ESTADÍSTICA

CAPÍTULO 3

MEDIDAS DE POSICIÓN

T. Teddy Canelas Verduguez

U.M.S.A.

UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRES
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y FINANCIERAS
CARRERAS: AUDITORÍA Y ECONOMÍA

MATERIA:

"ESTADÍSTICA"

CAPÍTULO 3. MEDIDAS DE POSICIÓN

CATEDRÁTICO: T.Teddy Canelas Verduguez
Master en Estadística Matemática

COLABORACIÓN: Marianela Martinez
Ingeniero y Doctor

La Paz–Bolivia

DEDICATORIA:

Con amor y gratitud.

A mi madre:

Julia Verduguez Larrain

A mi esposa:

Elsa Rivero Aparicio

PRESENTACÍON

*Con el marcado propósito de que el presente texto de "**ESTADÍSTICA**", sea accesible, particularmente, por los estudiantes se presenta por Capítulos en hojas de tamaño medio oficio y con la apariencia de un cuaderno corriente.*

Se ha escrito también con la esperanza de que el potencial lector, encuentre novedad y sencillez, y principalmente empiece a adquirir una cultura estadística para comprender mejor lo que se dice, de los hechos o acontecimientos, del mundo real en el que vivimos, después de que estos fueron investigados "científicamente".

El profesional de cualquier área, llámese Auditor, Economista, Administrador de Empresas, médico, etc., que tenga una formación adecuada de la Estadística, será sin duda alguna, un mejor profesional en su campo.

La Paz, 6 de Marzo de 2008

LOS EDITORES

CAPÍTULO 3

MEDIDAS DE POSICIÓN

CAPÍTULO 3. MEDIDAS DE POSICIÓN

3.1 INTRODUCCION.

Los valores de una variable cuantitativa, según los capítulos anteriores, se organizan, ordenan y agrupan en clases, para su presentación en una tabla de distribución de frecuencias y una gráfica.

La curva de frecuencias es la gráfica que nos revela de manera sencilla las características o propiedades importantes de la estructura de la distribución o el comportamiento de la variable. Insistimos que estas propiedades esenciales se pueden resumir en unas cuantas **medidas descriptivas de tres tipos,**

- ***medidas de posición,***
- ***medidas de variabilidad y***
- ***medidas de forma.***

En este capítulo se estudia las medidas de posición o localización, dejando las otras dos para el siguiente capítulo.

Las figuras 1, 2 y 3 como la 4, 5 y 6 muestran tres diferentes posiciones o ubicaciones de distribución, de forma parecida.

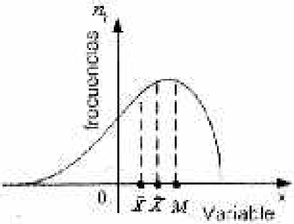


Figura 3.1

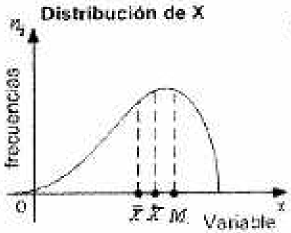


Figura 3.2

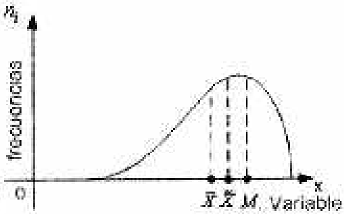


Figura 3.3

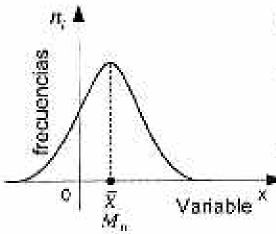


Figura 3.4

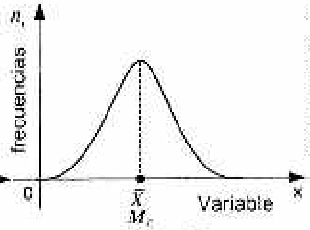


Figura 3.5

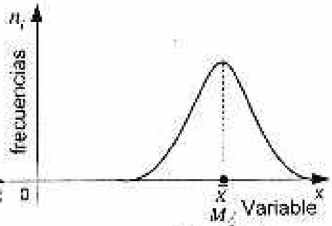


Figura 3.6

Entre las medidas de posición, las más importantes son las medidas de tendencia central o promedios.

3.2 MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL.

Los datos, valores de una variable, en muchos casos, tienden a agruparse alrededor de un punto central, llamado promedio. Un promedio para ser representativo de los datos debe cumplir con la base conceptual de que la mayoría de los datos se concentren a su alrededor, es decir, la variabilidad de los datos sea pequeña. En los trabajos de análisis estadístico, el promedio de una variable debe acompañarse con una medida de variabilidad.

Los promedios más conocidos y usados son:

a) La **media aritmética**, $M\left[X\right]$ o $\overline{X}$.

b) La **media geométrica**, M_G

c) La **media armónica**, M_H.

d) La **media cuadrática**, M_C.

e) La **mediana**, M_{el} o $\tilde{X}$.

f) La **moda** o valor modal, M_O.

3.3 MEDIA ARITMÉTICA

La media aritmética o simplemente **media**, es el promedio más importante y el más utilizado.

En el análisis estadístico de un conjunto de datos, el papel de la media, como de las otras medidas de tendencia central es reemplazarlos; es decir, es un número que los representa. Entonces la media será un promedio bueno, si es un valor representativo de prácticamente todos los datos. Una desventaja de la media como promedio o valor representativo es la existencia de valores extremos o atípicos (muy alejados del resto) en el conjunto de datos y la explicación lo encontrará en la definición.

DEFINICIÓN ***MEDIA ARITMÉTICA. (MEDIA).***

*"La **media aritmética** o brevemente **la media** de un conjunto de datos es igual a su suma dividida entre el número de datos".*

***Notación:** La media de la población se indica por μ y la media muestral de X, se indica por $\overline{X}$.*

***Notación General:** $M\left[X\right]$, se lee: "Media aritmética de X" o brevemente "Media de X".*

Un ejemplo sencillo: La media de 3, 3, 4, 6 y 7 que son cinco números es: La suma (3+3+4+6+7) = 23, dividida entre cinco, 23/5 = 4,6. Luego: "La **media** es **4,6**" de esos cinco datos. Aquí falta indicar la unidad de medida, ya que los datos corresponden a los valores de una variable, medidos con cierta unidad de medida. ¿Qué ocurrió?

Para el manejo algebraico, las fórmulas de la media de X, son:

FORMULAS: ***MEDIA DE LA VARIABLE X.***

A. Datos No Agrupados:

*1. POBLACIÓN (**parámetro** μ):* $\mu = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_N}{N} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} = \dfrac{\sum X}{N}$

*2. MUESTRA (**estadígrafo** $\overline{X}$):* $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \dfrac{\sum X}{n}$

B. Datos Agrupados:

1. Población.**(Parámetro μ):**

$$\mu = \frac{\overbrace{(x_1 + \cdots + x_1)}^{N_1} + \overbrace{(x_2 + \cdots + x_2)}^{n_2} + \cdots + \overbrace{(x_k + \cdots + x_k)}^{x_k}}{N}; \quad N_1, N_2, \cdots, N_k \text{ frecuencias de clase}$$

$$= \frac{x_1 N_1 + x_2 N_2 + \cdots + x_k N_k}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i N_i}{N} \quad ; \quad Donde: N_1 + N_2 + \cdots - N_k = N$$

2. Muestra.**(Estadígrafo $\overline{X}$):**

$$\overline{X} = \frac{\overbrace{(x_1 + \cdots + x_1)}^{n_1} + \overbrace{(x_2 + \cdots + x_2)}^{n_2} + \cdots + \overbrace{(x_k + \cdots + x_k)}^{n_k}}{n}; \quad n_1, n_2, \cdots, n_k \text{ frecuencias de clase}$$

$$= \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \cdots + x_k n_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n} \quad ; \quad Donde: n_1 + n_2 - \cdots + n_k = n$$

C.-OBSERVAR QUE:

1.- **Notación de la media**: μ es un parámetro y $\overline{X}$ es un estadígrafo.

2.- ΣX indica la suma sobre su campo de variación, que se sobreentiende.

3.- En datos agrupados X_i indica el punto medio de la clase i, con la frecuencia n_i

RESUMEN DE FÓRMULAS :

A. DATOS NO AGRUPADOS:

1. POBLACIÓN: $\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$; 2. MUESTRA: $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

B. DATOS AGRUPADOS:

1. POBLACIÓN: $\mu = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i N_i}{N}$; $Donde: N_1 + N_2 + \cdots + N_k = N$

2. MUESTRA: $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n}$; $Donde: n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$

EJEMPLO. 3.1	Datos no Agrupados: Cálculo de la Media

Una empresa desea conocer el tiempo promedio (media) requerido para elaborar cartas comerciales en una de sus oficinas. Un experto en normas laborales toma una muestra de la elaboración de ocho cartas comerciales, registrando el tiempo requerido al minuto más próximo, cuya lista, con datos ordenados, es: 3,3,4,6,6,6,7 y 9, ¿cuál es el promedio?.

SOLUCIÓN.

Denominaciones:

X = Tiempo requerido en minutos
n = 8 cartas comerciales
$\overline{X}$ = Media (Tiempo promedio)

Fórmula y Cálculos:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{3+3+4+6+6+6+7+9}{8} = \frac{44}{8} = 5,5 \Rightarrow \boxed{\overline{X} = 5,5} \;\triangleleft \;\clubsuit$$

RESPUESTA.- En la muestra, el promedio de tiempo para elaborar cartas comerciales en una de las oficinas de la empresa es de 5,5 minutos por carta. ¿Es una estimación del verdadero promedio?. ¡Su opinión!

EJEMPLO. 3.2	***Datos Agrupados: Cálculo de la Media***

Calcular el promedio salarial, (media), de los datos de la tabla 3.1

TABLA 3.1 Distribución de frecuencias de los salarios semanales de una muestra de 200 trabajadores (obreros) de la empresa.

SALARIO SEMANAL (Bs.)	Número de Trabajadores
240 -- 259	14
260 -- 279	40
280 -- 299	66
300 -- 319	50
320 -- 339	22
340 -- 359	8
Total	200

NOTA.-Salarios de aproximación a un boliviano.
FUENTE.- Datos hipotéticos.

Para cálculos manuales es conveniente preparar "Hojas de Trabajo".

Hoja de Trabajo No. 2

Salario Semanal (Bs.)	Fronteras De Clase	P.M. X_i	n_i	$X_i n_i$
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
240 -- 259	239.5 - 259.5	249.50	14	3493
260 -- 279	259.5 - 279.5	269.50	40	10780
280 -- 299	279.5 - 299.5	289.50	66	19107
300 -- 319	299.5 - 319.5	309.50	50	15475
320 -- 339	319.5 - 339.5	329.50	22	7249
340 -- 359	339.5 - 359.5	349.50	8	2796
Total	-	-	200	58900

Fórmula y Cálculos:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i n_i}{n} = \frac{58900}{200} = 294.5 \;\clubsuit$$

Explicación.- Se escribe la fórmula, luego se reemplazan con los datos de la Hoja de Trabajo y finalmente se divide. En la respuesta se toman tantos decimales como los requeridos sin olvidar agregar la unidad de medida.

RESPUESTA.- El **promedio** de los salarios semanales de la muestra de 200 obreros **es Bs.294,50**.

3.4 PROPIEDADES DE LA MEDIA ARITMÉTICA.

PRIMERA PROPIEDAD.

La suma de las desviaciones de los valores de la variable respecto a la media es cero.

(1ª.P) Datos no agrupados	***(1ª.P) Datos agrupados***
1) $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})=0$;	2) $\sum_{i=1}^{k}(x_i-\overline{x})n_i=0$

EJERCICIO.-Demostrar esta propiedad para datos no agrupados.

SEGUNDA PROPIEDAD.

Si Y es una función lineal de X ; es decir, $Y=aX+b$, entonces la media de Y ; es decir, la media de $(aX+b)$ es,

(2ª.P) $$M[aX+b]=a\overline{X}+b$$

CASOS:

1) $a=0 \Rightarrow M[b]=b$

2) $a=1 \Rightarrow M[X+b]=\overline{X}+b$

3) $b=0 \Rightarrow M[aX]=a\overline{X}$

TERCERA PROPIEDAD.

La media de los cuadrados de los desvios (desviaciones) de los valores de la variable respecto a una constante c es mínima, si c es la media.

(3ª.P) $$M\left[(X-c)^2\right]=min, \quad si \quad c=\overline{X}$$

EJERCICIO.-Demostrar esta propiedad para datos no agrupados.

CUARTA PROPIEDAD.

Si $\overline{X}_i$ es la media de n_i datos del grupo i, (i = 1,2,⋯,r), entonces la media de los datos de los r grupos, es:

(4ª.P) $$\overline{X}=\frac{n_1\overline{x}_1+n_2\overline{x}_2+\cdots+n_r\overline{x}_r}{n_1+n_2+\cdots+n_r}$$

NOTA: El tamaño de la muestra es $n=n_1+n_2+\cdots+n_r$

EJERCICIO.- Demostrar para dos grupos, con n_1 y n_2 datos.

3.5 MEDIA ARITMÉTICA PONDERADA.

Cuando no todos los datos tienen la misma importancia relativa en el conjunto, entonces cada dato x_i se pondera por un factor w_i, que refleje su importancia relativa en el conjunto.

DEFINICIÓN ***MEDIA PONDERADA***

La media o promedio ponderado de los valores de la variable X se indica y define por,

Parámetro $\mu_X = \dfrac{\sum_i x_i w_i}{\sum_i w_i}$; ***Estadígrafo*** $\overline{X} = \dfrac{\sum_i x_i w_i}{\sum_i w_i}$

OBSERVAR QUE: *Ambas fórmulas parecen iguales.¿Seguro?*

EJEMPLO. 3.3 ***Cálculo de la Media Ponderada***

Una compañía vende 4 líneas de productos, cuyos márgenes de utilidad y volumen de ventas se indica en la Tabla 3.2.¿Cuál es el margen de utilidad de la compañía (en su totalidad)?

TABLA 3.2. Ventas y Márgenes de Utilidad de 4 líneas de Productos

Línea	Margen de utilidad	Ventas Millones de Bs.
A	4,2%	60
B	5,6%	40
C	9,0%	7
D	13,5%	4
Total	32,3	111

SOLUCIÓN.

Los cálculos, conviene disponerlos en una hoja de trabajo.

HOJA DE TRABAJO No 2

Productos	Margen de Utilidad (%) x_i	Ventas Millones de Bs. w_i	Utilidades $w_i x_i$
A	4,2%	60	252
B	5,6%	40	224
C	9,0%	7	63
D	13,5%	4	54
Total	32,3	111	593

La **media aritmética sin ponderación** es,

$\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} X_i}{n} = \dfrac{32,3}{4} = 8,08\%$. Este resultado es incorrecto. ¿Por qué?

La **media, ponderada** con los volúmenes de ventas es,

$$\overline{X} = \frac{\sum_i x_i w_i}{\sum_i w_i} \Rightarrow \overline{X} = \frac{4.2\cdot60 + 5.6\cdot40 + 9.0\cdot7 + 13.5\cdot4}{111} = \frac{593}{111} = 5,34\%$$

RESPUESTA.- Luego el **margen de utilidad correcto** para la compañía (en su totalidad) es **5,34%.** ¿Por qué?

ARGUMENTACIÓN.- Si bien la media de los márgenes de utilidad de las 4 líneas de productos es 8,08%, no significa que sea correcto, ya que, el margen de utilidad de una empresa, como un todo, será conceptualmente el resultado de dividir la utilidad total entre las ventas totales de la empresa. Veamos los cálculos:

$$Margen\ de\ Utilidad = M_i = \frac{Utilidad}{Ventas}\times 100 \Rightarrow Utilidad = Ventas \times M_i \times \frac{1}{100}$$

Luego: ***Utilidad = Ventas x Margen de Utilidad***

UTILIDADES POR LÍNEAS DE PRODUCTOS:

A: Utilidad de A = 60·(0,042)	= 2,52
B: Utilidad de B = 40·(0,056)	= 2,24
C: Utilidad de C = 7·(0,09)	= 0,63
D: Utilidad de D = 4·(0,135)	= 0,54
UTILIDAD DE LA EMPRESA	= 5,93

$$Margen\ de\ Utilidad = \frac{Utilidad\ Total}{Ventas\ Totales} = \frac{5,93}{111} = 0,0534 \therefore \Rightarrow \boxed{M_x = 5,34\%}$$

Este valor de 5,34%, conceptual y metodológicamente correcto, coincide con la media aritmética ponderada de los márgenes de utilidad de las 4 líneas de productos. Valores x_i ponderados por el volumen de ventas w_i. En este negocio no todas las líneas de productos tienen la misma importancia, ¿verdad? **Definitivamente, la media sin ponderar, de 8,08% es incorrecto**. ¿Alguna duda?. Si existe, vuelva a revisar con calma y paciencia, no hay otra.

3.6 MEDIA GEOMÉTRICA.

Por definición, la media geométrica de n números es igual a la raíz n-ésima (enésima) del producto de estos números. Fórmula:

$$M_G = \sqrt[n]{x_1 \bullet x_2 \ldots \bullet x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \clubsuit$$

Ejemplo sencillo: ¿Cuál la media geométrica de 3,5,5 y 7?.

FORMULAS Y CALCULOS:

$$M_G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \sqrt[4]{3 \bullet 5 \bullet 5 \bullet 7} = \sqrt[4]{525} \doteq 4,7867 \clubsuit$$

RESPUESTA: La media geométrica es: $\therefore \boxed{M_G = 4,79}$

La media geométrica se aplica cuando las x_i presentan una variación acumulativa; es decir, son tasas de variación de periodo a periodo, como ocurre con los precios (inflación), el crecimiento de la población, etc.

Si r_i es la tasa del tantos por uno, entonces $x_i = (1 + r_i)$,i = 1,2,⋯,n periodos, entonces la media geométrica de X se emplea para calcular la tasa promedio de variación, r, de series económicas o comerciales de periodo a periodo en el tiempo: Series de: precios, ingresos, ventas, PIB, población, etc.

Si r es la tasa de variación de q_1 en un periodo. Es $q_2 = q_1 + r = q_1(1+r)$. Luego q_2 es igual a q_1 multiplicado por el factor (1+r), donde r es la tasa de variación

La Tasa de Inflación.- De un periodo es la tasa de variación de los precios. Corrientemente se expresa en porcentajes, (%).

$$r_i = \frac{p_i - p_{i-1}}{p_{i-1}}; \qquad (\alpha)$$

Donde: p_i = *precios en el periodo i*
p_{i-1} = *precios en el periodo anterior* $(i-1)$
r_i = *tasa del cambio porcentual de precios del periodo* $(i-1)$ *al periodo i.*

EJEMPLO.

Los precios de un artículo para 2004, 2005, 2006 y 2007 son Bs. 10, 20, 30 y 40 respectivamente. Calcular las tasas de inflación aplicando (α). Para $i = 1,2,3$ y 4.

$$r_2 = \frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{20-10}{10} = 1,00 \Rightarrow (1 + r_2) = 2,00$$

$$r_3 = \frac{p_3 - p_2}{p_2} = \frac{30-20}{20} = 0,50 \Rightarrow (1 + r_3) = 1,50$$

$$r_4 = \frac{p_4 - p_3}{p_3} = \frac{40-30}{30} = 0,333333 \Rightarrow (1 + r_4) = 1,33$$

El promedio de la variación anual de precios para el periodo 2004 - 2007, es:

$$M_G = \sqrt[3]{(2,00)\cdot(1,50)\cdot(1,33)} = 1,586077 = 1 + r \Rightarrow r = 0,586077 \doteq 58,61\%$$

RESPUESTA.- Luego la tasa promedio de variación anual de los precios del artículo en el lapso de 2004 a 2007 es **58,61%.**

COMPROBACIÓN.- Precio en el 2007 es 40, Si en el 2004 es Bs. 10.-. Calculando con la variación promedio anual de 0,5861

$$p_{2007} = 10\cdot(1,5861)\cdot(1,5861)(1,5861) = Bs.39,90 \cong Bs.40.$$

La aproximación se debe al redondeo del dato a 1,33. Si se toma 1,333333 se tiene M_G = 1,5874 entonces r = 58,74%. Un nuevo calculo.

$$p_{2007} = 10\cdot(1,5874)\cdot(1,5874)(1,5874) = Bs.39,9999 \cong Bs.40.$$

Ahora, prácticamente es Bs.40.

Respuesta: La tasa promedio de variación anual en los precios de 2004 a 2007 con mayor aproximación es **58,74%**.

APLICACIÓN. 3.1 INTERES COMPUESTO. Depósito Bancario por n periodos

1. **Tasas diferentes en cada Periodo**

Considerar:

1) $r_1, r_2, r_3, \cdots, r_n = Tasas\ de\ los\ periodos\ 1,2,3,\cdots,n$

2) $a_0 = Capital\ inicial\ del\ periodo\ uno$

3) $a_n = Capital\ final\ al\ final\ del\ periodo\ n.$

4) El capital final de un periodo es el inicial del periodo siguiente.

5) Si $1 en un periodo llega a ser $(1+r)$, entonces A$ se convierte en $A(1+r)$.

Periodo	Capital Inicial	Monto De Bs.1 (Capital De 1$ + Intereses)	Capital Final a_n
[1]	[2]	[3]	[4]
1	a_0	$(1+r_1)$	$a_0(1+r_1)$
2	$a_0(1+r_1)$	$(1+r_2)$	$a_0(1+r_1)(1+r_2)$
3	$a_0(1+r_1)(1+r_2)$	$(1+r_3)$	$a_0(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)$
$n\ldots?$			$a_n = ?$
	Por analogia **FORMULA:** $a_n = a_0(1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_n)$		
	OBSERVAR QUE: Las operaciones y columnas: [2] x [3] = [4]		

2. Tasa constante o Tasa promedio por Periodo

Periodo	Capital Inicial	MONTO de Bs.1 (Capital de 1$ + intereses)	Capital Final a_n
[1]	[2]	[3]	[4]
1	$a_0 r$	$(1+r)$	$a_0(1+r)$
2	$a_0(1+r)$	$(1+r)$	$a_0(1+r)^2$
3	$a_0(1+r)^2$	$(1+r)$	$a_0(1+r)^3$
$n\ldots?$			$a_n=?$
Por analogía **FORMULA:** $a_n = a_0(1+r)^n$			
OBSERVAR QUE: Las operaciones: **[2] x [3] = [4]**			

Si las capitales inicial y final son iguales en ambas alternativas, entonces podemos compararlos. Si el capital final es el mismo se tiene,

$$a_n = a_0(1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_n) = a_0(1+r)^n$$

Simplificando a_0, extrayendo la raíz n-ésima y haciendo $x_i = 1+r_i$ se tiene,

$$M_G = \sqrt[n]{(1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_n)} = \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} = \sqrt[n]{(1+r)^n} = (1+r)$$

Entonces $\boxed{M_G = (1+r)}$ de donde la tasa promedio (constante) por periodo es $r = (M_G - 1)$

Luego la tasa promedio por periodo o tasa única es igual a la media geométrica menos uno. Para un periodo de n años; la tasa anual de crecimiento, r, se determina mediante fórmula del interés compuesto: $a_n = a_0(1+r)^n$. Luego:

$$r = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}} - 1$$

Como la tasa promedio por periodo es r. Además $M_G = r+1$, entonces:

Primero calcular $M_G = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}}$ *y luego:* $r = M_G - 1$

Así por ejemplo, Si el día de hoy recoge Ud. del Banco la suma de Bs.4502,20 después de 6 años de un deposito de Bs.3000, ¿cuál fue la tasa de interés promedio?.

Primero calculamos la media geométrica,

$$M_G = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}} = \sqrt[6]{\frac{4502,20}{3000}} = 1,07 \quad Luego: r = 7\%.$$

3.7 MEDIA CUADRÁTICA.

Por definición es la raíz cuadrada de la media aritmética de los cuadrados de los datos. Fórmula:

$$M_C = \sqrt{\frac{\sum_i x_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$$

Ejercicio.- Escribir la fórmula para datos agrupados (distribución de frecuencias).

3.8 MEDIA ARMÓNICA.

Por definición, la media armónica de un conjunto de datos es el recíproco de la media aritmética de los recíprocos de los datos. Fórmula:

$$\boxed{M_{H} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}}$$

Ejercicio.- Escribir la fórmula para la media ponderada de los recíprocos ¿Cuál sería la interpretación en el caso de velocidades ?

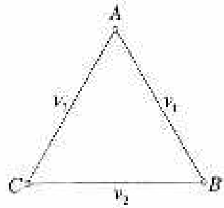
Aplicación a variables como velocidades, rendimientos, cambios, productividades, etc.

EJEMPLO. 3.4	***Media Armónica***

Las ciudades A, B y C equidistan una de otra. Un taxista viaja de A hasta B a 50 Km/h de B a C a 60 Km/h y de C hasta A a 70km/h.

a) Halle la velocidad promedio en todo el viaje
b) Comente.

SOLUCIÓN.-



a) Los datos:

v = velocidad media

$v_1 = 50^{Km}/_{h}$; $v_2 = 60^{Km}/_{h}$; $v_3 = 70^{Km}/_{h}$

$d = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$ = equidistancias

$e = 3d =$ distancia en todo el viaje.

Por el momento suponga: Que la velocidad promedio de velocidades diferentes entre puntos equidistantes es igual a la media armónica de las velocidades:

Fórmula de la media armónica $\left\{ \boxed{M_H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}} \right.$

Reemplazando: $$v = \frac{3}{\frac{1}{50}+\frac{1}{60}+\frac{1}{70}} =$$

$$v = \frac{3}{\frac{107}{2100}} = \frac{6300}{107} = 58.8785 \therefore \boxed{v = 58.9^{Km}/_{h}}$$

b) Comentario: La velocidad promedio del taxista en todo el viaje es 58,9 km/h.
Para su tranquilidad, este problema se explica con cierto detalle más adelante en la sección de los Problemas Resueltos.

3.9 MEDIANA.

La mediana es el valor (ó dato) que divide en dos mitades los datos ordenados. Entonces, ordenados los datos de menor a mayor, la mediana es el valor que la divide en dos mitades. 50% menores o iguales y el otro 50% mayores o iguales que la mediana.

Se dice que la mediana es un **estadístico resistente**; porque, no influyen mayormente en la mediana los valores extremos de la variable. Es una clara ventaja sobre la popular media aritmética.

1. DATOS NO AGRUPADOS:

Caso: n impar,

Hay un central que es la mediana. Ej. Datos ordenados, 2,2,4,5,5,6 y 6. Donde n = 7. El central es el cuarto. Luego M_e = 5. La posición es igual al número de datos más uno y la suma dividida entre dos. Aquí la cuarta posición

Formula: $M_e = X_{\frac{n+1}{2}} = X_{\frac{7+1}{2}} = X_4 = 5 \therefore M_e = 5$

Caso: n par,

Hay dos centrales. Por convención la mediana es la media de los dos centrales. Ej. 3,4,5,7,9 y 9. Los dos centrales son 5 y 7, entonces,

Formula:

$M_e = \dfrac{X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}}{2}$; Donde: X_i y X_{i+1} son los 2 centrales. Previo; calcular $\dfrac{n+1}{2}$

$$M_e = \frac{X_{\frac{6}{2}} + X_{\frac{6}{2}+1}}{2} = \frac{X_3 + X_4}{2} = \frac{5+7}{2} = \frac{12}{2} = 6 \quad \Rightarrow M_e = 6$$

2. DATOS AGRUPADOS:

Previo: Calcular $\frac{n}{2}$ para conocer la clase mediana o grupo mediano. Calcular la mediana en el grupo mediano,

$$M_e = x'_{i-1} + \frac{\left(\frac{n}{2} - N_{i-1}\right)\Delta}{n_i}$$

EJEMPLO. 3.5	***Datos Agrupados – cálculo de la Mediana. >Datos tabla 2.1.***

Cálculos:

Previo: $\dfrac{n}{2} = \dfrac{50}{2} = 25$. Entonces la clase mediana es la tercera clase. Observar las frecuencias acumuladas de la Hoja de Trabajo No2. Reemplazando los datos en la fórmula,

$$M_e = 2,45 + \frac{\left(\frac{50}{2} - 15\right)0,7}{14} = 2,45 + 0,50 = 2,95 \quad \therefore \quad M_e = Bs.2950 ♣$$

RESPUESTA.- La mediana es Bs.2950. Significa que en el conjunto total de datos analizados el 50% de los obreros ganan menos o igual a la mediana de Bs.2950 y el otro 50% ganan más o igual a dicha suma.

ALGO MÁS: Con los datos originales antes de agruparlos y obtener la Tabla 2.1 de distribución de frecuencias, se puede calcular la mediana de los datos no agrupados con la información del diagrama de "Tallo y Hojas". Los datos están ordenados. Los centrales, lugares 25 y 26 son Bs.2800 y 2900.

FÓRMULA:

$$M_e = \frac{X_{\frac{50}{2}} + X_{\frac{50}{2}+1}}{2} = \frac{X_{25} + X_{26}}{2} = \frac{2800 + 2900}{2} = 2850 \quad \clubsuit$$

RESPUESTA.- Con los datos no agrupados, la mediana de la muestra de los sueldos de 50 trabajadores de la empresa ACE es Bs.2850.

Participación: Comente ambos resultados.

3.10 MODA O VALOR MODAL.

El modo o valor modal es el valor de la variable con la frecuencia mayor. Cuando la curva de frecuencias correspondiente a la distribución de frecuencias sólo tiene un máximo, decimos que es unimodal, pero una distribución de frecuencias podría ser bimodal o multimodal.

En las variables cualitativas en escala nominal la moda es un indicador estadístico valioso por su representatividad.

Indicamos a continuación dos criterios expresados simbólicamente,

FÓRMULAS.

MÉTODO 1. $$M_0 = x'_{i-1} + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \cdot \Delta$$

Donde: *i* es la clase modal y

$d_1 = n_i - n_{i-1}$
$d_2 = n_i - n_{i+1}$

Las diferencias d_1 y d_2 de la frecuencia de la clase modal y las frecuencias de las clases anterior (i-1) y posterior (i+1). Donde: Δ es la amplitud de la clase modal.

METODO 2.1.- Cuando la amplitud de la clase, Δ es constante,

$$M_0 = x'_{i-1} + \frac{n_{i+1}}{n_{i-1} + n_{i+1}} \Delta$$

MÉTODO 2.2.- Cuando la amplitud de la clase, Δ, no es constante.

$$M_0 = x'_{i-1} + \frac{d_{i+1}}{d_{i-1} + d_{i+1}} \Delta_i$$

Donde: $d_j = \frac{n_j}{\Delta_j}$; $\forall j$ *(densidades de las frecuencias)*

3.11 LAS CUANTILAS.

Son medidas de posición que divide el conjunto de datos ordenados en r partes iguales y se llama cuantilas de orden r. Por consiguiente, la "Mediana" que divide en dos partes iguales es una cuantila de orden dos (r=2).

El orden r de una cuantila puede ser cualquiera. De mayor uso, son:

1). La **Mediana** que divide en dos, M_e .
2). Las **Cuartilas** en 4. Son tres: Q_1 , Q_2 y Q_3 .
3). Las **Decilas** en 10. Son nueve: D_1 ,D_2 ,D_3 ⋯ D_9.
4). Las **Percentilas** en 100. Son 99: P_1 ,P_2 ,⋯,P_{50} , ,P_{75} , ,P_{99}.

Las fórmulas para calcularlas en datos no agrupados y agrupados se presentan a continuación.

DATOS NO AGRUPADOS

1. CUARTILAS.-

Una fórmula propuesta (de varias) es,
Para el **primer cuartil**, Q_1 , es: $Q_1 = X_{\frac{n+1}{4}}$

Para el **tercer cuartil**, Q_3 , es: $Q_3 = X_{\frac{3(n+1)}{4}}$

Observar que la cuarta parte de n+1, $\frac{n+1}{4}$,se multiplica por 3 para el tercer cuartil. Para segundo cuartil multiplicar por 2 y para el primero, por 1.

2. DECILAS.-

Una fórmula propuesta (de varias) es:

Para el quinto decil, D_5 , es: $D_5 = X_{\frac{5(n+1)}{10}} = M_e$

Observar que: 1) La décima parte, $\dfrac{n+1}{10}$, se multiplica por 5 para el quinto decil, entonces, por ej. para el octavo decil se multiplicará por 8.

2) El quinto decil es igual a la mediana. ¿Porqué?.

3. PERCENTILAS.-

Fórmula de la percentila 70 (septuagésima percentila). $P_{70} = X_{\frac{70(n+1)}{100}}$

EJERCICIO.- Los datos de una muestra de tamaño 17 son,

23, 25, 25, 27, 29, 33, 34, 37, 44, 45, 46, 50, 53, 56, 58, 61 y 75.
Se pide calcular las siguientes cuantilas:
1). Q_2 , 2) Q_3 , 3)D_7 , 4) D_2 , 5) P_{50} , 6) P_{75} , 7) M_e, 8) P_{25}

DATOS AGRUPADOS

Se proponen fórmulas para las cuartilas, decilas y percentilas con el mismo criterio, ubicándose primero en la clase del cuantil buscado

El tamaño n se divide por el orden r de la cuantila y después se multiplica por la cuantila deseada. Por ejemplo, para la percentila 20, El tamaño n se divide por 100 y luego se multiplica por 20.

1. CUARTILAS.-

Una fórmula propuesta es,

Tercer cuartil: Primero es ubicar la clase donde está el cuartil que se busca y después aplicar la fórmula. En este caso, la clase del tercer cuartil.

$$Q_3 = X'_{i-1} + \frac{\left(\frac{3n}{4} - N_{i-1}\right)\Delta_i}{n_i}$$

Donde:

1). X'_{i-1} = es la frontera inferior de la clase del tercer cuartil; es decir, la clase que contiene Q_3.

2). N_{i-1} = Frecuencia acumulada anterior al grupo del tercer cuartil.

3). n_i = Frecuencia de la clase i, que contiene Q_3

2. DECILAS.-

La fórmula del quinto decil.

$$D_5 = X'_{i-1} + \frac{\left(\frac{5n}{10} - N_{i-1}\right)\Delta_i}{n_i}$$

Recuerde. Primero ubicarse en la clase del quinto decil y después aplicar la fórmula.

3. PERCENTILAS.-

Fórmula de la percentila 70 (septuagésima percentila).

$$P_{70} = X'_{i-1} + \frac{\left(\frac{70n}{100} - N_{i-1}\right)\Delta_i}{n_i}$$

Previo: Determinar la clase del percentil 70 y después aplicar la fórmula.

EJEMPLO. 3.6 CALCULO DE MEDIDAS DE POSICIÓN EN DATOS AGRUPADOS

Con datos de la Tabla 2.1. Salarios empresa ACE.

En la Hoja de Trabajo No. 2. del capítulo anterior, que se muestra aquí, sólo utilizaremos las columnas [2] (fronteras), la columna [4] (frecuencias absolutas) y la columna [7] (frecuencias acumuladas absolutas). Si esta Hoja no la tiene a la mano, entonces elaborar sólo las columnas indicadas.

HOJA DE TRABAJO. No. 2

Fronteras $x'_{i-1} - x'_i$	Marca de Clase. PM. X_i	Frecuencias. Absolutas. n_i	Frecuencias Acumuladas Absolutas N_i	[9]=[3] x [4] $X_i \times n_i$
[2]	[3]	[4]	[7]	[9]
1.05 - 1.75	1.4	6	6	8.4
1.75 - 2.45	2.1	9	15	18.9
2.45 - 3.15	2.8	14	29	39.2
3.15 - 3.85	3.5	13	42	45.5
3.85 - 4.55	4.2	7	49	29.4
4.55 - 5.25	4.9	0	49	0.0
5.25 - 5.95	5.6	1	50	5.6
SUMAS	-.-	50	-.-	**147.0**

1). CALCULO DE LAS TRES CUARTILAS.

a). PRIMER CUARTIL. $Q_1 = X'_{i-1} + \frac{\left(\frac{n}{4} - N_{i-1}\right)\Delta_i}{n_i}$

Reemplazando: $$Q_1 = 1{,}75 + \frac{(12{,}5 - 6)\cdot 0{,}7}{9} = 1{,}75 + 0{,}51 = 2{,}26 \quad \clubsuit$$

b). SEGUNDO CUARTIL. $$Q_2 = X'_{i-1} + \frac{\left(\frac{2n}{4} - N_{i-1}\right)\Delta_i}{n_i}$$

Reemplazando: $$Q_2 = 2{,}45 + \frac{(25 - 15)\cdot 0{,}7}{14} = 2{,}45 + 0{,}5 = 2{,}95 \quad \clubsuit$$

c). TERCER CUARTIL. $$Q_3 = X'_{i-1} + \frac{\left(\frac{3n}{4} - N_{i-1}\right)\Delta_i}{n_i}$$

Reemplazando: $$Q_3 = 3{,}15 + \frac{(37{,}5 - 29)\cdot 0{,}7}{13} = 3{,}15 + 0{,}46 = 3{,}61 \quad \clubsuit$$

2). CALCULO DEL CUARTO DECIL.

$$D_4 = X'_{i-1} + \frac{\left(\frac{4n}{10} - N_{i-1}\right)\Delta_i}{n_i}$$

Reemplazando: $$D_4 = 2{,}45 + \frac{(20 - 15)\cdot 0{,}7}{14} = 2{,}45 + 0{,}25 = 2{,}70 \quad \clubsuit$$

3). CALCULO DE PERCENTILAS.

a). PERCENTIL 90. $$P_{90} = X'_{i-1} + \frac{\left(\frac{90n}{100} - N_{i-1}\right)\Delta_i}{n_i}$$

Reemplazando: $$P_{90} = 3{,}85 + \frac{(45 - 42)\cdot 0{,}7}{7} = 3{,}85 + 0{,}30 = 4{,}15 \quad \clubsuit$$

b). PERCENTIL 10. $$P_{10} = X'_{i-1} + \frac{\left(\frac{10n}{100} - N_{i-1}\right)\Delta_i}{n_i}$$

Reemplazando: $$P_{10} = 1{,}05 + \frac{(5 - 0)\cdot 0{,}7}{6} = 1{,}05 + 0{,}58 = 1{,}63 \quad \clubsuit$$

4). CALCULO DE MEDIA, MEDIANA Y MODA.

a). MEDIA. $$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} X_i n_i}{n} = \frac{147{,}0}{50} = 2{,}94 \quad \clubsuit$$ **(H.de T. ver col. 9)**

b). MEDIANA. $$M_e = X'_{i-1} + \frac{\left(\frac{n}{2} - N_{i-1}\right)\Delta_i}{n_i}$$

Reemplazando: $$M_e = 2{,}45 + \frac{(25 - 15)\cdot 0{,}7}{14} = 2{,}45 + 0{,}5 = 2{,}95 \quad \clubsuit$$

(El mismo resultado del segundo cuartil)

c) **MODA.** $M_o = x'_{i-1} + \dfrac{d_1}{d_1 + d_2} \cdot \Delta$

Reemplazando:

$d_1 = 14 - 9 = 5$
$d_2 = 14 - 13 = 1$

$M_o = 2,45 + \dfrac{5}{5+1} \cdot 0,7 = 2,45 + 0,583 = 3,03$ ♣

5). MEDIDAS DE POSICIÓN: RESUMEN DE RESPUESTAS.

1 Primer cuartil:	*Bs.2260*
2. Segundo cuartil:	*Bs.2950*
3. Tercer cuartil:	*Bs.3610*
4. Cuarto decil	*: Bs.2700*
5. Percentil 90:	*Bs.4150*
6. Percentil 10:	*Bs.1630*
7. Media:	*Bs.2940*
8. Mediana:	*Bs.2950*
9. Moda:	*Bs.3030*

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS RESUELTOS
MEDIDAS DE POSICIÓN

PROBLEMA 1.- Propiedad de la media

Si $Z_i = X_i + Y_i; i = 1,2,\ldots,n$. Demuestre que $\overline{Z} = \overline{X} + \overline{Y}$.

DEMOSTRACIÓN.-

Por definición: $$\overline{Z} = \frac{\sum_i Z_i}{n} = \frac{\sum_i (X_i + Y_i)}{n} =$$

$$= \frac{\sum_i X_i + \sum_i Y_i}{n} = \frac{\sum_i X_i}{n} + \frac{\sum_i Y_i}{n} = \overline{X} + \overline{Y}$$

Luego: $\boxed{\overline{Z} = \overline{X} + \overline{Y}}$

PROBLEMA 2.- Media de datos con un desvío constante

Dados n números $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sus desviaciones o desvíos respecto a un número arbitrario c, son: Si $\delta = X_i - c_i; i = 1,2,\ldots,n$

Demuestre que: $\overline{X} = c + \overline{\delta}$

SOLUCIÓN.-

Despejando, $X_i = c + \delta_i; i = 1,2,\ldots,n$

Por definición; $$M[X] = \overline{X} = \frac{\sum_i X_i}{n} = \frac{\sum_i (c + \delta_i)}{n} = \frac{nc + \sum_i \delta_i}{n}$$

$$= \frac{\cancel{n}c}{\cancel{n}} + \frac{\sum_i \delta_i}{n} = c + \overline{\delta}\,\overline{X} = c + \overline{\delta}$$

$$\therefore \boxed{\overline{X} = c + \overline{\delta}}$$

NOTA.-En una distribución de frecuencias de clase constante, los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, serían los puntos medios de clase.

PROBLEMA 3.- Media de dos dígitos

El tiempo en horas por semana de 30 usuarios de INTERNET que pasaron en línea, son:

3	3	4	4	4	4	4	5	5	6
6	6	6	6	6	6	7	7	8	8
8	8	9	10	10	10	10	50	67	80

a) Calcular la media.

b) ¿Diría Ud. Que este promedio, calculada en (a) es típico de los 30 tiempos?

SOLUCIÓN.-

a) Media. $\overline{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{370}{30} = 12.3 \therefore \boxed{\overline{x} = 12.3 \ horas}$

b) La media de 12.3 horas no es "típica o representativa" de los tiempos. Observe que 23 de los 30 tiempos son de un solo dígito. Una gran desventaja o limitación de la media es que se ve afectada o influenciada por "valores extremos"

PROBLEMA 4.- Cálculo de la media aritmética para datos agrupados

La tabla siguiente muestra una distribución de frecuencias de los salarios semanales de 65 empleados de la empresa T&V.

Salarios (Bs.)	Número de empleados
250.00 – 259.99	8
260.00 – 269.99	10
270.00 – 279.99	16
280.00 – 289.99	14
290.00 – 299.99	10
300.00 – 309.99	5
310.00 – 319.99	2
Total	**65**

a) Calcular la media Obtenga,
   1) Usando la fórmula (método largo)
   2) Usando el método de codificación (método, corto)

b) Calcule el porcentaje,
   1) De obreros que ganan menos de Bs. 280 a la semana
   2) De obreros que reciben por semana Bs. 260 ó más, pero menos de Bs. 300

SOLUCIÓN.-

a) Calcular

1) Media.-

Fórmula $$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i n_i}{n} = \frac{18.185}{65} = 279,7692$$

Luego: $\boxed{\bar{X} = Bs.279.77}$

Salarios (Bs.)	n_i	PM x_i	$n_i x_i$	$T = 285; \Delta = 10$ u_i	$u_i n_i$
250.00 – 259.99	8	255	2040	-3	-24
260.00 – 269.99	10	265	2650	-2	-20
270.00 – 279.99	16	275	4400	-1	-16
280.00 – 289.99	14	285	3990	0	-60/26
290.00 – 299.99	10	295	2950	1	10
300.00 – 309.99	5	305	1525	2	10
310.00 – 319.99	2	315	630	3	6
TOTAL	65	-.-	18185	0	-34

NOTA.-Se considera las clases un intervalo cerrado –abierto,[...)

2) Media.- Método de codificación.

Hacer: u = código; T = punto arbitrario=285; Δ = amplitud de clase= 10

Se define: $$u = \frac{x - T}{\Delta} \Rightarrow x = T + \Delta u$$

Así: $\boxed{\bar{x} = T + \Delta \bar{u}}$; $$\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i n_i}{n}$$

Reemplazando en, $\bar{u} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} u_i n_i}{n} = \dfrac{-34}{65} = -0{,}5230769$

Reemplazando en: $\bar{x} = T + \Delta\bar{u} = 285 + 10(-0{,}523) = 285 - 5{,}23 = 279{,}77$

Luego: $\bar{x} = Bs.279{,}77$

NOTA.1.El método de codificación de amplio uso en el pasado, facilitaba el cálculo manual.¿Está de acuerdo con está afirmación?

b) Calcule el porcentaje,

1) PORCENTAJE: Los que ganan menos de Bs. 280.

Las 3 primeras clases ganan menos de Bs. 280.- y suman $(n_1 + n_2 + n_3) = 34$ obreros de un total de 65. Esto representa el 52,3%, $\left(\acute{o}\ \dfrac{34}{65}\times 100\right)$

2) PORCENTAJE: De los que reciben entre 260 y 300 bolivianos, inclusive 260 y excluyendo 300 bolivianos.

Conformada por los obreros de 4 clases, de la segunda a la quinta, $(n_2 + n_3 + n_4 + n_5) = 10 + 16 + 14 + 10 = 50$ de un total de 65 obreros.

Porcentaje $= \dfrac{50}{65}\times 100 = 76{,}92\%$. Luego: El porcentaje es de 76,9% de obreros que ganan Bs. 260 ó más, pero menos de Bs. 300.

PROBLEMA 5.- En base a promedios calcule otro promedio

El promedio de las calificaciones en un curso de 60 alumnos fue 58. Los primeros 10 obtuvieron en promedio 80 y los últimos 20 obtuvieron 42. Calcule el promedio de los restantes alumnos.

SOLUCIÓN:

Datos:

$n = 60\ alumnos\ con\ un\ promedio\ \bar{X} = 58$

$n_1 = 10\ alumnos\ con\ un\ promedio\ \bar{X}_1 = 80$

$n_3 = 20\ alumnos\ con\ un\ promedio\ \bar{X}_3 = 42$

Pregunta: $n_2 = 30\ alumnos, ¿\ con\ un\ promedio\ \bar{X}_2 = ?$

FORMULA:

$$\bar{X} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3}{n_1 + n_2 + n_3}$$

$$\bar{X}_2 = \frac{n\bar{x} - n_1\bar{x}_1 - n_3\bar{x}_3}{n_2}$$

$$= \frac{60\times 58 - 10\times 80 - 20\times 42}{30}$$

$$= \frac{1840}{30} = 61{,}33 \doteq 61 <$$

Luego: El promedio de los restantes 30 alumnos es: $\bar{X}_2 = 61$

PROBLEMA 6.- Cálculo del Promedio Móvil

En una técnica de pronósticos, que se llama promedios móviles, se emplea la media de los n periodos más recientes para pronosticar el valor siguiente en una serie temporal de datos. Con un promedio móvil de tres periodos, se usan los tres más recientes para calcular el pronóstico. Se tiene un producto cuya demanda, durante los tres primeros meses de este año fue: enero 800 unidades, febrero 750 unidades y marzo 900 unidades.

a) ¿Cuál es el pronóstico para abril con promedio móvil de tres meses?

b) Una variación de esta técnica se llama "promedios móviles ponderados. La ponderación, permite que los datos de la serie más reciente reciban más peso o más importancia en el cálculo del pronóstico. Por ej., en un promedio móvil ponderado de tres meses podría asignarse un peso de 3 a los datos de un mes de antigüedad, de 2 para los de dos meses y de 1 para los de tres meses de antigüedad. Con los datos anteriores calcule un promedio móvil ponderado de tres meses, que será el pronóstico para abril.

SOLUCIÓN:

x_1, x_2 y x_3 la demanda del producto.

a) Sea m_4 = el promedio móvil de tres meses (pronóstico para abril)

$$m_4 = \frac{\overset{x_1}{\cancel{pf_1}} + \overset{x_2}{\cancel{pf_2}} + \overset{x_3}{\cancel{pf_3}}}{3} = \frac{800 + 750 + 900}{3}$$

$$= \frac{2450}{3} = 816{,}67 \doteq 816 \triangleleft$$

b) Sea: w_1, w_2 y w_3 las ponderaciones de los meses enero, febrero y marzo respectivamente

$$m_4' = \frac{\overset{w_1}{n_1 x_1} + \overset{w_2}{n_2 x_2} + \overset{w_3}{n_3 x_3}}{n_1 + n_2 + n_3} = \frac{1.800 + 2(750) + 3(900)}{6}$$

$$= \frac{5.000}{6} = 833{,}33 \doteq 833u < (\textit{Pronóstico Abril})$$

PROBLEMA 7.- Media Armónica

Las ciudades A, B y C equidistan una de otra. Un taxista viaja de A hasta B a 50 Km/h de B a C a 60 Km/h y de C hasta A a 70km/h.

c) Halle la velocidad promedio en todo el viaje

d) Comente.

SOLUCIÓN.-

b) Determinar los datos:

V = velocidad media

$v_1 = 50 \, Km/h; \quad v_2 = 60 \, Km/h; \quad v_3 = 70 \, Km/h$

$d = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$ = equidistancias

$e = 3d$ = distancia en todo el viaje.

DEDUCCIÓN:

Espacio: $e = v \cdot t; t = t_1 + t_2 + t_3$

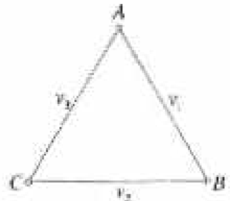


Figura 3.7

$$\left.\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{d}{v_1} \\ t_2 = \dfrac{d}{v_2} \\ t_3 = \dfrac{d}{v_3} \end{array}\right\} v = \frac{e}{t} = \frac{3d}{t_1+t_2+t_3} = \frac{3d}{\dfrac{d}{v_1}+\dfrac{d}{v_2}+\dfrac{d}{v_3}} = \frac{3}{\dfrac{1}{v_1}+\dfrac{1}{v_2}+\dfrac{1}{v_3}}$$

Ésta es una media armónica

Reemplazar: $v = \dfrac{3}{\dfrac{1}{50}+\dfrac{1}{60}+\dfrac{1}{70}} =$

$$v = \frac{3}{\dfrac{107}{2100}} = \frac{6300}{107} = 58.8785 \therefore \boxed{v = 58.9\, ^{km}/_{h}}$$

c) Cabe notar la velocidad promedio del taxista, con velocidades diferentes entre tres ciudades equidistantes es igual a la media armónica de las velocidades:

$$\left.\begin{array}{c} \textit{Fórmula de} \\ \textit{la media} \\ \textit{armónica} \end{array}\right\} \boxed{M_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{x_i}}}.$$

PROBLEMA 8.- Media Armónica Ponderada

a) Un avión recorre las distancias d_1, d_2 y d_3 kilómetros a velocidades v_1, v_2 y v_3 $^{km}/_{h}$ respectivamente. Demuestre que la velocidad promedio está dada por v, donde:

$$\frac{d_1+d_2+d_3}{v} = \frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2} + \frac{d_3}{v_3}$$

Ésta es una media armónica ponderada

b) Calcule v si:

$$d_1 = 2.500, d_2 = 1.200, d_3 = 500, v_1 = 500, v_2 = 400 \text{ y } v_3 = 250$$

SOLUCIÓN.-

a) **DEMOSTRACIÓN:**

Por definición: $\boxed{M_n = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{k}\left(\dfrac{1}{x_i}\right) n_i}}; n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$

Física: espacio= velocidad x tiempo

$$e = v \cdot t \quad (1) \Longrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{e}{v} & (2) \\ v = \dfrac{e}{t} & (3) \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= \frac{d_1}{v_1} \\ t_2 &= \frac{d_2}{v_2} \\ t_3 &= \frac{d_3}{v_3} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\textit{Pero} \quad e = d_1 + d_2 + d_3 \\ &\qquad\qquad t = t_1 + t_2 + t_3 \\ &\textit{Por (2) tiempo:} \quad \frac{e}{v} = t \\ &\textit{Reemplazar, se tiene lo que queriamos demostrar} \\ &\qquad \frac{d_1 + d_2 + d_3}{v} = \frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2} + \frac{d_3}{v_3} < \end{aligned}$$

Despejando:

$$v = \frac{d_1 + d_2 + d_3}{\dfrac{d_1}{v_1} + \dfrac{d_2}{v_2} + \dfrac{d_3}{v_3}} = \frac{d}{\sum_{i=1}^{3}\left(\dfrac{1}{v_i}\right) d_i}$$

Claramente es la media armónica ponderada

OBSERVAR QUE:

1) d_1, d_2 y d_3 son las ponderaciones

2) La velocidad promedio es la media armónica de las velocidades $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Si las distancias $d_1, d_2, \ldots, d_k$ no son iguales, entonces son las ponderaciones de la media armónica ponderada.

b) CALCULO DE LA VELOCIDAD PROMEDIO

Fórmula:

$$v = \frac{d_1 + d_2 + d_3}{\dfrac{d_1}{v_1} + \dfrac{d_2}{v_2} + \dfrac{d_3}{v_3}}$$

Reemplazar:

$$v = \frac{2.500 + 1.200 - 500}{\dfrac{2.500}{500} + \dfrac{1.200}{400} + \dfrac{500}{250}} = \frac{4.200}{5 + 3 + 2}$$

$$= \frac{4.200}{10} = 420 \therefore \boxed{v = 420\ Km/h}$$

PROBLEMA 9.- Bolivia; Población 1976, 1992 y 2001 Medidas de Posición

Bolivia tiene en 1992 una población de 6,4 millones de habitantes y en el año 2001 la población boliviana es de 8,3 millones. Se pide calcular:

a) La población media del periodo considerado

b) El porcentaje de aumento en el periodo.

c) El número promedio de habitantes de incremento anual

d) La tasa anual de crecimiento.

e) La población estimada para 2010 si la tasa anual de crecimiento se mantiene.

f) El año en que se duplicará la población de 1992.

g) La población boliviana el año 1976 es de 4,6 millones, ¿cuál fue la tasa anual de crecimiento en el periodo 1976-2001.

SOLUCIÓN.-

a) **POBLACIÓN MEDIA** (geométrica) **DEL PAÍS. PERIODO 1992-2001**

$$M_G = \sqrt{(6,4)(8,3)} = \sqrt{(53,12)} = 7,29 \; millones$$

ALGO MÁS: Comentar o fundamentar e interpretar, tanto el procedimiento como el resultado.

b) **PORCENTAJE DE INCREMENTO POBLACIONAL. PERIODO 1992-2001.**

$$\Delta\% = \left(8,3/6,4 - 1\right)100 = 0,296875 \times 100 = 29,69\%$$

ALGO MÁS: Comente

c) **NÚMERO PROMEDIO ANUAL DE HABITANTES DE INCREMENTO ANUAL**

$$\frac{8,3-6,4}{9} = \frac{1,9}{9} = 0,21 \; millones = 210 \; mil \; hab.$$ (incremento anual)

d) **TASA ANUAL DE CRECIMIENTO.**

Tasa promedio por periodo *r*, mediante la fórmula del interés compuesto.

$$P_{2001} = P_{1992}(1+r)^n$$
$$8,3 = 6,4 \cdot (1+r)^9$$
$$r = \sqrt[9]{\frac{8,3}{6,4}} - 1 = 0,0293 = 2,9\%$$

ALGO MÁS: Comente: $2,9 < 29,69/9 = 3,3$

e) **POBLACIÓN ESTIMADA DE BOLIVIA PARA EL AÑO 2010**

$$P_{2010} = P_{2001}(1+r)^9 ; r = 0,029 = 29\%$$
$$= 8,3(1+0,029)^9 = 10,735$$
$$= 10,7 \; millones \; de \; habitantes$$

ALGO MÁS: Comente el resultado.

f) **AÑO EN QUE SE DUPLICARÁ LA POBLACIÓN DE 1992**

$$2P_{1992} = P_{1992}(1+r)^n$$
$$\ln 2 = n \ln(1+r)$$
$$n = \ln 2 / \ln(1,29) = 24,25$$

Luego.-Aproximadamente el año 2016 (1992+24,25 = 2016,25), Bolivia tendrá el doble de habitantes que la del año 1992. Es decir, de 6,4 millones de 1992 subirá en 2016 a 12,8 millones de habitantes, *"ceteris paribus"*.

g) TASA ANUAL DE CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN DE 1976 A 2001

$$P_{2001} = P_{1976}(1+s)^{25}$$
$$8,3 = 4,6(1+s)^{25}$$

$$s = \sqrt[25]{\frac{8,3}{4,6}} - 1 = 0,0239$$

Luego $s = 0,0239 = 2,39\%$

ALGO MÁS: Comente el resultado

PROBLEMA 10.- Cuantilas Calculo de medidas de posición con datos no agrupados

Los datos de una muestra de tamaño n = 17 son: 23, 25, 25, 27, 29, 33, 34, 37, 44, 45, 46, 50, 53, 56, 58, 61 y 75.

Calcular:

a) Q_2;	b) Q_3;	c) D_5;	d) D_8;	e) P_{50};	f) P_{75};	g) M_e.

SOLUCIÓN.-

Una forma: con fórmula de $Q_k = X_{\frac{k(n+1)}{4}}$

a) $Q_2 = X_{\frac{2(n+1)}{4}} = X_{\frac{2(18)}{4}} = X_9$ *Luego*: $\boxed{Q_2 = 44}$

b) $Q_3 = X_{\frac{3(n+1)}{4}} = X_{\frac{54}{4}} = X_{13,5}$ *Posición*: $i = 13,5$

Por convención: $X_{13} + 0,5(X_{14} - X_{13}) = 53 + 0,5(56+53) = 54,5$

Luego: $\boxed{Q_3 = 54,5}$ tercer cuartil

c) $D_5 = X_{\frac{5(n+1)}{10}} = X_{\frac{5(18)}{10}} = X_9$ *Luego*: $\boxed{D_5 = 44}$. Quinto decil.

d) $D_8 = X_{\frac{8n}{10}+\frac{1}{2}} = X_{\frac{4(17)}{5}+\frac{1}{2}} = X_{14,1}$

Convención $X_{14} + 0,1(X_{15} - X_{14}) = 56 + 0,1(58+56) = 56,2$

Luego: $\boxed{D_8 = 56,2}$ octavo decil.

e) $P_{50} = X_{\frac{50n}{100}+\frac{1}{2}} = X_{\frac{1(17)}{2}+\frac{1}{2}} = X_9$ *Luego*: $\boxed{P_{50} = 44}$

f) $P_{75} = X_{\frac{75(n+1)}{100}} = X_{\frac{75(17+1)}{100}} = X_{\frac{1350}{100}} = X_{13,5}$

Convención $X_{13} + 0,5(X_{14} - X_{13}) = 53 + 0,5(56-53) = 54,5$

Luego: $\boxed{P_{75} = 54,5}$

g) $M_e = X_{\frac{n+1}{2}} = X_{\frac{18}{2}} = X_9$ *Luego*: $\boxed{M_e = 44}$

Otra Forma: es con la fórmula de: $Q_k = X_{\frac{kn}{4}+\frac{(4-k)}{4}}$

a) $Q_2 = X_{\frac{2n}{4}+\frac{1}{2}} = X_{\frac{2\cdot 17}{4}+\frac{1}{2}} = X_9 \quad Luego: \boxed{Q_2 = 44}$

b) $Q_3 = X_{\frac{3n}{4}+\frac{1}{4}} = X_{\frac{3\cdot 17}{4}+\frac{1}{4}} = X_{\frac{52}{4}} = X_{13} \quad Luego: \boxed{Q_3 = 53}$ tercer cuartil

c) $D_5 = X_{\frac{5n}{10}+\frac{5}{10}} = X_{\frac{5\cdot 17}{10}+\frac{1}{2}} = X_{\frac{17}{2}+\frac{1}{2}} = X_9 \quad Luego: \boxed{D_5 = 44}$ Quinto decil

d) $D_8 = X_{\frac{8n}{10}+\frac{2}{10}} = X_{\frac{8\cdot 17}{10}+\frac{1}{5}} = X_{\frac{68}{5}+\frac{1}{5}} = X_{13.8}$

Convención $\quad X_{13} + 0,8(X_{14} - X_{13}) = 53 + 0,8(56+53) = 53 + 2,4 = 55,4$

Luego: $\boxed{D_3 = 55,4}$ octavo decil.

e) $P_{50} = X_{\frac{50n}{100}+\frac{50}{100}} = X_{\frac{17}{2}+\frac{1}{2}} = X_9 \quad Luego: \boxed{P_{20} = 44}$

f) $P_{75} = X_{\frac{75\cdot 17}{100}+\frac{25}{100}} = X_{\frac{3\cdot 17}{4}+\frac{1}{4}} = X_{\frac{51}{4}+\frac{1}{4}} = X_{13} \quad Luego: \boxed{P_{75} = 53}$

g) $M_e = X_{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}} = X_{\frac{17}{2}+\frac{1}{2}} = X_9 \quad Luego: \boxed{M_e = 44}$

ALGO MÁS: $\boxed{44 = M_e = Q_2 = D_5 = P_{50} = 44}$

PROBLEMA 11.- Media Aritmética. Incrementos en salarios

En una empresa del país trabajan 204 obreros, el salario medio semanal a finales del año pasado fue de Bs. 360.- Calcular el nuevo promedio para las siguientes nuevas situaciones,

a) Si los salarios se incrementan en Bs. 90.-

b) Si los salarios se incrementan en un 25%

c) Si los salarios se incrementan en 10% más Bs. 54.-

SOLUCIÓN.-

Sea : x= el salario actual; $\bar{x} = Bs.360$

y= el salario nuevo

y = función lineal de x; $y = xa + b \Rightarrow \bar{y} = \bar{x}a + b$

a) INCREMENTO EN Bs. 90.- $y = x + 90$

$$M[y] = M[x+90] = \bar{x} + 90 = 360 + 90 = 450 \therefore \boxed{\bar{y} = Bs.450.-}$$

Si los salarios se incrementan en Bs. 90.- entonces el nuevo salario es, $\bar{y} = Bs.450.-$

NOTA.- Generalmente se omitirá esta parte, la cual debe ser comunicada, obligadamente debe estar presente, el significado de un resultado

b) INCREMENTO EN UN 25%. $a = 1 + 0,25, y = 1,25x$

$$M[y] = M[1.25x] = 1,25\bar{x} = 1,25 \times 360 = 450 \therefore \boxed{\bar{y} = Bs.450.-}$$

Es un mismo resultado que el anterior inciso pero con diferente interpretación puesto que el inciso (a) es un incremento de un valor fijo y aquí se refiere el 25% del salario inicial. (es una coincidencia que el valor de 90 sea el 25% del salario de Bs. 360).

c) INCREMENTO EN UN 10%.MÁS Bs. 54.- $a = 1 + 0{,}10; b = 54; y = 1{,}1x + 54$

$$M[y] = M[1{,}1x + 54] = 1{,}1\overline{x} + 54 = 1{,}1 \times 360 + 54 = 450 \therefore \boxed{\overline{y} = Bs.450.-}$$

PROBLEMA 12.- Promedio en conjunto

El laboratorio "LAFAR" con 150 empleados, cada empleado percibe un salario promedio mensual de Bs. 920. El laboratorio "BAGO" con 180 empleados, tiene como salario promedio mensual de Bs. 880.

a) ¿Cuál es el salario promedio mensual de los dos laboratorios en conjunto?

b) Si al presente caso se añade el laboratorio "IFA" con 80 empleados y un salario promedio mensual por empleado de Bs. 1100 ¿Cuál es el salario promedio mensual para los tres laboratorios en conjunto?

SOLUCIÓN.-

"LAFAR" $\rightarrow n_1 = 150 \quad \overline{x}_1 = 920$

"BAGO" $\rightarrow n_2 = 180 \quad \overline{x}_2 = 880$

a) Son dos elementos con promedios parciales:

$$\overline{x} = \frac{n_1 \times \overline{x}_1 + n_2 \times \overline{x}_2}{n_1 + n_2} = \frac{150 \times 920 + 180 \times 880}{150 + 180} = \frac{296400}{330} = 898{,}18182 \doteq 898{,}18$$

b) "IFA" $\rightarrow n_3 = 80 \quad \overline{x}_3 = 1100 \quad n = 150 + 180 = 330 \quad \overline{x} = 898{,}18$

$$\overline{y} = \frac{n \times \overline{x} + n_3 \times \overline{x}_3}{n + n_3} = \frac{330 \times 898{,}18 + 80 \times 1100}{330 + 80} = \frac{384399{,}4}{410} = 937{,}56$$

PROBLEMA 13.- Media de datos agrupados.

Los ingresos anuales de 40 familias se registran en la tabla 3.3 :

a) Estime el número de familias con ingresos entre Bs. 28.000 y 39.000 (sugerencia: suponer igual densidad de frecuencia en cada intervalo)

b) Calcule el ingreso medio

c) Verifique el anterior resultado con el método abreviado

TABLA 3.3 Distribución de frecuencias del ingreso anual de 40 familias (miles de Bs.)

Fronteras $x'_{i-1} - x'_i$ [2]	Frecuencias. Absolutas. n_i [4]	Frecuencias Acumuladas Absolutas N_i [7]
20 - 25	2	x
25 - 30	x	x
30 - 35	12	22
35 - 40	x	29
40 - 45	x	34
45 - 50	4	x
50 - 55	x	x
SUMAS	40	-.-

SOLUCIÓN.-Se elabora una "Hoja de Trabajo"

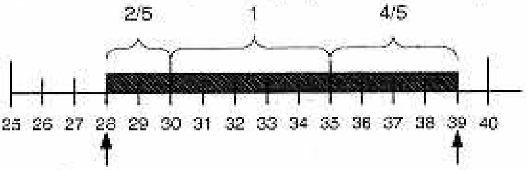
Para obtener las frecuencias absolutas y acumuladas

$$
\begin{array}{ll}
1^a\,clase & N_1 = n_1 \Rightarrow N_1 = 2 \\
3^a\,clase & N_3 - n_3 = 22 - 12 = 10 = N_2 \\
2^a\,clase & n_1 + n_2 = N_2 \Rightarrow n_2 = 10 - 2 = 8 \\
4^a\,clase & 29 - 22 = n_4 = 7 \\
5^a\,clase & 34 - 29 = n_5 = 5 \\
6^a\,clase & 34 + 4 = N_6 = 38 \\
7^a\,clase & N_7 = 40 \Rightarrow 40 - 38 = n_7 = 2 \\
\Delta = 5 &
\end{array}
$$

HOJA DE TRABAJO Nº 2

Fronteras $x'_{i-1} - x'_i$	Frecuencias. Absolutas. n_i	Frecuencias Acumuladas Absolutas N_i	Marca de Clase. PM. X_i	$x_i n_i$
[2]	[4]	[7]	[3]	[9]
20 - 25	2	2	22,5	45
25 - 30	8	10	27,5	220
30 - 35	12	22	32,5	390
35 - 40	7	29	37,5	262,5
40 - 45	5	34	42,5	212,5
45 - 50	4	38	47,5	190
50 - 55	2	40	52,5	105
SUMAS	**40**	-.-	-.-	**1425**

a) Intervalo (28.000 ; 39.000), incluye a tres intervalos (clases 2ª,3ª y 4ª), se averigua que parte esta incluida de la 2ª y 4ª clase, porque de la 3ª es completa.



$$
\left.\begin{array}{ll}
2^a\,clase & \frac{2}{5} \\
3^a\,clase & 1 \\
4^a\,clase & \frac{4}{5}
\end{array}\right\} \frac{2}{5}\times 8 + 1\times 12 + \frac{4}{5}\times 7 = 20{,}8 \doteq 21 \quad Familias
$$

b) Ingreso medio o Media de las 40 familias

$$
\bar{x} = \frac{1425}{40} = 35{,}625 \doteq 35{,}6 \therefore \bar{x} = 35{,}6 = \underline{Bs.35600}
$$

c) Se vuelve a construir la "Hoja de Trabajo" de la siguiente forma

Para formar la columna de z_i se toma a la clase 4ª como 0 y a las menores que esta se enumera en forma negativa y las mayores en forma positiva

$$z = \frac{x - T}{\Delta} \Rightarrow x = T - \Delta z \quad \therefore$$

$$\overline{x} = T - \Delta\overline{z}; donde \quad T = 37.5$$

Fronteras $x'_{i-1} - x'_i$	Frecuencias. Absolutas. n_i	z_i	$z_i n_i$
20 - 25	2	-3	-6
25 - 30	8	-2	-16
30 - 35	12	-1	-12
35 - 40	7	0	0
40 - 45	5	1	5
45 - 50	4	2	8
50 - 55	2	3	6
SUMAS	**40**		**-15**

$$\overline{z} = -\frac{15}{40} \Rightarrow \overline{x} = T - \Delta\overline{z}$$

$$= 37.5 - 5\left(-\frac{15}{40}\right)$$

$$= 35,625 = 35,6 = \underline{Bs.35600}$$

Luego: el ingreso medio es Bs 35600.-igual que el anterior resultado.

PROBLEMA 14.- Media de obreros de las empresas

En la ciudad de "El Alto" se obtuvo una muestra de empresas pequeñas y se observó que ninguna tiene más de siete obreros o menos de cinco; la mayoría tiene 5 obreros, pero el 30% tiene 6 obreros y que una de cada diez empresas tiene 7 obreros. Calcule el número promedio, media aritmética, de obreros por empresa.

SOLUCIÓN.-Si x la variable número de obreros, sus valores posibles son: $x_1 = 5, x_2 = 6$ y $x_3 = 7$

Total de empresas es 100

$$x_3 = 7 \Rightarrow n_3 = 10 \text{ (uno de c/ diez)}$$

$$x_2 = 6 \Rightarrow n_2 = 30 \text{ (30\%)}$$

$$x_1 = 5 \Rightarrow n_1 = 60 \text{ (el resto)}$$

Número de Obreros x_i	Número de empresas. n_i	$x_i n_i$
50	60	300
6	30	180
7	10	70
SUMAS	**100**	**550**

$$\text{Media (promedio) } \overline{x} = \frac{\sum x_i}{n_i} = \frac{550}{100} = 5,5$$

Luego: El número promedio de obreros es 5,5 por empresa.

PROBLEMA 15.- Mediana y su comparación con la media

Calcular la Mediana de los datos del problema 3 y considerar si este promedio es representativo de los 30 tiempos.

SOLUCIÓN.-La matriz de datos está ordenada por tanto:

$M_e = \dfrac{X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}}{2} = \dfrac{X_{15} + X_{16}}{2}$, se identifica estos datos:

$$\begin{array}{cccccccccc}
3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 \\
6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 8 & 8 \\
8 & 8 & 9 & 10 & 10 & 10 & 10 & 50 & 67 & 80
\end{array}$$

$$X_{15} \quad X_{16}$$

Por tanto la Mediana será: $M_e = \dfrac{6+6}{2} = \dfrac{12}{2} = \underline{6}$

Observe que los dos valores intermedios son 6 y que la media de los dos valores intermedios es 6. En el problema 3 la media fue 12.3 horas, lo cual no es más representativo de los tiempos, como lo es la mediana.

PROBLEMA 16.- Promedio de promedios

La honorable alcaldía municipal de la ciudad de "El Alto", tiene clasificado a las empresas que elaboran pan en pequeñas, medianas y grandes. Todas las empresas venden, en promedio 384 mil Bs.; el promedio de las grandes es 900 mil Bs. Hay dos pequeñas por cada mediana y una grande por cada 6 pequeñas. En promedio por cada mil Bs. de las medianas, las pequeñas venden 480 mil Bs. Calcule el promedio de ventas de las panaderías pequeñas

SOLUCIÓN.- Sean x_1, x_2 y x_3 las medias de ventas de las panaderías pequeñas, medianas y grandes de tamaños n_1, n_2 y n_3 respectivamente

$\bar{x}$ = La media de los tres	*tamaños*
$\bar{x} = Bs.384.-$	$n_1 = 2n_2$
	$n_1 = 6n_3$
$\bar{x}_3 = Bs.900.-$	$n_1 + n_2 + n_3 = n$
	$n_1 + \frac{1}{2}n_1 + \frac{1}{6}n_1 = n$
$\bar{x}_1 = 0.48\bar{x}_2$	$n = \dfrac{(6+3+1)}{6}n_1 = \dfrac{10}{6}n_1 = \dfrac{5}{3}n_1 \therefore \boxed{n = \dfrac{5}{3}n_1}$
$\bar{x}_1 = ?$	

Formula:

$$\bar{X} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + n_3\bar{x}_3}{n_1 + n_2 + n_3};$$

$$\bar{X} = \frac{n_1\bar{x}_1 + \frac{1}{2}n_1(\frac{1}{0.48})\bar{x}_1 + \frac{1}{6}n_1\bar{x}_3}{n_1(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6})}$$

Simplificando:

$$\bar{X} = \frac{\bar{x}_1 + \frac{1}{0.96}\bar{x}_1 + \frac{1}{6}\bar{x}_3}{\frac{6+3+1}{6}}$$

$$\tfrac{5}{3}\bar{X} = \bar{x}_1 + \tfrac{1}{0.96}\bar{x}_1 + \tfrac{1}{6}\bar{x}_3$$

$$\tfrac{5}{3}(384) = \bar{x}_1(\tfrac{1+0.96}{0.96}) + \tfrac{1}{6}(900)$$

$$\bar{x}_1 = \frac{\frac{1920}{3} - \frac{900}{6}}{\frac{1.96}{0.96}} = \frac{0.96(3840-900)}{6(1.96)}$$

$$\bar{x}_1 = \frac{2822.4}{11.76} = \underline{240}$$

Por tanto el promedio de ventas mensuales de las panaderías pequeñas es de Bs. 240.00

PROBLEMA 17. La Media geométrica es siempre menor o igual que la media

La media geométrica en terminos positivos es siempre menor o igual que la media aritmética . Es igual a la media solo en el caso en que todos los términos sean iguales entre sí

$$\boxed{\bar{X} \geq M_G}$$

DEMOSTRACIÓN.-

Sean $x_1, x_2 > 0$, entonces;

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2}{2} > 0 \quad y \quad M_G = \sqrt{x_1 \bullet x_2} > 0$$

Mostrando que tanto la media como la media geométrica son valores positivos, y que la diferencia de sus cuadrados es positiva, obteniendo:

$$\bar{X}^2 - M_G^2 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - x_1 \bullet x_2$$

$$= \frac{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2}{4} - x_1x_2$$

$$= \frac{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_2}{4}$$

$$= \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 \geq 0$$

Si ambos términos iguales, será nulo, entonces:

$\bar{X}^2 - M_G^2 \geq 0$, de donde: $\bar{X}^2 \geq M_G^2$, y como ambos son positivos se reduce a: $\bar{X} \geq M_G$

PROBLEMA 18. Tercera propiedad de la media

Demostrar que:

$$M\left[(X - c)^2\right] = min. \quad si \quad c = \bar{X}$$

DEMOSTRACIÓN.-Una manera de demostración es la siguiente:

$$M\left[(X - c)^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - c)^2$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - c)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - c)\right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - c)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(\bar{x} - c)$$

Puesto que:

$$2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(\bar{x} - c) = 2(\bar{x} - c)\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0 \quad 1^{ra} \text{ Propiedad}$$

$$2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(\bar{x} - c) = 0$$

Por tanto

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+\sum_{i=1}^{n}(\overline{x}-c)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+n(\overline{x}-c)^2$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^2\geq\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$$

Luego:

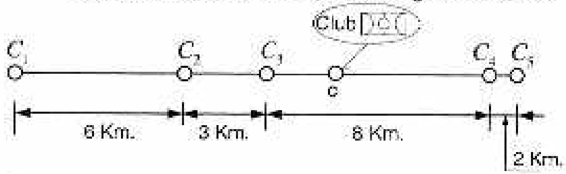
$$\forall c \qquad \sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=mín$$

PROBLEMA 19. Aplicación de la tercera propiedad de la media

Siguiendo la única cárretera que cruza cierta región en línea recta, se encuentran cinco ciudades C_1, C_2, C_3, C_4, y C_5 en dicho orden, y a las distancias siguientes :6 Km de C_1 a C_2; 3 Km de C_2 a C_3; 8 Km de C_3 a C_4; y 2 Km de C_4 a C_5. Un club tiene socios repartidos entre las cinco ciudades de la siguiente manera: el 10% vive en C_1; el 2% vive en C_2; el 30% vive en C_3; y el 25% vive en C_4. Se trata de construir en algún punto de la carretera, un campo deportivo al que concurran los socios. La experiencia del club indica que el costo del viaje, para cada uno de los socios, es proporcional al cuadrado de la distancia que tenga que recorrer. Como el club paga los pasajes tiene interés en reducir dicho gasto a un mínimo en el caso de que acudan al campo todos los socios. ¿Dónde debe situarse el campo deportivo?

SOLUCIÓN.-

La ciudades estarían ubicadas de la siguiente manera



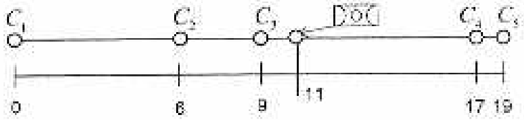
C es el punto donde se ha de construir el campo deportivo, por tanto las distancias a recorrer desde cada ciudad al campo deportivo es:

$|C_i-c| \rightarrow$ distancia de cada ciudad al campo deportivo $i=1,2,3,4,5$

$|C_i-c|^2=(C_i-c)^2$

La suma del cuadrado de las distancias a recorrer por los socios es: $\sum_{i=1}^{5}(C_i-c)^2$

Como el costo es proporcional al cuadrado de la distancia recorrida y se desea que éste sea mínimo, entonces debemos tener que: $\sum_{i=1}^{5}(C_i-c)^2=mín$ por la tercera propiedad $c=\overline{C}$. Por tanto se reduce a calcular la media de la ubicación de las ciudades, para lo cual consideramos como origen de coordenadas, la ciudad C_1.



Toda la información llevamos a una tabla donde se efectúen las operaciones convenientes, en C_5 viven: $C_5 = 100-(10+20+30+25)=15$

C_i	$100\,h_i$ %	h_i	$C_i h_i$
0	10	0.10	0.00
6	20	0.20	1.20
9	30	0.30	2.70
17	25	0.25	4.25
19	15	0.15	2.85
	100	1.00	11.00

Luego: $\overline{C} = \sum_{i=1}^{5} C_i h_i = 11[Km.]$ por tanto el campo deportivo debe estar ubicado a 11 Km de C_1

CAPITULO. 3. PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS
MEDIDAS DE POSICIÓN

MÉTODOS:

1. Se tiene una muestra de tamaño 5 con valores de 10, 20, 12, 17, y 16. Calcule la media y la mediana.
R.-15,16.

2. Se tiene el tamaño de una muestra 6 con valores de datos 10, 20, 21, 17, y 16y 12. Calcule la media y la mediana.
R.-Arreglo:10,12,16,17,20,21: $\bar{X} = 16$; $M_e = 16.5$

3. Se tiene una muestra de tamaño 8 con valores de datos 27, 25, 20, 15, 30, 34, 28 y 25 Calcule el 20%, 25%, 65% y 75% percentil.
R.-15,20,25,25,27,28,30,34: . $P_{20} = 19; P_{25} = 21; P_{65} = 28; P_{75} = 29$

4. Dada una muestra cuyos valores son 53, 55, 70,58, 64, 57, 53, 69, 57, 68 y 53, calcule la media, la mediana y la moda
R.- $\bar{X} = 59.7$; $M_e = 57$; $M_o = 53$ Arreglo:53,53,53,55,57,57,58,64,68,69,70

APLICACIONES:

5. El salario inicial promedio recién graduados de licenciatura en contaduría, durante 1996 y 1997, fue $30,393 (*US News online, U.S. News and World Report*, diciembre de 1997). A continuación vemos una de salarios iniciales, en miles de dólares

30.7	28.8	29.1	31.1	30.1
29.7	30.7	30.0	30.6	30.5
31.2	32.1	30.2	30.3	32.9
32.2	29.9	28.9	30.6	31.8
32.2	30.3	30.4	32.3	33.3
32.7	29.3	30.3	30.9	30.3

a. ¿Cuáles el salarios promedio inicial ?
b. ¿Cuáles el la mediana de salario inicial ?
c. ¿Cuáles es la moda?
d. ¿Cuáles es el primer cuartil?
e. ¿Cuáles es el tercer cuartil?
f. ¿Coinciden estos resultados con lo que afirma *U.S .News & World Report*?

6. Cada vez los inversionistas recurren más y más a los corredores, para ahorrar al comprar acciones. La Asociación americana de Inversionistas Individuales lleva a cabo un encuesta anual de los descuentos de los corredores de inversiones. En la tabla 3.4 vemos las comisiones cobradas por una muestra de 20 corredores para dos clases de movimiento: de 500 acciones a $ 50 cada una y de 1000 acciones a $ 5 cada una

a. Calcule la media, la mediana y la moda de las comisiones por negociar 500 acciones a $ 50 cada una.
b. Calcule la media, la mediana y la moda de las comisiones que se cobran por adquirir 1000 acciones a $ 50 cada una.
c. ¿Qué se lleva más comisión? Adquirir 500 acciones a 50 cada una, o 1000 acciones a $50 cada una.
d. El costo de una transacción, ¿Parece relacionarse con el monto de ella? Por ejemplo, el monto de la negociación de 500 acciones a $ 50 cada una es $ 25,000

Tabla 3.4 COMISIONES QUE COBRAN LOS CORREDORES BURSATILES

	Comisión ($)			Comisión ($)	
Corredor	500@$50	1000@$5	Corredor	500@$50	1000@$5
Peck	73	90	Pacific	25	25
Aufhauser	34	34	People´s	131	69
Brown	29	29	Quick & Reilly	120	61
Burke	120	70	Russo	85	110
Schwab	155	90	Seaport	50	70
Downstate	90	65	St. Louis	67	65
Freeman	145	70	T. Rowe	134	80
Kennedy	33	53	Unified	154	90
Max Ule	195	70	White	39	49
Morgerson	95	66	Your	55	70

Nota.- AAII Journal enero de 1997

R.-(a)91,45; 87,5; 120;(b)66,3; 69,5; 70;(c)500 a $50; (d) Sí..

7. Millones de estadounidenses se levantan cada mañana y trabajan en sus propias casas. Se sugiere que el uso creciente de computadoras es una de las razones por la que las personas pueden trabajar en empresas caseras. A continuación vemos una muestra de datos sobre las edades de esas personas

22	58	24	50	29	52	57	31	30	41
44	40	46	29	31	37	32	44	49	29

a. Calcule la media y la moda.

b. La mediana de la edad de la población de todos los adultos es 35.1 años. (Oficina del Censo, Estados Unidos, 1 de noviembre de 1997.) Use la mediana de la edad de los datos anteriores para comentar si los trabajadores en casa tienden a ser más jóvenes o más viejos que la población de todos los adultos.

c. Calcule el primer y el tercer cuartil.

d. Calcule e interprete el 32% percentil.

R.-(a) $\bar{X} = 38,75$; $M_o = 29$; (b) 38,5 vs 35,1(c) $Q_1 = 29; Q_3 = 48$ (d) $P_{32} = 31$.Cuando menos el 32% de las personas tienen 31 años o menos.

8. El periódico Los Ángeles Times informa con regularidad el índice de calidad del aire para distintas áreas del sur de California. Se consideran que los índices de 0 a 50 son buenos, de 51 a 100 son moderados, de 101 a 200 son insalubres, de 201 a 275 son muy insalubres y más de 275 son peligrosos. Los índices recientes de Pomona fueron 28, 42, 58.48, 45, 55, 60, 49 y 50.

a. Calcule la media, la mediana y la moda de los datos. ¿Se debe considerar bueno el índice de calidad del aire de Pomona?

b. Calcule el 25% y el 75% percentil de los datos de la calidad del aire en Pomona

R.-(a) $\bar{X} = 48,33$; $M_e = 49$; (b) $P_{25} = 43; P_{75} = 56$

9. En una prueba de rendimiento y consumo de gasolina se probaron 13 vehículos, durante 300 millas, en condiciones de tránsito en cuidad y en el campo: de lo anterior se obtuvieron los siguientes datos en millas por galón.

Ciudad	16.2	16.7	15.9	14.4	13.2	15.3	16.8	16.0	16.1	15.3	15.2	15.3	16.2
Campo	19.4	20.6	18.3	18.6	19.2	17.4	17.2	18.6	19.0	21.1	19.4	18.5	18.7

Para llegar a una conclusión sobre la diferencia de rendimiento en la ciudad y en el campo, use la media, la mediana y la moda

R.-

	Media	Mediana	Moda
Ciudad	15.58	15.9	15.3
Campo	18.92	18.7	18.6 y 19.4

10. Una muestra de 15 estudiantes del último año de carrera mostró las siguientes horas-créditos tomadas durante el periodo final de su último año de escuela:

15 21 18 16 18 21 19 15 14 18 17 20 18 15 16

a. ¿Cuáles son la media, la mediana y la moda de las horas-crédito tomadas? Calcúlelas e interprete los resultados.

b. Calcule el primer y el tercer cuartil.

c. Calcule e interprete el 70% percentil.

R.- (a) $\overline{X} = 17.4$; $M_e = 18$; $M_o = 18$;(b) $Q_1 = 15.5$;$Q_3 = 18,5$ (c) $P_{70} = 18$.

CAPÍTULO No. 3 APÉNDICE.

APÉNDICE. Nº 1 *MEDIANA*

MEDIANA.- Datos Agrupados. Fórmula,

$$M_e = X'_{i-1} + \frac{\left(\frac{n}{2} - N_{i-1}\right)\Delta_i}{n_i}$$

DEMOSTRACIÓN.- La mediana por definición es el valor de la variable que separa en dos mitades los datos ordenados, (Ejemplo de menor a mayor).

En esta demostración asumimos que la variable X es continua. En la Figura 3.8 los datos se representan por las superficies de los rectángulos del histograma. Por ejemplo, si n = 30, resulta n/2 = 15 entonces la mediana, M_e divide la superficie total del histograma en dos mitades, cada una representa 15 datos.

Aquí X'_{i-1} es la frontera inferior de la clase mediana; es decir, el grupo o clase donde se ubica la mediana. Entonces,

$M_e = X'_{i-1} + \alpha \ (1)$ Dice: La mediana es igual a la frontera inferior de la clase media más un pedazo α de Δ_i el intervalo de la clase *i*

Para calcular α el criterio empleado es que la ordenada en el punto M_e , divide el área del rectángulo en dos partes, en la misma proporción a las bases del rectángulo. Si B denota base y S, superficie. En el grupo mediano se tiene

$$\frac{B_{parcial}}{B_{total}} = \frac{S_{parcial}}{S_{total}} \Rightarrow \boxed{\frac{B_{parcial}}{B_{total}} = \frac{\frac{n}{2} - N_{i-1}}{n_i}}$$

Donde:

$\mathbf{B}_{parcial} = \alpha$

$\mathbf{B}_{total} = \Delta_i$

$S_{parcial} = \frac{n}{2} - N_{i-1}$

$S_{total} = n_i =$ frecuencia de la clase $i-ésima$

Reemplazo:

$$\boxed{\frac{\alpha}{\Delta_i} = \frac{\frac{n}{2} - N_{i-1}}{n_i} \Rightarrow \alpha = \frac{\left(\frac{n}{2} - N_{i-1}\right)\Delta_i}{n_i}}$$

Reemplazo en (1), se tiene la fórmula para calcular la Medina

$$\boxed{M_e = X'_{i-1} + \frac{\left(\frac{n}{2} - N_{i-1}\right)\Delta_i}{n_i}}$$

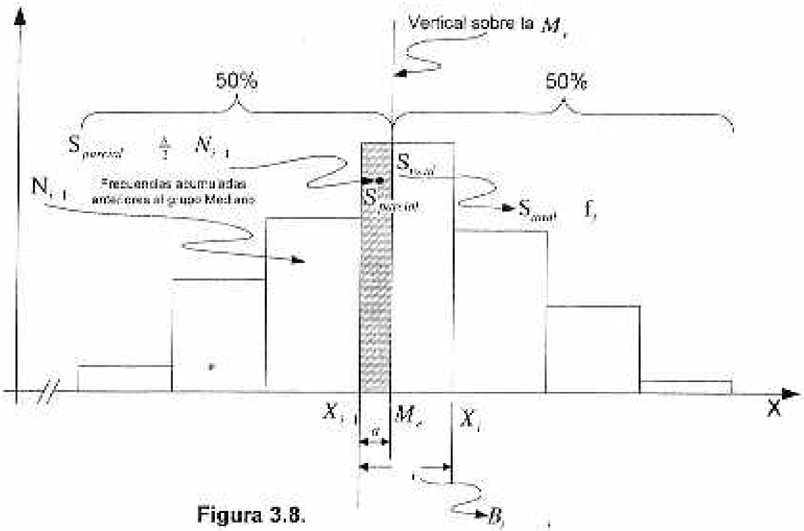

Vertical sobre la M_e
50%
50%
$S_{parcial} = \frac{A}{2} - N_{j-1}$
N_{j-1}
Frecuencias acumuladas anteriores al grupo Mediano
S_{total}
$S'_{parcial}$
$S_{total} = f_j$
X
X_{j-1}
M_e
X_j
a
B_j

Figura 3.8.

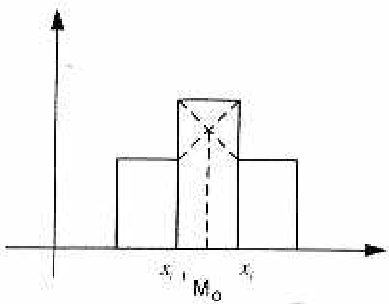
APÉNDICE. Nº 2	MODA

MODA.- Datos Agrupados. Fórmula,

$$M_0 = x'_{i-1} + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \cdot \Delta$$

DEMOSTRACIÓN.- La moda por definición es el valor que se presenta con la mayor frecuencia.

En esta demostración asumimos que la variable X es continua. En la Figura 3.9 los datos se representan por las superficies de los rectángulos del histograma. El rectángulo más alto es donde se encuentra la moda. La frecuencia de la clase inmediatamente antes de la clase modal, es la clase **premodal**, e inmediatamente después de está se encuentra la **clase posmodal**, si son iguales la moda se aproxima por el punto medio de la clase modal, como se muestra en la figura:



$$M_o \quad x_i \quad \frac{x_{i-1} \quad x_i}{2}$$

Figura 3.9.

En caso de que las clases premodal y posmodal no sean iguales como en la Figura 3.10. Donde X'_{i-1} es la frontera inferior de la clase modal; es decir, el grupo o clase donde se ubica la moda.
Usando la semejanza de los triángulos RMP y PTQ y de los triángulos sombreados se tiene:

$$\frac{\frac{n_j}{\Delta} - \frac{n_{j+1}}{\Delta}}{\frac{n_i}{\Delta} - \frac{n_{i-1}}{\Delta}} = \frac{PQ}{PR} = \frac{x'_j - M_0}{M_0 - x'_{i-1}};$$

Entonces se tiene: $\frac{n_i - n_{j-1}}{n_j - n_{j-1}} = \frac{x'_j - M_0}{M_0 - x'_{j-1}}$,

Donde:

$$M_0\left[\left(n_i - n_{j+1}\right) + \left(n_i - n_{j-1}\right)\right] = y'_j\left(n_j - n_{j-1}\right) + y'_{j-1}\left(n_j - n_{j+1}\right)$$, pero $y'_i = y'_{j-1} - c$,

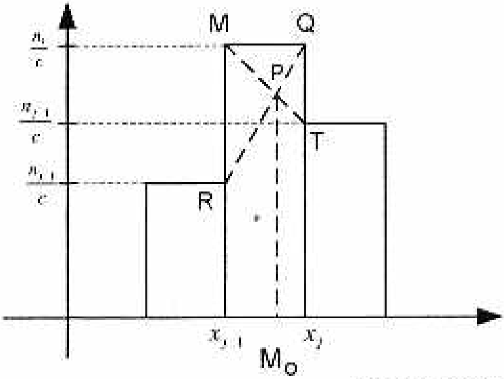
luego:

$$M_0\left[\left(n_j - n_{j-1}\right) + \left(n_j - n_{j-1}\right)\right] = x'_{j-1}\left[\left(n_j - n_{i+1}\right) + \left(n_j - n_{j-1}\right)\right] + \Delta\left(n_j - n_{j-1}\right)$$

$$M_0 = x'_{j-1} + \Delta\left[\frac{n_j - n_{j-1}}{\left(n_j - n_{j+1}\right) + \left(n_j - n_{j-1}\right)}\right]$$

$$\boxed{M_o = x'_{i-1} + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \cdot \Delta}$$

Con $\begin{matrix} d_1 = n_j - n_{j-1} \\ d_2 = n_j - n_{j+1} \end{matrix}$



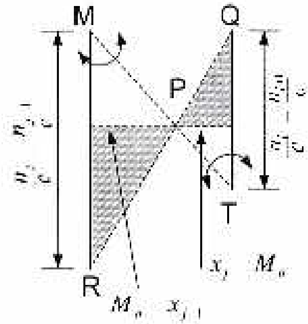


Figura 3.10.