hipérbola situada en el primer cuadrante del plano (Ver figura 2.4). Por tanto ya que las trayectorias de partida a la derecha de la hipérbola no puede llegar al origen, se deduce que la solución cero* $(x_1(t), x_2(t)) \equiv (0,0)$ *de* $(1')$ *y* $(2')$ *no es* (G.A.E).

Ejemplo 2.4. *Consideremos el siguiente sistema no lineal dado por;*

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2^3(t), \quad x_1(0) = x_{10}, \quad t \geqslant 0 \tag{2.10}$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) - x_2(t), \quad x_2(0) = x_{20}\,. \tag{2.11}$$

Para examinar la estabilidad del sistema, consideremos la función candidato a Lyapunov $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^4$*, Notemos que* $V(0,0) = 0$ *y* $V(x_1, x_2) > 0$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \neq (0,0)$. *derivando* V *tenemos:*

$$\dot{V}(x_1, x_2) = x_1\dot{x}_1 + x_2^3\dot{x}_2 = -x_1^2 - x_2^4, \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \neq (0,0).$$

Además podemos observar que V *es radialmente no acotado en* $\mathbb{R}^2$*. Lo cual implica que la solución* $(x_1(t), x_2(t)) \equiv (0,0)$ *de (2.10) y (2.11) es* (G.A.E)

Teorema 2.3. *Consideremos el sistema no lineal (2.1), supongamos que* $D_c \subset D$ *es un conjunto compacto invariante positivo con respecto a (2.1) y supongamos que existe una función* $V : D_c \to \mathbb{R}$ *de clase* C^1 *tal que* $V'(x)f(x) \leqslant 0$*. Sea* $\mathcal{R} = \left\{x \in D_c : \ V'(x)f(x) = 0\right\}$ *y sea* $\mathcal{M}$ *el conjunto más grande invariante contenido en* $\mathcal{R}$*. Si* $x(0) \in D_c$*, entonces* $x(t) \to \mathcal{M}$ *cuando* $t \to \infty$*.*

Demostración. Sea $x(t)$, para $t \geqslant 0$, una solución de (2.1) con $x(0) \in \mathcal{D}_c$ (ver figura 2.5). Como $V'(x)f(x) \leqslant 0$, entonces

$$V(x(t)) - V(x(\tau)) = \int_\tau^t V'(x(s))f(x(s))\,ds \leqslant 0, \qquad t \geqslant \tau.$$

Por tanto, $V(x(t)) \leqslant V(x(\tau))$, $t \geqslant \tau$, entonces $V(x(t))$ es una función decreciente. Como V es continuo sobre el conjunto compacto D_c entonces, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $V(x) \geqslant \beta$, $x \in D_c$, entonces existe $\gamma_{x_0} = \lim\limits_{t\to\infty} V(x(t))$.

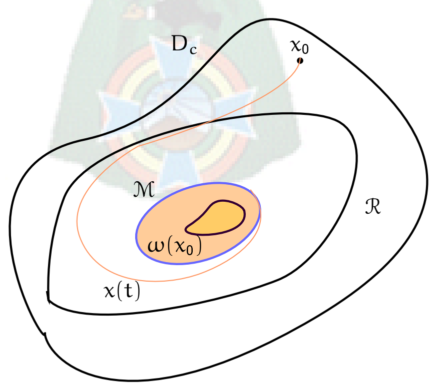

Figura 2.5:

Por otro lado, para todo $p \in \omega(x_0)$ existe una sucesión monótona creciente $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ con $t_0 = 0$, tal que $x(t_n) \to p$ cuando $n \to \infty$. Luego $V(p) = V(\lim\limits_{n\to\infty} x(t_n)) = \lim\limits_{n\to\infty} V(x(t_n)) = \gamma_{x_0}$, por tanto $V(x) = \gamma_{x_0}$, para todo $x \in \omega(x_0)$, así $\dot{V}(x) = 0$ para todo $x \in \omega(x_0)$. Como D_c es compacto e invariante positivo, tenemos que $x(t)$ es acotada para todo $t \geqslant 0$, y por lo tanto por el Teorema (1.4) tenemos que el conjunto $\omega(x_0)$ es no vacío y compacto invariante tal que $x(t) \to \omega(x_0)$ cuando $t \to \infty$.

Por tanto, como $\dot{V}(x) = V'(x)f(x) = 0$ para todo $x \in \omega(x_0)$ y $\mathcal{M}$ es el conjunto más grande invariante contenido en $\mathcal{R}$, entonces $\omega(x_0) \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{R} \subset D_c$. Finalmente, como $x(t) \to \omega(x_0)$ cuando $t \to \infty$ esto significa que para cualquier $\epsilon > 0$ existe $T > 0$ tal que $\text{dist}(x(t), \omega(x_0)) < \epsilon$ para todo $t > T$, pero la $\text{dist}(x(t), \omega(x_0)) = \text{ínf}_{p \in \omega(x_0)} \|x(t) - p\| \geqslant \text{ínf}_{p \in \mathcal{M}} \|x(t) - p\|$, entonces $\text{dist}(x(t), \mathcal{M}) < \epsilon$ luego tenemos que $x(t) \to \mathcal{M}$ cuando $t \to \infty$. $\square$

CAPÍTULO 3

Aplicaciones

3.1. Construcciones de Funciones de Lyapunov

Como vimos en el estudio de estabilidad de sistemas no lineales por el método directo de Lyapunov, es fundamental tener la función de Liapunov. Presentamos tres aproximaciones sistemáticos para construir dicha función.

El método del gradiente variable. *El método del gradiente es un método para construir funciones de Lyapunov. La idea es tratar de encontrar* $g(x)$ *tal que sea el gradiente de una función* $V : D \to \mathbb{R}$ *de clase* C^1*, donde* D *es un abierto en* $\mathbb{R}^n$*. Es decir* $g(x) = V'(x)$*, luego integrando se tendrá* $V(x) = \displaystyle\int_0^x g(s)\,ds$*, más precisamente dado un campo vectorial*

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \frac{d}{dt}\phi(t,x)\Big|_{t=0} \end{aligned} \tag{3.1}$$

entonces, $\frac{d}{dt}V(\phi(t,x))\big|_{t=0} = V'(x)f(x)$
donde

$$\begin{aligned} V' : D &\to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ x &\mapsto V'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

y $V'(x) = \left(\dfrac{\partial V}{\partial x_1}, \dfrac{\partial V}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial V}{\partial x_n}\right)$. *Luego definimos la función:*

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto g(x) = [V'(x)]^T \end{aligned}$$

entonces

$$\dot{V}(x) = V'(x)f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)\, f_i(x) \tag{3.2}$$

Luego denotando $[g(x)]^T$ *por* $g^T(x)$ *e integrando (3.2) tenemos:*

$$V(x) = \int_0^x g^T(s)\, ds = \int_0^x \sum_{i=1}^{n} g_i(s)\, ds_i. \tag{3.3}$$

Por otro lado como $g(x)$ *es gradiente de la función* V, *entonces la integral de linea es independiente del camino que une de* 0 *a* x. *En efecto consideremos* $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$h(t) = V(x(t))$$

con $x(0) = 0$ *y* $x(1) = x$ *cuya derivada es*

$$h'(t) = V'(x(t))f(x(t)).$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo a la función h *obtenemos:*

$$\begin{aligned} V(x) - V(0) &= V(x(1)) - V(x(0)) \\ &= h(1) - h(0) \\ &= \int_0^1 h'(t)\, dt \\ &= \int_0^1 V'(x(t))f(x(t))\, dt \\ &= \int_0^x g^T(s)\, ds \end{aligned}$$

Por lo tanto la integral de linea es independiente del camino que une de 0 *a* x. *En particular tomamos el camino rectilineo dado por* $s = \sigma x$, *donde* $\sigma \in [0,1]$, *entonces (3.3) podemos reescribir como*

$$V(x) = \int_0^1 g^T(\sigma x)x\, d\sigma = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} g_i(\sigma x)x_i\, d\sigma \tag{3.4}$$

El siguiente resultado muestra que $g(x)$ *es un gradiente de una función* $V : D \to \mathbb{R}$ *si y sólo si la matriz Jakobiana* $\partial g/\partial x$ *es simétrica.*

Teorema 3.1. *La función* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *es gradiente de la función* $V : D \to \mathbb{R}$ *si y sólo si*

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, \dots, n. \tag{3.5}$$

Demostración. Si $g^T(x) = V'(x)$, entonces $g_i(x) = \dfrac{\partial V}{\partial x_i}$, luego por el Teorema (A.3) (ver apéndice A), tenemos $\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i} = \dfrac{\partial g_j}{\partial x_i}$, para todo $i, j = 1, \dots, n$ así hemos probado la necesidad, seguidamente probaremos la suficiencia supongamos que $\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial g_j}{\partial x_i}$, para todo $i, j = 1, \dots, n$ y definimos $V(x)$ como la integral de linea

$$V(x) = \int_0^1 g^T(\sigma x)x \, d\sigma = \int_0^1 \sum_{j=1}^n g_j(\sigma x)x_j \, d\sigma \tag{3.6}$$

Como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g^T(\sigma x)x}{\partial x_i} &= \frac{\partial\big(g_1(\sigma x)x_1 + g_2(\sigma x)x_2 + \cdots + g_i(\sigma x)x_i + \cdots + g_n(\sigma x)x_n\big)}{\partial x_i} \\
&= \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(\sigma x)\sigma x_1 + \frac{\partial g_2}{\partial x_i}(\sigma x)\sigma x_2 + \cdots + \frac{\partial g_i}{\partial x_i}(\sigma x)\sigma x_i + g_i(\sigma x) + \cdots + \frac{\partial g_n}{\partial x_i}(\sigma x)\sigma x_n \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\sigma x)\sigma x_j + g_i(\sigma x),
\end{aligned}$$

entonces por el Teorema (A.2) (ver Apéndice A), tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x_i} &= \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\sigma x)x_j \sigma \, d\sigma + \int_0^1 g_i(\sigma x) \, d\sigma \\
&= \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\sigma x)x_j \sigma \, d\sigma + \int_0^1 g_i(\sigma x) \, d\sigma \\
&= \int_0^1 \frac{d\big(\sigma g_i(\sigma x)\big)}{d\sigma} \, d\sigma \\
&= g_i(x) \quad i = 1, \dots, n,
\end{aligned}$$

por lo tanto, $g^T(x) = V'(x)$. □

Ejemplo 3.1. *Consideremos el siguiente sistema no lineal*

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad x_1(0) = x_{10}, \quad t \geqslant 0, \tag{$*$}$$

$$\dot{x}_2(t) = -\big[x_1(t) + x_2(t)\big] - \operatorname{sen}\big(x_1(t) + x_2(t)\big), \quad x_2(0) = x_{20}. \tag{$**$}$$

En este ejemplo vamos a construir una función de Lyapunov para $(*)$ *y* $(**)$*. Consideremos* $g^T(x) = \left[a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2\right]$*, con* $a_{12} = a_{21} = \beta$ *de modo se cumpla la simetría de la ecuación (3.5). Entonces*

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= g^T(x)f(x) \\ &= (a_{11}x_1 + \beta x_2)x_2 - (\beta x_1 + a_{22}x_2)\left[(x_1 + x_2) + \operatorname{sen}(x_1 + x_2)\right]\end{aligned}$$

Tomando $a_{11} = 2\beta$*,* $a_{22} = \beta$*, y* $\beta > 0$ *resulta que*

$$\dot{V}(x) = -\beta x_1^2 - \beta(x_1 + x_2)\operatorname{sen}(x_1 + x_2) < 0,$$

para $(x_1, x_2) \in D = \left\{(x_1, x_2) : \ |x_1 + x_2| < \pi\right\}$*. Por tanto,*

$$\begin{aligned}V(x) &= \int_0^1 \left[g_1(\sigma x_1, \sigma x_2)x_1 + g_2(\sigma x_1, \sigma x_2)x_2\right] d\sigma \\ &= \int_0^1 \beta\left[2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2\right]\sigma d\sigma \\ &= \beta x_1^2 + \beta x_1x_2 + \frac{1}{2}\beta x_2^2 .\end{aligned}$$

Notemos que $V(0,0) = 0$ *y* $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\beta x_1^2 + \frac{1}{2}\beta(x_1 + x_2)^2 > 0$*, para todo* $(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *y* $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$*, por tanto* V *es una función de Lyapunov para* $(*)$ *y* $(**)$*.*

Seguidamente presentamos el método de Krasovskii para la construcción de funciones de Lyapunov, para esto demostraremos antes el siguiente teorema que es necesario para demostrar el teorema de Krasovskii.

Teorema 3.2. *Sean* $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *funciones de clase* C^1*, tal que* $f(0) = 0$*. Entonces para cada* $x \in \mathbb{R}^n$ *existe* $\alpha \in [0, 1]$ *tal que*

$$g^T(x)f(x) = g^T(x)\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha x)x . \tag{3.7}$$

Demostración. Sea $p \in \mathbb{R}^n$ por el Teorema (A.1) (ver apéndice A) tenemos que para cada $x \in \mathbb{R}^n$ existe un $\alpha \in [0, 1]$ tal que

$$g^T(p)[f(x) - f(0)] = g^T(p)\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha x)x\right].$$

Como $f(0) = 0$ (hipotesis), entonces

$$g^T(p)f(x) = g^T(p)\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha x)x\right]$$

como p es arbitrario en particular $p = x$, entonces

$$g^T(x)f(x) = g^T(x)\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha x)x\right]$$

□

Teorema 3.3 (Teorema de Krasovskii). *Sea* $x(t) \equiv 0$ *un punto de equilibrio para el sistema no lineal*

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \qquad x(0) = x_0, \ \ t \geqslant 0, \tag{3.8}$$

donde $f : D \to \mathbb{R}^n$ *es de clase* C^1 *y* D *un conjunto abierto en* $\mathbb{R}^n$ *que contiene al origen. Supongamos que existen matrices definidas positivas* $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *y* $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *tales que*

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x)\right]^T P + P\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x)\right] \leqslant -R, \ \ x \in D, \ \ x \neq 0. \tag{3.9}$$

Entonces, la solución cero $x(t) \equiv 0$ *de (3.8) es el único punto de equilibrio* G.A.E *con función de Liapunov* $V(x) = f^T(x)Pf(x)$.

Demostración. Demostraremos por contradicción, supongamos que existe $x_e \in D$ tal que $x_e \neq 0$ y $f(x_e) = 0$. Entonces por el Teorema (3.2) tenemos que para cada $x_e \in D$ existe $\alpha \in [0,1]$ tal que $x_e^T Pf(x_e) = x_e^T P\dfrac{\partial f}{\partial x}(\alpha x_e)x_e$, entonces por el Teorema (B.7) (ver apéndice B), tenemos

$$\begin{aligned}
x_e^T\left\{\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha x_e)\right]^T P + P\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha x_e)\right]\right\}x_e &= x_e^T\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha x_e)\right]^T Px_e + x_e^T P\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha x_e)\right]x_e \\
&= x_e^T\left\{\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha x_e)\right]^T P\right\}^T x_e + x_e^T Pf(x_e) \\
&= x_e^T P\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha x_e)\right]x_e + 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

que contradice (3.9). Luego, no existe $x_e \in D$, $x_e \neq 0$, tal que $f(x_e) = 0$. Por otra parte por el Teorema (B.6) (ver apéndice B) tenemos que $V(x) = f^T(x)Pf(x) \geqslant \lambda_{\text{mín}}(P).\ \|f(x)\|_2^2 \geqslant 0$, $x \in D$, esto implica que $V(x) = 0$ si y sólo si $f(x) = 0$ o equivalentemente, $V(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$. Por lo tanto, $f^T(x)Pf(x) > 0$, $x \in D$, $x \neq 0$. Usando (3.9) y el Teorema (B.8) (ver apéndice B), Calculamos $\dot{V}(x)$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= V'(x)\cdot f(x) \\
&= 2f^T(x)P\frac{\partial f}{\partial x}(x)f(x) \\
&= f^T(x)\left\{\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x)\right]^T P + P\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x)\right]\right\}f(x) \\
&\leqslant -f^T(x)Rf(x) \\
&\leqslant -\lambda_{\text{mín}}(R)\|f(x)\|_2^2 \\
&\leqslant 0, \quad x \in D.
\end{aligned}$$

Como $f(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$, entonces $\dot{V}(x) < 0$, $x \in D$, $x \neq 0$, así la solución cero $x(t) \equiv 0$ de (3.8) es el único punto de equilibrio asintóticamente estable con función de Lyapunov $V(x) = f^T(x)Pf(x)$.

Finalmente, mostraremos que la solución $x(t) \equiv 0$ de (3.8) es G.A.E, para esto es suficiente mostrar (por el Teorema (2.2)) que $V(x) \to \infty$ cuando $\|x\| \to \infty$. Por el Teorema (3.2) tenemos que para cada $x \in \mathbb{R}^n$ existe $\alpha \in [0,1]$ tal que se cumple $x^TPf(x) = x^TP\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha x)x$ entonces:

$$\begin{aligned}
x^TPf(x) &= x^TP\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha x)x \\
&= \frac{1}{2}x^T\left\{\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha x)\right]^T P + P\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha x)\right]\right\}x \\
&\leqslant -\frac{1}{2}x^TRx \\
&\leqslant -\frac{1}{2}\lambda_{\text{mín}}(R)\|x\|_2^2, \quad x \in \mathbb{R}^n,
\end{aligned}$$

entonces

$$\frac{|x^TPf(x)|}{\|x\|_2^2} \geqslant \frac{1}{2}\lambda_{\text{mín}}(R), \;\; x \in \mathbb{R}^n, \;\; x \neq 0 \tag{3.10}$$

Como $|x^TPf(x)| \leqslant \lambda_{\text{máx}}(P)\|x\|\,\|f(x)\|$, entonces de (3.10) tenemos que $\|f(x)\| \geqslant \frac{\lambda_{\text{mín}}(R)}{2\lambda_{\text{máx}}(P)}\|x\|$, por lo tanto $V(x) \to \infty$ cuando $\|x\| \to \infty$. □

Ejemplo 3.2. *Consideremos el siguiente sistema no lineal*

$$\dot{x}_1(t) = -3x_1(t) + x_2(t), \quad x_1(0) = x_{10}, \quad t \geqslant 0 \tag{$\star$}$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t) - x_2^3(t), \quad x_2(0) = x_{20} \tag{$\star\star$}$$

Notemos que la solución $(x_1(t), x_2(t)) = (0,0)$ *es el único punto de equilibrio de* $(\star)$ *y* $(\star\star)$ *, pués*

$$-3x_1(t) + x_2(t) = 0$$

$$x_1(t) - x_2(t) - x_2^3(t) = 0$$

entonces

$$x_1(t) = 0 \quad o \quad x_1^2(t) = -\frac{2}{9}$$

luego $x_2(t) = 0$ *así* $(x_1(t), x_2(t)) = (0,0)$ *es el único punto de equilibrio. Luego calculando,*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1-3x_2^2 \end{pmatrix}$$

Además (3.9) se cumple con $P = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $R = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *por el Teorema (2.4) tenemos que la solución cero* $(x_1(t), x_2(t)) \equiv (0,0)$ *de* $(\star)$ *y* $(\star\star)$ *es* G.A.E *con función de Lyapunov*

$$V(x) = f^T(x)Pf(x) = f^T(x)f(x) = (-3x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2 - x_2^3)^2 .$$

Teorema 3.4 (Teorema de Zubov). *Consideremos el sistema no lineal (2.1), con* $f(0) = 0$. *Sea* $D \subset \mathbb{R}^n$ *acotado y supongamos que existe una función* $V : D \to \mathbb{R}$ *de clase* C^1 *y una función continua* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tal que* $V(0) = 0$, $h(0) = 0$ *y*

$$0 < V(x) < 1, \quad x \in D - \{0\} \tag{3.11}$$

$$V(x) \to 1 \ \ \textit{cuando} \ \ x \to \partial D \tag{3.12}$$

$$h(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n - \{0\} \tag{3.13}$$

$$V'(x)f(x) = -h(x)[1 - V(x)] . \tag{3.14}$$

Entonces, la solución cero $x(t) \equiv 0$ *de (2.1) es asintóticamente estable con dominio de atracción* D.

Demostración. Resulta de (3.11), (3.13) , (3.14) y del Teorema (2.1) que la solución $x(t) \equiv 0$ de (2.1) es asintóticamente estable. Para mostrar que D es el dominio de atracción necesitamos mostrar que si $x(0) \in D$ implica $x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$ y si $x(0) \notin D$ implica $x(t) \not\to 0$ cuando $t \to \infty$. Si $x(0) \in D$ (ver figura 3.1) entonces, por (3.11) tenemos que $V(x(0)) < 1$.

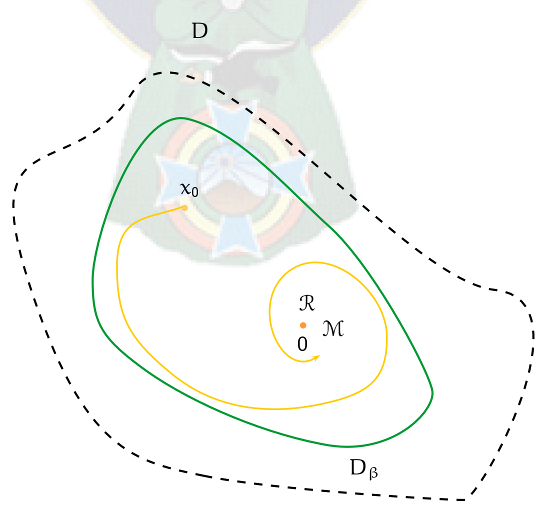

Figura 3.1:

Sea $\beta > 0$ tal que $V(x(0)) \leqslant \beta < 1$ y definimos $D_\beta = \{x \in D : V(x) \leqslant \beta\}$. Notemos que $D_\beta \subset D$ y D_β es acotado ya que D es acotado, además D_β es cerrado por lo tanto D_β

es compacto, por otra parte como $\dot{V}(x) \leqslant 0$, para $x \in D_\beta$, entonces D_β es un conjunto positivamente invariante. En efecto, sea $y \in \phi_t(D_\beta)$ entonces $y = \phi_t(x)$ donde $x \in D_\beta$, como $V(x(0)) \leqslant \beta$ y $V'(x)f(x) < 0$ entonces $y \in D_\beta$. Además de (3.11) y (3.14) tenemos $\mathcal{R} = \{x \in D : V'(x)f(x) = 0\} = \{0\} \subset D_\beta$, entonces $\mathcal{M} = \{0\}$ es el conjunto más grande e invariante contenido en $\mathcal{R}$. En efecto, es invariante por que $\phi_t(0) = 0$, para todo $t \geqslant 0$ pués la solución cero $x(t) \equiv 0$ de (2.1) es una solución de equilibrio, ahora probemos que es el conjunto más grande invariante contenido en $\mathcal{R}$ por contradicción, entonces supongamos que existe otro conjunto invariante $\mathcal{M}'$ tal que $\mathcal{M}' \neq \mathcal{M}$ y $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}' \subset \mathcal{R}$ entonces existe $x \neq 0$ tal que $V'(x)f(x) = 0$ pero por (3.14) tenemos que $V'(x)f(x) > 0$ que es una contradicción. Por lo tanto, por el Teorema (2.3) tenemos, $x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

Si $x(0) \notin D$ probemos que $x(t) \not\to 0$ cuando $t \to \infty$. Supongamos lo contrario es decir, $x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. En este caso, $x(t) \to D$ para algún $t \geqslant 0$. Por tanto, existen tiempos finitos t_1 y t_2 tales que $x(t_1) \in \partial D$ y $x(t) \in D$ para todo $t \in (t_1, t_2]$. Luego, definimos $W(x) = 1 - V(x)$ y notemos que $\dot{W}(x) = h(x)W(x)$ o equivalentemente,

$$\int_{W_0}^{W(x(t))} \frac{dw}{w} = \int_{t_0}^{t} h(x(s))\, ds \tag{3.15}$$

donde $W_0 = W(x(t_0))$. Integrando (3.15) obtenemos

$$1 - V(x(t_0)) = [1 - V(x(t))]e^{-\int_{t_0}^{t} h(x(s))ds} \tag{3.16}$$

Tomando $t = t_2$, haciendo $t_0 \to t_1$ y usando (3.12) resulta que $\lim\limits_{t_0 \to t_1} [1 - V(x(t_0))] = 0$ y también $\lim\limits_{t_0 \to t_1} [1 - V(x(t_2))]e^{-\int_{t_0}^{t} h(x(s))ds} > 0$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $x(t) \not\to 0$ cuando $t \to \infty$. □

Ejemplo 3.3. *Consideremos el siguiente sistema no lineal dado por:*

$$\dot{x}_1(t) = -f_1((x_1(t))) + f_2(x_2(t)), \quad x_1(0) = x_{10} \tag{3.17}$$

$$\dot{x}_2(t) = -f_3((x_1(t))) + f_2(x_2(t)), \quad x_2(0) = x_{20}\,. \tag{3.18}$$

donde, $f_i(0) = 0$, $f_i(\sigma) > 0$, $\sigma \in (-a_i, b_i)$, *para* $i = 1, 2, 3$, $a_1 = a_3$, $b_1 = b_3$, *y supongamos que* $\int_0^y f_i(s)\,ds \to \infty$ *cuando* $y \to -a_i$ *o* $y \to b_i$, *para* $i = 2, 3$. *Sean* $h(x) = f_1(x_1)f_3(x_1)$ *y* $V(x) = 1 - V_1(x_1)V_2(x_2)$, *donde* $V_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $V_i(0) = 1$, $i = 1, 2$. *Resulta de (3.14) que*

$$\left[V_1'(x_1) + f_3(x_1)V_1(x_1)\right]V_2(x_2)f_1(x_1) + \left[V_2'(x_2)V_1(x_1)f_3(x_1) - V_1'(x_1)V_2(x_2)f_2(x_1)\right] = 0,$$

el cual se satisface si $V_1'(x_1) = -f_3(x_1)V_1(x_1)$ *y* $V_2'(x_2) = -f_2(x_2)V_2(x_2)$. *Por tanto (3.14) se cumple con*

$$V(x) = 1 - e^{-[\int_0^{x_1} f_3(s)\,ds + \int_0^{x_2} f_2(s)\,ds]}\,. \tag{3.19}$$

Seguidamente notemos que (3.19) satisface $V(0) = 0$, *(3.11) y (3.12), para todo* $x \in D$, *donde* $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : -a_i < x_i < b_i\}$, $i = 1, 2$. *Además, se puede observar que (3.19) cumple con* $\dot{V}(x) = -f_1(x_1)f_3(x_1)[1 - V(x)] \leqslant 0$, *lo que prueba que la solución* $(x_1(t), x_2(t)) \equiv 0$ *es Lyapunov estable para (3.17) y (3.18). Para mostrar la estabilidad asintótica, notemos que* $\dot{V}(x) = 0$ *implica* $f_1(x_1)f_3(x_1) = 0$, *implica* $x_1 = 0$. *Además,* $x_1(t) \equiv 0$ *entonces* $f_2(x_2(t)) \equiv 0$, *entonces* $x_2(t) \equiv 0$. *Por tanto por el Teorema (2.3) la solución cero* $(x_1(t), x_2(t)) \equiv (0, 0)$ *de (3.17) y (3.18) es asintóticamente estable con dominio de atracción* $\overline{D}$.

3.2. Estabilidad en Sistemas Lineales

En esta sección presentaremos criterios que son necesarios y suficientes para saber si una solución de equilibrio del sistema lineal es estable o asintóticamente estable, de manera que no tengamos conocimiento de los autovalores de la parte lineal. Para este propósito consideremos el siguiente sistema lineal:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \; x(0) = x_0, \;\; t \geqslant 0 \tag{3.20}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ *y* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Para examinar la estabilidad de (3.20), consideremos la solución de (3.20) que está dado por* $x(t) = e^{At}x(0)$, $t \geqslant 0$. *La estructura de* e^{At} *se puede entender considerando la forma canónicax de Jordan de* A, *es decir* A *se puede escribir como* $A = SJS^{-1}$ *donde* $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *es una matriz no singular y* $J = bloq[J_1, \ldots, J_m]$ *es la forma Jordan de* A *por lo tanto tenemos* $e^{At} = Se^{Jt}S^{-1}$ *donde* $e^{Jt} = bloq[e^{J_1 t}, \ldots, e^{J_m t}]$. *La estructura de* e^{Jt} *se puede determinar considerando bloques de Jordan* J_i, *donde cada bloque de Jordan es de la forma* $J_i = \lambda_i I_{n_i} + N_{n_i}$, *para todo* $i \in \{1, \ldots, m\}$, n_i *es el orden del* $i-$*ésimo bloque de Jordan,* λ_i *es el autovalor de* A *y* $N_{n_i} = [a_{jk}]$ *una matriz de* $n_i \times n_i$ *tal que* $a_{jj+1} = 1$ *para todo* $j = 1, 2, \ldots n_i$ *y el resto cero, que es una matriz nilpotente de orden* n_i *(ver apéndice B). Por convención denotemos* $N_1 = 0_{1\times 1}$.

Por otra parte como $\lambda_i I_{n_i}$ *y* N_{n_i} *conmutan entonces*

$$e^{J_i t} = e^{(\lambda_i I_{n_i} + N_{n_i})t} = e^{\lambda_i I_{n_i} t} e^{N_{n_i} t} = e^{\lambda_i t} e^{N_{n_i} t}.$$

Además como $N_{n_i}^{n_i} = 0$, *entonces* $e^{N_{n_i} t}$ *es una suma finita de potencias de* $N_{n_i} t$ *es decir:*

$$e^{N_{n_i} t} = I_{n_i} + N_{n_i} t + \frac{1}{2} N_{n_i}^2 t^2 + \cdots + [(n_i - 1)!]^{-1} N_{n_i}^{n_i - 1} t^{n_i - 1}.$$

Luego

$$\begin{aligned}
e^{J_1 t} &= e^{\lambda_1 t} I_{n_1} + e^{\lambda_1 t} N_{n_1} t + \frac{1}{2} e^{\lambda_1 t} N_{n_1}^2 t^2 + \cdots + e^{\lambda_1 t}[(n_1-1)!]^{-1} N_{n_1}^{n_1-1} t^{n_1-1} \\
e^{J_2 t} &= e^{\lambda_2 t} I_{n_2} + e^{\lambda_2 t} N_{n_2} t + \frac{1}{2} e^{\lambda_2 t} N_{n_2}^2 t^2 + \cdots + e^{\lambda_2 t}[(n_2-1)!]^{-1} N_{n_2}^{n_2-1} t^{n_2-1} \\
&\vdots \\
e^{J_m t} &= e^{\lambda_m t} I_{n_m} + e^{\lambda_m t} N_{n_m} t + \frac{1}{2} e^{\lambda_m t} N_{n_m}^2 t^2 + \cdots + e^{\lambda_m t}[(n_m-1)!]^{-1} N_{n_m}^{n_m-1} t^{n_m-1}
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
e^{Jt} &= \mathit{bloq}\big[e^{\lambda_1 t} I_{n_1}, \ldots, e^{\lambda_m t} I_{n_m}\big] + \cdots \\
&\quad \cdots + \mathit{bloq}\big[e^{\lambda_1 t}\{[n_1-1]!\}^{-1} N_{n_1}^{n_1-1} t^{n_1-1}, \ldots, e^{\lambda_m t}\{[n_m-1]!\}^{-1} N_{n_m}^{n_m-1} t^{n_m-1}\big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \big\{e^{\lambda_1 t}\mathit{bloq}\big[I_{n_1}, \ldots, 0\big] + \cdots + e^{\lambda_m t}\mathit{bloq}\big[0, \ldots, I_{n_m}\big]\big\} + \cdots \\
&\quad + \big\{t^{n_1-1} e^{\lambda_1 t}\mathit{bloq}\big[\{[n_1-1]!\}^{-1} N_{n_1}^{n_1-1}, \ldots, 0\big] + \cdots + t^{n_m-1} e^{\lambda_m t}\mathit{bloq}\big[0, \ldots, \{[n_m-1]!\}^{-1} N_{n_m}^{n_m-1}\big]\big\} \\
&= \big\{e^{\lambda_1 t}\mathit{bloq}\big[I_{n_1}, \ldots, 0\big] + \cdots + t^{n_1-1} e^{\lambda_1 t}\mathit{bloq}\big[\{[n_1-1]!\}^{-1} N_{n_1}^{n_1-1}, \ldots, 0\big]\big\} + \cdots \\
&\quad + \big\{e^{\lambda_m t}\mathit{bloq}\big[0, \ldots, I_{n_m}\big] + \cdots + t^{n_m-1} e^{\lambda_m t}\mathit{bloq}\big[0, \ldots, \{[n_m-1]!\}^{-1} N_{n_m}^{n_m-1}\big]\big\}
\end{aligned}$$

Sean

$$\begin{aligned}
P_{11}(A) &= S\ \mathit{bloq}\big[I_{n_1}, 0, \ldots, 0\big]\ S^{-1} \\
&\vdots \\
P_{1n_1}(A) &= S\ \mathit{bloq}\big[\{[n_1-1]!\}^{-1} N_{n_1}^{n_1-1}, 0, \ldots, 0\big]\ S^{-1} \\
&\vdots \\
P_{m1}(A) &= S\ \mathit{bloq}\big[0, \ldots, 0, I_{n_m}\big]\ S^{-1} \\
&\vdots \\
P_{mn_m}(A) &= S\ \mathit{bloq}\big[0, \ldots, 0, \{[n_m-1]!\}^{-1} N_{n_m}^{n_m-1}\big]\ S^{-1}
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
e^{At} = S e^{Jt} S^{-1} &= \big[t^{1-1} e^{\lambda_1 t} P_{11}(A) + \cdots + t^{n_1-1} e^{\lambda_1 t} P_{1n_1}(A)\big] + \cdots \\
&\quad + \big[t^{1-1} e^{\lambda_m t} P_{m1}(A) + \cdots + t^{n_m-1} e^{\lambda_m t} P_{mn_m}(A)\big] \\
&= \sum_{j=1}^{n_1} t^{j-1} e^{\lambda_1 t} P_{1j} + \cdots + \sum_{j=1}^{n_m} t^{j-1} e^{\lambda_m t} P_{mj}(A) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} t^{j-1} e^{\lambda_i t} P_{ij}(A)
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$e^{At} = S\,e^{Jt}S^{-1} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} t^{j-1}e^{\lambda_i t}p_{ij}(A) \tag{3.21}$$

donde m *es el número de valores propios distintos de* A *y* $p_{ij}(A)$ *son matrices constantes*

Ejemplo 3.4. *Consideremos la siguiente matriz.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

y supongamos que es semejante a la matriz de Jordan

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

es decir, existe una matriz de $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ *inversible tal que* $A = SJS^{-1}$.

Entonces como

$$e^{J_1 t} = e^{[\lambda_1 I_{n_1} + N_{n_1}]t} = e^{\lambda_1 t}e^{N_{n_1} t}$$

donde $I_{n_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N_{n_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $n_1 = 2$.
Ahora calculemos

$$e^{N_{n_1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

luego

$$e^{J_1 t} = e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} \\ 0 & e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}$$

por otro lado

$$e^{J_2 t} = e^{\lambda_2 t}$$

asi

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

$$e^{Jt} = t^{1-1}e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + t^{2-1}e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e^{\lambda_2 t}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$Se^{Jt}S^{-1} = t^{1-1}e^{\lambda_1 t}S\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}S^{-1} + t^{2-1}e^{\lambda_1 t}S\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}S^{-1} + e^{\lambda_2 t}S\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}S^{-1}$$

Sean:

$$P_{11}(A) = S\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}S^{-1}$$

$$P_{22}(A) = S\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}S^{-1}$$

$$P_{21}(A) = S\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}S^{-1}$$

Entonces,

$$e^{At} = Se^{Jt}S^{-1} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} t^{j-1}e^{\lambda_i t}P_{ij}(A)$$

donde $n_1 = 1$, $n_2 = 2$ *y* $m = 2$.

Teorema 3.5. *Consideremos el sistema lineal (3.20). La solución cero* $x(t) \equiv 0$ *de (3.20) es Lyapunov estable si y sólo si* $\mathrm{Re}\lambda < 0$ *o* $\mathrm{Re}\lambda = 0$ *y* A *es diagonalizable*

Y la solución $x(t) \equiv 0$ *de (3.20) es asintóticamente estable si y sólo si* $\mathrm{Re}\lambda < 0$.

Demostración. Como $x(t) = e^{At}x(0)$, $t \geqslant 0$ es solución de (3.20) entonces se deduce que la solución cero de (3.20) es Lyapunov estable si y sólo si existe $\alpha > 0$ tal que $\|e^{At}\| < \alpha$, $t \geqslant 0$. Luego se desprende de (3.21) que e^{At} es acotada si y sólo si $\mathrm{Re}\lambda < 0$ o $\mathrm{Re}\lambda = 0$ y

A es diagonalizable. En efecto, probemos la necesidad por contradicción, supongamos que $\operatorname{Re}\lambda > 0$, entonces

$$\|e^{At}\| = \left\|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} t^{j-1}e^{\lambda_i t}P_{ij}(A)\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} t^{j-1}e^{\operatorname{Re}\lambda_i t}\|P_{ij}(A)\|$$

por lo tanto es una contradicción ya que $t^{j-1}e^{\operatorname{Re}\lambda_i t}$ no es acotada para $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$.
Ahora probemos la suficiencia, supongamos que $\operatorname{Re}\lambda < 0$ o $\operatorname{Re}\lambda = 0$ y A es diagonalizable.
Si $\operatorname{Re}\lambda < 0$, entonces

$$\|e^{At}\| = \left\|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} t^{j-1}e^{\lambda_i t}P_{ij}(A)\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} t^{j-1}e^{\operatorname{Re}\lambda_i t}\|P_{ij}(A)\|$$

Entonces

$$0 \leqslant \left\|\lim_{t\to\infty} e^{At}\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} \lim_{t\to\infty} t^{i-1}e^{\operatorname{Re}\lambda_i t}\|P_{ij}(A)\|$$

Como

$$\lim_{t\to\infty} t^{(i-1)}e^{Re\lambda_i t} = \lim_{t\to\infty}\frac{t^{(i-1)}}{e^{-Re\lambda_i t}} = \lim_{t\to\infty}\frac{(i-1)t^{(i-1)-1}}{-Re\lambda_i e^{-Re\lambda_i t}} = \cdots = \lim_{t\to\infty}\frac{(i-1)!}{(-Re\lambda_i)^{(i-1)}e^{-Re\lambda_i t}} = 0$$

Por lo tanto $\lim\limits_{t\to\infty} e^{At} = 0$, así $\|e^{At}\| < \alpha$.
Si $\operatorname{Re}\lambda = 0$ y A es diagonalizable, entonces $n_i = 1$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, además

$$\begin{aligned}
\|e^{At}\| &= \left\|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{1} t^{j-1}e^{\lambda_i t}P_{ij}(A)\right\| \\
&= \left\|\sum_{i=1}^{m} e^{\lambda_i t}P_{i1}(A)\right\| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{m} e^{\operatorname{Re}\lambda_i t}\|P_{i1}(A)\| \\
&= \sum_{i=1}^{m} \|P_{i1}(A)\| \\
&= \|P_{11}(A)\| + \|P_{21}(A)\| + \cdots + \|P_{m1}(A)\| \\
&= \alpha
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\|e^{At}\| \leqslant \alpha$ donde $\alpha = \|P_{11}(A)\| + \|P_{12}(A) + \cdots + \|P_{1m}(A)\|$. Además la solución cero es asintóticamente estable esto es inmediato ya que se desprende de (3.21) que $e^{At} \to 0$ cuando $t \to \infty$ si y sólo si $Re\lambda < 0$. $\square$

El teorema anterior da las condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad de Lyapunov y la estabilidad asintótica para la solución cero $x(t) \equiv 0$ *del sistema lineal*

(3.20) examinando los autovalores de A*, decimos que* A *es Lyapunov estable si y sólo si cada autovalor de* A *tiene parte real no positiva. Además decimos que* A *es asintóticamente estable o Hurwitz si y sólo si todo autovalor de* A *tiene parte real negativo. El teorema de estabilidad de Lyapunov también puede usarse para desarrollar las condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad de la solución cero* $x(t) \equiv 0$ *de (3.20), en particular para aplicar el teorema (2.1) a (3.20) considere el candidato para la función de Lyapunov* $V(x) = x^T P x$*, donde* $x \in \mathbb{R}^n$ *y* $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *es definida positiva (ver apéndice B) notemos lo siguiente*

$$\dot{V}(x) = V'(x)f(x) = 2x^T PAx = x^T(A^T P + PA)x.$$

Luego (2.4) se cumplirá si existe una matriz definida no negativa $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *tal que* $A^T P + PA = -R$ *de manera que* $V'(x)f(x) = -x^T Rx \leqslant 0,\ \ x \in \mathbb{R}^n$*, por tanto se desea determinar la existencia de una matriz definida positiva satisfaciendo*

$$0 = A^T P + PA + R \tag{3.22}$$

La ecuación (3.22) se llama ecuación Lyapunov.

Teorema 3.6. *Consideremos el sistema lineal (3.20) la solución* $x(t) \equiv 0$ *de (3.20) es asintóticamente estable si y sólo si para toda matriz* $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *definida positiva, existe una única matriz* $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *definida positiva satisfaciendo (3.22).*

Demostración. La suficiencia se deduce del Teorema (3.20) señalando que si hay una matriz $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definida positivo y una matriz $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definida positivo tal que cumple (3.22), entonces la estabilidad asintótica es inmediato con función de Lyapunov $V(x) = x^T P x$. Para mostrar la necesidad supongamos que A es asintóticamente estable entonces, $\mathrm{Re}\lambda < 0$, donde λ es un autovalor de A y definimos

$$P = \int_0^\infty e^{A^T t} R e^{At}\, dt \tag{3.23}$$

notemos que la integral en (3.23) esta bien definida ya que el integrando contiene términos la de la forma $t^\alpha e^{\lambda t}$, entonces $\displaystyle\int_0^\infty t^\alpha e^{\lambda t}\, dt$ existe. En efecto como

$$\int_0^\infty t^\alpha e^{\lambda t}\, dt = \int_0^1 t^\alpha e^{\lambda t}\, dt + \int_1^\infty t^\alpha e^{\lambda t}\, dt \tag{3.24}$$

entonces es suficiente estudiar la convergencia de

$$\int_1^\infty t^\alpha e^{\lambda t}\, dt \tag{3.25}$$

Como $\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,dt$ es convergente y además;

$$\lim_{t\to\infty} \frac{|t^\alpha e^{\lambda t}|}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to\infty} t^2 t^\alpha e^{Re\lambda t} \tag{3.26}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{t^{2+\alpha}}{e^{-Re\lambda t}} \tag{3.27}$$

$$= 0. \tag{3.28}$$

Entonces $\int_1^\infty |t^\alpha e^{\lambda t}|\,dt$ es convergente, por lo tanto $\int_1^\infty t^\alpha e^{\lambda t}\,dt$ es convergente. Por otra parte $\lim\limits_{t\to 0} e^{A^T t} = 0$ y $\lim\limits_{t\to 0} e^{At} = 0$, ya que $Re\lambda < 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
A^T P + PA &= \int_0^\infty A^T e^{A^T t} R e^{At}\,dt + \int_0^\infty e^{A^T t} R e^{At} A\,dt \\
&= \int_0^\infty \frac{d}{dt}(e^{A^T t} R e^{At})\,dt \\
&= \lim_{s\to\infty} \int_0^s \frac{d}{dt}(e^{A^T t} R e^{At})\,dt \\
&= \lim_{s\to\infty} \left[e^{A^T t} R e^{At} \Big|_0^s \right] \\
&= \lim_{s\to\infty} \left[e^{A^T s} R e^{As} - e^{A^T 0} R e^{A0} \right] \\
&= 0 - R \\
&= -R
\end{aligned} \tag{3.29}$$

lo que demuestra que existe una matriz $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ que satisface (3.22).

Seguidamente mostremos que P es definida positiva. En efecto, Como R es definida positiva entonces por el Teorema (B.9) (ver apendice B) existe una matriz $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible, tal que $R = C^T C$, entonces

$$\begin{aligned}
x^T P x &= \int_0^\infty x^T e^{A^T t} C^T C e^{At} x\,dx \\
&= \int_0^\infty \|Ce^{At}x\|_2^2\,dt
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Lo que demuestra que P es semidefinida positiva, ahora mostraremos que P es definida positiva, supongamos por el absurdo es decir que P no es definido positivo, entonces existe $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ tal que $x^T P x = 0$ entonces $Ce^{At}x = 0$ para todo $t \geqslant 0$, en particular para $t = 0$ tenemos $Cx = 0$, entonces como C es inversible, resulta $x = 0$, que es una contradicción. Por tanto P es definida positivo.

Para mostrar la unicidad supongamos que existen dos soluciones distintas P_1 y P_2 de (3.22), entonces

$$0 = A^T P_1 + P_1 A + R \tag{3.31}$$

$$0 = A^T P_2 + P_2 A + R \tag{3.32}$$

restando (3.32) de (3.31) tenemos

$$0 = A^T(P_1 - P_2) + (P_1 - P_2)A \tag{3.33}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} 0 &= e^{A^T t}\left[A^T(P_1 - P_2) + (P_1 - P_2)A\right]e^{At} \\ &= \frac{d}{dt}e^{A^T t}(P_1 - P_2)e^{At}, \quad t \geqslant 0 \end{aligned} \tag{3.34}$$

integrando (3.34) obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \frac{d}{dt}e^{A^T t}(P_1 - P_2)e^{At}\,dt \\ &= \lim_{s\to\infty}\int_0^s \frac{d}{dt}(e^{A^T t}(P_1 - P_2)e^{At})\,dt \\ &= \lim_{s\to\infty}\left[e^{A^T t}(P_1 - P_2)e^{At}\Big|_0^s\right] \\ &= \lim_{s\to\infty}\left[e^{A^T s}(P_1 - P_2)e^{As} - e^{A^T 0}(P_1 - P_2)e^{A0}\right] \\ &= 0 - (P_1 - P_2) \\ &= -(P_1 - P_2) \\ &= -P_1 + P_2 \end{aligned} \tag{3.35}$$

por lo tanto $P_1 = P_2$ que es una contradicción. Así existe una única solución $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ satisfaciendo (3.22). $\square$

Ejemplo 3.5. *Consideremos el siguiente sistema lineal dado por:*

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} x(t)$$

como se puede verificar fácilmente, este sistema tiene autovalores $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -2$, por lo tanto el sistema es asintóticamente estable. Tratemos de aplicar el teorema (3.6), *para esto elegimos* $R = I$ *(matriz identidad, la cual es definida positiva) y definimos los componentes de* P *como*

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}$$

luego,

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cuya solución es:

$$p_{11} = \frac{5}{4},\ p_{12} = \frac{1}{4},\ p_{22} = \frac{1}{4}.$$

la cual es definida positiva.

APÉNDICE A

Algunos conceptos de función diferenciable

En este apéndice estudiaremos algunos de los teoremas importantes, para desarrollar los métodos para encontrar funciones de Lyapunov para un sistema no lineal (con mayor detalle lo podemos ver en [4]).

Teorema A.1 (Teorema del Valor medio). *Sea* $f : D \to \mathbb{R}^m$ *de clase* C^1*, con* D *abierto en* $\mathbb{R}^n$*. Y supongamos que existen* $x, y \in D$ *tal que* $\mathcal{L} = \{z : z = tx + (1-t)y,\ t \in (0,1)\} \subset D$*, entonces para todo* $v \in \mathbb{R}^m$ *existe* $z \in \mathcal{L}$ *tal que*

$$v^T\big[f(y) - f(x)\big] = v^T\left[\frac{\partial f}{\partial z}(z)(y-x)\right]$$

Demostración. Sea $\xi : [0,1] \to \mathbb{R}$ definido por $\xi(t) = v^T f(tx + (1-t)y)$. Luego, ξ es continua en $[0,1]$ y diferenciable en $(0,1)$ (pues f es de clase C^1) luego aplicando el teorema del valor medio en $\mathbb{R}$ tenemos que existe $\theta \in (0,1)$ tal que $\xi(1) - \xi(0) = \xi'(\theta) = v^T f'(\theta x + (1-\theta)y)(x-y)$, por otro lado evaluando ξ en 0 y 1 tenemos;

$$\xi(1) = v^T f(x) \tag{A.1}$$

$$\xi(0) = v^T f(y) \tag{A.2}$$

por lo tanto

$$v^T\big[f(y) - f(x)\big] = v^T\left[\frac{\partial f}{\partial z}(z)(y-x)\right]$$

donde $\dfrac{\partial f}{\partial z}(z) = f'(z)$ y $z = (\theta x + (1-\theta)y)(x-y)$. $\square$

A.1. Regla de Leibniz

Teorema A.2 (Regla de Leibniz). *Dado* $U \subset \mathbb{R}^n$*, abierto, sea* $f : U \times [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función con las siguientes propiedades:*

1. *Para todo* $x \in U$*, la función* $t \mapsto f(x,t)$ *es integrable en* $a \leqslant t \leqslant b$.

2. *La* $i-$*ésima derivada parcial* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)$ *existe para cada* $(x,t) \in U \times [a,b]$ *y la función* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : U \times [a,b] \to \mathbb{R}$ *asi definida, es continua.*

   Entonces la función $\varphi : U \to \mathbb{R}$*, dada por* $\varphi(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$*, posee* $i-$*ésima derivada parcial en cada punto* $x \in U$*, siendo*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\,dt\,.$$

Demostración. Por el Teorema de Valor Medio para funciones reales de una variable, si $x, x + se_i \in U$, existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(x+se_i)-\varphi(x)}{s} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\,dt &= \int_a^b \left[\frac{f(x+se_i,t)-f(x,t)}{s} - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\right]\,dt \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta se_i,t) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\right]\,dt\,.\end{aligned}$$

Luego para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que

$$|s| < \delta \Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta se_i,t) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\right| < \varepsilon/(b-a)$$

para $t \in [a,b]$. Entonces $|s| < \delta$ implica

$$\left|\frac{\varphi(x+se_i)-\varphi(x)}{s} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\,dt\right| < \varepsilon$$

como queríamos demostrar. □

A.2. Teorema de Schwarz

Teorema A.3 (Teorema de Schwarz). *Sea* $f : U \to \mathbb{R}$ *dos veces diferenciable en el punto* $c \in U \subset \mathbb{R}^n$*. Para cualesquiera* $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$*, se tiene*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(c) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(c)\,.$$

Demostración. Para simplificar la notación, y sin perder generalidad, podemos suponer $U \subset \mathbb{R}^2$, $c = (a, b)$ y probar que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)\,.$$

Existe $\varepsilon > 0$ tal que el cuadrado $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \times (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ esta contenido en U. Para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, pongamos

$$\varphi(t) = f(a + t, b + t) - f(a + t, b) - f(a, b + t) + f(a, b)\,.$$

Entonces, escribiendo $\xi(x) = f(x, b + t) - f(x, b)$, vemos que $\varphi(t) = \xi(a + t) - \xi(a)$. Por el Teorema de Valor Medio para funciones de una variable, existe $\theta \in (0, 1)$ tal que $\varphi(t) = \xi'(a + \theta t) \cdot t$, o sea:

$$\varphi(t) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a + \theta t, b + t) - \frac{\partial f}{\partial x}(a + \theta t, b)\right] t\,.$$

Como la función $\dfrac{\partial f}{\partial x} : U \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $c = (a, b)$, tenemos las igualdades: (Las derivadas no explícitas abajo son tomadas en el punto c.)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(a + \theta t, b + t) &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \theta t + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot t + \rho_1 \cdot t, \quad \text{donde} \quad \lim_{t \to 0} \rho_1 = 0;\\
\frac{\partial f}{\partial x}(a + \theta t, b) &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \theta t + \rho_2 \cdot t, \quad \text{donde} \quad \lim_{t \to 0} \rho_2 = 0.
\end{aligned}$$

De ahí $\varphi(t) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot t^2 + \rho \cdot t^2$, donde $\rho = \rho_1 - \rho_2$ y por tanto $\lim_{t \to 0} \rho = 0$.

Se sigue entonces que $\lim_{t \to 0} \dfrac{\varphi(t)}{t^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$. Un razonamiento semejante, usando la función $\xi(y) = f(a + t, y) - f(a, y)$, nos conducirá al $\lim_{t \to 0} \dfrac{\varphi(t)}{t^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$. Esto prueba el Teorema. $\square$

APÉNDICE B

Algunos conceptos de algrebra Lineal

En este apéndice desarrollaremos algunos de los resultados mas importantes del Álgebra Lineal

B.1. Normas de Matrices

Debemos observar que las propiedades que definen una norma tienen en cuenta las operaciones propias de la estructura de espacio vectorial sobre el que se definen: el producto por escalares y la suma de vectores (desigualdad triangular). Sin embargo las matrices, en algunos casos, se pueden multiplicar. Una norma sobre $\mathbb{R}^{n\times n}$ se dirá que es una norma de matriz cuando al producto se verifica una propiedad similar a la desigualdad triangular para la suma. Tomar en consideración esta propiedad de las matrices nos conduce a la siguiente definición:

Definición B.1. *La norma de la matriz $\|\cdot\|$ sobre $\mathbb{R}^{n\times m}$ es una función $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times m} \to \mathbb{R}$ que satisface los siguientes axiomas:*

(i) $\|A\| \geqslant 0$, $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$

(ii) $\|A\| = 0$, *si, y sólo si* $A = 0$

(iii) $\|\alpha A\| = |\alpha|\,\|A\|, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

(iv) $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|, \quad A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$

Definición B.2. *Sean μ, ν y ρ normas definidas en $\mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbb{R}^{n\times p}$ y $\mathbb{R}^{m\times p}$, respectivamente. Diremos que μ, ν y ρ son consistentes si para todas matrices $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$*

se verifica

$$\rho(AB) \leqslant \mu(A)\nu(B)\,.$$

En particular una norma ν *definida en* $\mathbb{R}^{n\times n}$ *se dice que es consistente si* $\nu(AB) \leqslant \nu(A)\nu(B)$ *para todas* $A,\ B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Una norma ν *definida en* $\mathbb{R}^{n\times n}$ *consistente también se dice que es multiplicativa o submultiplicativa.*
Una norma definida en $\mathbb{R}^{n\times n}$ *se dice que es una norma de matriz si es consistente.*

Un caso particular importante es el de las normas consistentes (también llamadas en este caso compatibles) con las normas de vector: Si ν *es una norma definida en* $\mathbb{R}^{n\times n}$ *y* ν *es una norma definida en* $\mathbb{R}^{n}$*, entonces se dice que* ν *es consistente o compatible con la norma de vector* ν *si para toda matriz* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *y todo vector* $x \in \mathbb{R}^{n}$ *se tiene que*

$$\nu(Ax) \leqslant \mu(A)\nu(x)$$

Ejemplo B.1. 1. *La norma euclidiana en* $\mathbb{R}^{m\times n}$ *será*

$$\|A\| = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

2. *A esta norma se le llama también norma de Frobenius y se suele representar por* $\|A\|_F$*. En algunos sitios se le llama también norma de Schur o de Hilbert-Schmidt. Nosotros utilizaremos el nombre euclidiana o de Frobenius.*
   La norma de Frobenius en $\mathbb{R}^{n\times n}$ *es una norma de matriz. En efecto, teniendo en cuenta que la desigualdad de Cauchy-Schwarz y que*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

   es el producto escalar de la $i-$*ésima fila de* A *por la* $j-$*ésima columna de* B,

$$\begin{aligned}\|AB\|_F^2 &= \sum_{i,j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right|^2\\ &\leqslant \sum_{i,j=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|b_{kj}|^2\right)\right]\\ &= \left(\sum_{i,k=1}^{n}|a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{j,k=1}^{n}|b_{kj}|^2\right)\\ &= \|A\|_F^2\|B\|_F^2\,.\end{aligned}$$

3. *Una de las normas en* $\mathbb{R}^{m\times n}$ *se define como:*

$$\|A\| = \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} |a_{i,j}|$$

Esta norma en $\mathbb{R}^{n\times n}$ *no es una norma de matriz como lo demuestra el siguiente ejemplo:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = AA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

y $\|AA\| = 2 > 1 = \|A\|\,\|A\|$

4. *en general una norma se define en* $\mathbb{R}^{m\times n}$ *como:*

$$\|A\| = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/p}$$

Utilizando la desigualdad de Holder se puede demostrar que en $\mathbb{R}^{n\times n}$ *esta norma es una norma de matriz si y sólo si* $1 \leqslant p \leqslant 2$.

5. *Una pequeña modificación en la definición nos permite obtener una norma de matriz en* $\mathbb{R}^{n\times n}$*:*

$$\|A\| = n \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|$$

B.2. Normas de Matriz Inducidas

Una técnica para obtener normas de matriz a partir de normas vectoriales es la siguiente: Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *y pensemos en* A *como una transformación lineal:*

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ x &\mapsto Ax \end{aligned}$$

Consideremos en $\mathbb{R}^n$ *y* $\mathbb{R}^m$ *normas* $\|\cdot\|_n$ *y* $\|\cdot\|_m$ *respectivamente. Relativamente a estas normas podemos definir una función:*

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^{m\times n} &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto f(A) \end{aligned}$$

donde $f(A)$ *se define de la siguiente forma:*

$$f(A) = \max_{0\neq x\in\mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|_m}{\|x\|_n}$$

Es claro que

$$f(A) = \max_{0\neq x\in\mathbb{F}^n} \frac{\|Ax\|_m}{\|x\|_n} = \sup_{\|x\|_n=1} \|Ax\|_m$$

Teorema B.1. *Sea* $\|\cdot\|_n$ *y* $\|\cdot\|_m$ *norma definidas en* $\mathbb{R}^n$ *y* $\mathbb{R}^m$*, respectivamente.*

(a) La función real f *definida en* $\mathbb{F}^{m\times n}$ *por*

$$f(A) = \max_{\|x\|_n=1} \|Ax\|_m = \max_{0\neq x\in\mathbb{F}^n} \frac{\|Ax\|_m}{\|x\|_n}$$

es una norma que denotaremos con $\|\cdot\|_{m,n}$.

(b) Si $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ *y* $B\in\mathbb{R}^{n\times p}$ *entonces*

$$\|AB\|_{m,p} \leqslant \|A\|_{m,n}\|B\|_{n,p}\,.$$

En particular, si $m=n$*, entonces la norma* $\|\cdot\|_{n,n}$ *es una norma de matriz.*

B.3. La exponencial de una matriz

Una función de particular interes en esta sección es la exponencial de una matriz.

Definición B.3. *Dada la matriz* $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$*, la exponencial de* A *denotada por* $\exp(A)$ *o* e^A*, es la matriz de* $\mathbb{R}^{n\times n}$ *definida por:*

$$\exp(A) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}A^j$$

La $\exp(A) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}A^j$ *esta bien definida (ver [2] y [5])*

Teorema B.2. *Sean* $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ *se cumplen las siguientes afirmaciones*

(i) $e^{PAP^{-1}} = Pe^AP^{-1}$.

(ii) Si $AB=BA$*, entonces* $e^{A+B}=e^Ae^B$.

(iii) $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

Demostración. *(i)* Para $k\geqslant 0$, tenemos

$$P\left(\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}A^j\right)P^{-1} = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}PA^jP^{-1} = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}\left(PAP^{-1}\right)^j$$

luego

$$\lim_{k\to\infty} P\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}A^j\right)P^{-1} = \lim_{k\to\infty}\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}\left(PAP^{-1}\right)^j$$

de donde

$$Pe^{A}P^{-1} = e^{PAP^{-1}}$$

En lo sucesivo, denotaremos por $\text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a las matrices diagonales

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}_{n\times n}$$

□

Teorema B.3. *Si* $D = \mathit{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$, *entonces* $e^D = \mathit{diag}\left[e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_n}\right]$.

Demostración. Se puede probar por inducción que:

$$D^j = \text{diag}\left(\lambda_1^j, \lambda_2^j, \ldots, \lambda_n^j\right), \quad \text{para todo} \quad j \in \mathbb{N}$$

luego, para cualquier $m \geqslant 0$ dado, tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{j!}D^j &= \sum_{j=0}^{m}\frac{1}{j!}\text{diag}\left(\lambda_1^j, \lambda_2^j, \ldots, \lambda_n^j\right) \\
&= \sum_{j=0}^{m}\text{diag}\left(\frac{1}{j!}\lambda_1^j, \frac{1}{j!}\lambda_2^j, \ldots, \frac{1}{j!}\lambda_n^j\right) \\
&= \text{diag}\left(\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{j!}\lambda_1^j, \sum_{j=0}^{m}\frac{1}{j!}\lambda_2^j, \ldots, \sum_{j=0}^{m}\frac{1}{j!}\lambda_n^j\right)
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
e^D &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}D^j = \lim_{m\to\infty}\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{j!}D^j \\
&= \text{diag}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\lambda_1^j, \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\lambda_2^j, \ldots, \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\lambda_n^j\right) \\
&= \text{diag}\left(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_n}\right),
\end{aligned}$$

lo cual prueba la afirmación. □

Como caso particular, observemos que la matriz $\mathrm{I} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *puede escribirse como matriz diagonal* $\mathrm{I} = diag[1, 1, \ldots, 1]$ *y si* $\lambda \in \mathbb{R}$*, entonces* $\lambda\mathrm{I} = diag[\lambda, \lambda, \ldots, \lambda]$*, luego*

$$e^{\lambda \mathrm{I}} = diag\big[e^{\lambda}, e^{\lambda}, \ldots, e^{\lambda}\big] = e^{\lambda} diag[1, 1, \ldots, 1] = e^{\lambda}$$

B.4. Formas Canónicas

Ahora vamos a agregar a nuestra lista algunos casos de la exponencial.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *de la forma*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{n_1\times n_2} & \cdots & 0_{n_1\times n_m} \\ 0_{n_2\times n_1} & A_2 & \cdots & 0_{n_2\times n_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{n_m\times n_1} & 0_{n_m\times n_2} & \cdots & A_m \end{pmatrix}$$

donde $A_i \in \mathbb{R}^{n_i\times n_i}$*, para todo* $1 \leqslant i \leqslant m$*,* $0_{n_i\times n_j}$ *es la matriz cero de* $\mathbb{R}^{n_i\times n_j}$ *y* $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m = n$ *tales matrices son llamadas matrices diagonales por bloques y las denotaremos por*

$$diag\big[A_1, A_2, \ldots, A_m\big]$$

por otro lado consideremos algunas notaciones. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *de la forma* $A = \lambda\mathrm{I} + N$ *en donde* $\lambda \in \mathbb{R}$ *y*

$$N_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$N_n^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$N_n^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

y $N_n^n = 0$, *es decir,* N_n *es una matriz nilpotente con orden de nilpotencia* n. *Para calcular* e^A *en primer observemos que* $(\lambda I)N_m = \lambda(N_m I) = N_n(\lambda I)$, *luego*

$$e^A = e^{\lambda I + N_n} = e^{\lambda I} e^{N_n} \tag{B.1}$$

sabemos que

$$e^{\lambda I} = e^{\lambda} I \tag{B.2}$$

por otro lado

$$\begin{aligned} e^{N_n} &= I + N_n + \frac{1}{2!}N_n^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}N_n^{n-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-2)!} & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & \frac{1}{(n-3)!} & \frac{1}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{B.3}$$

reemplazando (B.2) y (B.3) en (B.1) obtenemos

$$e^A = e^{\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-2)!} & \frac{1}{(n-2)!} \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & \frac{1}{(n-3)!} & \frac{1}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema B.4 (Forma Canónica de Jordan para matrices reales). *Si* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *entonces existe una matriz no singular* P *tal que* $A = PJP^{-1}$ *donde* $J = diag - block[J_1, J_2, \ldots, J_n]$ *donde cada matriz cuadrada* J_i *es de la forma*

$$J_i = \lambda_i I + N_n, \ \ \textit{con } \lambda_i \textit{ es un autovalor de } A.$$

Finalmente para determinar e^A *hacemos uso del Teorema (B.2 inciso i). en efecto, sabemos que*

$$\begin{aligned} A &= P^{-1}JP \\ e^A &= e^{P^{-1}JP} = P^{-1}e^J P \end{aligned}$$

B.5. Formas Cuadráticas

Nosotros supondremos que todas las matices son reales y cuadradas.

Definición B.4. *Sea* A *una matriz real simétrica de tamaño* $n \times n$ *la forma cuadrática definida por* A *es la función*

$$F_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \tag{B.4}$$

$$x \mapsto Ax \cdot x \tag{B.5}$$

donde $\cdot$ *es el producto interno definido en* $\mathbb{R}^n$*. La anterior definición se pudo definir tambien como producto de matrices de la siguiente manera:* $F_A(x) = x^T Ax$

Ejemplo B.2. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 12 & 19 \end{pmatrix}$*, entonces la forma cuadrática definida por* A *es la función* $f_A(x) = x_1^2 + 24x_1x_2 + 19x_2^2$ *para todo* $[x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$*.*

Teorema B.5 (Cambio de variable en una forma cuadrática)**.** *Sea* a *una matriz real simétrica de tamaño* $n \times n$ *y sea* P *una matriz invertible del mismo tamaño, entonces* $y \to F_A(Py)$ *es la forma cuadrática definida por la matriz* P^TAP*.*

Demostración.

$$F_A(Py) = APy \cdot Py = P^TAPyy$$

$\square$

Teorema B.6. *[Rayleigh / Ritz] Sea* A *simétrica de tamaño* $n \times n$*. Entonces* $\lambda_{min} x^T x \leqslant x^T Ax \leqslant \lambda_{max} x^T x$

Demostración. Sea $A = VDV^{-1}$ con V ortogonal y D una matriz diagonal, las columnas de V forman una base ortonormal de vectores propios de A. Los elementos de la diagonal de D son los valores propios son $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$. Al reordenar las columnas, podemos lograr que la primera columna de V es un vector propio con valor propio λ_1, la segunda columna de V es un vector propio con valor propio $\lambda_2 \ldots$ y la $n-$ésima columna es un vector propio con valor propio λ_1. Entonces $Ax_1 \cdot x_2/\|x_1\|^2 = \lambda_1 x_1 \cdot x_1/\|x_1\|^2$.

Del otro lado

$$\begin{aligned} D(y_1, y_2, \ldots, y_n) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_n) &= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \\ &\leqslant \lambda_1 (y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \end{aligned}$$

para todo $y \in \mathbb{R}^n$. Ahora $Dy \cdot y \leqslant \lambda_1 \|y\|^2$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$ implica que $Ax \cdot x \leqslant \lambda \|x\|^2$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Elija $y = V^T x$, entonces

$$\begin{aligned} Ax \cdot x = VDV^T x \cdot x &= Dy \cdot y \\ &\leqslant \lambda_1 \|y\|^2 \\ &= \lambda \|x\|^2 \end{aligned}$$

□

Ejemplo B.3. *El máximo de los valores propios de una matriz simétrica es mayor o igual que le máximo de los elementos de la diagonal. En particular el máximo de los valores propios de la matriz A definida por*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es mayor o igual a 2. Eso sigue de inmediato del principio y tercer vector de la base canónica, obtenemos que el máximo de los valores propios es mayor o igual que

$$A(1,0,1)^T \cdot (1,0,1)^T / \|(1,0,1)\|^2 = (1+3+3+2)/2 = 4,5$$

Definición B.5. $A \in \mathbb{R}^n$ *una matriz simétrica es definida positiva (definida negativa) si y sólo si* $x^T A x > 0$ $(x^T A x < 0)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$ *no cero.*

Definición B.6. $A \in \mathbb{R}^n$ *una matriz simétrica es semi-definida positiva (semi-definida negativa) si y sólo si* $x^T A x \geqslant 0$ $(x^T A x \leqslant 0)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$ *no cero.*

Teorema B.7. *Sea una matriz de* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *y* $x \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $x \neq 0$, *entonces* $x^T A x = x^T A^T x$.

Demostración.

$$
\begin{aligned}
x^T A x &= (x_1, x_2 \ldots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= (a_{11}x_1 + x_2 a_{21} + \cdots + x_n a_{n1}, \ldots, a_{1n} x_n x_1 + \cdots + x_n a_{nn}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= (x_1 a_{11} x_1 + x_1 x_2 a_{21} + \cdots + x_1 x_n a_{n1}) + \cdots + (a_{1n} x_n x_1 + \cdots + x_n^2 a_{nn}) \\
&= (x_1^2 a_{11} + \cdots + x_1 a_{1n} x_n) + \cdots + (a_{n1} x_1 x_n + \cdots + x_n^2 a_{nn}) \\
&= (x_1 a_{11} + \cdots + a_{1n} x_n, \ldots, a_{n1} x_1 + \cdots + x_n a_{nn}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= (x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= x^T A^T x
\end{aligned}
$$

$\square$

Teorema B.8. *Sea la función*

$$
\begin{aligned}
V : D &\to \mathbb{R}, \\
x &\mapsto x^T P x
\end{aligned}
$$

definida en $D \subset \mathbb{R}^n$ *y* P *una matriz de* $n \times n$ *entonces* $V'(x) = 2x^T P$

Demostración. Como

$$V(x) = x^T P x = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1n} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= (x_1 p_{11} + \cdots + x_n p_{1n}, \dots, x_1 p_{1n} + \cdots + x_n p_{nn})_{1\times n} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

$$= (x_1^2 p_{11} + \cdots + x_n x_1 p_{1n}) + \cdots + (x_1 x_n p_{1n} + \cdots + x_n^2 p_{nn})$$

$$= (x_1^2 p_{11} + \cdots + x_n p_{1n}) + \cdots + (p_{1n} x_n x_1 + \cdots + p_{1n} x_1 x_n)$$

entonces

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = 2x_1 p_{11} + \cdots + (x_n p_{1n} + \cdots + p_{1n} x_n)$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_n} = 2x_n p_{nn} + \cdots + (x_1 p_{1n} + \cdots + p_{1n} x_1)$$

entonces

$$V'(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right)$$

$$= (2x_1 p_{11} + \cdots + 2x_n p_{1n}, \dots, 2x_1 p_{1n} + \cdots + 2x_n p_{nn})$$

$$= 2(x_1 p_{11} + \cdots + x_n p_{1n}, \dots, x_1 p_{1n} + \cdots + x_n p_{nn})$$

$$= 2(x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1n} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= 2x^T P$$

□

Teorema B.9. *Sea* $x^T R x$ *una forma cuadrática en* $\mathbb{R}^n$*. Entonces* $x^T R x$ *es positivamente definida si y solo si existe una matriz inversible* $C \in \mathbb{R}^{n*n}$ *tal que* $R = C^T C$

Demostración. Supongamos que la forma cuadrática $x^T R x$ es positivamente definida, entonces todo los valores propios de R son estrictamente positivos ademas existe una matriz invertible P tal que $P^T R P = I$ de esto se sigue, que $R = (P^T)^{-1} P^{-1} = C^T C$, donde $C = P^{-1}$.

Supongamos ahora que existe una matriz inversible C tal que $R = C^T C$. Puesto que C es inversible, entonces $Cx \neq 0$ para todo vector no nulo x. De esto se sigue, que $x^T R x = x^T C^T C x = (Cx)^T (Cx) > 0$, para todo $x \neq 0$. Esto es, la forma cuadrática $x^T R x$ es definida positiva. $\square$

Bibliografía

[1] W. M. Haddad, V. S. Chellaboina, Nonlinear Dynamical Systems and Control, Princeton University Press, Oxford, 2008.

[2] Claus I. Doering, Artur O. Lopes, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, IMPA, Rio de Janeiro, 2007.

[3] E. L. Lima, Espacios métricos, IMPA, Rio de janeiro, 2005.

[4] María Marta Seron, Apuntes Sistemas No Lineales, Universidad Nacional de Rosario, Argentina.

[5] E. L. Lima, Curso de Análisis, Volumen 2, IMPA, Rio de janeiro, 2000

[6] Renato Benazic, Tópicos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, IMCA, Lima, 2006

[7] Miguel A. Marmolejo L, Manuel M. Villegas L, Topicos en algebra lineal