Universidad Mayor de San Andrés

Facultad de Ciencias Puras y Naturales

Carrera de Matemática

APROXIMACION ESPECTRAL

Trabajo de Licenciatura de:

Honorio Vito Yupanqui Huanca

Tutor:

Dr. Javier Guachalla Hurtado

La Paz-Bolivia

1996

A mis padres:	
	IGNACIO y LUCY
Hermanos:	
	JORGE,FREDDY,FELIX y ROSALIA

CONTENIDO

PROLOGO

El trabajo donde aparece por primera vez la denominación de "ecuaciones integrales" se debe al profesor que fué de la Friedrich-Wilhelms-Universität de Berlín, Paul Du Bois-Rey-mond.Este,en 1887,encarece la importancia de la teoría de las ecuaciones integrales con las siguientes palabras:
"Las ecuaciones integrales me han surgido tan a menudo en la teoría de las ecuaciones entre derivadas parciales,que estoy plenamente convencido de que los progresos en esta han de estar ligados con el avance de aquélla, sobre la cual hoy por hoy todo nos es desconocido".
El tiempo se cuidó de confirmar las palabras de Du Bois-Rey-mond,y así vemos que la teoría de las ecuaciones integrales empieza a tomar cuerpo de doctrina;desde aquella fecha a 1900,con las publicaciones de Pincherle y de Volterra,que culminan con las del Profesor Erik Ivar Fredholm en la revista de la Real Academia de Estocolmo,y sobre todo cuando en el mismo año 1900 Karl Neumann con ocasión de haber resuelto el problema de Dirichlet por reducción a una ecuación integral.
La importancia científica de las ecuaciones integrales,que ya notó Liouville en 1830-40,pero que tan sólo fué desarrollada en 1904 por Hilbert,es que en muchos casos importantes una ecuación integral es equivalente analíticamente a una ecuación diferencial junto con sus condiciones de contorno.La solución de una ecuación integral da en esos casos la de un problema de contorno .La ventaja de formular ciertos problemas físicos valiéndose de ecuaciones integrales en vez de ecuaciones diferenciales,estriba en que mientras que el aumento de número de variables independientes(por ejemplo, de dos a tres en la ecuación de Laplace) acrecienta mucho más las dificultades matemáticas de la formulación diferencial,no ocurre lo mismo con la correspondiente formulación integral.
Si bien el Trabajo de Tesis contiene un estudio de Ecuaciones integrales ,nuestro objetivo central es reducir el estudio de un operador auto-adjunto con espectro arbitrario al estudio de un operador auto-adjunto con un espectro puntual,la reducción se debe a la adición de un operador de Hilbert-Schmidt con norma tan pequeña como se quiera:con el propósito de ver,cuando un operador auto-adjunto A puede ser transformado por un operador unitario U en un operador de Carleman $A' = UAU^*$.
Es como sigue,perturbamos un operador lineal acotado auto-adjunto $A : H \longrightarrow H$ sobre un espacio de Hilbert separable H,hasta reducirlo al estudio de un operador lineal auto-adjunto compacto.
Los operadores de perturbación son operadores de Hilbert-Schmidt $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, \ldots$ que cambian la estabilidad de A,al hacer $A - Y_1 - Y_2 - Y_3 - Y_4 - \cdots$ donde la norma de $Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + \cdots$ es tan pequeña como se quiera.Este hecho nos muestra que, A con espectro arbitrario,el operador $A - Y_1 - Y_2 - Y_3 - Y_4 - \cdots$ tiene espectro puntual y de ahí el nombre de Aproximación Espectral que desarrollamos en el capítulo 5 apoyada por capítulos anteriores .

Al final del trabajo,esta la bibliografía que usamos como fuente de apoyo,que las enumeramos con números romanos :[i],[ii],[iii],[iv],[v],[vi],[vii] y [viii].
Cabe recalcar lo siguiente,que muchos autores,para un operador T definen $T_\lambda = \lambda I - T$ $(\lambda \neq 0)$,como:en [i] y Analysis de Taylor.Pero nosotros definimos $T_\lambda = T - \lambda I$ $(\lambda \neq 0)$.
El presente Trabajo contiene 5 capítulos con secciones y subsecciones y al final del trabajo como teoría de apoyo ,un apéndice , una lista de símbolos y bibliografía.La explicación del contenido es como sigue:
Vemos en el capítulo 2, ecuaciones integrales de Fredholm y Volterra.En este capítulo ,con el apoyo del capítulo 1 que estudia la existencia y unicidad de solución de ecuaciones del tipo $Tx - \lambda x = y$ $(\lambda \neq 0)$ con T compacto,mostramos que no sólo se puede ver la existencia y unicidad de solución en ecuaciones integrales,como aplicación del Teorema del Punto fijo, si no también como aplicación de un operador integral compacto a través de la alternativa de Fredholm.
Definimos un operador integral sobre $L_2[a,b]$,que en el capítulo 3,vemos que es un operador de Hilbert-Schmidt,así es un operador compacto. Este capítulo es de apoyo fundamental para el capítulo 5 como en cuanto la magnitud de un operador de Hilbert-Schmidt no depende del modo de escoger la base ortonormalizada y en que la clase de todos los operadores de Hilbert-Schmidt sobre un espacio de Hilbert separable es un espacio de Banach.
En el capítulo 4 ,estudiamos los operadores de Carleman y lo que es interesante de estos operadores es que cada item de información acerca del operador esta de algún modo contenida en su núcleo. En este capítulo vemos que un operador de Hilbert-Schmidt sobre $L_2[a,b]$ es un operador integral sobre $L_2[a,b]$ como en el capítulo 2,así un operador de Carleman es más es un operador fuerte de Carleman.Hacemos un cálculo de núcleos de operadores de Hilbert-Schmidt como operadores de Carleman y una relación de series convergentes. Toda la teoría desarrollada,prepara para hacer un estudio sobre el espectro de operadores de Carleman juntamente con el apoyo del Capítulo 5,como el hecho de que un operador auto-adjunto es de tipo Carleman si y sólo si cero es el punto de acumulación de Weyl de su espectro (ver [viii] página 73).En el capítulo 5 podemos ver que,para cada operador auto-adjunto A sobre un espacio de Hilbert separable,podemos construir un operador auto-adjunto compacto con espectro puntual puro ,la construcción se dá por la adición de un operador de Hilbert-Schmidt con norma tan pequeña como se quiera.,al operador A.
La teoría desarrollada que es de Análisis Funcional,esta orientada a facilitar el estudio de ciertos problemas físicos a través de ecuaciones integrales y el conocimiento que se pueda tener en reducir el problema de un operador auto-adjunto al estudio de un operador en base a eigenvectores con sus respectivos eigenvalores.Profundizar la teoría de operadores auto-adjuntos a través de operadores compactos y un estudio sobre el espectro de operadores de Carleman.
Para terminar,doy mis agradecimientos a la carrera de Matemática,por su apoyo en el sistema de computación y un reconocimiento especial a la Lic. Miriam Mallea y su esposo Marcelo en la impresión del presente trabajo.

CAPITULO
1

ECUACIONES DE UN OPERADOR LINEAL COMPACTO

Introducción

Este capítulo, esta orientado a preparar algunos resultados que seran aplicados fundamentalmente en el capítulo 2.
Así en la sección 1.1, vemos algunas propiedades sobre eigenvalores de un operador lineal compacto,como el hecho de que cada valor espectral $\lambda \neq 0$ de T (si este existe) es un eigenvalor de T,que será aplicada en la subsección 2.4.1.
Estudiaremos ,ecuaciones del tipo $Tx - \lambda x = y$ $(\lambda \neq 0)$,con T compacto,definido sobre un espacio normado.
Veremos la existencia y unicidad de solución que detallamos en la subsección 1.2.1.
Siendo $T^{\times}$ el operador adjunto de T,que es compacto,en la subsección 1.2.2 damos algunos resultados, que nos prueba, que las ecuaciones homogéneas $Tx - \lambda x = 0$ y $T^{\times}f - \lambda f = 0$ $(\lambda \neq 0)$ tienen el mismo número de soluciones linealmente independientes.
Los resultados de este capítulo nos sugestiona la definición de la Alternativa de Fredholm(sección 2.4),que nos permitirá estudiar una ecuación integral a través de un operador integral, ver capítulo 2.

1.1 Eigenvalores de un operador lineal compacto

Nuestro interés ,se limitará a operadores lineales compactos,estudiamos dos puntos esenciales: si λ esta en el espectro del operador compacto T tal que $\lambda \neq 0$ (si existe),entonces λ es un eigenvalor de T y el único punto de acumulación de los eigenvalores de T es cero.
Pasemos a los detalles.
Sea $X \neq \{0\}$ un espacio normado complejo y $T : D_T \longrightarrow X$ un operador lineal con dominio $D_T \subset X$.Con T asociamos el operador

$$T_\lambda = T - \lambda I$$

donde λ es un número complejo y I es el operador identidad sobre D_T. Si T_λ tiene una inversa, denotamos esto por $R_\lambda(T)$, esto es

$$R_\lambda(T) = T_\lambda^{-1} = (T - \lambda I)^{-1}$$

Denotaremos $R_\lambda(T)$ por R_λ.

Definición 1.1 *Sea X un espacio normado y $T : D_T \longrightarrow X$ un operador lineal con dominio $D_T \subset X$.*
Un número complejo λ es llamado un eigenvalor de T si existe un vector diferente de cero $x \in D_T$, tal que $Tx = \lambda x$. Este x es llamado un eigenvector de T correspondiente al eigenvalor λ.

Definición 1.2 *Sea $X \neq \{0\}$ un espacio normado complejo y $T : D_T \longrightarrow X$ un operador lineal con dominio $D_T \subset X$.Un valor regular λ de T es un número complejo tal que*

(R_1) *R_λ existe*
(R_2) *R_λ es acotado*
(R_3) *R_λ es definido sobre un conjunto que es denso en X*

Definición 1.3 *El conjunto resolvente $\rho(T)$ de T es el conjunto de todos los valores regulares λ de T.*

Definición 1.4 *El complemento $\sigma(T) = \mathbf{C} - \rho(T)$ en el plano complejo $\mathbf{C}$ es llamado el espectro de T, y un $\lambda \in \sigma(T)$ es llamado valor espectral de T.*

Definición 1.5 *El espectro puntual de T es el conjunto*

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbf{C}/T_\lambda \textit{ no es inyectivo}\}$$

<u>Nota</u>

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbf{C}/\lambda \textit{ es un eigenvalor de } T\}$$

Por la importancia de operadores compactos en el presente trabajo, hacemos un estudio amplio en el apéndice,en la sección de Operador Compacto.
La siguiente propiedad que vemos,para un compacto,en relación a sucesiones,la aplicamos en la subsección 1.2.1 de existencia y unicidad de soluciones.
Propiedad
Sea X , Y espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal.
T es compacto si y solamente si para cada $\{x_n\} \subset X$ acotada, $\{Tx_n\}$ tiene una subsucesión convergente en Y.
[La prueba ver en apéndice,sección Operador Compacto:proposición C.1.1]
La siguiente proposición la usaremos en el teorema 2.3 (subsección 2.4.1 del capítulo 2).
La probaremos como aplicación del teorema 1.3 parte A ,de la sección 1.2.

Proposición 1.1 *Sea $T : X \longrightarrow X$ un operador lineal compacto sobre un espacio normado X.Entonces cada valor espectral $\lambda \neq 0$ de T (si este existe) es un eigenvalor de T.*

Prueba
Probemos por contradicción.
Supongamos que λ no es un eigenvalor de T .Entonces $T_\lambda x = 0 \Rightarrow x = 0$, así aplicando el teorema 1.3(A) obtenemos $\forall y \in X\ \exists x \in X/T_\lambda x = y$ es decir $\overline{Ran(T_\lambda)} = Ran(T_\lambda) = X$(ver apéndice:Apend A_2) es más R_λ es acotada.
Así pues por definición 1.3 ,$\lambda \in \rho(T)$ y esto es una contradicción a que $\lambda \in \sigma(T)$. ∎
Las dos siguientes proposiciones,nos probará que el único punto de acumulación de eigenvalores(si existen) de un operador lineal compacto es cero.
La proposición siguiente ,resulta como aplicación del proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt y *Apend* A_5 (usamos *Apend* para indicar que es del apéndice).

Proposición 1.2 *Sea T un operador lineal compacto sobre H, sea $\gamma > 0$ dado.Cada familia de eigenvectores linealmente independientes de T,correspondientes a eigenvalores, cuyos módulos son mayores o iguales a γ es finita.*

Prueba
Probemos por contradicción.
Sea $\{f_n\}$ una sucesión infinita de eigenvectores linealmente independiente de T tal que para las correspondientes eigenvalores λ_n , $|\lambda_n| \geq \gamma\ \forall n \geq 1$.
Sea $\{e_n\}$ una sucesión ortonormal de H que se obtiene de $\{f_n\}$ por el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt.Por la misma construcción se puede escribir

$$e_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n,k} f_k$$

Así

$$\begin{aligned}
(T - \lambda_n I)e_n &= (T - \lambda_n I)\sum_{k=1}^{n} \alpha_{n,k} f_k \\
&= T(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{n,k} f_k) - \lambda_n \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n,k} f_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n,k} T f_k - \sum_{k=1}^{n} \lambda_n \alpha_{n,k} f_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n,k} \lambda_k f_k - \sum_{k=1}^{n} \lambda_n \alpha_{n,k} f_k \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{n,k} \lambda_k f_k + \alpha_{n,n}\lambda_n f_n - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_n \alpha_{n,k} f_k - \lambda_n \alpha_{n,n} f_n \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{n,k}(\lambda_k - \lambda_n) f_k
\end{aligned}$$

Sea $g_n = (T - \lambda_n I)e_n$
Se vé que

$$g_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 1 \\ \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{n,k}(\lambda_k - \lambda_n)f_k & \text{si} \quad n > 1 \end{cases}$$

Ahora

$$\langle g_n, e_n \rangle = 0 \ \ \forall n \geq 1$$

veamos
si $n = 1$ es claro.
veamos para $n > 1$
Por construcción se tiene

$$f_k = \sum_{l=1}^{k} \beta_{k,l} e_l \ \ (1 \leq k \leq n-1)$$

$$\begin{aligned} g_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \left[\alpha_{n,k}(\lambda_k - \lambda_n) \left(\sum_{l=1}^{k} \beta_{k,l} e_l \right) \right] \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left[\sum_{l=1}^{k} \alpha_{n,k}(\lambda_k - \lambda_n)\beta_{k,l} e_l \right] \end{aligned}$$

Así pues $\forall n > 1$ $\langle g_n, e_n \rangle = 0$ pues $\langle e_n, e_l \rangle = 0$ ya que $l \neq n$.
Como $g_n = (T - \lambda_n I)e_n$,entonces

$$Te_n = g_n + \lambda_n e_n$$

$$\begin{aligned} \langle Te_n, e_n \rangle = \langle g_n + \lambda_n e_n, e_n \rangle &= \langle g_n, e_n \rangle + \langle \lambda_n e_n, e_n \rangle \\ &= \lambda_n \langle e_n, e_n \rangle \\ &= \lambda_n \end{aligned}$$

como

$$\lim_{n \to \infty} \langle Te_n, e_n \rangle = 0 \ \ (\text{ver apéndice:Apend } A_5)$$

Así

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = 0$$

que es una contradicción al hecho de qe $|\lambda_n| \geq \gamma > 0$ para $n \geq 1$. ∎
Lo siguiente nos ayudará a probar la proposición 1.4.

Proposición 1.3 *Sea $f_1, f_2, \ldots, f_n$ eigenvectores correspondientes a diferentes eigenvalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de algún operador lineal T en H. Entonces $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son linealmente independientes.*

Prueba
Demostraremos por inducción matemática.
$n = 1$
$f_1 \neq 0$ por ser f_1 eigenvector, así f_1 es linealmente independiente.
$n - 1$
Supongamos que $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ son linealmente independientes.Probemos que $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son linealmente independientes es decir demostremos

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0 \ \ \forall k = 1, \ldots, n$$

Veamos

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k = 0 \qquad [*]$$

$$(T - \lambda_n I) \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k = (T - \lambda_n I)0$$

Así

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k T f_k - \sum_{k=1}^{n} \lambda_n \alpha_k f_k = 0$$
$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k f_k - \sum_{k=1}^{n} \lambda_n \alpha_k f_k = 0 \text{ [Por definición 1.1]}$$
$$\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \lambda_k f_k + \alpha_n \lambda_n f_n - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_n \alpha_k f_k - \lambda_n \alpha_n f_n = 0$$

Así

$$\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k (\lambda_k - \lambda_n) f_k = 0$$

Por hipótesis $\lambda_k \neq \lambda_n$ así pues $\alpha_k = 0 \ \ \forall k = 1, \ldots, n-1$.De esta manera [*] se reduce

$$\alpha_n f_n = 0 \qquad [**]$$

En [**] ya que $f_n \neq 0$ pues es eigenvector, concluimos que $\alpha_n = 0$
Por lo tanto $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son linealmente independientes ∎
La siguiente proposición, la aplicamos, para justificar en teorema 5.1(ver el capítulo 5) ,que los eigenvalores del operador auto-adjunto compacto $A - X$,tienen a cero como único punto de acumulación.
Apliquemos ahora la proposición 1.2 y 1.3.

Proposición 1.4 *Sea T un operador lineal compacto sobre H.Entonces el único posible punto de acumulación de los eigenvalores de T en el plano complejo es 0.*

Prueba
Probamos por contradicción.
Supongamos que $\{\lambda_n\}$ es una sucesión de diferentes eigenvalores tal que

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda \ (\lambda \neq 0) \qquad [1]$$

Ahora por proposición 1.3, los correspondientes eigenvectores $\{f_n\}$ son linealmente independientes.
Aplicamos [1]

$$\text{Para } \frac{|\lambda|}{2} > 0 \text{ , } \exists N > 0 / n > N \Rightarrow |\lambda - \lambda_n| < \frac{|\lambda|}{2}$$

Así

$$|\lambda| - |\lambda_n| \leq |\lambda - \lambda_n| < \frac{|\lambda|}{2}$$
$$|\lambda| - \frac{|\lambda|}{2} < |\lambda_n|$$
$$\frac{|\lambda|}{2} < |\lambda_n|$$

Así pues hay una infinidad de f_n linealmente independientes tal que $\frac{|\lambda|}{2} < |\lambda_n|$ y esto es una contradicción a la proposición 1.2 ∎

1.2 Solución de ecuaciones

En esta sección ,consideramos un operador lineal compacto y su adjunto(ver apéndice en operador compacto) y en base a estos operadores,formamos cuatro ecuaciones que para referirnos usamos los símbolos: 1§,2§,3§ y 4§.El análisis sobre sus soluciones, estan relacionados de alguna manera,que apreciamos en las subsecciones 1.2.1 y 1.2.2. Consideremos un operador lineal compacto
$T : X \longrightarrow X$
sobre un espacio normado X , el operador adjunto
$T^{\times} : X' \longrightarrow X'$ (X' es el espacio dual de X ,para más detalles ver apéndice)
Así pues,las ecuaciones son:

$Tx - \lambda x = y$	*(dado* $y \in X, \lambda \neq 0$)	1§
$Tx - \lambda x = 0$	$(\lambda \neq 0)$	2§
$T^{\times} f - \lambda f = g$	*(dado* $g \in X', \lambda \neq 0$)	3§
$T^{\times} f - \lambda f = 0$	$(\lambda \neq 0)$	4§

Aquí $\lambda \in C$ fijo.
El desarrollo que hagamos se centra en el teorema 1.3, que es sobre la existencia y unicidad de solución de las ecuaciones 1§ ,3§ y el teorema 1.4 , que es sobre el mismo

número de soluciones linealmente independientes de las ecuaciones 2§ y 4§.
Esta teoría, es aplicada a una ecuación integral de Fredholm(sección 2.4), tanto en el espacio $C[a,b]$ como en $L_2[a,b]$.

1.2.1 Existencia y unicidad de soluciones

El siguiente teorema nos muestra la existencia de solución de la ecuación 1§ en base a la ecuación 4§.
La aplicación, esta en la demostración del teorema 1.3, que veremos más adelante.

Teorema 1.1 *Sea $T : X \longrightarrow X$ un operador lineal compacto sobre un espacio normado X, y sea $\lambda \neq 0$.Entonces 1§ tiene una solución x si y sólo si es tal que f(y)=0 [5] $\forall f \in X'$ que satisface 4§ De aquí si 4§ tiene solamente la solución trivial f=0 entonces 1§ $\forall y \in X$ es soluble.*

Prueba
Probamos:
a)Si 1§ tiene una solución x,entonces $f(y) = 0\ \forall f \in X'$ que satisface 4§.
b)Si $f(y) = 0\ \forall f \in X'$ que satisface 4§,entonces 1§ tiene una solución x .
Prueba(a)
Sea $x = x_o$ una solución de 1§ así

$$y = Tx_o - \lambda x_o$$

sea $f \in X'$ una solución de 4§ por linealidad de f tenemos

$$f(y) = f(Tx_o - \lambda x_o) = f(Tx_o) - \lambda f(x_o)$$

Ahora
por ser $T^\times$ operador adjunto de T

$$(T^\times f)(x_o) = f(Tx_o)$$

De 4§

$$(T^\times f)(x_o) = \lambda f(x_o)$$

$$\begin{aligned} f(y) &= f(Tx_o) - \lambda f(x_o) \\ &= (T^\times f)(x_o) - (T^\times f)(x_o) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Prueba(b)
Asumimos que y en 1§ satisface [5] para cada solución de 4§ y probemos que 1§ tiene una solución .
Por contradicción

Supongamos que 1§ no tiene solución es decir

$$\nexists x / y = T_\lambda x (T_\lambda = T - \lambda I)$$

así

$$y \notin Ran(T_\lambda)$$

$Ran(T_\lambda)$ es cerrado (ver apéndice:Apend A_2)
Sea

$$\delta = \inf_{\overline{z} \in Ran(T_\lambda)} \|y - \overline{z}\| > 0$$

es decir la distancia δ desde y a $Ran(T_\lambda)$ es positivo.
Es verdad, porque si suponemos que $\delta = 0$ así por definición de ínfimo $\exists \{y_n\} \subset Ran(T_\lambda)$, $\|y_n - y\| \longrightarrow 0$ esto es $y_n \longrightarrow y$ ya que $Ran(T_\lambda)$ es cerrado así $y \in Ran(T_\lambda) \rightarrow\leftarrow$ (contradicción) $y \notin Ran(T_\lambda)$
Existe un $\tilde{f} \in X'$ tal que $\tilde{f}(y) = \delta$ y $\tilde{f}(z) = 0 \; \forall z \in Ran(T_\lambda)$ (ver apéndice:Apend A_1)
sea $z \in Ran(T_\lambda)$
así $z = T_\lambda x$ para algún $x \in X$, $\tilde{f}(z) = 0$

$$\begin{aligned} 0 = \tilde{f}(z) = \tilde{f}(T_\lambda x) &= \tilde{f}(Tx - \lambda x) \\ &= \tilde{f}(Tx) - \lambda \tilde{f}(x) \\ &= (T^\times \tilde{f})(x) - \lambda \tilde{f}(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto $0 = (T^\times \tilde{f})(x) - \lambda \tilde{f}(x) \; \forall x \in X$
pues $z \in Ran(T_\lambda)$ fue arbitrario.
Así $\tilde{f}$ es solución de 4§ por lo asumido

$$\tilde{f}(y) = 0 \rightarrow\leftarrow \tilde{f}(y) = \delta > 0 \blacksquare$$

Ahora nos proponemos demostrar,un teorema muy similar,que es el teorema 1.2 en la cual veremos la existencia de solución de 3§ en base a la ecuación 2§.Para ello damos un corolario y algunos lemas.
En lo que sigue ,mostramos que para y, entre las soluciones x de la ecuación $Tx - \lambda x = y$,podemos encontrar, una solución $\overline{x}$, con norma mínima $\|\overline{x}\|$.

<u>Lema</u> 1.1 *Sea $T : X \longrightarrow X$ un operador lineal compacto sobre un espacio normado X . Sea $\lambda \neq 0$ y supongamos que la ecuación 1§ $\forall y \in X$ es soluble. Entonces*

$$\exists \overline{x} \in S_y / \|\overline{x}\| = \inf_{x \in S_y} \|x\|$$

donde $S_y = \{x \in X / T_\lambda x = y\}$.

<u>*Prueba*</u>
Sea x_o una solución de 1§. Si x es cualquier otra solución de 1§ , sea $z = x - x_o$ este satisface 2§
veamos

$$\begin{aligned} T_\lambda z = Tz - \lambda z &= T(x - x_o) - \lambda(x - x_o) \\ &= T_\lambda x - T_\lambda x_o \\ &= y - y \\ &= 0 \end{aligned}$$

De aquí cada solución de 1§ se puede escribir como
$x = x_o + z$ donde $z \in N(T_\lambda)$
inversamente
$\forall z \in N(T_\lambda)$, $x_o + z$ es solución de 1§ [1]
veamos
sea $z \in N(T_\lambda)$ así $T_\lambda z = 0$, así pues

$$T_\lambda(x_o + z) = T(x_o + z) - \lambda(x_o + z) = T_\lambda x_o + T_\lambda z = T_\lambda x_o = y$$

Para un x_o fijo la norma de x depende sobre z
escribamos

$$p(z) = \|x_o + z\| \; y \; k = \inf_{z \in N(T_\lambda)} p(z)$$

Por definición de ínfimo
$\exists\{z_n\} \subset N(T_\lambda)/\ p(z_n) = \|x_o + z_n\| \longrightarrow k$ para $n \longrightarrow \infty$ [2]
así $\{p(z_n)\}$ es acotado, es decir $\exists M > 0/p(z_n) \leq M \ \forall n$
$\{z_n\}$ es acotado pues

$$\|z_n\| = \|(x_o + z_n) - x_o\| \leq \|x_o + z_n\| + \|x_o\| = p(z_n) + \|x_o\| \leq M + \|x_o\|$$

De aquí, ya que T es compacto
$\{T(z_n)\}$ tiene una subsucesión convergente [3]
como $z_n \in N(T_\lambda)$, $T_\lambda z_n = 0$ esto es $Tz_n = \lambda z_n$
$z_n = \frac{1}{\lambda} T z_n$ [4]
De[3]y[4] $\exists\{z_{n_j}\} \subset \{z_n\}/\ z_{n_j} \longrightarrow z_o$
como $N(T_\lambda)$ es cerrado(ver lema 1.5 y apéndice:Apend A_o), $z_o \in N(T_\lambda)$
P es continua pues la norma es continua y por análisis funcional

$$p(z_{n_j}) \longrightarrow p(z_o)$$

es más por [2]

$$p(z_{n_j}) \longrightarrow k$$

y por unicidad de límites $k = p(z_o)$ así

$$k = \|x_o + z_o\| \text{ es decir } \|x_o + z_o\| = \inf_{z \in N(T_\lambda)} \|x_o + z\|$$

por [1]

$$\overline{x} = x_o + z_o \in S_y$$

$$\|\overline{x}\| = \inf_{z \in N(T_\lambda)} \|x_o + z\| \blacksquare$$

Ahora aplicaremos lo que probamos,para formular el lema 1.2,que nos muestra una relación entre normas mínimas,para aplicar al lema 1.3.

<u>Lema</u> **1.2** *Supomgamos que la ecuación* 1§ $\forall y \in X$ *es soluble.*
si $\alpha \neq 0, \overline{x} \in S_y /$

$$\|\overline{x}\| = \inf_{x \in S_y} \|x\|$$

$$\overline{x^*} \in S_{\alpha y} / \|\overline{x^*}\| = \inf_{x \in S_{\alpha y}} \|x\|$$

Entonces

$$|\alpha|\|\overline{x}\| = \|\alpha\overline{x}\| = \|\overline{x^*}\|$$

<u>*Prueba*</u>
Ya que $\overline{x^*} \in S_{\alpha y}$
entonces

$T_\lambda \overline{x^*} = \alpha y$ y como $\alpha \neq 0$
$T_\lambda \frac{1}{\alpha}\overline{x^*} = y$ de aquí
$\frac{1}{\alpha}\overline{x^*} \in S_y$

así

$$\|\overline{x}\| \leq \|\tfrac{1}{\alpha}\overline{x^*}\|$$
$$\|\alpha\overline{x}\| \leq \|\overline{x^*}\| \qquad [1]$$

Por otro lado ya que $\overline{x} \in S_y$, $\alpha\overline{x} \in S_{\alpha y}$
veamos

$$\begin{aligned} T_\lambda \alpha\overline{x} &= T\alpha\overline{x} - \lambda(\alpha\overline{x}) \\ &= \alpha T_\lambda \overline{x} \\ &= \alpha y \end{aligned}$$

así

$$\|\overline{x^*}\| \leq \|\alpha\overline{x}\| \qquad [2]$$

De [1] y [2]

$$\|\alpha\overline{x}\| = \|\overline{x^*}\| \blacksquare$$

Observación 1.1 *Para $\alpha \neq 0$ por, el lema 1.2,es claro que $\overline{x^*} \neq 0$ si y sólo si $\overline{x} \neq 0$*

Este hecho aplicaremos al lema 1.3.Pero un resultado inmediato del lema 1.2 es el siguiente corolario, para las normas mínimas

<u>Corolario</u> **1.1** *Si $\alpha = \|\overline{x^*}\| \neq 0$, $\overline{x} \in S_y$. Entonces $\|\overline{x}\| = 1$.*

<u>*Prueba*</u>
Por lema1.2

$$\|\overline{x}\| = \frac{1}{|\alpha|}\|\overline{x^*}\| = \frac{1}{\|\overline{x^*}\|}\|\overline{x^*}\| = 1 \blacksquare$$

Como aplicación del lema 1.2 y corolario 1.1,probamos el lema 1.3,que aplicado al teorema 1.3,sabiendo que T_λ^{-1} existe,esta es acotada.

<u>Lema</u> **1.3** *Sea T:$X \longrightarrow X$ un operador lineal compacto sobre un espacio normado X y sea $\lambda \neq 0$ dado,supongamos que la ecuación 1§ $\forall y \in X$ es soluble.Entonces $\exists \overline{x} \in S_y$ tal que*

$$\|\overline{x}\| = \inf_{x \in S_y} \|x\|$$

y $\exists c > 0$ independiente de y tal que $\|\overline{x}\| \leq c\|y\|$

<u>*Prueba*</u>
Aplicando lema1.1 tenemos

$$\forall y \in X, \exists \overline{x} \in S_y \text{ tal que } \|\overline{x}\| = \inf_{x \in S_y} \|x\| \qquad [1]$$

Veamos que $\exists c > 0$ independiente de y $/\|\overline{x}\| \leq c\|y\|$
Supongamos lo contrario así

$$\exists \{y_n\} \subset X / \frac{\|\overline{x}_n\|}{\|y_n\|} \longrightarrow \infty \textit{ cuando } n \to \infty \qquad [2]$$

donde $y_n = T_\lambda \overline{x}_n$, $\overline{x}_n$ es de norma mínima
sea $\alpha \neq 0$ escalar, $\alpha y_n \in X$
así por [1]

$$\exists \overline{x_n^*} \in S_{\alpha y_n} / \|\overline{x_n^*}\| = \inf_{x \in S_{\alpha y_n}} \|x\|$$

ahora
$\overline{x}_n \neq 0$ así por observación 1.1 $\overline{x_n^*} \neq 0$
De esta manera tomemos

$$\alpha = \|\overline{x_n^*}\| \neq 0, \overline{x}_n \in S_{y_n}$$

aplicando corolario 1.1 $\|\overline{x}_n\| = 1$ [3]
así [2] implica que $\|y_n\| \longrightarrow 0$
Ya que T es compacto y $\{\overline{x}_n\}$ es acotado por [3]

$$\exists \{T\overline{x}_{n_j}\} \subset \{T\overline{x}_n\} / T\overline{x}_{n_j} \longrightarrow v_o$$

Ahora
$y_n = T_\lambda \overline{x}_n = T\overline{x}_n - \lambda \overline{x}_n$
Así
$\lambda \overline{x}_n = T\overline{x}_n - y_n$ [4]
es claro que $y_n \longrightarrow 0$ de aquí $y_{n_j} \longrightarrow 0$
Así pues de [4]

$$\lambda \overline{x}_{n_j} \longrightarrow v_o$$

De aquí

$$\overline{x}_{n_j} \longrightarrow \frac{1}{\lambda} v_o$$

Sea $\overline{x}_o = \frac{1}{\lambda} v_o$, así $v_o = \lambda \overline{x}_o$
Por lo tanto

$$T\overline{x}_{n_j} \longrightarrow \lambda \overline{x}_o \qquad [5]$$

$$\overline{x}_{n_j} \longrightarrow \overline{x}_o \text{ cuando } j \to \infty$$

como T es continua pues T es compacto
$T\overline{x}_{n_j} \longrightarrow T\overline{x_o}$ [6]
Por unicidad de [5] y [6]
$T\overline{x_o} = \lambda \overline{x_o}$ así $T_\lambda \overline{x_o} = 0$ es decir $\overline{x_o} \in N(T_\lambda)$
$\overline{x}_n \in S_{y_n}$ es claro que $T_\lambda(\overline{x}_n - \overline{x_o}) = y_n$
Ya que $\overline{x}_n$ es de norma mínima

$$\|\overline{x}_n - \overline{x_o}\| \geq \|\overline{x}_n\| = 1$$

de aquí

$$\|\overline{x}_{n_j} - \overline{x_o}\| \geq 1 \rightarrow\leftarrow \overline{x}_{n_j} \longrightarrow \overline{x_o} \ \blacksquare$$

Aplicamos el lema 1.3 y damos una caracterización de la solución de la ecuación 3§.

<u>**Teorema**</u> **1.2** *Sea T:X⟶X un operador lineal compacto sobre un espacio normado X y sea* $\lambda \neq 0$*.Entonces* 3§ *tiene una solución f si y sólo si g es tal que*

$$g(x) = 0 \qquad [1]$$

Para toda $x \in X$ *que satisface* 2§*. De aquí si* 2§ *tiene solamente la solución trivial x=0.Entonces* 3§ *con cualquier dado* $g \in X'$ *es soluble*

<u>*Prueba*</u>
Probamos:
a)Si 3§ tiene una solución f, entonces g es tal que $g(x) = 0$ para toda $x \in X$ que satisface 2§.
b)si g es tal que $g(x) = 0$ para toda $x \in X$ que satisface 2§,entonces 3§ tiene una solución f .

Prueba(a)
f es solución de 3§ y x satisface 2§ así

$$\begin{aligned} g(x) = (T_\lambda^\times f)(x) &= (T^\times f - \lambda f)(x) \\ &= (T^\times f)(x) - \lambda f(x) \\ &= f(Tx) - \lambda f(x) \\ &= f(Tx - \lambda x) = f(0) = 0 \end{aligned}$$

Prueba(b)
Asumimos que g satisface [1] para cada solución x de 2§ y probamos que 3§ tiene una solución f.
Sea $x \in X$ cualesquiera y sea $T_\lambda x = y$ así pues $y \in Ran(T_\lambda)$
definimos una f_o sobre $Ran(T_\lambda)$ por

$$f_o(y) = f_o(T_\lambda x) = g(x)$$

está bien definida pues si
$T_\lambda x_1 = T_\lambda x_2$ entonces $T_\lambda(x_1 - x_2) = 0$ así
$x_1 - x_2$ es solución de 2§ y por hipótesis
$g(x_1 - x_2) = 0$,ya que g es lineal $g(x_1) = g(x_2)$.
es mas $f_o \in [Ran(T_\lambda)]'$
ya que
f_o es lineal pues T_λ, g son lineales
f_o es acotado pues:
por lema 1.3 $\forall y \in Ran(T_\lambda)$ al menos una de las correspondientes x satisface

$$\|x\| \leq c\|y\|$$

donde c no depende de y así

$$|f_o(y)| = |g(x)| \leq \|g\|\|x\| \leq \|g\|c\|y\|$$

Por el teorema de Hanhn-Banach la funcional f_o tiene una extensión f sobre X , es mas $f \in X'$
sea $x \in X$

$$f(Tx - \lambda x) = f(T_\lambda x) = f_o(T_\lambda x) = g(x)$$

Por lo tanto $\forall x \in X$,$f(T_\lambda x) = g(x)$
así

$$\begin{aligned} f(Tx) - \lambda f(x) &= g(x) \\ (T^\times f)(x) - \lambda f(x) &= g(x) \\ (T^\times f - \lambda f)(x) &= g(x) \\ (T_\lambda^\times f)(x) &= g(x) \end{aligned}$$

Así pues $T_\lambda^{\times} f = g$ por lo tanto f es solución de 3§. ∎
Vimos en la sección 1.1 que para un operador lineal compacto T sobre un espacio normado, el valor espectral ($\lambda \neq 0$) (si existe) es un eigenvalor de T.Esto es,como aplicación del siguiente teorema que ahora probamos con rigurosidad que resulta como aplicación del teorema 1.1 y teorema 1.2,que nos muestra la existencia y unicidad de solución de las ecuaciones 1§ y 3§.

Teorema **1.3** *Sea $T:X \longrightarrow X$ un operador lineal compacto sobre un espacio normado X y sea $\lambda \neq 0$.*

A- *La ecuación 1§ tiene una solución $x \forall y \in X$ si y sólo si la ecuación homogénea 2§ tiene solamente la solución trivial x=0. En este caso la solución de 1§ es única, y T_λ tiene una inversa acotada.*

B- *La ecuación 3§ tiene una solución $f \forall g \in X'$ si y sólo si 4§ tiene solamente la solución trivial f=0. En este caso la solución de 3§ es única*

Prueba(A)
Probamos:
a) Si la ecuación 1§ tiene una solución x $\forall y \in X$,entonces la ecuación homogénea 2§ tiene solamente la solución trivial $x = 0$.
b)Si la ecuación homogénea 2§ tiene solamente la solución trivial $x = 0$,entonces la ecuación 1§ tiene una solución x $\forall y \in X$.
Prueba(a)
Probemos que sí $\forall y \in X$ la ecuación 1§ es soluble, entonces $x = 0$ es solamente la solución de 2§.
Veamos por contradicción
Supongamos que existe una solución $x_1 \neq 0$ de 2§
Por lo supuesto se tiene que 1§ es soluble
$\forall y \in X$
Así
Para $y = x_1$
existe solución $x = x_2$ de 1§
es decir $T_\lambda x_2 = x_1$
Para $y = x_2$,existe solución $x = x_3$ de 1§
es decir $T_\lambda x_3 = x_2$,...,etc.
Por sustitución se tiene

$$x_1 = T_\lambda x_2 = T_\lambda^2 x_3 = \cdots = T_\lambda^{k-1} x_k \quad \forall k = 2, 3, \cdots$$

Así

$x_1 = T_\lambda^{k-1} x_k$ es mas como $x_1 \neq 0$
$$0 \neq T_\lambda^{k-1} x_k \qquad [1]$$

Ahora como x_1 es solución de 2§

$$0 = T_\lambda x_1 = T_\lambda(T_\lambda^{k-1} x_k) = T_\lambda^k x_k$$

Así

$$0 = T_\lambda^k x_k \qquad [2]$$

De [1]

$$x_k \notin N(T_\lambda^{k-1}) \qquad [3]$$

De [2]

$$x_k \in N(T_\lambda^k) \qquad [4]$$

Por Apend A_3 $N(T_\lambda^{k-1}) \subset N(T_\lambda^k)$

Pero esta inclusión es propia para todo k esto se debe a [3] y [4] y esto es una contradicción a (ver apéndice :Apend A_4).

Por lo tanto $x = 0$ es solamente la solución de 2§.

Prueba(b)

Supongamos que $x = 0$ es solamente la solución de 2§ así por el teorema 1.2

3§ con cualquier $g \in X'$ es soluble

$T^\times$ es operador lineal compacto(ver [i] sección 2.E.9),ahora aplicando lo demostrado en prueba(a). 4§ tiene solamente la solución $f = 0$

aplicando teorema 1.1

1§ con cualquier $y \in X$ dado es soluble.

<u>T_λ tiene una inversa acotada</u>

aplicando lema 1.3

$$\exists c > 0/ \ \|x\| \leq c\|y\|$$

así

$$\|T_\lambda^{-1} y\| \leq c\|y\|$$

es decir T_λ^{-1} es acotada.

<u>Unicidad</u>

Sean x_1,x_2 soluciones de 1§ para $y \in X$

es decir

$$Tx_1 - \lambda x_1 = y$$
$$Tx_2 - \lambda x_2 = y$$

Es claro que

$$T(x_1 - x_2) - \lambda(x_1 - x_2) = 0$$

es decir $x_1 - x_2$ es solución de 2§

aplicando (A)

$$x_1 - x_2 = 0$$

así

$$x_1 = x_2. \blacksquare$$

Prueba(B)

Es una consecuencia de (A) y el hecho de que $T^\times$ es compacto. $\blacksquare$

1.2.2 Soluciones linealmente independientes

Ahora nos proponemos probar que las ecuaciones 2§ y 4§ tienen el mismo número de soluciones linealmente independientes.Para ello necesitamos del siguiente lema.

Lema 1.4 *Dado un conjunto linealmente independiente $\{f_1, \cdots, f_m\}$ en el espacio dual X' de un espacio normado X,existen elementos $z_1, \cdots, z_m$ en X tal que*

$$f_j(z_k) = \begin{cases} 0 & (j \neq k) \\ 1 & (j = k) \end{cases}$$

$j, k = 1, \cdots, m$

Prueba

Veamos por inducción matemática

Para m=1

$f_1 \neq 0$ por la independencia lineal

así $\exists x_o \, / f_1(x_o) \neq 0$

sea $z_1 = \alpha x_o$ con $\alpha = \frac{1}{f_1(x_o)}$

$$f_1(z_1) = f_1(\alpha x_o) = \alpha f_1(x_o) = 1$$

m-1 hipótesis de inducción,demostraremos para m

X contiene elementos $z_1, \cdots, z_{m-1}$ tal que

$$f_k(z_k) = 1 \ , \ f_n(z_k) = 0 \ \ n \neq k \qquad (k, n = 1, \cdots, m-1) \qquad [1]$$

y vemos que

$$\exists z_m \ / \ f_m(z_m) = 1 \ , \ f_j(z_m) = 0 \ (j = 1, \cdots, m-1)$$

sea el conjunto

$$M = \{x \in X / f_1(x) = 0, \cdots, f_{m-1}(x) = 0\}$$

$M \neq \emptyset$ pues $0 \in M$ ya que $f_1, \cdots, f_{m-1}$ son lineales

Probemos que M contiene un $\overline{z}_m$ tal que $f_m(\overline{z}_m) \neq 0$

veamos por contradicción

Supongamos que $f_m(x) = 0 \ \forall x \in M$ [2]

sea $x \in X$

$$\overline{x} = x - \sum_{j=1}^{m-1} f_j(x) z_j \qquad [3]$$

Por [1],para $k \leq m-1$

$$f_k(\overline{x}) = f_k(x) - \sum_{j=1}^{m-1} f_j(x) f_k(z_j) = f_k(x) - f_k(x) = 0$$

así $\overline{x} \in M$
ahora por lo que asumimos[2]
$$f_m(\overline{x}) = 0$$
así de [3] tenemos

$$\begin{aligned} f_m(x) &= f_m(\overline{x} + \sum_{j=1}^{m-1} f_j(x) z_j) \\ &= f_m(\overline{x}) + \sum_{j=1}^{m-1} f_j(x) f_m(z_j) \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} f_j(x) f_m(z_j) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\forall x \in X$, $f_m(x) = \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j f_j(x)$ donde $\alpha_j = f_m(z_j)$
es decir f_m es una combinación lineal de
$f_1, \cdots, f_{m-1} \rightarrow\leftarrow$ pues $\{f_1, \cdots, f_m\}$ es un conjunto linealmente independiente.
así pues $\exists \overline{z}_m$, sea $\beta = f_m(\overline{z}_m) \neq 0$
sea $z_m = \beta^{-1}\overline{z}_m$ y tenemos

$$\begin{aligned} f_m(z_m) &= f_m(\beta^{-1}\overline{z}_m) = \beta^{-1} f_m(\overline{z}_m) = \beta^{-1}\beta = 1 \\ f_j(z_m) &= f_j(\beta^{-1}\overline{z}_m) = \beta^{-1} f_j(\overline{z}_m) = \beta^{-1}0 = 0 \quad j = 1, \cdots, m-1 \end{aligned}$$ ▨

Nota 1.1 *V espacio vectorial,definimos* dim *V=0 si y sólo si* $V = \{0\}$

Sabiendo que $\lambda \neq 0$ es eigenvalor de un operador lineal compacto T sobre un espacio normado,probemos que $\dim(N(T_\lambda)) < \infty$ donde $T_\lambda = T - \lambda I$.

<u>**Lema**</u> **1.5** *Sea T:$X \longrightarrow X$ un operador lineal compacto sobre un espacio normado X entonces para cada $\lambda \neq 0$ el espacio nulo $N(T_\lambda)$ de $T_\lambda = T - \lambda I$ es finito dimensional.*

<u>*Prueba*</u>
Probaremos que $M = \{x \in N(T_\lambda)/\|x\| \leq 1\}$ es compacto
Sea $\{x_n\} \subset M$ así $\|x_n\| \leq 1$ $\forall n$ es decir
$\{x_n\}$ es acotada, como T es compacto entonces
$\{Tx_n\}$ tiene una subsucesión convergente $\{Tx_{n_k}\}$

$x_n \in M \subset N(T_\lambda)$ implica $T_\lambda x_n = 0$
así pues

$$T x_n - \lambda x_n = 0$$
$$x_n = \lambda^{-1} T x_n \quad (\lambda \neq 0)$$

de esta manera $\{x_{n_k}\}$ converge y este límite
está en M pues M es cerrado.
Por lo tanto por definición de compacticidad M es compacto y por
proposición A.5(ver apéndice)

$$\dim(N(T_\lambda)) < \infty \blacksquare$$

Usando los dos lemas anteriores ,probemos que $\dim(N(T_\lambda)) = \dim(N(T_\lambda^\times))$ donde $T_\lambda^\times = T^\times - \lambda I$.

Teorema 1.4 *Sea T:$X \longrightarrow X$ un operador lineal compacto sobre un espacio normado X y sea $\lambda \neq 0$ un eigenvalor de T.Entonces las ecuaciones 2§ y 4§ tienen el mismo número de soluciones linealmente independientes*

Prueba
T ,$T^\times$ son compactos(ver [i]sección 2.E.9) y por Lema 1.5

$$\dim(N(T_\lambda)) < \infty \;,\; \dim(N(T_\lambda^\times)) < \infty$$

así sean $\dim N(T_\lambda) = n$, $\dim N(T_\lambda^\times) = m$
veamos que:

$$\begin{array}{lll} a) & m = n & \text{es verdad} \\ b) & n < m & \text{es imposible} \\ c) & n > m & \text{es imposible} \end{array}$$

Prueba(a)
Preparamos algunos resultados para probar (b) y(c).
Si $n = 0$ solamente la solución de 2§ es $x = 0$.Entonces
3§ con cualquier g dado es soluble por teorema 1.2 .Por teorema 1.3 (B), esto implica que $f = 0$ es solamente la solución de 4§.De aquí $m = 0$.
Similarmente desde $m = 0$ se sigue que $n = 0$.
Supongamos que $m > 0$ y $n > 0$.
Sea $\{x_1, \cdots, x_n\}$ una base para $N(T_\lambda)$
$x_1 \notin Y_1 = \langle x_2, \cdots, x_n \rangle$ pues $\{x_1, \cdots, x_n\}$ es linealmente independiente.
Por (ver apéndice:Apend $A_\circ$)
$Y_1 \subset N(T_\lambda)$ es subespacio propio y cerrado.
Ahora por Apend A_1
$\exists \tilde{g}_1, \tilde{g}_1(y) = 0 \; \forall y \in Y_1$ y $\tilde{g}_1(x_1) = \delta$ donde $\delta > 0$

es la distancia desde x_1 a Y_1.
De aquí

$$\begin{aligned} g_1 &= \delta^{-1}\tilde{g}_1 \\ g_1(x_1) &= \delta^{-1}\tilde{g}_1(x_1) = \delta^{-1}\delta = 1 \end{aligned}$$

es más

$$g_1(x_2) = 0, \cdots, g_1(x_n) = 0$$

Similarmente
$\exists g_2 / g_2(x_2) = 1$ y $g_2(x_j) = 0$ para $j \neq 2$, etc.
Así
X' contiene $g_1, \cdots, g_n$ tal que

$$g_j(x_k) = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases} \qquad [1]$$

$j, k = 1, \cdots, n$
Si $\{f_1, \cdots, f_m\}$ es base para $N(T_\lambda^\times)$ entonces por lema 1.4, existen elementos $z_1, \cdots, z_m$ de X tal que

$$f_j(z_k) = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases} \qquad [2]$$

$j, k = 1, \cdots, m$ ■

Prueba(b)
Sea $n < m$ y definamos $S : X \longrightarrow X$ por

$$Sx = Tx + \sum_{j=1}^{n} g_j(x) z_j \qquad [3]$$

S es compacto, ya que $g_j(x)z_j$ representan un operador lineal compacto y una suma de operadores compactos es compacto .
Probemos que

$$S_\lambda x_o = Sx_o - \lambda x_o = 0 \Rightarrow x_o = 0$$

veamos

$$f_k(S_\lambda x_o) = f_k(0) = 0 \text{ para } k = 1, \cdots, n$$

aplicando [2] y [3]

$$\begin{aligned} 0 = f_k(S_\lambda x_o) &= f_k(Sx_o - \lambda x_o) \\ &= f_k(Tx_o + \sum_{j=1}^{n} g_j(x_o) z_j - \lambda x_o) \\ &= f_k(T_\lambda x_o + \sum_{j=1}^{n} g_j(x_o) z_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= f_k(T_\lambda x_\circ) + \sum_{j=1}^{n} g_j(x_\circ) f_k(z_j) \\ &= T_\lambda^\times f_k(x_\circ) + g_k(x_\circ) \end{aligned}$$

Ya que $f_k \in N(T_\lambda^\times)$ así $T_\lambda^\times f_k = 0$
De lo anterior se tiene $g_k(x_\circ) = 0 \quad k = 1, \cdots, n$
Por [3] y lo anterior

$$Sx_\circ = Tx_\circ + \sum_{j=1}^{n} g_j(x_\circ) z_j = Tx_\circ$$

así

$$0 = S_\lambda x_\circ = Sx_\circ - \lambda x_\circ = Tx_\circ - \lambda x_\circ = T_\lambda x_\circ$$

así $x_\circ \in N(T_\lambda)$
Ya que $\{x_1, \cdots, x_n\}$ es base para $N(T_\lambda)$

$$\begin{aligned} x_\circ &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \\ 0 = g_k(x_\circ) &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j g_k(x_j) = \alpha_k \quad k = 1, \cdots, n \end{aligned}$$

así pues $x_\circ = 0$
Así, aplicando teorema 1.3(A) tenemos
$\exists x$ para cada y tal que $S_\lambda x = y$
Escogemos $y = z_{n+1}$ $(n < m \Rightarrow m \geq 1 + n)$
sea $x = v$ su correspondiente solución , es decir $S_\lambda v = z_{n+1}$

$$\begin{aligned} 1 &= f_{n+1}(z_{n+1}) \quad por[2] \\ &= f_{n+1}(S_\lambda v) \\ &= f_{n+1}(T_\lambda v + \sum_{j=1}^{n} g_j(v) z_j) \\ &= f_{n+1}(T_\lambda v) + \sum_{j=1}^{n} g_j(v) f_{n+1}(z_j) \\ &= (T_\lambda^\times f_{n+1})(v) \quad por[2] \end{aligned}$$

$f_{n+1} \in N(T_\lambda^\times) \Rightarrow T_\lambda^\times f_{n+1} = 0 \rightarrow\leftarrow (T_\lambda^\times f_{n+1})(v) = 1$
Por lo tanto $n < m$ es imposible ▨
<u>*Prueba(c)*</u>
El razonamiento es similar a prueba(b)

definamos

$$\tilde{S} : X' \longrightarrow X'$$
$$\tilde{S}f = T^{\times}f + \sum_{j=1}^{m} f(z_j)g_j$$

$\tilde{S}$ es compacto ya que,$T^{\times}$ es compacto y $f(z_j)g_j$ representan un operador lineal compacto.
Probemos que

$$\tilde{S}_{\lambda}f_{\circ} = \tilde{S}f_{\circ} - \lambda f_{\circ} = 0 \Rightarrow f_{\circ} = 0$$

veamos

$$\begin{aligned} 0 = (\tilde{S}_{\lambda}f_{\circ})(x_k) &= (T_{\lambda}^{\times}f_{\circ})(x_k) + \sum_{j=1}^{m} f_{\circ}(z_j)g_j(x_k) \\ &= f_{\circ}(T_{\lambda}x_k) + f_{\circ}(z_k) \quad k = 1, \cdots, m \end{aligned}$$

Como $m < n$,$x_k \in N(T_{\lambda})$ para $k = 1, \cdots, m$
así

$$f_{\circ}(T_{\lambda}x_k) = f_{\circ}(0) = 0$$

Por lo tanto

$$f_{\circ}(z_k) = 0 \quad k = 1, \cdots .m$$

ahora

$$\tilde{S}f_{\circ} = T^{\times}f_{\circ} + \sum_{j=1}^{m} f_{\circ}(z_j)g_j = T^{\times}f_{\circ}$$
$$0 = \tilde{S}_{\lambda}f_{\circ} = \tilde{S}f_{\circ} - \lambda f_{\circ} = T^{\times}f_{\circ} - \lambda f_{\circ} = T_{\lambda}^{\times}f_{\circ}$$

así $f_{\circ} \in N(T_{\lambda}^{\times})$ Ya que $\{f_1, \cdots, f_m\}$ es una base para $N(T_{\lambda}^{\times})$

$$f_{\circ} = \sum_{j=1}^{m} \beta_j f_j$$

así pues

$$0 = f_{\circ}(z_k) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j f_j(z_k) = \beta_k$$

de esta manera

$$f_{\circ} = 0$$

Por teorema 1.3(B)
existe f para cada g tal que $\tilde{S}_{\lambda}f = g$

elegimos $g = g_{m+1} \quad (m < n \Rightarrow n \geq 1 + m)$
y sea $f = h$ la correspondiente solución, es decir $\tilde{S}_\lambda h = g_{m+1}$

$$\begin{aligned}
1 = g_{m+1}(x_{m+1}) &= (\tilde{S}_\lambda h)(x_{m+1}) \\
&= (\tilde{S}h - \lambda h)(x_{m+1}) \\
&= (T^\times h + \sum_{j=1}^{m} h(z_j)g_j - \lambda h)(x_{m+1}) \\
&= (T_\lambda^\times h + \sum_{j=1}^{m} h(z_j)g_j)(x_{m+1}) \\
&= (T_\lambda^\times h)(x_{m+1}) + \sum_{j=1}^{m} h(z_j)g_j(x_{m+1}) \quad por[1] \\
&= (T_\lambda^\times h)(x_{m+1}) \\
&= h(T_\lambda x_{m+1})
\end{aligned}$$

$h(T_\lambda x_{m+1}) = 1 \rightarrow\leftarrow$ ya que
$x_{m+1} \in N(T_\lambda)$ así $h(T_\lambda x_{m+1}) = h(0) = 0$
por lo tanto $m < n$ es imposible .

Por lo tanto sólo se da la parte (a), es decir $m = n$ o sea la ecuación 2§ y 4§ tienen el mismo número de soluciones linealmente independientes. ▩
Los teoremas 1.3 y 1.4 nos sugestiona la definición de la alternativa de Fredholm,que la aplicaremos para analizar las soluciones de una ecuación integral, en el próximo capítulo.

CAPITULO
2

ECUACIONES INTEGRALES DE FREDHOLM Y VOLTERRA

Introducción

En este capítulo estudiaremos sobre la existencia y unicidad de solución de ecuaciones integrales como de Fredholm y Volterra (sección 2.3).
Apreciaremos que el estudio de soluciones de ecuaciones integrales, no sólo se lo hace como aplicación del teorema del punto fijo de Banach si no también a través de un operador integral como consecuencia de los resultados obtenidos en anterior capítulo .
Nuestro interés se centra en la aplicación de un operador integral sobre $L_2[a,b]$ a una ecuación integral,pues este operador será de Hilbert-Schmidt en el capítulo 3 y de Carleman en el capítulo 4.

2.1 Aplicación del teorema del punto fijo de Banach

Las definiciones que damos a continuación son muy generales.Para esta sección nos limitaremos al espacio $C[a,b]$ con métrica

$$d(x,y) = \sup_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|$$

Definición 2.1 *Sea (X,d) un espacio métrico. Un punto fijo de un mapeo T:X⟶X es un* $x \in X/Tx{=}x$

Definición 2.2 *Sea (X,d) un espacio métrico. Un mapeo T:X⟶X es llamado una contracción sobre X si existe un número real positivo* $\alpha < 1$ *tal que*

$$\forall x, y \in X \ , \ d(Tx,Ty) \leq \alpha d(x,y)$$

El siguiente teorema será aplicado a ecuaciones integrales como la de Fredholm y Volterra sobre $C[a,b]$.

2.1.1 Teorema del punto fijo de Banach (TPF)

No damos la demostración, lo que nos interesa es como podemos aplicar.
Así pues, para las ecuaciones integrales,construiremos un operador que será una contracción sobre $C[a,b]$ y de ahí, veremos la existencia y unicidad de solución en $C[a,b]$ como aplicación de este teorema, que dice(TPF):
TPF.-
Consideremos un espacio métrico (X,d),donde $X \neq \emptyset$.Supongamos que X es completo y sea T:X$\longrightarrow$X una contracción sobre X.Entonces T tiene un único punto fijo.
(Ver [iii] página 27)
El siguiente lema será aplicado ,para probar la existencia y unicidad de solución para una ecuación integral de Volterra bajo ninguna restricción del parámetro μ que detallaremos en la sección 2.3.
Este lema resulta como aplicación del (TPF).

Lema 2.1 *Sea T:X$\longrightarrow$X un mapeo sobre un espacio métrico completo X y supongamos que T^m es una contracción sobre X para algún $m \in N$.Entonces T tiene un único punto fijo*

Prueba
Sea $B = T^m$ es una contracción sobre X
Por el teorema del punto fijo,B tiene un único punto fijo $\tilde{x}$ esto es

$$B\tilde{x} = \tilde{x}$$

de aquí

$$B^n\tilde{x} = \tilde{x}$$

Por el teorema del punto fijo
Ya que B es contracción sobre el espacio completo X

$$\forall x \in X \ , \ B^n x \longrightarrow \tilde{x} \ cuando \ n \rightarrow \infty \qquad (\circ)$$

En particular para $x = T\tilde{x} \in X$
aplicando ($\circ$) tenemos

$$\tilde{x} = \lim_{n\rightarrow\infty} B^n T\tilde{x}$$

Ahora

$$B^nT = TB^n \ pues \ B^n = T^{nm}$$

así

$$\begin{aligned}\tilde{x} = \lim_{n\rightarrow\infty} B^nT\tilde{x} &= \lim_{n\rightarrow\infty} TB^n\tilde{x} \\ &= \lim_{n\rightarrow\infty} T\tilde{x} \\ &= T\tilde{x}\end{aligned}$$

Es decir $\tilde{x}$ es un punto fijo de T
veamos que es único
Supongamos que $\tilde{y}$ es otro punto fijo de T así
$T\tilde{y} = \tilde{y}$ de aquí $T^m\tilde{y} = \tilde{y}$
es decir

$$B\tilde{y} = \tilde{y}$$

lo que dice es que $\tilde{y}$ es punto fijo de B,$\tilde{x}$ es también punto fijo de B ya que $T^m\tilde{x} = \tilde{x}$ por ser $\tilde{x}$ punto fijo de T entonces por unicidad $\tilde{x} = \tilde{y}$. ∎
En las dos secciones siguientes ,vemos en detalle la aplicación del (TPF).Para ello ,empesamos definiendo una ecuación integral y un operador integral.

Definición 2.3 *Se llama ecuación integral a una ecuación que contiene la función incógnita bajo el signo de integral.*

Definición 2.4 *Se llama operador integral al operador que en su definición la función variable esta bajo el signo de Integral.*

2.2 Ecuación integral de Fredholm

Una ecuación integral de la forma

$$x(t) - \mu \int_a^b \kappa(t,\tau)x(\tau)d\tau = v(t) \quad \boxed{1}$$

es llamada ecuación de Fredholm de segunda clase.Aquí x es una función sobre [a,b] que es desconocida, μ es un parametro.El núcleo κ de la ecuación es un función dada sobre [a,b]×[a,b] y v es una función dada sobre [a,b].

Observación 2.1 *Una ecuación integral de la forma*

$$\int_a^b \kappa(t,\tau)x(\tau)d\tau = v(t)$$

es dicho ecuación de Fredholm de primera clase.

Estudiaremos la ecuación integral sobre el espacio de funciones C[a,b] con métrica dada por

$$d(x,y) = \sup_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|$$

Ahora sea $J = [a,b]$, κ una función continua sobre $J \times J$ como $[a,b]$ es compacto así $J \times J$ es compacto de esta manera, κ es una función acotada sobre $J \times J$ es decir

$$\exists c > 0/|\kappa(t,\tau)| \leq c \quad \forall(t,\tau) \in J \times J$$

Para demostrar la existencia y unicidad de solución de la ecuación,nuestro parámetro μ no es cualesquiera si no es un μ tal que

$$|\mu| < \frac{1}{c(b-a)}$$

La demostración la damos en el siguiente teorema, como aplicación del (TPF).

2.2.1 Existencia y unicidad de solución

Sabiendo que

$$|\mu| < \frac{1}{c(b-a)}$$

, veremos que la ecuación $\boxed{1}$ tiene una única solución x en $C[a,b]$.

Teorema 2.1 *En* $\boxed{1}$ *supongamos κ continua sobre $J \times J$ y v continua en J.Entonces* $\boxed{1}$ *tiene una única solución x.*

Prueba
Definamos

$$T : C[a,b] \longrightarrow C[a,b]$$
$$x \longrightarrow Tx$$
$$(Tx)(t) = v(t) + \mu \int_a^b \kappa(t,\tau)x(\tau)d\tau$$

Está bien definida
(1°)

$$x \neq 0$$

$Tx \in C[a,b]$
Veamos

$$\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists \delta > 0 / |t - t_o| < \delta \Rightarrow |Tx(t) - Tx(t_o)| < \epsilon$$

sea $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}
|Tx(t) - Tx(t_o)| &= |v(t) + \mu \int_a^b \kappa(t,\tau)x(\tau)d\tau - v(t) - \mu \int_a^b \kappa(t_o,\tau)x(\tau)d\tau| \\
&= |\mu| \left| \int_a^b (\kappa(t,\tau) - \kappa(t_o,\tau))x(\tau)d\tau \right| \\
&\leq |\mu| \int_a^b |\kappa(t,\tau) - \kappa(t_o,\tau)||x(\tau)|d\tau \\
&\leq |\mu|\|x\| \int_a^b |\kappa(t,\tau) - \kappa(t_o,\tau)|d\tau
\end{aligned}$$

Como κ es continua sobre el compacto $J \times J$ así
κ es uniformemente continua sobre $J \times J$
así para

$$\frac{\epsilon}{\|x\|c(b-a)} > 0 \ , \ \exists \delta > 0 / |t - t_o| < \delta \Rightarrow |\kappa(t,\tau) - \kappa(t_o,\tau)| < \frac{\epsilon}{\|x\|c(b-a)}$$

Por lo tanto

$$|Tx(t) - Tx(t_o)| < \epsilon$$

(2°)

$$x = 0$$

$$T0(t) = v(t)$$

como v es continua en J,entonces $T0 \in C[a,b]$.
Probemos que T es una contracción sobre el espacio completo $C[a,b]$.
sean $x, y \in C[a,b]$

$$\begin{aligned}
d(Tx,Ty) = \sup_{t\in J}|Tx(t) - Ty(t)| &= |\mu|\sup_{t\in J}\left|\int_a^b \kappa(t,\tau)[x(\tau) - y(\tau)]d\tau\right| \\
&\leq |\mu|\sup_{t\in J}\int_a^b |\kappa(t,\tau)||x(\tau) - y(\tau)|d\tau \\
&\leq |\mu|\sup_{t\in J}\int_a^b c|x(\tau) - y(\tau)|d\tau \\
&= |\mu|c\sup_{t\in J}\int_a^b |x(\tau) - y(\tau)|d\tau \\
&= |\mu|c\int_a^b |x(\tau) - y(\tau)|d\tau \\
&\leq |\mu|c\sup_{\gamma\in J}|x(\gamma) - y(\gamma)|\int_a^b d\tau \\
&= |\mu|c\, d(x,y)(b-a)
\end{aligned}$$

Sea

$$\alpha = |\mu|c(b-a) < \frac{1}{c(b-a)}c(b-a) = 1$$

Por lo tanto $\forall x, y \in C[a,b]$, $d(Tx,Ty) \leq \alpha d(x,y)$

y por definición 2.2 ,T es una contracción sobre $C[a,b]$.Ahora por el teorema del punto fijo
T tiene un único punto fijo $x \in C[a,b]$ es decir $Tx = x$, esto es para la ecuación $\boxed{1}$ existe una única solución x definido sobre J. ■

En la siguiente ecuación integral, veremos como aplicación del Lema 2.1 que existe una única solución en $C[a,b]$ donde el parámetro μ que consideramos esta libre de toda restricción.

2.3 Ecuación integral de Volterra

La ecuación integral de la forma

$$x(t) - \mu \int_a^t \kappa(t,\tau)x(\tau)d\tau = v(t) \quad \boxed{2}$$

se llama ecuación de Volterra de segunda clase.Aquí x es una función sobre $[a,b]$ que es desconocida,μ es un parámetro. El núcleo κ de la ecuación es una función dada sobre $[a,b] \times [a,b]$ y v es una función dada sobre $[a,b]$.
La diferencia entre $\boxed{1}$ y $\boxed{2}$ es que en $\boxed{1}$ el límite superior de integración b es constante,mientras que en $\boxed{2}$ es variable.

2.3.1 Existencia y unicidad de solución

<u>Teorema</u> **2.2** *Supongamos que v en $\boxed{2}$ es continua sobre [a,b] y el núcleo κ es continua sobre la región triangular R en el $t\tau$-plano dado por $a \leq \tau \leq t$,$a \leq t \leq b$. Entonces $\boxed{2}$ tiene una solución única x sobre [a,b] para cada μ.*

<u>Prueba</u>

$$\begin{aligned} T : C[a,b] &\longrightarrow C[a,b] \\ x &\longrightarrow Tx \\ & \quad (Tx)(t) = v(t) + \mu \int_a^t \kappa(t,\tau)x(\tau)d\tau \end{aligned}$$

T está bien definida ya que v es continua sobre $[a,b]$ y κ es uniformemente continua sobre el compacto R,así

$$\exists c > 0 / |\kappa(t,\tau)| \leq c \;\; \forall (t,\tau) \in R$$

Sean $x, y \in C[a,b]$

$$\begin{aligned} |Tx(t) - Ty(t)| &= |\mu| \left| \int_a^t \kappa(t,\tau)[x(\tau) - y(\tau)]d\tau \right| \qquad [*] \\ &\leq |\mu| c \, d(x,y) \int_a^t d\tau \\ &= |\mu| c(t-a) d(x,y) \end{aligned}$$

Veamos por inducción que

$$|T^m x(t) - T^m y(t)| \leq |\mu|^m c^m \frac{(t-a)^m}{m!} d(x,y)$$

m=1
Es dado por [*]
m+1

$$\begin{aligned}
|T^{m+1}x(t) - T^{m+1}y(t)| &= |T(T^m x)(t) - T(T^m y)(t)| \\
&= |\mu| \left| \int_a^t \kappa(t,\tau)[T^m x(\tau) - T^m y(\tau)] d\tau \right| \\
&\leq |\mu| \int_a^t |\kappa(t,\tau)||T^m x(\tau) - T^m y(\tau)| d\tau \\
&\leq |\mu| c \int_a^t |T^m x(\tau) - T^m y(\tau)| d\tau \\
&\leq |\mu| c \left(\int_a^t |\mu|^m \frac{c^m (\tau - a)^m}{m!} d\tau \right) d(x,y) \\
&= |\mu|^{m+1} c^{m+1} d(x,y) \frac{(\tau - a)^{m+1}}{m!(m+1)} /_a^t \\
&= |\mu|^{m+1} c^{m+1} d(x,y) \frac{(t-a)^{m+1}}{(m+1)!}
\end{aligned}$$

$$|T^{m+1}x(t) - T^{m+1}y(t)| \leq |\mu|^{m+1} c^{m+1} \frac{(t-a)^{m+1}}{(m+1)!} d(x,y)$$

Ahora
$a \leq t \leq b$
$t - a \leq b - a$
$(t-a)^m \leq (b-a)^m$

$$\forall t \in [a,b] \; |T^m x(t) - T^m y(t)| \leq |\mu|^m c^m \frac{(t-a)^m}{m!} d(x,y) \leq |\mu|^m c^m \frac{(b-a)^m}{m!} d(x,y)$$

Así

$$\sup_{t\in[a,b]} |T^m x(t) - T^m y(t)| \leq |\mu|^m c^m \frac{(b-a)^m}{m!} d(x,y)$$

$$d(T^m x, T^m y) \leq \alpha_m d(x,y)$$

donde

$$\alpha_m = |\mu|^m c^m \frac{(b-a)^m}{m!}$$

Ahora
$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{[|\mu|c(b-a)]^m}{m!} < \infty$$
así pues $\alpha_m \longrightarrow 0$ cuando $m \longrightarrow \infty$
Así que para m suficientemente grande tenemos
$$\alpha_m < 1$$
De esta manera
T^m es una contracción sobre $C[a,b]$
Por lema 2.1 ,T tiene un único punto fijo $x \in C[a,b]$, es decir , para $\boxed{2}$ existe una única solución x. ∎
Si bién aplicamos el (TPF) para ver la existencia y unicidad de solución a una ecuación integral ,ahora veremos como podemos aplicar a través de un operador integral.
Definiremos un operador integral sobre $C[a,b]$ y otro sobre $L_2[a,b]$,probaremos que ambos operadores son compactos .Si T es uno de estos operadores integrales, haciendo $T_\lambda = T - \lambda I$ $(\lambda \neq 0)$.La ecuación integral de Fredholm se reduce al estudio de la ecuación $T_\lambda x = y$, resulta que T_λ satisface la alternativa de Fredholm y esto nos permite analizar las soluciones de la ecuación.
Pasemos a los detalles ,empezando a definir la alternativa de Fredholm.

2.4 Alternativa de Fredholm

Los resultados obtenidos en el anterior capítulo sugestionan el siguiente concepto:
Un operador lineal acotado
$A : X \longrightarrow X$ sobre un espacio normado X se dice que satisface la alternativa de Fredholm si A es tal que se tiene **(I)** o **(II)**.
(I) Las ecuaciones no homogéneas
$$Ax = y \ , \ A^{\times} f = g$$
tiene soluciones x y f respectivamente,para cada dados $y \in X$ y $g \in X'$,las soluciones son únicas.
Las correspondientes ecuaciones homogéneas
$$Ax = 0 \ , \ A^{\times} f = 0$$
tienen solamente las soluciones triviales $x = 0$ y $f = 0$, respectivamente.
(II) Las ecuaciones homogéneas
$$Ax = 0, A^{\times} f = 0$$

tienen el mismo número de soluciones linealmente independientes

$$x_1, \cdots, x_n \; y \; f_1, \cdots, f_n \quad (n \geq 1)$$

respectivamente.

2.4.1 Alternativa de Fredholm para un operador lineal compacto

Para el siguiente teorema consideramos un operador lineal compacto T sobre un espacio normado cualesquiera .La demostración que damos ,resulta como aplicación del teorema 1.3,teorema 1.4 y proposición 1.1 del capítulo 1,hacemos $T_\lambda = T - \lambda I$ $(\lambda \neq 0)$ y analisamos los λ tal que $\lambda \in \rho(T)$ o $\lambda \in \sigma(T)$ (si un tal λ existe).

Teorema 2.3 *Sea T:$X \longrightarrow X$ un operador lineal compacto sobre un espacio normado X, y sea $\lambda \neq 0$. Entonces $T_\lambda = T - \lambda I$ satisface la alternativa de Fredholm*

Prueba

Caso(I)

$$\lambda \in \rho(T) \quad (\lambda \neq 0)$$

así T_λ^{-1} existe

$$T_\lambda x = 0 \Rightarrow x = 0$$

veamos

$$x = T_\lambda^{-1} T_\lambda x = T_\lambda^{-1} 0 = 0 \text{ pues } T_\lambda^{-1} \text{ es lineal}$$

Así por teorema 1.3(A) la ecuación 1§ tiene una solución única x $\forall y \in X$.
veamos que

$$T_\lambda^\times f = 0 \Rightarrow f = 0$$

Sea $y \in X$, para éste $\exists! x / T_\lambda x = y$

$$f(y) = f(T_\lambda x) = (T_\lambda^\times f)(x) = 0 \text{ pues } T_\lambda^\times f = 0$$

Por lo tanto $\forall y \in X$,$f(y) = 0$ así pues $f = 0$
Y por el teorema 1.3(B)la ecuación 3§ tiene una solución única f $\forall g \in X'$.

Caso(II)

$\lambda \in \sigma(T)$ $(\lambda \neq 0)$(si un tal λ existe)
así λ es un eigenvalor esto es por proposición 1.1.
Así pues

$$n = \dim N(T_\lambda) = \dim N(T_\lambda^\times)$$

Así sea
$\{x_1, \cdots, x_n\}$ base de $N(T_\lambda)$

$\{f_1, \cdots, f_n\}$ base de $N(T_\lambda^\times)$
es claro que $x_1, \cdots, x_n$ son soluciones linealmente independientes de $T_\lambda x = 0$ y $f_1, \cdots, f_n$ también de $T_\lambda^\times f = 0$ ∎

Observación 2.2 *Para el caso(I),veamos como es la solución x para un espacio de Banach.*

$$\lambda \in \rho(T) \ \ (\lambda \neq 0)$$

para $y \in X$, $\exists! x / T_\lambda x = y$
así

$$x = T_\lambda^{-1} y$$

Si asumimos que X es un espacio de Banach complejo

$$|\lambda| > \|T\|$$

así

$$\|\frac{T}{\lambda}\| < 1$$

de esta manera

$$T_\lambda^{-1} = -\lambda^{-1}(I + \lambda^{-1}T + \lambda^{-2}T^2 + \cdots)$$

así pues

$$x = -\frac{1}{\lambda}(y + \frac{1}{\lambda}Ty + \frac{1}{\lambda^2}T^2 y + \cdots)$$

Queremos aplicar ahora lo que acabamos de probar, para ello consideramos dos espacios normados $X = C[a,b]$ $(L_2[a,b])$.
Nuestro operador T, un operador integral compacto;como detallamos en lo que sigue.

2.4.2 Operador integral sobre C[a,b] y $L_2[a,b]$

Los operadores integrales que consideramos tanto en $C[a,b]$ como $L_2[a,b]$,tienen gran similitud en la estructura de su definición.
Si observamos una ecuación integral de Fredholm, los operadores integrales considerados salen de la parte integral de esta ecuación,probaremos que son compactos de acuerdo como se especifica,en los dos siguientes teoremas.
El teorema que a continuación probamos,resulta como aplicación del teorema de Ascoli's.

<u>Teorema</u> **2.4** *Sea J=[a,b] cualquier intérvalo compacto y supongamos que κ es continua sobre $J \times J$. Entonces*

$$T : C[a,b] \longrightarrow C[a,b]$$

definido por

$$(Tx)(s) = \int_a^b \kappa(s,t)x(t)dt$$

es un operador lineal compacto

<u>Prueba</u>
Es claro que T es lineal
veamos que T está bien definida

$$para \;\; x \neq 0$$

$$\forall \epsilon > 0 \; , \; \exists \delta > 0 / |s - s_\circ| < \delta \Rightarrow |(Tx)(s) - (Tx)(s_\circ)| < \epsilon \; ?$$

Sea $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} |(Tx)(s) - (Tx)(s_\circ)| &= |\int_a^b \kappa(s,t)x(t)dt - \int_a^b \kappa(s_\circ,t)x(t)dt| \\ &= |\int_a^b (\kappa(s,t) - \kappa(s_\circ,t))x(t)dt| \\ &\leq \int_a^b |\kappa(s,t) - \kappa(s_\circ,t)||x(t)|dt \\ &\leq \|x\| \int_a^b |\kappa(s,t) - \kappa(s_\circ,t)|dt \end{aligned}$$

κ es uniformemente continua sobre $J \times J$
así

$$\text{Para } \frac{\epsilon}{\|x\|} > 0 \; , \; \exists \delta > 0 / |s - s_\circ| < \delta \Rightarrow |\kappa(s,t) - \kappa(s_\circ,t)| < \frac{\epsilon}{\|x\|}$$

así pues

$$|(Tx)(s) - (Tx)(s_\circ)| < \epsilon$$

$$para \;\; x = 0$$

$$Tx = T0 = 0 \in C[a,b]$$

<u>T es acotada</u>

$$\begin{aligned} \|Tx\| = \sup_{s \in J} |(Tx)(s)| &= \sup_{s \in J} \left| \int_a^b \kappa(s,t)x(t)dt \right| \\ &\leq \sup_{s \in J} \int_a^b |\kappa(s,t)||x(t)|dt \end{aligned}$$

$$\exists c > 0 / |\kappa(s,t)| \le c \,\forall (s,t) \in J \times J$$

pues κ es continua sobre el compacto $J \times J$

$$\begin{aligned} \|Tx\| &\le \sup_{s\in J} \int_a^b c|x(t)|dt \\ &= c \sup_{s\in J} \int_a^b |x(t)|dt \\ &\le c\int_a^b \|x\|dt \\ &= c(b-a)\|x\| \end{aligned}$$

Sea $\{x_n\} \subset C[a,b]$ acotada veamos que
$\{Tx_n\} \subset C[a,b]$ tiene una subsucesión convergente
veamos
$\{x_n\}$ acotada así $\exists m > 0/\|x_n\| \le m \,\forall n$
sea $y_n = Tx_n$

$$\|y_n\| = \|Tx_n\| \le \|T\|\|x_n\| \le \|T\|m \,\forall n$$

así $\{y_n\}$ es acotada.
Probemos que $\{y_n\}$ es equicontinua, es decir

$$\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists \delta > 0/|s_1 - s_2| < \delta \Rightarrow |y_n(s_1) - y_n(s_2)| < \epsilon$$

veamos
Como κ es continua sobre el compacto $J \times J$ así κ es uniformemente continua sobre $J \times J$ de esta manera
sea $\epsilon > 0$

$$\text{Para } \frac{\epsilon}{(b-a)m} > 0 \ , \ \exists \delta > 0/|s_1 - s_2| < \delta \Rightarrow |\kappa(s_1,t) - \kappa(s_2,t)| < \frac{\epsilon}{(b-a)m}$$

$$\begin{aligned} |y_n(s_1) - y_n(s_2)| &= \left|\int_a^b [\kappa(s_1,t) - \kappa(s_2,t)]x_n(t)dt\right| \\ &\le \int_a^b |\kappa(s_1,t) - \kappa(s_2,t)||x_n(t)|dt \\ &\le \|x_n\| \int_a^b |\kappa(s_1,t) - \kappa(s_2,t)|dt \\ &\le m\int_a^b |\kappa(s_1,t) - \kappa(s_2,t)|dt \\ &< m\frac{\epsilon}{(b-a)m}(b-a) = \epsilon \end{aligned}$$

Ahora por el teorema de Ascoli's
$\{y_n\}$ tiene una subsucesión convergente
Por lo tanto T es compacto ∎
El siguiente teorema es un operador de Hilbert-Schmidt y así un operador compacto que vemos en el capítulo 3.

Teorema 2.5 *Si definimos*

$$\begin{aligned} T : L_2[a,b] &\longrightarrow L_2[a,b] \\ (Tx)(s) &= \int_a^b \kappa(s,t)x(t)dt \ , \ \kappa \in L_2([a,b]\times[a,b]) \end{aligned}$$

Entonces T es un operador lineal compacto

Es así que en los teoremas 2.4 y 2.5; T_λ ($\lambda \neq 0$), como aplicación del teorema 2.3 ,satisface la alternativa de Fredholm.
Una ecuación integral de Fredholm se reduce al estudio de la ecuación $T_\lambda x = y$,como vemos en lo siguiente:

2.5 Alternativa aplicada a una ecuación integral

Consideremos la ecuación integral de Fredholm

$$x(s) - \mu \int_a^b \kappa(s,t)x(t)dt = \tilde{y}(s)$$

si colocamos $\mu = \frac{1}{\lambda}$, $\tilde{y}(s) = -\frac{1}{\lambda}y(s)$ ($\lambda \neq 0$)
se lleva al estudio de la ecuación $T_\lambda x = y$
veamos

$$\begin{aligned} x(s) - \mu \int_a^b \kappa(s,t)x(t)dt &= \tilde{y}(s) \\ x(s) - \frac{1}{\lambda}(Tx)(s) &= -\frac{1}{\lambda}y(s) \\ -\lambda x(s) + (Tx)(s) &= y(s) \\ (Tx)(s) - (\lambda x)(s) &= y(s) \\ (Tx - \lambda x)(s) &= y(s) \\ Tx - \lambda x &= y \\ T_\lambda x &= y \end{aligned}$$

El análisis de sus soluciones esta de acuerdo a que $\lambda \in \rho(T)$ o $\lambda \in \sigma(T)$ ($\lambda \neq 0$)

Vimos que el operador definido en el teorema 2.5 nos permite analizar sobre las soluciones de una ecuación integral de Fredholm .Ahora como consecuencia de este operador ,veremos en el capítulo 3 ,algunas propiedades,tanto en la sección 3.5, sección 3.6 y subsección 3.5.1.En el capítulo 4 será un operador de Carleman es mas será un operador fuerte de Carleman.

CAPITULO 3

OPERADORES DE HILBERT-SCHMIDT

Introducción

Probaremos que los operadores de Hilbert-Schmidt forman un espacio de Banach, es mas cada operador de Hilbert-Schmidt es compacto.
En base a operadores de Hilbert-Schmidt ,construimos un álgebra de Banach y vemos una relación de espectros.
Hacemos un estudio extenso para el operador $T : L_2[a,b] \longrightarrow L_2[a,b]$ definido por $Tx(s) = \int_a^b \kappa(s,t)x(t)dt$, $\kappa \in L_2([a,b]\times[a,b])$. La norma de κ la denotamos por $\|\kappa\|_D$.Para $\|\kappa\|_D > 0$,veremos en la subsección 3.5.1 que $\forall n \geq 2$,T^n es un operador de Hilbert-Schmidt con núcleo $\kappa^n \in L_2([a,b]\times[a,b])$ que llamaremos "núcleo iterado" .Con esta teoría hacemos un estudio espectral en la sección 3.6 y vemos la existencia de un operador de Hilbert-Schmidt B tal que $(T-\lambda I)^{-1} = -(B+\frac{1}{\lambda}I)$ donde $\lambda \in \rho(T)$ $(\lambda \neq 0)$.
La teoría que desarrollamos en este capítulo ,es aplicable a los capítulos 4 y 5.
Así en el capítulo 4 vemos que para $T : H \longrightarrow H$ operador de Hilbert-Schmidt y $U : H \longrightarrow H$ operador unitario,el operador UTU^* sobre $L_2[a,b]$ es un operador de Carleman,es mas , si el operador $T : L_2[a,b] \longrightarrow L_2[a,b]$, es de Hilbert-Schmidt ,entonces T es un operador integral , definido como en el teorema 2.5 y así será inmediato que es operador de Carleman.
Mientras que en el capítulo 5 ,su aplicación es mucho más interesante, ya que para cada operador auto-adjunto $A : H \longrightarrow H$, podemos encontrar un operador de Hilbert-Schmidt $X : H \longrightarrow H$ con norma tan pequeña como se quiera de manera que $A-X$ se transforma en un operador auto-adjunto compacto.
Nótese que si $H = L_2[a,b]$,entonces X sería un operador integral.

3.1 Propiedades básicas

Trabajamos sobre operadores lineales acotados sobre un espacio de Hilbert Separable .
Los operadores de Hilbert-Schmidt forman un espacio normado.Relacionaremos la norma de un operador de Hilbert-Schmidt con la norma de su adjunto y la norma como operador lineal acotado. Sea H un espacio de Hilbert separable, definimos

$$L(H) = \{T : H \longrightarrow H/T \text{ es operador lineal acotado}\}$$

Definición 3.1 *Sea $\{x_\alpha\}$ base ortonormalizada en H. El operador $T \in L(H)$ se denomina operador de Hilbert-Schmidt si y sólo si la magnitud*

$$\|T\|_A^2 = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \|Tx_\alpha\|^2$$

es finita.

Observación 3.1 *La clase de todos los operadores de Hilbert-Schmidt sobre H la denotamos por HS.*

Sea T un operador de Hilbert-Schmidt definido en base a la base ortonormalizada $\{x_i\}$ en H.
Sea $\{y_i\}$ una base ortonormalizada cualesquiera en H.Resulta que T sigue siendo un operador de Hilbert-Schmidt si la definimos en base a $\{y_i\}$, y esto es lo que vemos en el siguiente lema.

Lema 3.1 *La magnitud $\|T\|_A$ no depende del modo de escoger la base ortonormalizada en H.*

Prueba
Sean $\{x_\beta\}$, $\{y_\beta\}$ bases ortonormalizadas tal que

$$\sum_{\beta=1}^{\infty} \|Tx_\beta\|^2 < \infty$$

Probemos que

$$\sum_{\beta=1}^{\infty} \|Tx_\beta\|^2 = \sum_{\gamma=1}^{\infty} \|Ty_\gamma\|^2$$

veamos

$$\begin{aligned}
\infty > \sum_{\beta=1}^{\infty} \|Tx_\beta\|^2 &= \sum_{\beta=1}^{\infty}\sum_{\alpha=1}^{\infty} |\langle Tx_\beta, x_\alpha\rangle|^2 \ (\textit{identidad de parseval ver } [vi]) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{\beta=1}^{\infty} |\langle Tx_\beta, x_\alpha\rangle|^2 \ (\textit{absolutamente convergente}) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{\beta=1}^{\infty} |\langle x_\beta, T^*x_\alpha\rangle|^2 = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \|T^*x_\alpha\|^2 = \sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{\gamma=1}^{\infty} |\langle y_\gamma, T^*x_\alpha\rangle|^2 \\
&= \sum_{\gamma=1}^{\infty}\sum_{\alpha=1}^{\infty} |\langle y_\gamma, T^*x_\alpha\rangle|^2 = \sum_{\gamma=1}^{\infty}\sum_{\alpha=1}^{\infty} |\langle Ty_\gamma, x_\alpha\rangle|^2 = \sum_{\gamma=1}^{\infty} \|Ty_\gamma\|^2
\end{aligned}$$

Es más se probó que

$$\|T\|_A^2 = \|T^*\|_A^2$$

así pues

$$\|T\|_A = \|T^*\|_A \blacksquare$$

Como consecuencia de este lema, se tiene el corolario que aplicamos en la sección 5.3 del capítulo 5.

<u>**Corolario**</u> **3.1** *sí $T \in HS$, entonces $T^* \in HS$*

<u>*Prueba*</u>
Ya que $T \in HS$ y como $\|T\|_A = \|T^*\|_A$
así $T^* \in HS$. $\blacksquare$
Una relación importante que aplicamos en la sección 3.2 y 3.3, en las normas,como operador de Hilbert-Schmidt y como operador lineal acotado,nos muestra el siguiente lema.

<u>**Lema**</u> **3.2** *Si $T \in HS$, entonces $\|T\| \leq \|T\|_A$*

<u>*Prueba*</u>
Sea $\{x_i\}$ base ortonormalizada de H
Sea $x \in H/\|x\| = 1$

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$$

como $\|x\| = 1$ así

$$\sum_i |\alpha_i|^2 = 1$$

$$\begin{aligned}
\infty > \sum_i \|Tx_i\|^2 &= \sum_i \sum_j |\langle Tx_i, x_j\rangle|^2 \\
&= \sum_j \sum_i |\langle Tx_i, x_j\rangle|^2 \\
&= \sum_j (\sum_i |\alpha_i|^2 \sum_i |\langle Tx_i, x_j\rangle|^2) \\
&\geq \sum_j (\sum_i |\alpha_i \langle Tx_i, x_j\rangle|)^2 \\
&\geq \sum_j |\sum_i \alpha_i \langle Tx_i, x_j\rangle|^2 \\
&= \sum_j |\langle Tx, x_j\rangle|^2 = \|Tx\|^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\forall x \in H/\|x\| = 1, \|Tx\| \leq \|T\|_A$
y por definición de supremo $\|T\| \leq \|T\|_A$ ∎
Los operadores de Hilbert-Schmidt forman un subespacio vectorial(variedad lineal) del espacio $L(H)$.Es mas forman un espacio normado y podemos definir un producto escalar.

Proposición 3.1

P-I *La magnitud $\|T\|_A$ definida sobre la clase de operadores de Hilbert-Schmidt representa una norma.*

<u>Demostración</u>

Sea $\{e_n\}$ base ortonormalizada de H

a)$\|T\|_A \geq 0$

pues $0 \leq \|T\| \leq \|T\|_A$

b)$\|T\|_A = 0 \Longleftrightarrow T = 0$

Prueba

$\Rightarrow) 0 \leq \|T\| \leq \|T\|_A = 0$ *así* $\|T\| = 0$ *implica* $T = 0$

$\Leftarrow)$ $\|T\|_A^2 = \sum_n \|0e_n\|^2 = 0$

c)$\|\alpha T\|_A = |\alpha| \|T\|_A$

Prueba

$$\|\alpha T\|_A^2 = \sum_n \|(\alpha T)e_n\|^2 = |\alpha|^2 \|T\|_A^2$$

d)$T_1, T_2 \in HS$, $\|T_1 + T_2\|_A \leq \|T_1\|_A + \|T_2\|_A$

Prueba

$$\begin{aligned}
\|T_1 + T_2\|_A^2 &= \sum_n \|(T_1 + T_2)e_n\|^2 \\
&= \sum_n \|T_1 e_n + T_2 e_n\|^2 \\
&\leq \sum_n (\|T_1 e_n\| + \|T_2 e_n\|)^2 \\
&= \sum_n \|T_1 e_n\|^2 + 2\sum_n \|T_1 e_n\|\|T_2 e_n\| + \sum_n \|T_2 e_n\|^2 \\
&\leq \|T_1\|_A^2 + 2(\sum_n \|T_1 e_n\|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_n \|T_2 e_n\|^2)^{\frac{1}{2}} + \|T_2\|_A^2 \\
&= (\|T_1\|_A + \|T_2\|_A)^2
\end{aligned}$$

P-II *La igualdad*

$$\langle T_1, T_2 \rangle_A = \sum_n \langle T_1 e_n, T_2 e_n \rangle$$

define un producto escalar sobre la clase de operadores de Hilbert-Schmidt.

<u>Demostración</u>

a) $\langle T_1, T_1\rangle \geq 0$
es verdad pues $\langle T_1, T_1\rangle_A = \|T_1\|_A^2$ (**)
b) $\langle T_1, T_1\rangle_A = 0$ *si y sólo si* $T_1 = 0$
es inmedito de (**)
c) $\langle \alpha T_1, T_2\rangle_A = \alpha\langle T_1, T_2\rangle_A$
Prueba

$$\langle \alpha T_1, T_2\rangle_A = \sum_n \langle \alpha T_1 e_n, T_2 e_n\rangle = \sum_n \alpha\langle T_1 e_n, T_2 e_n\rangle = \alpha\langle T_1, T_2\rangle_A$$

d) $\langle T_1, T_2\rangle_A = \overline{\langle T_2, T_1\rangle_A}$
Prueba

$$\begin{aligned}
\langle T_1, T_2\rangle_A &= \sum_n \langle T_1 e_n, T_2 e_n\rangle \\
&= \sum_n \overline{\langle T_2 e_n, T_1 e_n\rangle} \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \overline{\langle T_2 e_n, T_1 e_n\rangle} \\
&= \lim_{m\to\infty} \overline{\sum_{n=1}^{m} \langle T_2 e_n, T_1 e_n\rangle} \\
&= \overline{\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \langle T_2 e_n, T_1 e_n\rangle} \\
&= \overline{\sum_n \langle T_2 e_n, T_1 e_n\rangle} \\
&= \overline{\langle T_2, T_1\rangle_A}
\end{aligned}$$

e) $\langle T_1 + T_2, T_3\rangle_A = \langle T_1, T_3\rangle_A + \langle T_2, T_3\rangle_A$
Prueba

$$\begin{aligned}
\langle T_1, T_3\rangle_A + \langle T_2, T_3\rangle_A &= \sum_n \langle T_1 e_n, T_3 e_n\rangle + \sum_n \langle T_2 e_n, T_3 e_n\rangle \\
&= \sum_n (\langle T_1 e_n, T_3 e_n\rangle + \langle T_2 e_n, T_3 e_n\rangle) \\
&= \sum_n \langle T_1 e_n + T_2 e_n, T_3 e_n\rangle \\
&= \langle T_1 + T_2, T_3\rangle_A
\end{aligned}$$

P-III *En el espacio $L(H)$ los operadores de Hilbert-Schmidt forman una variedad lineal.*

Prueba
Sean $T_1, T_2 \in HS$ por la proposición 3.1 incisos (c) y (d) en P-I tenemos $(T_1 + T_2) \in HS$ y para $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda T_1 \in HS$ ▨

Sabemos que HS es un espacio normado, en lo siguiente vemos que toda sucesión de Cauchy en HS converge y esta en HS.

3.2 Espacio de Banach

Para la demostración aplicaremos el lema 3.2 .
Su aplicación mostramos en la sección 3.4 y la sección 5.6(capítulo 5).

Teorema 3.1 *Los operadores de Hilbert-Schmidt forman un espacio de Banach respecto a $\|T\|_A$.*

Prueba
Sea $\{T_n\}$ una sucesión de Cauchy en HS así
sea $\epsilon > 0$, para $\frac{\epsilon}{2} > 0$

$$\exists N > 0/n, m > N \Rightarrow \|T_n - T_m\|_A < \frac{\epsilon}{2}$$

ya que

$$\|T_n - T_m\| \leq \|T_n - T_m\|_A$$

así $\{T_n\}$ es de Cauchy en $L(H)$
Como H es espacio de Banach,$L(H)$ es un espacio de Banach así

$$\exists T \in L(H)/T_n \longrightarrow T$$

Ahora veamos que $T \in HS$
Sea $\{e_j\}$ base ortonormalizada de H

$$\forall j \; T_n e_j \longrightarrow T e_j$$
$$\textstyle\sum_{i=1}^{r} \|Te_i\|^2 = \sum_{i=1}^{r} \|\lim_{n\to\infty} T_n e_i\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{r} \|T_n e_i\|^2$$

Como $\{T_n\}$ es de Cauchy en HS, entonces

$$\exists k > 0/\forall n \; \|T_n\|_A \leq k$$

$$\sum_{i=1}^{r} \|Te_i\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{r} \|T_n e_i\|^2 \leq \lim_{n\to\infty} \|T_n\|_A^2 \leq k^2$$
$$\|T\|_A^2 = \lim_{r\to\infty} \sum_{i=1}^{r} \|Te_i\|^2 \leq k^2 < \infty$$

así pues $T \in HS$
veamos que $\|T_m - T\|_A \longrightarrow 0$
para $m > n$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{r} \|(T - T_m)e_i\|^2 &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{r} \|(T_n - T_m)e_i\|^2 \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \|(T_n - T_m)e_i\|^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \|T_n - T_m\|_A^2 \leq \frac{\epsilon^2}{4}
\end{aligned}$$

Así pues cuando $r \to \infty$

$$\|T_m - T\|_A^2 \leq \frac{\epsilon^2}{4}$$
$$\|T_m - T\|_A \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$
$$\|T_m - T\|_A \longrightarrow 0 \blacksquare$$

En la siguiente sección, pasamos a relacionar con operadores compactos,con la finalidad de relacionar con el capítulo 2, en cuanto a la alternativa de Fredholm para operadores compactos.

3.3 Operador compacto y operador acotado

El estudio de operadores de Hilbert-Schmidt, lo llevamos al estudio de operadores compactos,que nos muestra el siguiente teorema en la cual se aplica el lema 3.2.

Teorema 3.2 *Si $T \in HS$,entonces T es compacto*

Prueba
Sea $\{x_i\}$ base ortonormalizada en H
como $T \in HS$

$$\|T\|_A^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|Tx_i\|^2 < \infty$$

ya que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|Tx_i\|^2$$

converge absolutamente

$$\text{para } \frac{1}{n^2} > 0 \; (n \in N) \, , \; \exists N/m > n > N \Rightarrow \sum_{\alpha=n+1}^{m} \|Tx_\alpha\|^2 < \frac{1}{n^2}$$

es más

$$\sum_{\alpha=n+1}^{\infty} \|Tx_\alpha\|^2 \leq \frac{1}{n^2}, \text{es decir } \sum_{\alpha>n} \|Tx_\alpha\|^2 \leq \frac{1}{n^2}$$

Definimos

$$\begin{aligned} T_n \quad &: \quad H \longrightarrow H \\ T_n x \quad &= T_n(\sum_\alpha r_\alpha x_\alpha) = \sum_{\alpha\leq n} r_\alpha T x_\alpha \end{aligned}$$

donde

$$T_n x_\alpha = \begin{cases} Tx_\alpha & si \quad \alpha \leq n \\ 0 & si \quad \alpha > n \end{cases}$$

T_n es lineal y acotado pues lo es T ya que $\dim Ran(T_n) < \infty$ concluimos que T_n es compacto es más $T_n \in HS$ ya que $T \in HS$. Veamos que $\|T - T_n\| \longrightarrow 0$

$$\begin{aligned} \|T - T_n\|_A^2 = \sum_\alpha \|(T - T_n)x_\alpha\|^2 &= \sum_\alpha \|Tx_\alpha - T_n x_\alpha\|^2 \\ &= \sum_{\alpha\leq n} \|Tx_\alpha - T_n x_\alpha\|^2 + \sum_{\alpha>n} \|Tx_\alpha - T_n x_\alpha\|^2 \\ &= \sum_{\alpha>n} \|Tx_\alpha\|^2 \leq \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Así

$$\|T - T_n\|_A \leq \frac{1}{n}$$

ahora

$$\begin{aligned} \|T - T_n\| \leq \|T - T_n\|_A \leq \frac{1}{n} &\longrightarrow 0 \text{ cuando } n \to \infty \\ \|T - T_n\| &\longrightarrow 0 \text{ cuando } n \to \infty \end{aligned}$$

Por lo tanto T es compacto. ■

Como consecuencia de lo anterior,la composición de un operador lineal acotado con un operador de Hilbert-Schmidt es compacto,como probamos en el siguiente teorema, como aplicación del corolario 3.1.

<u>Teorema</u> **3.3** *Si $T \in HS$ y $B \in L(H)$, entonces:*

$$\begin{aligned} &a) \quad \|TB\|_A \leq \|T\|_A \|B\| \\ &b) \quad \|BT\|_A \leq \|T\|_A \|B\| \end{aligned}$$

<u>*Prueba(b)*</u>

<u>Sea $\{x_\alpha\}$</u> base ortonormalizada de H.

$$\|B\|^2 \|T\|_A^2 = \|B\|^2 \sum_{\alpha=1}^{\infty} \|Tx_\alpha\|^2 = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \|B\|^2 \|Tx_\alpha\|^2 \geq \sum_{\alpha=1}^{\infty} \|BTx_\alpha\|^2 = \|BT\|_A^2$$

así

$$\|BT\|_A \leq \|T\|_A \|B\|$$

Prueba(a)

$$\begin{array}{lcl} T \in HS & \Rightarrow & T^* \in HS \\ B \in L(H) & \Rightarrow & B^* \in L(H) \end{array}$$

Por prueba(b) ,$TB \in HS$ así $\|TB\|_A = \|(TB)^*\|_A$

$$\|T\|_A \|B\| = \|T^*\|_A \|B^*\| \geq \|B^* T^*\|_A = \|(TB)^*\|_A = \|TB\|_A$$

Por lo tanto

$$\|TB\|_A \leq \|T\|_A \|B\| \blacksquare$$

Como aplicación del lema 3.2 y lo anterior se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.2 *Si $T_1, T_2 \in HS$, entonces:*

$$\begin{array}{ll} m) & \|T_1 T_2\|_A \leq \|T_1\|_A \|T_2\|_A \\ n) & \|T_2 T_1\|_A \leq \|T_1\|_A \|T_2\|_A \end{array}$$

Prueba(m)

$$\|T_1 T_2\|_A \leq \|T_1\|_A \|T_2\| \leq \|T_1\|_A \|T_2\|_A$$

Prueba(n)

Análogo al anterior. $\blacksquare$

La aplicación del teorema 3.3 ,la damos en la sección 4.10 del capítulo 4 en el cálculo de núcleos como operadores de Carleman.Es mas la aplicamos a la siguiente sección juntamente con el hecho de que HS es un espacio de Banach.

3.4 Algebra de Banach

Construimos un álgebra de Banach en base a operadores de Hilbert-Schmidt ,para ver que el espectro de un operador de Hilbert-Schmidt es igual al espectro de un elemento del álgebra de Banach.

Definición 3.2 *Un espacio vectorial E sobre un campo K es llamado álgebra sobre un campo K si:*

$$\begin{array}{lll} 1) & \forall a, b \in E & ab \in E \\ 2) & \forall a, b, c \in E & (ab)c = a(bc) \\ 3) & \forall a, b, c \in E & a(b+c) = ab + ac \\ 4) & \forall a, b, c \in E & (a+b)c = ac + bc \\ 5) & \forall a, b \in E \; \forall \alpha \in K & (\alpha a)b = a(\alpha b) = \alpha(ab) \end{array}$$

Si $K=\mathbf{R}$ o $K=\mathbf{C}$, entonces E es dicho álgebra real o complejo,respectivamente.
E es dicho conmutativo si $\forall x, y \in A$: $xy=yx$.
E es llamado álgebra con identidad si $\exists e \in E / \forall a \in E$:$ea=ae=a$

Definición 3.3 *E es un álgebra de Banach si E es un espacio de Banach y un álgebra con identidad e tal que*

$$\forall x, y \in E \ : \ \|xy\| \leq \|x\|\|y\|$$
$$\|e\| = 1$$

Definición 3.4 *Sea E un álgebra de Banach complejo con identidad e.Entonces el conjunto*

$$\rho(x) = \{\lambda \in C / x - \lambda e \ \text{ es invertible}\}$$

se llama conjunto resolvente de $x \in E$.
El espectro $\sigma_E(x)$ de x ,es el complemento de $\rho(x)$.

Con las definiciones dadas, construimos el espacio HS^+ y probamos que es un álgebra de Banach.
<u>Teorema</u> **3.4**

$$HS^+ = \{[\alpha, T] / \alpha \in C \ , \ T \in HS\}$$

con las operaciones en HS^+ definidos por

$$[\alpha, x] + [\beta, y] = [\alpha + \beta, x + y]$$
$$[\alpha, x][\beta, y] = [\alpha\beta, \alpha y + \beta x + xy]$$
$$\lambda[\alpha, x] = [\lambda\alpha, \lambda x]$$
$$\|[\alpha, x]\|_H = |\alpha| + \|x\|_A$$

es un álgebra de Banach.

<u>Prueba</u>
Es claro que HS^+ es un álgebra es más es un espacio de Banach
veamos
sea $\{[\alpha_n, x_n]\} \subset HS^+$ de Cauchy

$$\forall \epsilon > 0, \exists N / n, m > N \Rightarrow \|[\alpha_n, x_n] - [\alpha_m, x_m]\|_H < \epsilon$$
$$\|[\alpha_n - \alpha_m, x_n - x_m]\|_H < \epsilon$$
$$|\alpha_n - \alpha_m| + \|x_n - x_m\|_A < \epsilon$$

De aquí
$\{\alpha_n\}$ es de Cauchy en C y $\{x_n\}$ es de Cauchy en HS
así

$$\exists \alpha \in C / \alpha_n \longrightarrow \alpha$$
$$\exists x \in HS / x_n \longrightarrow x$$

así pues $\|[\alpha_n, x_n] - [\alpha, x]\|_H = |\alpha_n - \alpha| + \|x_n - x\|_A \longrightarrow 0$

de aquí

$$[\alpha_n, x_n] \longrightarrow [\alpha, x] \quad , \ [\alpha, x] \in HS^+$$

Por lo tanto HS^+ es un espacio de Banach. ■
Con T operador de Hilbert-Schmidt ,es claro que $T \in L(H)$,probaremos que el $\sigma_{L(H)}(T) = \sigma_{HS^+}([0,T])$ en el corolario 3.3, como resultado del teorema que sigue:

Teorema 3.5 *Sea $T \in HS$*
$[\alpha, T] \in HS^+$ tiene inversa si y sólo si $\alpha I + T$ tiene inversa en $L(H)$

Prueba
Probamos:
a)Si $[\alpha, T] \in HS^+$ tiene inversa,entonces $\alpha I + T$ tiene inversa en $L(H)$.
b)Si $\alpha I + T$ tiene inversa en $L(H)$,entonces $[\alpha, T] \in HS^+$ tiene inversa.
Prueba(a)
Sea $[\beta, S] = [\alpha, T]^{-1}$
afirmamos que

$$\beta I + S = (\alpha I + T)^{-1}/\beta = \alpha^{-1} \ , \ \alpha S + \beta T + TS = 0 \ , \ ST = TS$$

veamos

$$\begin{aligned} (\beta I + S)(\alpha I + T) &= \beta I(\alpha I + T) + S(\alpha I + T) \\ &= \beta\alpha I + \beta T + \alpha S + ST \\ &= I + \beta T - \beta T = I \end{aligned}$$

Análogamente $(\alpha I + T)(\beta I + S) = I$.
Ya que $S \in HS$, I operador lineal acotado,entonces $(\alpha I + T)^{-1} \in L(H)$
Prueba(b)
Sea $B = (\alpha I + T)^{-1} \in L(H)$
Sea

$$S = B - \alpha^{-1} I$$

Ahora

$$\begin{aligned} \alpha^{-1} BT &= \alpha^{-1} B((T + \alpha I) - \alpha I) \\ &= \alpha^{-1}(I - \alpha B) = \alpha^{-1} I - B = -(B - \alpha^{-1} I) = -S \end{aligned}$$

Así

$$S = -\alpha^{-1} BT$$

como $B \in L(H)$, $T \in HS$,entonces $BT \in HS$.Por lo tanto $S \in HS$
Afirmamos que $[\alpha, T]^{-1} = [\alpha^{-1}, S]$
veamos

$$(\alpha I + T)B = I$$

$$TB = I - \alpha B$$

de aquí

$$-\alpha^{-1}TB = B - \alpha^{-1}I = S = -\alpha^{-1}BT$$

por lo tanto

$$TB = BT$$

así pues

$$\begin{aligned}
[\alpha, T][\alpha^{-1}, S] &= [\alpha\alpha^{-1}, \alpha S + \alpha^{-1}T + TS] \\
&= [1, \alpha S + \alpha^{-1}T + TB - \alpha^{-1}T] \\
&= [1, \alpha S + TB] \\
&= [1, \alpha S + BT] = [1, \alpha S - \alpha S] = [1, 0]
\end{aligned}$$

Análogamente $[\alpha^{-1}, S][\alpha, T] = [1, 0]$ ▩
Aplicamos el teorema 3.5

<u>Corolario</u> **3.3** *Sea* $T \in HS$, $\sigma_{HS^+}([0,T]) = \sigma_{L(H)}(T)$

<u>Prueba</u>

$$\begin{aligned}
\sigma_{HS^+}([\alpha_o, T]) &= \{\lambda \in C/[\alpha_o, T] - \lambda[1,0] \textit{ no es inversible}\} \\
&= \{\lambda \in C/[\alpha_o - \lambda, T] \textit{ no es inversible}\} \\
&= \{\lambda \in C/(\alpha_o - \lambda)I + T \textit{ no es inversible}\} \text{ (por teorema 3.5)}
\end{aligned}$$

$$\sigma_{L(H)}(T) = \{\lambda \in C/T - \lambda I \textit{ no es inversible}\}$$

es claro que para $\alpha_o = 0$

$$\sigma_{HS^+}([0,T]) = \sigma_{L(H)}(T)$$ ▩

Si bién aplicamos sobre un espacio H de Hilbert separable cualesquiera, ahora aplicamos a un caso particular ,tomando $H = L_2[a,b]$.

3.5 Operador integral sobre $L_2[a, b]$

Si $T : L_2[a,b] \longrightarrow L_2[a,b]$ es un operador de Hilbert-Schmidt,entonces $\exists\kappa \in L_2([a,b] \times [a,b])/Tx(s) = \int_a^b \kappa(s,t)x(t)dt$, esto lo vemos en el corolario 4.1 del capítulo 4 donde a κ se lo llama núcleo de T.
En el teorema que probaremos, vemos el proceso inverso.
Todo esto es importante, porque podemos aplicar al capítulo 2 como operador compacto y al capítulo 5 en la existencia del operador de Hilbert-Schmidt del teorema 5.1.

<u>Teorema</u> **3.6** *El operador* T:$L_2[a,b] \longrightarrow L_2[a,b]$ *definido por*

$$Tx(s) = \int_a^b \kappa(s,t)x(t)dt \textit{ donde } \kappa \in L_2([a,b] \times [a,b])$$

es un operador de Hilbert -Schmidt

<u>*Prueba*</u>
<u>T está bien definida</u>
veamos
como $\kappa \in L_2([a,b]\times[a,b])$

$$\begin{aligned}
\infty > \int_{[a,b]\times[a,b]} |\kappa(s,t)|^2 d(s,t) &= \int_{[a,b]\times[a,b]} \kappa(s,t)\overline{\kappa}(s,t)d(s,t) \\
&= \int_a^b \int_a^b \kappa(s,t)\overline{\kappa}(s,t)dsdt \text{ (pues } \kappa\overline{\kappa} \in L_1([a,b]\times[a,b])) \\
&= \int_a^b \int_a^b \kappa(s,t)\overline{\kappa}(s,t)dtds \\
&= \int_a^b \int_a^b |\kappa(s,t)|^2 dtds
\end{aligned}$$

Es más por Fubini

$$\infty > \int_a^b |\kappa(s,t)|^2 dt \textit{ para casi todo } s$$

en otros términos

$$\kappa_s \in L_2[a,b] \textit{ para casi todo } s$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b |Tx(s)|^2 ds &= \int_a^b \left|\int_a^b \kappa(s,t)x(t)dt\right|^2 ds \\
&\leq \int_a^b \left[\int_a^b |\kappa(s,t)|^2 dt \int_a^b |x(t)|^2 dt\right] ds \\
&= \int_a^b \left[\int_a^b |\kappa(s,t)|^2 dt \|x\|_2^2\right] ds \\
&= \left[\int_a^b \int_a^b |\kappa(s,t)|^2 dtds\right] \|x\|_2^2 < \infty
\end{aligned}$$

Por lo tanto $Tx \in L_2[a,b]$
es claro que T es lineal
<u>T es acotada</u>
Por lo anterior

$$\|Tx\|_2^2 \leq \left[\int_a^b \int_a^b |\kappa(s,t)|^2 dtds\right] \|x\|_2^2$$

así

$$\|Tx\|_2 \leq c\|x\|_2 \, , \; c = \left(\int_a^b \int_a^b |\kappa(s,t)|^2 dtds\right)^{\frac{1}{2}}$$

por lo tanto T es acotada. Sea $\{e_m\}$ base ortonormalizada de $L_2[a,b]$
así

$\{e_{\beta,n}\}$ es base ortonormalizada de $L_2([a,b]\times[a,b])$
donde

$$e_{\beta,n}(s,t) = e_\beta(s)\overline{e_n(t)} = e_\beta(s)\overline{e_n}(t)$$

$$\langle \kappa, e_{\beta,n}\rangle_D = \int_{[a,b]\times[a,b]} \kappa(s,t)\overline{e_{\beta,n}(s,t)}d(s,t)$$

como κ , $e_{\beta,n} \in L_2([a,b]\times[a,b])$ entonces $\kappa\overline{e_{\beta,n}} \in L_1([a,b]\times[a,b])$
así por el teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b]\times[a,b]} \kappa(s,t)\overline{e_{\beta,n}(s,t)}d(s,t) &= \int_a^b\int_a^b \kappa(s,t)\overline{e_{\beta,n}(s,t)}dsdt \\
&= \int_a^b\int_a^b \kappa(s,t)\overline{e_{\beta,n}(s,t)}dtds \\
&= \int_a^b\int_a^b \kappa(s,t)\overline{e_\beta(s)\overline{e_n(t)}}dtds \\
&= \int_a^b\int_a^b \kappa(s,t)e_n(t)\overline{e_\beta(s)}dtds \\
&= \int_a^b[\int_a^b \kappa(s,t)e_n(t)dt]\overline{e_\beta(s)}ds \\
&= \int_a^b Te_n(s)\overline{e_\beta(s)}ds \\
&= \langle Te_n, e_\beta\rangle = r_{\beta,n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\infty > \int_{[a,b]\times[a,b]} |\kappa(s,t)|^2 d(s,t) &= \|\kappa\|_D^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\beta=1}^{\infty} |\langle\kappa, e_{\beta,n}\rangle_D|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\beta=1}^{\infty} |r_{\beta,n}|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\beta=1}^{\infty} |\langle Te_n, e_\beta\rangle|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|_2^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|_2^2 < \infty$$

así por definición 3.1 ,T es un operador de Hilbert-Schmidt.
Es mas

$$\|\kappa\|_D^2 = \|T\|_A^2$$

así

$$\|\kappa\|_D = \|T\|_A \blacksquare$$

En lo que sigue del capítulo ,vemos algunos resultados,como consecuencia de este teorema, ya sea en la composición n-sima como con su espectro.

Corolario 3.4 *El operador T:$L_2[a,b] \longrightarrow L_2[a,b]$ definido como en el teorema 3.6 es compacto*

Prueba
Ya que T es de Hilbert-Schmidt sobre $L_2[a,b]$, así por teorema 3.2 T es compacto. $\blacksquare$
Sea $X = [a,b] \times [a,b]$
En lo siguiente de este capítulo consideramos el operador $T : L_2[a,b] \longrightarrow L_2[a,b]$ que es de Hilbert-Schmidt,definido como en el teorema 3.6.

3.5.1 Operador integral con núcleo iterado

Aplicaremos inducción matemática, para ver que $\forall n \geq 2, T^n = \underbrace{T \circ T \circ T \circ \cdots \circ T}_{\text{n-veces}}$sigue siendo un operador de Hilbert-Schmidt condicionando el núcleo de T.

Teorema 3.7 *Sea T un operador de Hilbert-Schmidt sobre $L_2[a,b]$ con núcleo $\kappa \in L_2(X)$ tal que*

$$\alpha^2 = \int_a^b \int_a^b |\kappa(\zeta,\eta)|^2 d\zeta d\eta > 0$$

Entonces $\forall n \geq 2$ el operador T^n es un operador de Hilbert-Schmidt con el "núcleo iterado" $\kappa^{(n)} \in L_2(X)$ dado por:

$$\kappa^{(n)}(\zeta,\eta) = \int_a^b \kappa(\zeta,\omega)\kappa^{(n-1)}(\omega,\eta)d\omega \text{ para casi todo } (\zeta,\eta) \in X$$
$$\kappa^{(1)}(\zeta,\eta) = \kappa(\zeta,\eta)$$
$$\int_a^b \int_a^b |\kappa^{(n)}(\zeta,\eta)|^2 d\zeta d\eta \leq \alpha^{2n}$$

Prueba
Veamos por inducción
n=2
Probemos que el operador T^2 es un operador de Hilbert-Schmidt con núcleo $\kappa^{(2)} \in L_2(X)$ donde

$$\kappa^{(2)}(\zeta,\eta) = \int_a^b \kappa(\zeta,\omega)\kappa(\omega,\eta)d\omega \text{ para casi todo (p.c.t.) } (\zeta,\eta) \in X$$
$$\int_a^b \int_a^b |\kappa^{(2)}(\zeta,\eta)|^2 d\zeta d\eta \leq \alpha^4$$

veamos
como $\kappa \in L_2(X)$ por Fubini
p.c.t. $\zeta \in [a,b]$ y p.c.t. $\eta \in [a,b]$

$$\begin{cases} \kappa(\zeta, z) \in L_2[a,b] \\ \kappa(z,\eta) \in L_2[a,b] \end{cases} \qquad [1]$$

sea $f(z,(\zeta,\eta)) = |\kappa(\zeta,z)\kappa(z,\eta)|$
f es medible no negativa p.c.t. punto del producto $[a,b] \times X$
así por Tonelly

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]\times X} |\kappa(\zeta,z)\kappa(z,\eta)| d(z,(\zeta,\eta)) &= \int_{[a,b]} \left[\int_X |\kappa(\zeta,z)\kappa(z,\eta))| d(\zeta,\eta) \right] dz \\ &= \int_X \left[\int_{[a,b]} |\kappa(\zeta,z)\kappa(z,\eta)| dz \right] d(\zeta,\eta) \end{aligned}$$

sea $g_{\zeta,\eta}(z) = \kappa(\zeta,z)(\kappa(z,\eta)$
por [1] ,$g_{\zeta,\eta} \in L_1[a,b]$ p.c.t. $(\zeta,\eta) \in X$

$$\|g_{\zeta,\eta}\| = \int_a^b |\kappa(\zeta,z)\kappa(z,\eta)| dz$$

que porTonelly es medible no negativa p.c.t. $(\zeta,\eta) \in X$
es más como $\kappa \in L_2(X)$

$$\begin{aligned} \|\gamma'_\zeta\|_2^2 &= \int_a^b |\kappa(\zeta,z)|^2 dz \; es\ medible\ p.c.t.\ \zeta \in [a,b] \\ \|\gamma_\eta\|_2^2 &= \int_a^b |\kappa(z,\eta)|^2 dz \; es\ medible\ p.c.t.\ \eta \in [a,b] \end{aligned}$$

Ahora

$$\|g_{\zeta,\eta}\|_1 \leq \|\gamma'_\zeta\|_2 \|\gamma_\eta\|_2$$

$$\begin{aligned} \infty > \|\kappa\|_D^2 \|\kappa\|_D^2 &= \left[\int_X |\kappa(\zeta,z)|^2 d(\zeta,z) \right] \left[\int_X |\kappa(z,\eta)|^2 d(z,\eta) \right] \\ &= \left(\int_a^b \left[\int_a^b |\kappa(\zeta,z)|^2 dz \right] d\zeta \right) \left(\int_a^b \left[\int_a^b |\kappa(z,\eta)|^2 dz \right] d\eta \right) \\ &= \left(\int_a^b \|\gamma'_\zeta\|_2^2 d\zeta \right) \left(\int_a^b \|\gamma_\eta\|_2^2 d\eta \right) \\ &= \int_a^b \int_a^b \|\gamma'_\zeta\|_2^2 \|\gamma_\eta\|_2^2 d\zeta d\eta \\ &= \int_X \|\gamma'_\zeta\|_2^2 \|\gamma_\eta\|_2^2 d(\zeta,\eta) \text{ (por Tonelly)} \end{aligned}$$

$$\|g_{\zeta,\eta}\|_1^2 \leq \|\gamma'_\zeta\|_2^2 \|\gamma_\eta\|_2^2$$

$$\int_X \|g_{\zeta,\eta}\|_1^2 d(\zeta,\eta) \leq \int_X \|\gamma'_\zeta\|_2^2 \|\gamma_\eta\|_2^2 d(\zeta,\eta) < \infty$$

así

$$\int_X \|g_{\zeta,\eta}\|_1^2 d(\zeta,\eta) < \infty$$

de esta manera

$$\|g_{\zeta,\eta}\|_1 \in L_2(X)$$

$$\|g_{\zeta,\eta}\|_1 \in L_1 \text{ (pues la medida de Lebesgue de } X \text{ es finito)}$$

$$\int_X \left[\int_a^b |\kappa(\zeta,z)\kappa(z,\eta)|dz\right] d(\zeta,\eta) < \infty$$

$$\int_{[a,b]\times X} |\kappa(\zeta,z)\kappa(z,\eta)| d(z,(\zeta,\eta)) < \infty$$

$$\kappa(\zeta,z)\kappa(z,\eta) \in L_1([a,b]\times X)$$

y por Fubini

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]\times X} \kappa(\zeta,z)\kappa(z,\eta)d(z,(\zeta,\eta)) &= \int_{[a,b]} \left[\int_X \kappa(\zeta,z)\kappa(z,\eta)d\zeta,\eta)\right] dz \\ &= \int_X \left[\int_{[a,b]} \kappa(\zeta,z)\kappa(z,\eta)dz\right] d(\zeta,\eta) \ (*)\end{aligned}$$

Así pues por (*)

$$\kappa^{(2)}(\zeta,\eta) = \int_a^b \kappa(\zeta,\omega)\kappa(\omega,\eta)d\omega \textit{ es medible p.c.t. } (\zeta,\eta) \in X$$

$$\begin{aligned}\int_X |\kappa^2(\zeta,\eta)|^2 d(\zeta,\eta) &= \int_a^b \int_a^b |\kappa^{(2)}(\zeta,\eta)|^2 d\zeta d\eta \\ &= \int_a^b \int_a^b |\kappa^{(2)}(\zeta,\eta)|^2 d\eta d\zeta\end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned}\int_a^b \int_a^b |\kappa^{(2)}(\zeta,\eta)|^2 d\zeta d\eta &= \int_a^b \int_a^b \left|\int_a^b \kappa(\zeta,\omega)\kappa(\omega,\eta)d\omega\right|^2 d\zeta d\eta \\ &\leq \int_a^b \int_a^b \left[\int_a^b |\kappa(\zeta,\omega)|^2 d\omega \int_a^b |\kappa(\omega,\eta)|^2 d\omega\right] d\zeta d\eta \\ &= \left[\int_a^b \int_a^b |\kappa(\zeta,\omega)|^2 d\zeta d\omega\right] \left[\int_a^b \int_a^b |\kappa(\omega,\eta)|^2 d\omega d\eta\right] = \alpha^2\alpha^2 = \alpha^4\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_X |\kappa^{(2)}(\zeta,\eta)|^2 d(\zeta,\eta) \leq \alpha^4 < \infty \text{ de esta manera } \kappa^{(2)} \in L_2(X)$$

Sea $f \in L_2[a,b]$

$$\begin{aligned}
T^2 f(\zeta) = T(Tf)(\zeta) = \int_a^b \kappa(\zeta,\omega)Tf(\omega)d\omega &= \int_a^b \kappa(\zeta,\omega)\left[\int_a^b \kappa(\omega,\eta)f(\eta)d\eta\right]d\omega \\
&= \int_a^b \left[\int_a^b \kappa(\zeta,\omega)\kappa(\omega,\eta)f(\eta)d\eta\right]d\omega \\
&= \int_a^b \left[\int_a^b \kappa(\zeta,\omega)\kappa(\omega,\eta)f(\eta)d\omega\right]d\eta \\
&= \int_a^b \left[\int_a^b \kappa(\zeta,\omega)\kappa(\omega,\eta)d\omega\right]f(\eta)d\eta \\
&= \int_a^b \kappa^{(2)}(\zeta,\eta)f(\eta)d\eta
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$T^2 f(\zeta) = \int_a^b \kappa^{(2)}(\zeta,\eta)f(\eta)d\eta$$

Así por el teorema 3.6 T^2 es un operador de Hilbert-Schmidt con núcleo $\kappa^{(2)}$
Finalmente si
T^{n-1} es un operador de Hilbert-Schmidt con núcleo $\kappa^{(n-1)} \in L_2(X)$, entonces T^n es un operador de Hilbert-Schmidt con núcleo $\kappa^{(n)} \in L_2(X)$.
está demostración es análoga a la anterior ∎

Observación 3.2 *Esta demostración nos permite afirmar,como consecuencia del teorema 3.6* $\|T^n\|_A = \|\kappa^{(n)}\|_D \ \forall \ n \geq 1$ *ya que* $\kappa^{(n)}$ *es el núcleo de* T^n.*Es mas* $\|\kappa^{(n)}\|_D^2 \leq \alpha^{2n}$ *, así,* $\|\kappa^{(n)}\|_D \leq \alpha^n \ \forall \ n \geq 1$.
Nótese que $\|T\|_A = \|\kappa\|_D = \alpha$.

3.6 Estudio espectral

Aquí vemos, la existencia de un operador de Hilbert- Schmidt B en términos de T^n, con núcleo b' en términos de $\kappa^{(n)}$ tal que para $\lambda \in \rho(T)$ $(\lambda \neq 0)$ se tiene $(T - \lambda I)^{-1} = -(B + \frac{1}{\lambda}I)$

Teorema 3.8 *Sea* T *un operador de Hilbert-Schmidt sobre* $L_2[a,b]$ *con núcleo* $\kappa \in L_2(X)$ *tal que*

$$\alpha^2 = \int_a^b \int_a^b |\kappa(\zeta,\eta)|^2 d\zeta d\eta > 0$$

Si λ es cualquier número complejo tal que $|\lambda| > \alpha$ entonces

$$\exists b' \in L_2(X) / \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa^{(n)}}{\lambda^{n+1}} = b'$$

y existe B operador de Hilbert-Schmidt sobre $L_2[a,b]$ con núcleo b' tal que

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} T^n$$

Prueba

Probemos que $\{S_p\}$ ($S_p = \sum_{n=1}^{p} \frac{\kappa^{(n)}}{\lambda^{n+1}}$)
es de Cauchy en $L_2(X)$
Sea $\epsilon > 0$
$m > n$

$$\begin{aligned}
\|S_m - S_n\|_D &= \| \sum_{j=n+1}^{m} \frac{1}{\lambda^{j+1}} \kappa^{(j)} \|_D \\
&\leq \sum_{j=n+1}^{m} \| \frac{1}{\lambda^{j+1}} \kappa^{(j)} \|_D \\
&= \sum_{j=n+1}^{m} \frac{1}{|\lambda|^{j+1}} \|\kappa^{(j)}\|_D \\
&\leq \sum_{j=n+1}^{m} \frac{1}{|\lambda|^{j+1}} \alpha^j = \sum_{j=n+1}^{m} \frac{1}{|\lambda|} \left(|\frac{\alpha}{\lambda}|\right)^j = \frac{1}{|\lambda|} \sum_{j=n+1}^{m} |\frac{\alpha}{\lambda}|^j
\end{aligned}$$

como

$$|\lambda| > \alpha > 0 \Rightarrow 1 > |\frac{\alpha}{\lambda}| \Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} |\frac{\alpha}{\lambda}|^j < \infty \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |\frac{\alpha}{\lambda}|^j < \infty \text{ (\textit{absolutamente convergente})}$$

Así
$\{S'_p\}_{p \in \mathrm{N}}$ ($S'_p = \sum_{j=1}^{p} |\frac{\alpha}{\lambda}|^j$) es de Cauchy
De aquí

$$\begin{aligned}
\textit{Para } |\lambda|\epsilon > 0 \text{ , } \exists N / m > n > N \Rightarrow |S'_m - S'_n| &= | \sum_{j=n+1}^{m} |\frac{\alpha}{\lambda}|^j | \\
&= \sum_{j=n+1}^{m} |\frac{\alpha}{\lambda}|^j < \epsilon |\lambda|
\end{aligned}$$

Así pues

$$\|S_m - S_n\|_D < \epsilon$$

Por lo tanto $\{S_p\}$ es de Cauchy en $L_2(X)$. Como $L_2(X)$ es un espacio de Banach

$$\exists b' \in L_2(X) / \lim_{p\to\infty} S_p = b'$$

es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa^{(n)}}{\lambda^{n+1}} = b'$$

veamos que $\{S_p''\}$ ($S_p'' = \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{\lambda^{j+1}} T^j$) es de Cauchy en HS sobre $L_2[a,b]$
Sea $m > n$

$$\begin{aligned}\|S_m'' - S_n''\|_A = \|\sum_{j=n+1}^{m} \frac{1}{\lambda^{j+1}} T^j\|_A &\leq \sum_{j=n+1}^{m} \frac{1}{|\lambda|^{j+1}} \|T^j\|_A \\ &= \sum_{j=n+1}^{m} \frac{1}{|\lambda|^{j+1}} \|\kappa^{(j)}\|_D\end{aligned}$$

Como $\{S_p'\}$ es de Cauchy, procediendo de manera análoga a la prueba que $\{S_p\}$ es de Cauchy , se tiene que $\{S_p''\}$ es de Cauchy en HS.Como HS es espacio de Banach sobre $L_2[a,b]$

$$\exists B \in HS / \lim_{p\to\infty} S_p'' = B$$

es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} T^n = B$$

Es claro que $\forall n \geq 1$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda^{j+1}} T^j\right) f(\zeta) = \int_a^b \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda^{j+1}} \kappa^{(j)}\right)(\zeta,\eta) f(\eta) d\eta$$

sea

$$B' : L_2[a,b] \longrightarrow L_2[a,b]$$

$$B' f(\zeta) = \int_a^b b'(\zeta,\eta) f(\eta) d\eta \ , \ b' \in L_2(X)$$

por teorema 3.6 B' es un operador de Hilbert-Schmidt con núcleo b'.
Ahora

$$\left[B' - \sum_{j=1}^{n} \frac{T^j}{\lambda^{j+1}}\right] f(\zeta) = \int_a^b \left(b' - \sum_{j=1}^{n} \frac{\kappa^{(j)}}{\lambda^{j+1}}\right)(\zeta,\eta) f(\eta) d\eta$$

$$b' - \sum_{j=1}^{n} \frac{\kappa^{(j)}}{\lambda^{j+1}} \in L_2(X)$$

Por teorema 3.6 $B' - \sum_{j=1}^{n} \frac{T^j}{\lambda^{j+1}}$ es un operador de Hilbert-Schmidt con núcleo $b' - \sum_{j=1}^{n} \frac{\kappa^{(j)}}{\lambda^{j+1}}$
así pues

$$\|B' - \sum_{j=1}^{n} \frac{T^j}{\lambda^{j+1}}\|_A = \|b' - \sum_{j=1}^{n} \frac{\kappa^{(j)}}{\lambda^{j+1}}\|_D$$

$$\|B' - \sum_{j=1}^{n} \frac{T^j}{\lambda^{j+1}}\|_A = \|b' - \sum_{j=1}^{n} \frac{\kappa^{(j)}}{\lambda^{j+1}}\|_D \longrightarrow 0 \textit{ cuando } n \to \infty$$

Así

$$B' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} T^n = B$$

como $B = B'$ el núcleo de B es de B'
por lo tanto B es un operador de Hilbert-Schmidt con núcleo b'. ▩
Esta demostración la aplicamos ,al siguiente corolario:

<u>Corolario</u> **3.5** *Sea T un operador de Hilbert-Schmidt sobre $L_2[a,b]$. Si λ es cualquier número complejo tal que $|\lambda| > \alpha$.Entonces*

$$(T - \lambda I)^{-1} = -(B + \frac{1}{\lambda} I)$$

donde B es un operador de HIlbert-Schmidt como dado en el anterior teorema.

<u>*Prueba*</u>

$$|\lambda| > \alpha = \|T\|_A \geq \|T\| \text{ , } |\lambda| > \|T\|$$

$$\begin{aligned} (T - \lambda I)^{-1} &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}} \\ &= -\left(\frac{1}{\lambda} I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}\right) \\ &= -\left(\frac{1}{\lambda} I + B\right) \end{aligned}$$ ▩

Hasta ahora tenemos resultados que son aplicables al capítulo 4 y principalmente al capítulo 5 en la construcción de un operador auto-adjunto compacto que tiene espectro puntual puro.
Vimos el operador $T : L_2[a,b] \longrightarrow L_2[a,b]$ definido por $Tf(x) = \int_a^b \kappa(x,y) f(y) dy$ donde $\kappa \in L_2([a,b] \times [a,b])$.Lo que hacemos en el siguiente capítulo ,es reducir la condición de κ y con ello formar propiedades.

CAPITULO 4

OPERADORES DE CARLEMAN

Introducción

La teoría que desarrollamos será en el espacio de operadores lineales acotados sobre $L_2[a,b]$, es decir en el espacio $L(L_2[a,b])$.
El interes sobre el estudio de operadores de Carleman es que cada item de información acerca del operador está de algún modo contenida en su núcleo.
Formaremos una estructura algebraica con los operadores fuertes de Carleman,veremos que es un ideal.
Notemos que la terna $(L(L_2[a,b]),+,\circ)$ es un anillo, definamos

$$F = \{T \in L(L_2[a,b])/T \text{ de Carleman , para todo operador unitario } U \text{ , } UTU^* \text{ es de Carleman}\}$$

F no es un conjunto vacio pues veremos en teorema 4.2 y corolario 4.2 que un operador de Hilbert-Schmidt T esta en F .
$(F,+,\circ)$ es un ideal de $(L(L_2[a,b]),+,\circ)$ como aplicación del lema 4.1,lema 4.4,lema 4.9,lema 4.10 y lema 4.12 que estudiaremos en este capítulo .También veremos operadores de Carleman en relación a series convergentes y acotación.Calcularemos el núcleo de un operador de Hilbert-Schmidt como operador de Carleman.
Toda esta teoría es orientada a profundizar el espectro de operadores de Carleman , como el hecho de que un operador auto-adjunto es de tipo Carleman si y sólo si cero es el punto de acumulación de Weyl de su espectro ([vii] página 73), que es demostrada como aplicación del teorema 5.1 del capítulo 5 ([v] página 38-55).

4.1 Operador de Hilbert-Schmidt de Carleman

En esta sección nos proponemos probar que un operador de Hilbert-Schmidt

$$T : L_2[a,b] \longrightarrow L_2[a,b]$$

es un operador de Carleman.Pero antes definamos un operador de Carleman.

Definición 4.1 *Los Operadores De Carleman son aquellos operadores* $T : L_2[a,b] \longrightarrow L_2[a,b]$ *que tienen una representación en la forma*

$$Tf(x) = \int_a^b \kappa(x,y)f(y)dy$$

cuyo núcleo κ *satisface*

$$\int_a^b |\kappa(x,y)|^2 dy < \infty \; p.c.t \; x \in [a,b]$$

Ahora damos propiedades que nos probará el corolario 4.2.
El siguiente teorema nos permite representar a un operador de Hilbert-Schmidt auto-adjunto sobre $L_2[a,b]$ como un operador integral.

Teorema 4.1 *Si* $T{:}L_2[a,b] \longrightarrow L_2[a,b]$ *es un operador de Hilbert-Schmidt auto-adjunto,entonces*

$$\exists \eta \in L_2([a,b]\times[a,b]) \; / \; (Tf)(\sigma) = \int_a^b \eta(\sigma,\omega)f(\omega)d\omega$$

Prueba
Ya que T es de Hilbert-Schmidt entonces por teorema 3.2 es compacto y ya que es auto-adjunto así existe una base ortonormal $\{x_n\}$ tal que $Tx_n = \lambda_n x_n$ donde $\lambda_n \longrightarrow 0$(ver [iv] página 203).
Sea $f \in L_2[a,b]$

$$\begin{aligned} Tf &= \sum_{k=1}^{\infty}\langle Tf, x_k\rangle x_k \; \textit{pues } \{x_n\} \textit{ es base ortonormal} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\langle f, Tx_k\rangle x_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\langle f, \lambda_k x_k\rangle x_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\langle f, x_k\rangle x_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Tf(\sigma) &= \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\langle f, x_k\rangle x_k(\sigma) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\left[\int_a^b f(\omega)\overline{x_k(\omega)}d\omega\right]x_k(\sigma) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b \lambda_k x_k(\sigma)\overline{x_k(\omega)}f(\omega)d\omega \end{aligned}$$

Sea $f_k(\sigma,\omega) = x_k(\sigma)\overline{x_k(\omega)}$
así $\{f_k\}$ es ortonormal en $L_2([a,b] \times [a.b])$
ahora

$$\infty > \|T\|_A^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|Tx_k\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|\lambda_k x_k\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \|x_k\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \|f_k\|_D^2$$

Así pues

$$\infty > \sum_{k=1}^{\infty} \|\lambda_k f_k\|_D^2 \text{ implica } \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k \text{ converge en } L_2([a,b] \times [a,b]) \text{ ya que es de Banach}$$

(ver apéndice:proposición A.18)
Así

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k = \eta \in L_2([a,b] \times [a,b])$$

$$\begin{aligned}
Tf(\sigma) &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \int_a^b \lambda_k f_k(\sigma,\omega) f(\omega) d\omega \\
&= \lim_{m\to\infty} \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k(\sigma,\omega) \right] f(\omega) d\omega \\
&= \lim_{m\to\infty} \langle \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k^\sigma, \overline{f} \rangle \quad pues\ f_k^\sigma \in L_2[a,b]\ p.c.t.\ \sigma \\
&= \langle \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k^\sigma, \overline{f} \rangle = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k(\sigma,\omega) \right) f(\omega) d\omega \\
&= \int_a^b \eta(\sigma,\omega) f(\omega) d\omega
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$Tf(\sigma) = \int_a^b \eta(\sigma,\omega) f(\omega) d\omega \blacksquare$$

Extendemos el anterior teorema,en el siguiente corolario.

<u>**Corolario**</u> 4.1 *Si $T : L_2[a,b] \longrightarrow L_2[a,b]$ es un operador de Hilbert-Schmidt,entonces*

$$\exists h \in L_2([a,b] \times [a,b]) \ / \ (Tf)(x) = \int_a^b h(x,y) f(y) dy$$

Prueba
Sea $H_1 = \frac{T+T^*}{2}$, $H_2 = \frac{T-T^*}{2i}$
H_1 H_2 son operadores auto-adjuntos de Hilbert-Schmidt.

De aquí por teorema4.1 $X = [a,b] \times [a,b]$

$$\exists h_1 \in L_2(X) \ / \ H_1 f(x) = \int_a^b h_1(x,y) f(y) dy$$

$$\exists h_2 \in L_2(X) \ / \ H_2 f(x) = \int_a^b h_2(x,y) f(y) dy$$

es más

$$T = H_1 + iH_2$$

Ahora

$$\begin{aligned} Tf(x) &= (H_1 + iH_2) f(x) \\ &= H_1 f(x) + iH_2 f(x) \\ &= \int_a^b h_1(x,y) f(y) dy + \int_a^b (ih_2)(x,y) f(y) dy \\ &= \int_a^b (h_1 + ih_2)(x,y) f(y) dy \end{aligned}$$

sea $h = h_1 + ih_2$, $h \in L_2(X)$.Por lo tanto

$$\exists h \in L_2([a,b] \times [a,b]) \ / \ (Tf)(x) = \int_a^b h(x,y) f(y) dy \blacksquare$$

Como consecuencia de las dos anteriores propiedades,se tiene el siguiente corolario.

<u>Corolario</u> 4.2 *Si $T : L_2[a,b] \longrightarrow L_2[a,b]$ es un operador de Hilbert Schmidt,entonces T es un operador de Carleman*

<u>*prueba*</u>
Como T es operador de Hilbert-Schmidt entonces por corolario 4.1

$$\exists h \in L_2([a,b] \times [a,b]) \ / \ (Tf)(x) = \int_a^b h(x,y) f(y) dy$$

luego por teorema de Fubini

$$\int_a^b |h(x,y)|^2 dy < \infty \ p.c.t. \ x \in [a,b]$$

Por lo tanto por definición 4.1, T es un operador de Carleman. $\blacksquare$

4.2 Operador acotado y operador de tipo Carleman

4.2.1 Operador acotado y operador de Carleman

Consideremos los operadores $U, T, B \in L(L_2[a,b])$, donde U es un operador unitario ,así $U^* = U^{-1}$.
Veremos que si T es un operador de tipo Carleman ,la composición TB es de tipo Carleman,es mas si T es operador de Carleman. TB es operador de Carleman.
Pasemos a los detalles:

Definición 4.2 *Un operador T es de Tipo Carleman si existe un operador unitario U, tal que UTU^* es un Operador De Carleman*

Observación 4.1 *Denotamos Operador De Tipo Carleman por (OTC) y Operador De Carleman por (ODC).*

El siguiente lema ,aplicaremos a la sección 4.10, en el cálculo de Núcleos.

Lema 4.1 *Sea B un operador acotado y T un Operador De Carleman Entonces TB es un Operador De Carleman*

Prueba

$$\begin{aligned} TBf(x) &= \int_a^b \kappa(x,y)(Bf)(y)dy \text{ pues } T \textit{ es } (ODC) \\ &= \int_a^b (Bf)(y)\kappa(x,y)dy \\ &= \langle Bf, \overline{\kappa_x}\rangle \textit{ pues } \int_a^b |\kappa(x,y)|^2 dy < \infty \textit{ p.c.t. } x \\ &= \langle f, B^*\overline{\kappa_x}\rangle \\ &= \int_a^b f(y)\overline{B^*\overline{\kappa}}(x,y)dy \end{aligned}$$

B^* actúa sobre funciones de x e y ,y como funciones de y mientras x es fijado.

$$\|B^*\overline{\kappa_x}\|_2 = \|B^*(\overline{\kappa_x})\|_2 \leq \|B^*\|\|\overline{\kappa_x}\|_2 < \infty \textit{ p.c.t. } x$$

así pues

$$\|\overline{B^*\overline{\kappa_x}}\|_2 < \infty \textit{ p.c.t. } x$$

De esta manera

$$\int_a^b |\overline{B^*\overline{\kappa}}(x,y)|^2 dy < \infty \textit{ p.c.t. } x$$

y por definición TB es un (ODC). ∎
Como aplicación inmediata del lema 4.1, probaremos el lema 4.2

Lema 4.2 *Si B es un operador acotado y T es un Operador De Tipo Carleman Entonces TB es también un Operador De Tipo Carleman*

Prueba
Como T es un Operador de Tipo Carleman,por definición existe un operador unitario $U/K = UTU^*$ es (ODC).
UBU^* es acotado por que lo son U,U^* y B.
Sea $K' = KUBU^*$, es un operador de Carleman por lema 4.1

$$K' = (UTU^*)(UBU^*) = UTBU^*$$

Por lo tanto $K' = UTBU^*$ y por definición TB es un operador de tipo Carleman. ∎
Como consecuencia del lema 4.1 y 4.2, se tiene:

Lema 4.3

a) *TU es (OTC) si y sólo si T es (OTC)*
b) *TU es (ODC) si y sólo si T es (ODC)*

Prueba(a)
Probamos:
i)Si TU es (OTC),entonces T es (OTC)
ii)Si T es (OTC),entonces TU es (OTC)
Prueba(i)
TU es (OTC)
U^* es acotado
TUU^* es (OTC) eso es por lema 4.2
así pues T es operador de Tipo Carleman.
Prueba(ii)
T es (OTC) como U es acotado
TU es (OTC) por lema 4.2
Prueba(b)
Análoga a la prueba(a). ∎
La combinación lineal de operadores de Carleman es un operador de Carleman,que resulta como aplicación del siguiente lema y observación 4.2
Para probar el siguiente lema ,suponemos $T_1, T_2 \in L(L_2[a,b])$.

Lema 4.4 *La suma de operadores de carleman es de carleman*

Prueba
Sean T_1, T_2 operadores de Carleman con Núcleos κ_1, κ_2 respectivamente

$$\begin{aligned}[(T_1 + T_2)](x) &= T_1 f(x) + T_2 f(x) \\ &= \int_a^b \kappa_1(x,y) f(y)dy + \int_a^b \kappa_2(x,y) f(y)dy \\ &= \int_a^b (\kappa_1 + \kappa_2)(x,y) f(y)dy\end{aligned}$$

κ_1^x , $\kappa_2^x \in L_2[a,b]$ $p.c.t.$ x

$$\|\kappa_1^x + \kappa_2^x\|_2 \leq \|\kappa_1^x\|_2 + \|\kappa_2^x\|_2$$

$$(\kappa_1 + \kappa_2)^x = \kappa_1^x + \kappa_2^x \in L_2[a,b] \; p.c.t. \; x$$

así pues $T_1 + T_2$ es un operador de Carleman. ∎

Observación 4.2 *Si $\lambda \in \mathbb{C}$ y T un (ODC), entonces λT es un (ODC)*

Los resultados de esta sección, serán aplicados a la sección 4.7 en el estudio de operadores fuertes de Carleman.

4.3 Operador Resolvente de Carleman

Ahora hagamos un estudio sobre valores regulares λ del operador lineal acotado

$$T : L_2[a,b] \longrightarrow L_2[a,b]$$

El hecho de que $\lambda \in \rho(T)$,se tiene el operador lineal acotado

$$R_\lambda : L_2[a,b] \longrightarrow L_2[a,b]$$

donde $R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1}$. Partiendo de un $\lambda_o \in \rho(T)$ tal que R_{λ_o} operador de Carleman,podemos extender $\forall\lambda \in \rho(T)$,que vemos en el siguiente lema,como aplicación del lema 4.1 y lema 4.4.

Lema **4.5** *Sea $T : L_2[a,b] \longrightarrow L_2[a,b]$ un operador lineal acotado,$\lambda_o \in \rho(T)$ fijo .*
Si R_{λ_o} es un Operador de Carleman.Entonces $\forall\lambda \in \rho(T)$, R_λ es un operador de Carleman

Prueba
Sea $\lambda \in \rho(T)$
Ahora

$$R_\lambda - R_{\lambda_o} = (\lambda - \lambda_o)R_{\lambda_o}R_\lambda$$

$$R_\lambda = R_{\lambda_o} + (\lambda - \lambda_o)R_{\lambda_o}R_\lambda$$

R_{λ_o} operador de Carleman implica $(\lambda - \lambda_o)R_{\lambda_o}$ es operador de Carleman ya que R_λ es acotado por lema 4.1 $(\lambda - \lambda_o)R_{\lambda_o}R_\lambda$ es operador de Carleman por lema 4.4 $R_{\lambda_o} + (\lambda - \lambda_o)R_{\lambda_o}R_\lambda$es un operador de Carleman
Por lo tanto R_λ es un operador de Carleman ∎
Las dos siguientes secciones,nos prepará,para aplicar en las secciones 4.6 y 4.7.

4.4 Expresión de un operador acotado por un operador auto-adjunto y unitario

El siguiente lema la aplicaremos al lema 4.14.Para probar que el adjunto de un operador fuerte de Carleman es un operador fuerte de Carleman.
Ahora introduscamos algunos conceptos. Sea H y H' espacios de Hilbert,diremos que un operador lineal acotado auto-adjunto $T : H \longrightarrow H'$ es dicho positivo si y sólo si $\langle Tx, x\rangle \geq 0 \forall x \in H$.
Sea D un subespacio de un espacio de Hilbert,el operador lineal acotado $A : D \longrightarrow H'$ es dicho isométrico si $\forall f, g \in D$, $\langle Af, Ag\rangle = \langle f, g\rangle$ con estos conceptos y con algunos resultados del análisis funcional ,probemos el lema 4.6

Definición 4.3 *Sea H un espacio de Hilbert*

$$A \in L(H)\ ,\ |A| = \sqrt{A^*A}$$

Lema 4.6 *Para cada $A \in L(H)$ existe un operador positivo auto-adjunto $B = |A| \in L(H)$ y un operador unitario*

$$\overline{C} : \overline{RanB} \longrightarrow \overline{RanA} \text{ tal que } A = \overline{C}B$$

Prueba

$$(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A$$

así A^*A es auto-adjunto

$$\langle A^*Ax, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|^2 \geq 0$$

así A^*A es positivo ,por lo tanto

$$\exists B = \sqrt{A^*A} \in L(H)/B^2 = A^*A \quad \text{donde } B \text{ es auto-adjunto}$$

definimos

$$C : RanB \longrightarrow RanA$$

$$C(Bf) = Af \ \ \forall f \in H$$

C está bien definida
veamos

$$\langle Af, Ag\rangle = \langle A^*Af, g\rangle = \langle B^2f, g\rangle = \langle Bf, Bg\rangle \, \forall f, g \in H$$

en particular $\|Af\| = \|Bf\| \, \forall f \in H$.
Sea $Bf = Bg$ así

$$0 = \|B(f-g)\| = \|A(f-g)\| = \|Af - Ag\|$$

de aquí $Af = Ag$ por lo tanto $C(Bf) = C(Bg)$
C es lineal y acotado

$$C(Bf + Bg) = C[B(f+g)] = A(f+g) = Af + Ag = C(Bf) + C(Bg)$$
$$C[\lambda(Bf)] = C[B(\lambda f)] = A(\lambda f) = \lambda Af = \lambda C(Bf)$$
$$\|C(Bf)\| = \|Af\| = \|Bf\|$$

Ya que C es lineal y acotado podemos extender al operador lineal acotado $\overline{C}$ con dominio $\overline{RanB}$ (ver [i] página 395)
$\overline{C}$ es isométrico
Sean $f, g \in \overline{RanB}$,así

$$\exists\{Bf_n\}\ ,\ \{Bg_n\} \subset RanB/f = \lim_{n\to\infty} Bf_n$$
$$g = \lim_{n\to\infty} Bg_n$$

$$\begin{aligned}\langle \overline{C}f, \overline{C}g\rangle &= \langle \overline{C} \lim_{n\to\infty} Bf_n, \overline{C} \lim_{n\to\infty} Bg_n\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle \overline{C}Bf_n, \overline{C}Bg_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Af_n, Ag_n\rangle = \langle f, g\rangle\end{aligned}$$

en particular $\|\overline{C}f\| = \|f\| \quad \forall f \in \overline{RanB}$
veamos que $\overline{C} : \overline{RanB} \longrightarrow \overline{RanA}$ y es suryectivo
sea

$$f \in \overline{RanB}\ asi\ \exists\{Bf_n\} \subset RanB/f = \lim_{n\to\infty} Bf_n$$

$$\overline{C}f = \overline{C} \lim_{n\to\infty} Bf_n = \lim_{n\to\infty} \overline{C}Bf_n = \lim_{n\to\infty} Af_n \in \overline{RanA}$$

pues $\overline{RanA}$ es cerrado.
Ahora veamos que $\overline{C}$ es suryectivo
Sea $h \in \overline{RanA}$, así

$$\exists\{Ah_n\} \subset RanA/h = \lim_{n\to\infty} Ah_n$$

$$\overline{C}Bh_n = Ah_n$$

ya que $\overline{C}$ es isométrico, entonces

$$[\,\overline{C}\,]^*\overline{C} = \overline{I}$$

con ello

$$[\,\overline{C}\,]^* Ah_n = Bh_n$$

y ya que $\lim_{n\to\infty} Ah_n$ converge se tiene que

$$\exists h' = \lim_{n\to\infty} Bh_n \in \overline{RanB}$$

pues $\overline{RanB}$ es cerrado

$$h = \lim_{n\to\infty} Ah_n = \lim_{n\to\infty} \overline{C}Bh_n = \overline{C} \lim_{n\to\infty} Bh_n = \overline{C}h'$$

$$\text{por lo tanto } \forall h \in \overline{RanA} \text{ , } \exists h' \in \overline{RanB}/\overline{C}h' = h$$

Ya que $\overline{C}$ es isométrico suryectivo es un operador unitario ∎
El siguiente corolario lo aplicaremos al lema 4.8 para probar que el adjunto de un operador normal de Carleman es de Carleman,análogamente con uno de tipo Carleman.La demostración de este corolario es aplicación del lema 4.6.

<u>Corolario</u> **4.3** *Si $N \in L(H)$ es normal, entonces existe un operador unitario U y un operador auto-adjunto positivo R tal que*

$$N = UR = RU$$

<u>Prueba</u>
Por lema 4.6 $\exists U$, $R/N = UR$
veamos que $UR = RU$

$$NN^* = (UR)(UR)^* = (UR)(RU^*) = UR^2U^*$$
$$N^*N = (UR)^*(UR) = RU^*UR = R^2$$

Ya que N es normal, $NN^* = N^*N$
así

$$UR^2U^* = R^2 \text{ , } UR^2 = R^2U \qquad [*]$$

Ahora como $R^2 = R^*R$ (R es raiz cuadrada positiva de R^*R)
así pues con [*] se tiene

$$UR = RU \text{ ∎}$$

4.5 Expresión de un operador acotado por cuatro operadores unitarios

Si componemos un operador acotado cualesquiera con un operador fuerte de Carleman,resulta que esta composición es operador fuerte de Carleman.
El corolario 4.4 de esta sección nos ayudará a probar lo que afirmamos,para ello damos algunas propiedades.

<u>Lema</u> 4.7 *Supongamos que $A \in L(H)$ es auto-adjunto. Si $\|A\| \leq 1$,entonces*

$$A + i\sqrt{I - A^2} \text{ , } A - i\sqrt{I - A^2} \textit{ son unitarios ,}$$

$$y \;\; A = \frac{1}{2}(A + i\sqrt{I - A^2}) + \frac{1}{2}(A - i\sqrt{I - A^2})$$

<u>*Prueba*</u>

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\| \leq \|x\|$$

así

$$\langle (I - A^2)x, x\rangle \geq 0$$

es claro que $I - A^2$ es auto-adjunto,así pues
$\exists!$ B auto-adjunto positivo en $L(H)$ tal que

$$B^2 = I - A^2 \text{ donde } B = \sqrt{I - A^2}$$

veamos que $AB^2 = B^2A$

$$AB^2 = A(I - A^2) = A - A^3$$
$$B^2A = (I - A^2)A = A - A^3$$

Por lo tanto $AB = BA$ [1]

$$(A + iB)^* = A^* - iB^* = A - iB$$

Probemos que $(A + iB)^{-1} = A - iB$

$$\begin{aligned}(A - iB)(A + iB) &= A^2 + iAB - iBA + B^2 \\ &= A^2 + B^2 = A^2 + I - A^2 = I \ (por\ [1])\end{aligned}$$

Análogamente $(A + iB)(A - iB) = I$
por lo tanto

$$(A + iB)^* = (A + iB)^{-1}$$

así pues $A + i\sqrt{I - A^2}$ es un operador unitario.
Análogamente $A - i\sqrt{I - A^2}$ es un operador unitario. Es claro que

$$A = \frac{1}{2}(A + i\sqrt{I - A^2}) + \frac{1}{2}(A - i\sqrt{I - A^2}) \blacksquare$$

Proposición 4.1 *Si $A \in L(H)$ auto-adjunto,entonces existe $\alpha \in \mathbf{R}$ y existen operadores unitarios U_1, U_2 tal que*

$$A = \alpha U_1 + \alpha U_2.$$

<u>*Prueba*</u>
ya que $A \in L(H)$, así $\exists c > 0 / \|Ax\| \leq c\|x\|$
De aquí

$$\|\frac{1}{c}A\| \leq 1$$

Es claro que $\frac{1}{c}A \in L(H)$ es auto-adjunto,aplicando lema 4.7 se tiene que exiten operadores unitarios U_1 y U_2 tal que

$$\frac{1}{c}A = \frac{1}{2}U_1 + \frac{1}{2}U_2$$

Por lo tanto existe $\alpha = \frac{c}{2} \in \boldsymbol{R}$ tal que

$$A = \alpha U_1 + \alpha U_2 \blacksquare$$

Como aplicación de la proposición 4.1 se tiene:

Corolario 4.4 *Cada $B \in L(H)$ puede ser escrito como una combinación lineal de cuatro operadores unitarios*

Prueba

$$B = \frac{1}{2}(B + B^*) + i\frac{1}{2i}(B - B^*)$$

Sean

$$V = \frac{1}{2}(B + B^*)\ ,\ W = \frac{1}{2i}(B - B^*)$$

son operadores auto-adjuntos.
Así por proposición 4.1

$$\exists \alpha \in \boldsymbol{R} \quad / \quad V = \alpha U_1 + \alpha U_2$$
$$\exists \beta \in \boldsymbol{R} \quad / \quad W = \beta U_3 + \beta U_4$$

donde U_i para $i = 1, 2, 3, 4$ son operadores unitarios.
Por lo tanto

$$B = V + iW = \alpha U_1 + \alpha U_2 + i\beta U_3 + i\beta U_4 \blacksquare$$

4.6 Operador normal adjunto de Carleman y tipo Carleman

Consideremos un operador normal $N \in L(L_2[a,b])$,según se especifique N, el operador adjunto N^* puede ser operador de Carleman o de tipo Carleman, que vemos en el siguiente lema,para ello apliquemos :el lema 4.1,lema 4.2,lema 4.3 y corolario 4.3.

Lema 4.8 *Sea N un operador normal*

$$i)\quad Si\ N\ es\ (ODC)\ ,\ entonces\ N^*\ es\ un\ (ODC)$$
$$ii)\quad Si\ N\ es\ (OTC)\ ,\ entonces\ N^*\ es\ (OTC)$$

Prueba
Ya que N es normal por corolario 4.3 existe un operador unitario U y un operador auto-adjunto positivo R tal que

$$N = RU = UR$$

$$N^* = (UR)^* = R^*U^* = RU^*$$

Prueba(i)
Como $N = RU$ ya que N es Operador De Carleman, entonces por lema 4.3 R es un Operador De Carleman,como

$$N^* = RU^*$$

por lema 4.1 N^* es un operador de Carleman.
Prueba(ii)
Análoga al anterior, aplicando lema 4.3 y lema 4.2 ▨

4.7 Operador fuerte de Carleman

Los operadores fuertes de Carleman forman una estructura algebráica que es un Ideal de los operadores lineales acotados sobre $L_2[a,b]$.

Definición 4.4 *Sea T un operador de Carleman T es llamado un operador fuerte de Carleman(OFC)si UTU^* es un operador de Carleman(ODC) para todo operador unitario U*

Consideramos $T \in L(L_2[a,b])$, operadores unitarios $U, V \in L(L_2[a,b])$.

Lema 4.9 *Si T es un (OFC) ,entonces UTU^* es un (OFC)*

Prueba
Sea V un operador unitario
veamos que $VUTU^*V^*$ es un operador de Carleman

$$VUTU^*V^* = VUT(VU)^*$$

VU es operador unitario, como T es operador fuerte de Carleman,$VUT(VU)^*$ es un operador de Carleman. ▨
El subanillo F de $L(L_2[a,b])$ es un ideal a izquierda de $L(L_2[a,b])$,es lo que probamos en el siguiente lema,como aplicación del lema 4.1.

Lema 4.10 *Si T es un operador fuerte de Carleman y B es un operador acotado ,entonces TB es un operador fuerte de Carleman*

Prueba
Es claro que T es operador de Carleman como B es acotado , aplicando ahora el lema 4.1 TB es un operador de Carleman. Sea U un operador unitario
$K = UTU^*$ es operador de Carleman pues T es operador fuerte de Carleman

$$KUBU^* = (UTU^*)(UBU^*) = UTBU^*$$

es operador de Carleman ya que UBU^* es acotado y K de Carleman.
Por lo tanto para todo U, $UTBU^*$ es operador de Carleman, así por definición 4.4 ,TB es operador fuerte de Carleman. ▨
Las dos siguientes propiedades nos probará, un ideal a derecha.
El siguiente corolario resulta como aplicación del lema 4.9,lema 4.10.

Corolario 4.5 *Si T es un operador fuerte de Carleman y U un operador unitario entonces, UT es un operador fuerte de Carleman*

Prueba
Ya que T es operador fuerte de Carleman, por lema 4.9 UTU^* es operador fuerte de Carleman , por lema 4.10 UTU^*U es operador fuerte de Carleman.Así pues UT es operador fuerte de Carleman. ∎
Una combinación lineal de operadores fuertes de Carleman es operador fuerte de Carleman.
Consideremos $T_i \in L(L_2[a,b])\ \forall i = 1,\ldots,m$ .Aplicando el lema 4.4,veamos lo afirmado.

Lema 4.11 *Si $T_n \forall n = 1,\ldots,m$ son operadores fuertes de Carleman,entonces*

$$\sum_{n=1}^{m} \alpha_n T_n \ (\alpha_n \in C) \textit{ es un operador fuerte de Carleman}$$

Prueba
Sea U un operador unitario. Como $\alpha_n T_n\ \forall n = 1,\ldots,m$ son operadores de Carleman entonces

$$\sum_{n=1}^{m} \alpha_n T_n$$

es un operador de Carleman esto es por lema4.4.
Ahora

$$\begin{aligned} U(\sum_{n=1}^{m} \alpha_n T_n)U^* &= U[(\sum_{n=1}^{m} \alpha_n T_n)U^*] \\ &= U(\sum_{n=1}^{m} \alpha_n T_n U^*) = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n (UT_nU^*) \end{aligned}$$

Ya que T_n es operador fuerte de Carleman UT_nU^* es operador de Carleman,así pues $\sum_{n=1}^{m} \alpha_n (UT_nU^*)$ es un operador de Carleman.Por lo tanto, por definición 4.3

$$\sum_{n=1}^{m} \alpha_n T_n$$

es un operador fuerte de Carleman. ∎
El subanillo F de $L(L_2[a,b])$ es un ideal a derecha de $L(L_2[a,b])$,es lo que probamos en el siguiente lema, como aplicación del lema 4.11 y corolario 4.4.

Lema 4.12 *Si B es acotado,T es un operador fuerte de Carleman entonces BT es un operador fuerte de Carleman*

Prueba
Como B es acotado por corolario 4.4 existen los unitarios U_n $\forall n = 1,2,3,4$ tal que

$$B = \sum_{n=1}^{4} \alpha_n U_n$$

Ahora por corolario 4.5 $U_n T$ son operadores fuertes de Carleman.
Por lema 4.11 $\sum_{n=1}^{4} \alpha_n U_n T$ es un operador fuerte de Carleman.

$$BT = (\sum_{n=1}^{4} \alpha_n U_n)T = \sum_{n=1}^{4} \alpha_n U_n T$$

Así pues BT es un operador fuerte de Carleman. ∎
Las dos siguientes propiedades nos prueba que un operador de Hilbert-Schmidt sobre $L_2[a,b]$ es un operador fuerte de Carleman.

Proposición 4.2 *Si $T \in HS$ y $U : H \longrightarrow H$ operador unitario,entonces $UTU^* \in HS$*

Prueba
Sea $\{e_n\}$ base ortonormal de H, como U es unitario $\{U^*e_n\}$ es base ortonormal de H.

$$\begin{aligned} \|UTU^*\|_A^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \|UTU^*e_n\|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \|TU^*e_n\|^2 \\ &= \|T\|_A^2 < \infty \end{aligned}$$

Por lo tanto UTU^* es un operador de Hilbert-Schmidt ∎

Lema 4.13 *Un operador T auto-adjunto de Hilbert-Schmidt sobre $L_2[a,b]$ es un operador fuerte de Carleman*

Prueba
Sea U un operador unitario sobre $L_2[a,b]$,por corolario 4.2 T es un operador de Carleman.
Ya que T es auto-adjunto, UTU^* es auto-adjunto,veamos

$$(UTU^*)^* = (TU^*)^*U^* = UT^*U^* = UTU^*$$

Ahora por Proposición 4.2 UTU^* es de Hilbert-Schmidt, así por corolario 4.2 UTU^* es un operador de Carleman.
por lo tanto por definición 4.4,T es un operador fuerte de Carleman. ∎
Como aplicación de la proposición 4.2 y lema 4.13, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 4.2 *Un operador T Hilbert-Schmidt sobre $L_2[a,b]$ es un operador fuerte de Carleman*

Prueba

$$T = \frac{T+T^*}{2} + i\frac{T-T^*}{2i}$$
$$\frac{T+T^*}{2} \ , \ \frac{T-T^*}{2i} \text{ son auto-adjuntos}$$

veamos

$$[\tfrac{T+T^*}{2}]^* = \tfrac{T+T^*}{2} = \tfrac{T^*+T}{2} = \tfrac{T+T^*}{2}$$
$$[\tfrac{T-T^*}{2i}]^* = \overline{\tfrac{1}{2i}}(T-T^*)^* = \tfrac{-1}{2i}(T^*-T) = \tfrac{1}{2i}(T-T^*)$$

Así pues por lema 4.13 $\frac{T+T^*}{2}$, $\frac{T-T^*}{2i}$ son operadores fuertes de Carleman y por lema 4.11 $\frac{T+T^*}{2} + i\frac{T-T^*}{2i}$ es un operador fuerte de Carleman.Por lo tanto T es un operador fuerte de Carleman. ∎

Como aplicación del teorema 3.3,corolario 3.2 (capítulo 3) y teorema 4.2 se tiene:

Corolario 4.6 *Si T_1 T_2son operadores de Hilbert-Schmidt sobre $L_2[a,b]$ y B es un operador acotado entonces*

$$T_2T_1 \ , \ T_1T_2 \ \textit{son operadores fuertes de Carleman}$$

$$T_1B \ , \ BT_1 \ \textit{son operadores fuertes de Carleman}$$

El adjunto de un operador fuerte de Carleman es un operador fuerte de Carleman,que es lo que probaremos,como aplicación del lema 4.6,lema 4.10 y corolario 4.5.

Lema 4.14 *Sea T un operador lineal acotado sobre $L_2[a,b]$. Si T es operador fuerte de Carleman entonces T^* es un operador fuerte de Carleman*

Prueba

Como T es operador acotado así por lema 4.6 existe un operador unitario U y un operador auto-adjunto positivo B tal que

$$\begin{aligned} T &= UB \\ T^* &= (UB)^* = B^*U^* = BU^* \\ U^*T &= B \\ T^* &= BU^* = U^*TU^* \end{aligned}$$

T es operador fuerte de Carleman y por lema 4.10 TU^* es operador fuerte de Carleman y por corolario 4.5 U^*TU^* es operador fuerte de Carleman.Así pues T^* es operador fuerte de Carleman. ∎

Ahora,veamos que un operador fuerte de Carleman se puede expresar como una combinación lineal de operadores fuertes de Carleman,que resulta como aplicación del lema 4.11,lema 4.14.

Lema 4.15 *Sea T un operador lineal acotado sobre $L_2[a,b]$*

$$T \text{ es un } (OFC) \text{ si y sólo si } \frac{T+T^*}{2} \text{ y } \frac{T-T^*}{2i} \text{ son } (OFC)$$

Prueba
Probamos:
a)Si T es un (OFC),entonces $\frac{T+T^*}{2}$ y $\frac{T-T^*}{2i}$ son (OFC).
b)Si $\frac{T+T^*}{2}$ y $\frac{T-T^*}{2i}$ son (OFC),entonces T es un (OFC).
Prueba(a)
Ya que T es operador fuerte de Carleman así por lema 4.14 T^* es operador fuerte de Carleman
Ahora por lema 4.11

$$\frac{T+T^*}{2}, \frac{T-T^*}{2i}$$

son operadores fuertes de Carleman.
Prueba(b)
Por lema 4.11, T es operador fuerte de Carleman∎

4.8 Convergencia

La teoría de operadores de Carleman de alguna manera está conectada a series de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} b_n|\phi_n(x)|^2$ donde $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ ($b_n \geq 0$) y $\{\phi_n\}$ es alguna base ortonormal de $L_2[a,b]$.
Vimos en el lema 4.1 ,para $A, B \in L(L_2[a,b])$, A operador de Carleman,AB es operador de Carleman,aplicaremos esto para probar que UT es operador de Carleman donde U es un operador unitario y T operador de Carleman, al final de la sección la aplicaremos a series convergentes.
En el siguiente teorema ,relacionamos un operador lineal acotado T sobre $L_2[a,b]$ con una serie convergente del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\,|\phi_n(x)|^2$ p.c.t $x \in [a,b]$ y vemos que T es operador de Carleman.

Teorema 4.3 *Sea $\{\phi_n\}$ base ortonormal de $L_2[a,b]$, a_n una sucesión de números complejos tal que $|a_n| \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$, T operador lineal y acotado definido por*

$$T\phi_n = |a_n|^{\frac{1}{2}}\phi_n.$$

$$T \text{ es operador de Carleman si y sólo si } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||\phi_n(x)|^2 < \infty \text{ p.c.t. } x \in [a,b]$$

Prueba
Probamos:
i)Si T es operador de Carleman,entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n||\phi_n(x)|^2 < \infty$ *p.c.t.* $x \in [a,b]$.
ii)Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n||\phi_n(x)|^2 < \infty$ *p.c.t.* $x \in [a,b]$,entonces T es un operador de Carleman.

Prueba(i)

$$Tf(x) = \int_a^b h(x,y)f(y)dy \ , \ h_x \in L_2[a,b] \ p.c.t. \ x$$

$$|a_n|^{\frac{1}{2}}\phi_n(x) = T\phi_n(x) = \int_a^b h(x,y)\phi_n(y)dy = \langle \phi_n, \overline{h}_x \rangle$$

$$\begin{aligned} \infty > \|h_x\|_2^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left|\langle \phi_n, \overline{h}_x \rangle\right|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| |a_n|^{\frac{1}{2}}\phi_n(x) \right|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||\phi_n(x)|^2 \ \ p.c.t. \ x \end{aligned}$$

Prueba(ii)

$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||\phi_n(x)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \overline{|a_n|^{\frac{1}{2}}\phi_n(x)} \right|^2 \ \ p.c.t. \ x$$

así

$$\exists! \ h_x \in L_2[a,b] \ tal \ que \ \langle h_x, \phi_n \rangle = \overline{|a_n|^{\frac{1}{2}}\phi_n(x)} \ p.c.t. \ x$$

$$\langle \phi_n, h_x \rangle = \overline{\langle h_x, \phi_n \rangle} = |a_n|^{\frac{1}{2}}\phi_n(x) \ p.c.t. \ x$$

$$\begin{aligned} T\phi_n(x) = |a_n|^{\frac{1}{2}}\phi_n(x) &= \langle \phi_n, h_x \rangle \\ &= \int_a^b \overline{h}_x(y)\phi_n(y)dy \ , \ \overline{h}_x \in L_2[a,b] \\ &= \int_a^b \overline{h}(x,y)\phi_n(y)dy \end{aligned}$$

Sea $f \in L_2[a,b]$

$$\begin{aligned} Tf(x) = T\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\phi_n(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n T\phi_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \int_a^b \overline{h}(x,y)\phi_n(y)dy \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \overline{h}(x,y)\alpha_n\phi_n(y)dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{m\to\infty} \int_a^b \overline{h}(x,y) \left(\sum_{n=1}^{m} \alpha_n \phi_n(y) \right) dy \\
&= \lim_{m\to\infty} \left\langle \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \phi_n, h_x \right\rangle \\
&= \left\langle \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \phi_n, h_x \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n, h_x \right\rangle \\
&= \int_a^b \overline{h}(x,y) \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n(y) dy \\
&= \int_a^b \overline{h}(x,y) f(y) dy
\end{aligned}$$

Por lo tanto T es un operador de Carleman. ∎
Para probar lo siguiente,aplicamos el lema 4.1.
El operador T que definimos es un operador de Carleman esto como consecuencia de la anterior demostración.

Teorema 4.4 *Sea $\{\phi_n\}$ base ortonormal de $L_2[a,b]$ y la sucesión $\{c_n\}$ no negativos tal que $c_n \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$.*
Sea U operador unitario tal que $U\phi_n = \psi_n$.
T operador lineal acotado definido por

$$T\phi_n = c_n^{\frac{1}{2}} \phi_n \ (c_n \geq 0) \ \textit{tal que} \ \sum_{n=1}^{\infty} c_n |\phi_n(x)|^2 < \infty \ \ p.c.t. \ x$$

$$UT \ \textit{es operador de Carleman si y sólo si} \ \sum_{n=1}^{\infty} c_n |\psi_n(x)|^2 < \infty \ p.c.t. \ x$$

Prueba
por definición de T y U tenemos

$$\begin{aligned}
UTU^*\psi_n = U(TU^*\psi_n) &= U(T\phi_n) \\
&= U(c_n^{\frac{1}{2}}\phi_n) \\
&= c_n^{\frac{1}{2}} U\phi_n = c_n^{\frac{1}{2}}\psi_n
\end{aligned}$$

usando esto veamos la demostración de:
i)Si UT es operador de Carleman,entonces $\sum_{n=1}^{\infty} c_n|\psi_n(x)|^2 < \infty$ $p.c.t.$ x.

ii)Si $\sum_{n=1}^{\infty} c_n|\psi_n(x)|^2 < \infty$ $p.c.t.$ x,entonces UT es operador de Carleman.
Prueba(i)
Ya que UT es operador de Carleman ,de aquí UTU^* es operador de Carleman.

$$(UTU^*f)(x) = \int_a^b h(x,y)f(y)dy \text{ , } h_x \in L_2[a,b] \text{ } p.c.t. \text{ } x$$

aplicando esto

$$\begin{aligned}(UTU^*\psi_n)(x) &= \int_a^b h(x,y)\psi_n(y)dy \\ (c_n^{\frac{1}{2}}\psi_n)(x) &= \int_a^b h(x,y)\psi_n(y)dy = \langle\psi_n, \overline{h}_x\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\infty > \|\overline{h}_x\| &= \sum_{n=1}^{\infty} |\langle\psi_n, \overline{h}_x\rangle|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left|c_n^{\frac{1}{2}}\psi_n(x)\right|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n|\psi_n(x)|^2 \text{ } p.c.t. \text{ } x\end{aligned}$$

Prueba(ii)
Sea $\alpha_n = c_n^{\frac{1}{2}}\psi_n$

$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} c_n|\psi_n(x)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\overline{c_n^{\frac{1}{2}}\psi_n(x)}\right|^2 \text{ } p.c.t. \text{ } x$$

así

$$\exists! \text{ } h_x \in L_2[a,b] \text{ / } \quad \begin{array}{l}\langle h_x, \psi_n\rangle = \overline{\alpha_n(x)} \text{ } p.c.t. \text{ } x \\ \langle\psi_n, h_x\rangle = \overline{\langle h_x, \psi_n\rangle} = \alpha_n(x)\end{array}$$

$$\begin{aligned}UTU^*\psi_n(x) &= \alpha_n(x) = \langle\psi_n, h_x\rangle = \int_a^b \overline{h}_x(y)\psi_n(y)dy = \int_a^b \overline{h}(x,y)\psi_n(y)dy \\ (UTU^*f)(x) &= UTU^*\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\psi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n UTU^*\psi_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n \int_a^b \overline{h}(x,y)\psi_n(y)dy\end{aligned}$$

$$= \int_a^b \overline{h}(x,y) \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \psi_n(y) dy$$
$$= \int_a^b \overline{h}(x,y) f(y) dy \ , \ \overline{h}_x \in L_2[a,b] \ p.c.t. \ x$$

Por lo tanto UTU^* es un operador de Carleman,así pues UT es operador de Carleman. ■

Al siguiente lema, aplicamos el lema 4.1 y lema 4.4.

Lema 4.16 *Sean $T, U, A \in L(L_2[a,b])$, T operador de Carleman y U un operador unitario. Si AT=TA y U-A es un operador de Carleman,entonces UT es un operador de Carleman*

Prueba

$$(U - A)T + AT = UT$$

A acotado, T de Carleman por lema4.1 TA es operador de Carleman, $U - A$ es operador de Carleman, T acotado ,por lema4.1 $(U - A)T$ es operador de Carleman.Como la suma de operadores de Carleman es de Carleman(lema4.4), entonces UT es operador de Carleman. ■

Veamos un resultado como aplicación de los anteriores resultados

Vemos en el siguiente teorema, series convergentes en relación a operadores lineales acotados sobre $L_2[a,b]$.Para ello aplicaremos el lema 4.16,corolario 4.2 y teorema 4.4.

Teorema 4.5 *Sea $\{\phi_n\}$,$\{\psi_n\}$ bases ortonormales de $L_2[a,b]$*
$\{u_n\}$ una sucesión números complejos tal que $\exists M > 0/|u_n| \leq M$, u_n no converge a cero.
$\{b_n\}$ una sucesión acotada de números reales no negativos que converge a cero.
B un operador acotado definido por $B\phi_n = u_n\phi_n$ y el operador unitario U definido por $U\phi_n = \psi_n$.
Si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\psi_n - u_n\phi_n\|_2^2 < \infty$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n|\phi_n(x)|^2 < \infty \ \ p.c.t. \ x$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n|\psi_n(x)|^2 < \infty \ \ p.c.t. \ x$$

prueba

Ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n|\phi_n(x)|^2 < \infty$$

el operador K definido por $K\phi_n = b_n^{\frac{1}{2}}\phi_n$ es un operador de Carleman, es más $KB = BK$ pues $KB\phi_n = BK\phi_n$
veamos

$$\begin{aligned} KB\phi_n &= Ku_n\phi_n = u_nK\phi_n = u_nb_n^{\frac{1}{2}}\phi_n \\ BK\phi_n &= Bb_n^{\frac{1}{2}}\phi_n = b_n^{\frac{1}{2}}B\phi_n = b_n^{\frac{1}{2}}u_n\phi_n \end{aligned}$$

Ahora

$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} \|\psi_n - u_n\phi_n\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|U\phi_n - B\phi_n\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|(U-B)\phi_n\|_2^2$$

Así pues $U - B$ es un operador de Hilbert-Schmidt.
Sabemos que un operador de Hilbert-Schmidt es un operador de Carleman(corolario 4.2).Por lo tanto $U - B$ es un operador de Carleman, de aquí aplicando lema4.16,UK es un operador de Carleman y por teorema 4.4

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n|\psi_n(x)|^2 < \infty \;\; p.c.t. \; x \; \blacksquare$$

4.9 Rango localmente acotado

Si bien vimos un operador de Carleman, observando una serie convergente,ahora vemos observando los elementos del rango del operador.
Aplicamos el teorema de Riesz's,que nos dice para cada funcional lineal acotada f sobre el espacio de Hilbert H ,existe un único $z \in H$ tal que $f(x) = \langle x, z\rangle \; \forall x \in H$,lo cual no probamos en este trabajo.

Definición 4.5 *Sea A un operador lineal acotado definido sobre $L_2[a,b]$ Decimos que A es un operador de rango localmente acotado si $\exists M \geq 0$ independiente de f y x, tal que*

$$|(Af)(x)| \leq M\|f\|_2 \;\; \forall f \in L_2[a,b] \; y \; \forall x \in [a,b]$$

Lema 4.17 *Si T es un operador de rango localmente acotado, entonces T es un operador de Carleman*

Prueba
Definimos

$$L_xf = (Tf)(x) \;\; p.c.t. \; x$$

L_x es funcional lineal acotada sobre $L_2[a,b]$
veamos

L_x es lineal

$$\begin{aligned} L_x(f+g) = (T(f+g))(x) &= (Tf+Tg)(x) \\ &= (Tf)(x) + (Tg)(x) \\ &= L_xf + L_xg \\ L_x\alpha f = (T\alpha f)(x) &= (\alpha Tf)(x) \\ &= \alpha(Tf)(x) \\ &= \alpha L_x f \end{aligned}$$

L_x es acotado pues

$$|L_xf| = |(Tf)(x)| \leq M\|f\|_2$$

Ahora aplicando el teorema de Riesz's,T es operador de Carleman veamos

$$\exists!\ h_x \in L_2[a,b]\ /\ L_xf = \langle f, h_x\rangle\ \forall f \in L_2[a,b]$$

así pues

$$\begin{aligned} (Tf)(x) = L_xf = \langle f, h_x\rangle &= \int_a^b f(y)\overline{h}_x(y)dy \ \ (\overline{h}_x \in L_2[a,b]) \\ &= \int_a^b \overline{h}(x,y)f(y)dy \end{aligned}$$

y por definición T es un operador de Carleman. ▩

4.10 Transformación de núcleos fuertes

Para $A, B, T \in L(L_2[a,b])$, T operador de Hilbert-Schmidt,queremos calcular el núcleo de ATB como operador de Carleman.
Usaremos resultados del capítulo 3,como el teorema 3.3 (sección 3.3) y corolario 3.1 (sección 3.1).Los cuales nos muestran que T^*, AT, T^*A^*, ATB, TB son operadores de Hilbert-Schmidt.
Calcularemos el núcleo de T^*.Ahora recordemos que un operador de Hilbert-Schmidt es de Carleman.Así sabemos por el lema 4.1 (sección 4.2), como es el núcleo de TB.
Con estas observaciones ,procedamos al cálculo de ATB en el lema 4.18,para ello introduscamos la siguientes definiciones:

Definición 4.6 *Definimos:*
C como la operación de conjugación
E como la operación de intercambio de variable

Observación 4.3 .
(1)

$$\underline{EC = CE}$$

veamos

$$\begin{aligned} ECf(x,y) &= E\overline{f}(x,y) = \overline{f}(y,x) \\ CEf(x,y) &= Cf(y,x) = \overline{f}(y,x) \end{aligned}$$

(2)

$$\underline{E^2 = C^2 = I}$$

veamos

$$E^2 = E \circ E$$

$$C^2 = C \circ C$$

$$\begin{aligned} E \circ Ef(x,y) &= E(Ef(x,y)) = E(f(y,x)) = f(x,y) \\ C \circ Cf(x,y) &= C(\overline{f}(x,y)) = f(x,y) \end{aligned}$$

Definición 4.7 *Si T es operador de Hilbert-Schmidt sobre $L_2[a,b]$ denotamos por $\kappa(T)$ como el núcleo del operador T*

Nota 4.1 *Si T es operador de Hilbert-Schmidt sobre $L_2[a,b]$, A y B operadores lineales acotados, entonces*

a) $\kappa(T^*) = EC\kappa(T)$

b) $\kappa(TB) = CB^*C\kappa(T)$

c) AT , T^* , T^*A^* , ATB *son operadores de* $Hilbert - Schmidt$ *sobre* $L_2[a,b]$

Nota 4.2 *Si T es un operador de Hilbert-Schmidt sobre $L_2[a,b]$ con núcleo $\omega(x,y)$, entonces el operador adjunto de Hilbert-Schmidt T^* tiene núcleo*
$\omega^*(x,y) = \overline{\omega(y,x)} = \overline{\omega}(y,x)$.

Veamos la demostración.

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]\times[a,b]} |\omega^*(x,y)|^2 d(x,y) &= \int_{[a,b]}\int_{[a,b]} |\overline{\omega(y,x)}|^2 dx\ dy \\ &= \int_{[a,b]}\int_{[a,b]} |\omega(y,x)|^2 dy\ dx \\ &= \int_{[a,b]\times[a,b]} |\omega(y,x)|^2 d(y,x) < \infty \text{ (pues } \omega \in L_2([a,b]\times[a,b])) \end{aligned}$$

Así $\omega^* \in L_2([a,b]\times[a,b])$.
Así pues definamos

$$T^*g(x) = \int_a^b \omega^*(x,y) g(y) dy$$

esto es T^* es un operador de Hilbert-Schmidt ver teorema 3.6.
Ahora veamos que T^* es el adjunto de T

$$\begin{aligned}
\langle Tf, g\rangle = \int_a^b Tf(y)\overline{g}(y)dy &= \int_a^b \left[\int_a^b \omega(y,x)f(x)dx\right]\overline{g}(y)dy \\
&= \int_a^b \int_a^b \omega(y,x)f(x)\overline{g}(y)dy\, dx \ \ (esto\ por\ Fubini) \\
&= \int_a^b f(x)\left[\int_a^b \omega(y,x)\overline{g}(y)dy\right]dx \\
&= \int_a^b f(x)\left[\int_a^b \overline{\omega^*(x,y)}\overline{g}(y)dy\right]dx \\
&= \int_a^b f(x)\overline{\left[\int_a^b \omega^*(x,y)g(y)dy\right]}dx \\
&= \int_a^b f(x)\overline{T^*g(x)}dx \\
&= \langle f, T^*g\rangle
\end{aligned}$$

Observación 4.4 *De la nota 4.2 se justifica que* $\kappa(T^*) = EC\kappa(T)$

Aplicamos al siguiente lema observación 4.3 que para simplificar un poco la denotamos por obs ,y nota 4.1.

<u>**Lema**</u> **4.18** *Si el operador de Hilbert-Schmidt T tiene núcleo $\omega(x,y)$, entonces el operador de Hilbert-Schmidt ATB tiene el núcleo*

$$CB^*ECAE\omega(x,y) = EACEB^*C\omega(x,y)$$

B^* es entendido que actua sobre la función ω como una función de y ,mientras x permanece fijo.

<u>*Prueba*</u>

$$\begin{aligned}
\kappa(ATB) = \kappa((AT)B) &= CB^*C\kappa(AT) \ \ (nota\ 4.1(b)) \\
&= CB^*C\kappa((T^*A^*)^*) \\
&= CB^*CEC\kappa(T^*A^*) \ \ (nota\ 4.1(a)) \\
&= CB^*CCE\kappa(T^*A^*) \ \ (obs(1)) \\
&= CB^*E\kappa(T^*A^*) \ \ (obs(2)) \\
&= CB^*ECA^{**}C\kappa(T^*) \ \ (nota\ 4.1(b)) \\
&= CB^*ECAC\kappa(T^*) \\
&= CB^*ECACEC\kappa(T) \ \ (nota\ 4.1(a))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= CB^*ECACCE\kappa(T) \;\; (obs(1)) \\
&= CB^*ECAE\kappa(T) \;\; (obs(2)) \\
&= CB^*ECAE\omega(x,y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\kappa(ATB) = \kappa(A(TB)) &= \kappa\left(((TB)^* A^*)^*\right) \\
&= EC\kappa\left((TB)^* A^*\right) \;\; (nota\; 4.1(a)) \\
&= ECCA^{**}C\kappa\left((TB)^*\right) \;\; (nota\; 4.1(b)) \\
&= EAC\kappa\left((TB)^*\right) \;\; (obs(2)) \\
&= EACEC\kappa(TB) \;\; (nota\; 4.1(a)) \\
&= EACECCB^*C\kappa(T) \;\; (nota\; 4.1(b)) \\
&= EACEB^*C\kappa(T) \;\; (obs(2)) \\
&= EACEB^*C\omega(x,y)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,igualando

$$CB^*ECAE\omega(x,y) = EACEB^*C\omega(x,y) \;\blacksquare$$

CAPITULO
5

APROXIMACION ESPECTRAL

Introducción

Resumiendo datos importantes ,vimos que el operador $T : L_2[a,b] \longrightarrow L_2[a,b]$ de Hilbert-Schmidt es un operador integral de la forma $(Tx)(s) = \int_a^b \kappa(s,t)x(t)dt$ donde $\kappa \in L_2([a,b] \times [a,b])$.Es mas T es compacto .Resulta que T_λ $(\lambda \neq 0)$ satisface la alternativa de Fredholm(ver capítulo 2) ,así la aplicamos para hacer un análisis sobre las soluciones de una ecuación integral de Fredholm.El operador que consideramos es un operador de Carleman (ver cap. 4),es mas ,es un operador fuerte de Carleman .
Haciendo referencia a [vii] página 90,un operador fuerte de Carleman es un operador de Hilbert-Schmidt sobre $L_2[a,b]$.
Sea H un espacio de Hilbert separable,$A : H \longrightarrow H$ operador lineal acotado auto-adjunto,lo que hacemos en el capítulo es perturbar el operador A ,hasta reducirlo a un operador lineal acotado auto-adjunto compacto.Los operadores de perturbación ,forman un operador $X : H \longrightarrow H$ de Hilbert-Schmidt con norma tan pequeña como se quiera.Que es lo que vemos en la prueba del teorema 5.1 que es la parte central de este capítulo,que enunciamos como sigue:

<u>Teorema</u> **5.1 (TEP)** *Para cada operador lineal acotado auto-adjunto $A : H \longrightarrow H$ sobre un espacio de Hilbert separable H, existe un operador de Hilbert-Schmidt X,$\|X\|_A$ arbitrariamente pequeña tal que $A - X$ tiene espectro puntual puro.*

Note que si $H = L_2[a,b]$,X es un operador integral.
Comensemos dando el siguiente lema,que demuestra que la convergencia de una sucesión de operadores auto-adjuntos es auto-adjunto.

<u>Lema</u> **5.1** *Sea $\{T_n\}$ sucesión de operadores lineales acotados auto-adjuntos*

$$T_n : H \longrightarrow H$$

$$T_n \longrightarrow T \;\Rightarrow T \textit{ es operador lineal acotado auto-adjunto}$$

<u>*Prueba*</u>
T es lineal y acotado por que lo es T_n

Probemos que $T^* = T$
Veamos

$$\begin{aligned} \|T - T^*\| &\leq \|T - T_n\| + \|T_n - T_n^*\| + \|T_n^* - T^*\| \\ &= \|T - T_n\| + \|T_n - T_n\| + \|(T_n - T)^*\| \quad \text{(pues } T_n \text{ es auto-adjunto)} \\ &= \|T - T_n\| + \|T_n - T\| \\ &= 2\|T - T_n\| \end{aligned}$$

$$\|T - T^*\| \leq 2\|T - T_n\| \longrightarrow 0 \text{ cuando } n \to \infty$$

De aquí

$$\|T - T^*\| = 0$$

Así

$$T^* = T \blacksquare$$

Este lema nos será útil en (TEP) para probar que la convergencia de une serie de operadores auto-adjuntos es auto-adjunto.

5.1 Familia espectral

La definición y propiedades sobre proyección ortogonal lo detallamos en el apéndice ,en la sección de proyecciones ortogonales que la aplicaremos al lema 5.2 y al teorema 5.1 . La siguiente definición,la aplicamos al lema 5.2 para un operador lineal acotado auto-adjunto sobre un espacio de Hilbert separable.

Definición 5.1 *Una familia espectral real(o descomposición real de la unidad) es una familia $\{E_\lambda / \lambda \in R\}$ de proyecciones E_λ definido sobre un espacio de Hilbert H (de cualquier dimension) que depende de un parametro real λ y es tal que:*

$$\begin{array}{ll} 1) & E_\lambda \leq E_\mu \ (asi\ E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\lambda) \ [\lambda < \mu] \\ 2) & \lim\limits_{\lambda \to -\infty} E_\lambda x = 0 \\ 3) & \lim\limits_{\lambda \to +\infty} E_\lambda x = x \\ 4) & E_{\lambda+o} x = \lim\limits_{\mu \to \lambda+o} E_\mu x = E_\lambda x \ [x \in H] \end{array}$$

Observación 5.1 *$\mu \to \lambda + o$ indica $\mu \to \lambda^+$*

5.2 Subespacio que reduce un operador

Si nosotros tenemos un operador lineal acotado $A : H \longrightarrow H$ y si $\mathcal{M}$ es un subespacio de H ,el hecho de que $\mathcal{M}$ reduce A, nos permitirá definir $A : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ y $A : \mathcal{M}^\perp \longrightarrow \mathcal{M}^\perp$ que pasamos a definir y dar una propiedad en apend A_6.

Definición 5.2 *Un subespacio $\mathcal{M}$ de H es llamado invariante bajo un operador lineal A en H si $Af \in \mathcal{M}$ $\forall f \in \mathcal{M} \cap D_A$*

Definición 5.3 *Sea A un operador lineal en H y sea P la proyección sobre un subespacio $\mathcal{M}$. El subespacio $\mathcal{M}$ reduce A si y sólo si las siguientes dos condiciones son satisfechas:*

$$\begin{array}{ll} a) & PD_A \subset D_A \\ b) & \mathcal{M} \text{ y } \mathcal{M}^\perp \text{ son invariantes bajo } A \end{array}$$

Observación 5.2 $PD_A = \{Px/x \in D_A\}$, D_A =*dominio de* A

El siguiente lema nos será de base para probar el teorema 5.1.

5.3 Existencia de un operador de aproximación

Para la demostración del siguiente lema aplicaremos fundamentalmente *Apend* A_6,*Apend* A_8 y corolario 3.1 (sección 3.1).
Consideramos un espacio de Hilbert separable H. Para cada elemento de H construiremos un subespacio $\mathcal{M} = \langle \varphi_1^*, \varphi_2^*, \ldots, \varphi_m^* \rangle$ donde φ_i^* $\forall i = 1, \ldots, m$ son ortonormales.
La construcción de $\mathcal{M}$ está en base a la familia espectral real $\{E_\lambda/\lambda \in R\}$ asociado al operador lineal acotado auto-adjunto $A : H \longrightarrow H$.
Sea P la proyección que proyecta H sobre $\mathcal{M}$,así pues ,en base a P y A construiremos el operador de Hilbert-Schmidt auto-adjunto Y,es mas podremos definir los operadores $A - Y : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ y $A - Y : \mathcal{M}^\perp \longrightarrow \mathcal{M}^\perp$.

<u>Lema</u> 5.2 *Sea $A : H \longrightarrow H$ un operador lineal acotado auto-adjunto,H espacio de Hilbert separable.*
Para cada f de H y para todos los $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ se puede encontrar un subespacio $\mathcal{M} \subset H$,$\dim \mathcal{M} < \infty$ y un operador auto-adjunto de Hilbert-Schmidt Y de tal forma que $\|P^\perp f\| < \epsilon$ (P es la proyección que proyecta H sobre $\mathcal{M}$), $\|Y\|_A < \delta$ y $\mathcal{M}$ reduce A-Y.

<u>*Prueba*</u>
<u>Veamos la existencia de $\mathcal{M}$</u>
Sea $\epsilon > 0$, f cualesquiera de H
Supongamos $f \neq 0$
Como A es auto-adjunto, entonces existe una familia espectral $\{E_\lambda/\lambda \in R\}$.
Así pues

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \to +\infty} [E_\lambda - E_{-\lambda}]f &= \lim_{\lambda \to +\infty} E_\lambda f - \lim_{\lambda \to +\infty} E_{-\lambda} f \\ &= f - 0 \\ &= f \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\lim_{\lambda \to +\infty} [E_\lambda - E_{-\lambda}]f = f$$

De aquí

$$\text{para } \epsilon > 0 \text{ , } \exists N > 0/\lambda > N \Rightarrow \|f - [E_\lambda - E_{-\lambda}]f\| < \epsilon$$

$$\text{para } \|f\| > 0 \text{ , } \exists M > 0/\lambda > M \Rightarrow \|f - [E_\lambda - E_{-\lambda}]f\| < \|f\|$$

Ahora

$$\begin{aligned} \|f\| - \|[E_\lambda - E_{-\lambda}]f\| \leq \|f - [E_\lambda - E_{-\lambda}]f\| &< \|f\| \\ \|f\| - \|[E_\lambda - E_{-\lambda}]f\| &< \|f\| \\ \|f\| - \|f\| &< \|[E_\lambda - E_{-\lambda}]f\| \\ 0 &< \|[E_\lambda - E_{-\lambda}]f\| \end{aligned}$$

Así pues

$$[E_\lambda - E_{-\lambda}]f \neq 0$$

Sea $r = \max\{N, M\} > 0$, $\lambda > r$
trabajamos con este $\lambda > 0$
Tomemos un número natural cualesquiera n, ahora sea

$$g_k = [E_{\frac{2k-n}{n}\lambda} - E_{\frac{2(k-1)-n}{n}\lambda}]f \text{ , } \quad k = 1, 2, 3, ..., n$$

es claro que

$$\sum_{k=1}^{n} g_k = [E_\lambda - E_{-\lambda}]f$$

de aquí

$$\sum_{k=1}^{n} \|g_k\|^2 = \|[E_\lambda - E_{-\lambda}]f\|^2$$

Pues g_k son mutuamente ortogonales.
Como

$$[E_\lambda - E_{-\lambda}]f \neq 0$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \|g_k\|^2 \neq 0$$

Así existe $g_i^* \neq 0$, $i = 1, 2, ..., m$ donde $1 \leq i \leq n$.

$$\|g_i^*\| > 0 \text{ , sea } \varphi_i^* = \frac{g_i^*}{\|g_i^*\|} \text{ , } \varphi_i^* \text{ son ortonormales}$$

$$g_i^* = \|g_i^*\|\varphi_i^* \ \forall\ i = 1, .., m$$
$$\sum_{k=1}^{n} g_k = \sum_{i=1}^{m} g_i^* = \sum_{i=1}^{m} \|g_i^*\|\varphi_i^*$$

Como
$$\|f - [E_\lambda - E_{-\lambda}]f\| < \epsilon$$

Así
$$\|f - \sum_{k=1}^{n} g_k\| < \epsilon$$

es más
$$\left\| f - \sum_{i=1}^{m} \|g_i^*\|\varphi_i^* \right\| < \epsilon$$

Sea $\mathcal{M} = \langle \varphi_1^*, \varphi_2^*, ..., \varphi_m^* \rangle \subset H$
Ahora sea P la proyección que proyecta H sobre $\mathcal{M}$
así
$$\|f - Pf\| \leq \left\| f - \sum_{i=1}^{m} \|g_i^*\|\varphi_i^* \right\| < \epsilon$$

es decir,para cada $f \in H$ ($f \neq 0$),existe un subespacio $\mathcal{M}$ de H tal que
$$\|P^\perp f\| < \epsilon$$

Usando este subespacio es claro por la linealidad de P que
$$\|0 - P0\| < \epsilon$$

Así podemos extender,para cada $f \in H$, existe un subespacio $\mathcal{M}$ de H tal que $\|P^\perp f\| < \epsilon$.
Veamos $\|(A - \frac{2j-1-n}{n}\lambda I)\varphi_j\|^2 \leq \frac{\lambda^2}{n^2}$

Para φ_i^* existe un j , $1 \leq j \leq n$ tal que $\varphi_i^* = \frac{g_j}{\|g_j\|}$ donde $\|g_j\| > 0$
Sea
$$\varphi_j = \frac{g_j}{\|g_j\|} = \frac{[E_{\frac{2j-n}{n}\lambda} - E_{\frac{2j-2-n}{n}\lambda}]f}{\|[E_{\frac{2j-n}{n}\lambda} - E_{\frac{2j-2-n}{n}\lambda}]f\|}$$
$$\|(A - \frac{2j-1-n}{n}\lambda I)\varphi_j\|^2 = \int_{\alpha_1 - o}^{\alpha_2} (\gamma - \frac{2j-1-n}{n}\lambda)^2 \, d\|E_\gamma \varphi_j\|^2$$

(ver apendice:Apend A_8)es decir $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tal que
$$\left| \|(A - \frac{2j-1-n}{n}\lambda I)\varphi_j\|^2 - \sum_{k=1}^{v}(u_k' - \frac{2j-1-n}{n}\lambda)^2 \left[\|E_{u_k}\varphi_j\|^2 - \|E_{u_{k-1}}\varphi_j\|^2\right] \right| \leq \epsilon \|\varphi_j\|^2$$

donde

$$\alpha_1 - o = u_o < \alpha_1 = u_1 < \cdots < u_{v-1} < u_v = \alpha_2$$
$$u_k - u_{k-1} \leq \delta \quad para \quad 1 \leq k \leq v$$
$$u_k^{'} \in [u_{k-1}, u_k] \quad para \quad 1 \leq k \leq v$$

Es más

$$\left| \|(A - \frac{2j-1-n}{n}\lambda I)\varphi_j\|^2 - \sum_{k=1}^{v}(u_k^{'} - \frac{2j-1-n}{n}\lambda)^2 \left[\|[E_{u_k} - E_{u_{k-1}}]\varphi_j\|^2\right] \right| \leq \epsilon\|\varphi_j\|^2$$

Ahora veamos

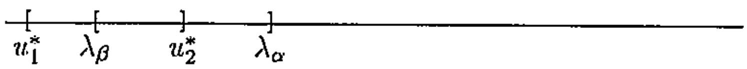
$$\|(A - \frac{2j-1-n}{n}\lambda I)\varphi_j\|^2 = \int_{\lambda_\beta}^{\lambda_\alpha}(\gamma - \frac{2j-1-n}{n}\lambda)^2\, d\|E_\gamma \varphi_j\|^2$$

Esto es, observando los casos como aplicación de estos.
Donde $\lambda_\alpha = \frac{2j-n}{n}\lambda$, $\lambda_\beta = \frac{2j-2-n}{n}\lambda$
Veamos

$$\boxed{\text{CASOS}}$$

$$\boxed{[u_1^*, u_2^*] \cap [\lambda_\beta, \lambda_\alpha] \neq \emptyset}$$

Caso1

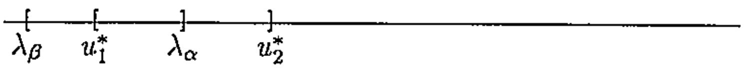


$$\begin{aligned}
[E_{u_2^*} - E_{u_1^*}][E_{\lambda_\alpha} - E_{\lambda_\beta}] &= E_{u_2^*}E_{\lambda_\alpha} - E_{u_2^*}E_{\lambda_\beta} - E_{u_1^*}E_{\lambda_\alpha} + E_{u_1^*}E_{\lambda_\beta} \\
&= E_{u_2^*} - E_{\lambda_\beta} - E_{u_1^*} + E_{u_1^*} \\
&= E_{u_2^*} - E_{\lambda_\beta}
\end{aligned}$$

Observación 5.3

$$\lambda_\beta = u_2^* \Rightarrow [E_{u_2^*} - E_{u_1^*}][E_{\lambda_\alpha} - E_{\lambda_\beta}] = 0$$

Caso2



$$\begin{aligned}
[E_{u_2^*} - E_{u_1^*}][E_{\lambda_\alpha} - E_{\lambda_\beta}] &= E_{u_2^*}E_{\lambda_\alpha} - E_{u_2^*}E_{\lambda_\beta} - E_{u_1^*}E_{\lambda_\alpha} + E_{u_1^*}E_{\lambda_\beta} \\
&= E_{\lambda_\alpha} - E_{\lambda_\beta} - E_{u_1^*} + E_{\lambda_\beta} \\
&= E_{\lambda_\alpha} - E_{u_1^*}
\end{aligned}$$

Observación 5.4

$$\lambda_\alpha = u_1^* \Rightarrow [E_{u_2^*} - E_{u_1^*}][E_{\lambda_\alpha} - E_{\lambda_\beta}] = 0$$

$$\boxed{[\lambda_\beta, \lambda_\alpha] \cap [u_1^*, u_2^*] = \emptyset}$$

Caso3

$$[\ \lambda_\beta \qquad \lambda_\alpha\ ] \quad [\ u_1^* \qquad u_2^*\ ]$$

$$[E_{u_2^*} - E_{u_1^*}][E_{\lambda_\alpha} - E_{\lambda_\beta}] = 0$$

Caso4

$$[\ u_1^* \qquad u_2^*\ ] \quad [\ \lambda_\beta \qquad \lambda_\alpha\ ]$$

$$[E_{u_2^*} - E_{u_1^*}][E_{\lambda_\alpha} - E_{\lambda_\beta}] = 0$$

Aplicando la observación 5.3,observación 5.4 ,caso(3) y caso(4) a todas las posibilidades de posición para λ_α , λ_β entre $\alpha_1 - o$, α_2 se tiene $\int_{\alpha_1-o}^{\alpha_2} = \int_{\lambda_\beta}^{\lambda_\alpha}$

<u>Veamos</u>

a)

$$\lambda_\beta = \alpha_1 - o\ ,\ \lambda_\alpha = \alpha_2$$

No hay nada que ver.

b)

$$\lambda_\beta < \alpha_1 - o \leq \lambda_\alpha \leq \alpha_2$$

$$\int_{\alpha_1-o}^{\alpha_2} = \int_{\lambda_\beta}^{\alpha_2} = \int_{\lambda_\beta}^{\lambda_\alpha} + \int_{\lambda_\alpha}^{\alpha_2} = \int_{\lambda_\beta}^{\lambda_\alpha}$$

c)

$$\alpha_1 - o \leq \lambda_\beta \leq \alpha_2 < \lambda_\alpha$$

$$\int_{\alpha_1-o}^{\alpha_2} = \int_{\alpha_1-o}^{\lambda_\alpha} = \int_{\alpha_1-o}^{\lambda_\beta} + \int_{\lambda_\beta}^{\lambda_\alpha} = \int_{\lambda_\beta}^{\lambda_\alpha}$$

d)

$$\lambda_\beta < \alpha_1 - o \leq \alpha_2 < \lambda_\alpha$$

$$\int_{\alpha_1-o}^{\alpha_2} = \int_{\lambda_\beta}^{\lambda_\alpha}$$

e)

$$\alpha_1 - o < \lambda_\beta < \lambda_\alpha < \alpha_2$$

$$\int_{\alpha_1-o}^{\alpha_2} = \int_{\alpha_1-o}^{\lambda_\beta} + \int_{\lambda_\beta}^{\lambda_\alpha} + \int_{\lambda_\alpha}^{\alpha_2} = \int_{\lambda_\beta}^{\lambda_\alpha}$$

Ahora

$$\frac{2j-2-n}{n}\lambda \vdash \frac{\lambda}{n} \dashv \frac{2j-1-n}{n}\lambda \vdash \frac{\lambda}{n} \dashv \frac{2j-n}{n}\lambda$$

$$\frac{2j-2-n}{n}\lambda \leq \gamma \leq \frac{2j-n}{n}\lambda$$

$$\tfrac{2j-2-n}{n}\lambda - \tfrac{2j-1-n}{n}\lambda \leq \gamma - \tfrac{2j-1-n}{n}\lambda \leq \tfrac{2j-n}{n}\lambda - \tfrac{2j-1-n}{n}\lambda$$

$$-\tfrac{\lambda}{n} \leq \gamma - \tfrac{2j-1-n}{n}\lambda \leq \tfrac{\lambda}{n}$$

$$|\gamma - \tfrac{2j-1-n}{n}\lambda| \leq \tfrac{\lambda}{n}$$

$$|\gamma - \tfrac{2j-1-n}{n}\lambda|^2 \leq \tfrac{\lambda^2}{n^2}$$

$$\left(\gamma - \tfrac{2j-1-n}{n}\lambda\right)^2 \leq \tfrac{\lambda^2}{n^2}$$

$$\begin{aligned}
\|(A - \frac{2j-1-n}{n}\lambda I)\varphi_j\|^2 &= \int_{\frac{2j-2-n}{n}\lambda}^{\frac{2j-n}{n}\lambda} (\gamma - \frac{2j-1-n}{n}\lambda)^2 \, d\|E_\gamma\varphi_j\|^2 \\
&\leq \int_{\frac{2j-2-n}{n}\lambda}^{\frac{2j-n}{n}\lambda} \frac{\lambda^2}{n^2} \, d\|E_\gamma\varphi_j\|^2 \\
&= \frac{\lambda^2}{n^2} \int_{\frac{2j-2-n}{n}\lambda}^{\frac{2j-n}{n}\lambda} d\|E_\gamma\varphi_j\|^2 \\
&= \frac{\lambda^2}{n^2}\|\varphi_j\|^2 \\
&= \frac{\lambda^2}{n^2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|A\varphi_j - \frac{2j-1-n}{n}\lambda\varphi_j\|^2 \leq \frac{\lambda^2}{n^2}$$

Veamos la existencia del operador auto-adjunto de Hilbert-Schmidt Y

$$\begin{aligned}
\|(I-P)AP\varphi_j\|^2 = \|(I-P)A\varphi_j\|^2 &= \|A\varphi_j - PA\varphi_j\|^2 \\
&\leq \|A\varphi_j - \frac{2j-1-n}{n}\lambda\varphi_j\|^2 \\
&\leq \frac{\lambda^2}{n^2}
\end{aligned}$$

Así pues se demostró que para $i = 1, 2, ..., m$

$$\|(I-P)AP\varphi_i^*\|^2 \leq \frac{\lambda^2}{n^2}$$

Ya que $\{\varphi_1^*, \varphi_2^*, \varphi_3^*, ..., \varphi_m^*\}$ es ortonormal,podemos completar a una base ortonormal

$$\varphi_1^*, \varphi_2^*, \varphi_3^*, ..., \varphi_m^*, \psi_{m+1}, \psi_{m+2}, ...$$

donde $\psi_i \in \mathcal{M}^\perp \quad i = m+1, m+2, ...$
Sea

$$\phi_i = \begin{cases} \varphi_i^* & si \quad i \leq m \\ \psi_i & si \quad i > m \end{cases}$$

$\{\phi_i\}$ es base ortonormal de H

$$\|(I-P)AP\phi_i\|^2 \leq \frac{\lambda^2}{n^2} \quad para \quad i \leq m$$
$$\|(I-P)AP\phi_i\|^2 = \|(I-P)A0\|^2 = 0 \quad para \quad i > m$$

Ahora

$$\begin{aligned} n\frac{\lambda^2}{n^2} \geq \sum_{i=1}^{m} \|(I-P)AP\phi_i\|^2 &= \sum_{i \leq m} \|(I-P)AP\phi_i\|^2 + \sum_{i>m} \|(I-P)AP\phi_i\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \|(I-P)AP\phi_i\|^2 \end{aligned}$$

Así

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|(I-P)AP\phi_i\|^2 \leq \frac{\lambda^2}{n}, \; \|(I-P)AP\|_A^2 \leq \frac{\lambda^2}{n}$$

Por lo tanto

$$\|(I-P)AP\|_A^2 < \infty$$

Es decir $(I-P)AP$ es un operador de Hilbert-Schmidt,es más $[(I-P)AP]^*$ es un operador de Hilbert-Schmidt.
Ahora

$$\| [(I-P)AP]^* \|_A = \|(I-P)AP\|_A$$

(ver:corolario 3.1)

$$\begin{aligned} [(I-P)AP]^* = [AP - PAP]^* &= (AP)^* - (PAP)^* \\ &= P^*A^* - (AP)^*P^* \\ &= PA - (P^*A^*)P^* \\ &= PA - PAP \\ &= PA(I-P) \end{aligned}$$

Sea

$$Y = (I-P)AP + PA(I-P)$$

Es claro que Y es operador lineal y acotado, porque lo son I , A y P.
<u>Y es auto-adjunto</u>
veamos

$$\begin{aligned}
Y^* &= [(I-P)AP + PA(I-P)]^* \\
&= [(I-P)AP]^* + [PA(I-P)]^* \\
&= PA(I-P) + [PA - PAP]^* \\
&= PA(I-P) + (PA)^* - (PAP)^* \\
&= PA(I-P) + AP - PAP \\
&= (I-P)AP + PA(I-P)
\end{aligned}$$

Y es de Hilbert-Schmidt, porque es suma de operadores de Hilbert-Schmidt.
Es claro $\|PA(I-P)\|_A = \|(I-P)AP\|_A$.
Así pues

$$\begin{aligned}
\|Y\|_A = \|(I-P)AP + PA(I-P)\|_A &\leq \|(I-P)AP\|_A + \|PA(I-P)\|_A \\
&= 2\|(I-P)AP\|_A \\
&\leq 2\frac{\lambda}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

$$\|Y\|_A \leq 2\frac{\lambda}{\sqrt{n}}$$

$$\|Y\|_A \longrightarrow 0 \textit{ cuando } n \to \infty$$

Así pues

$$\forall \delta > 0 \quad \exists N > 0 / \, n > N \Rightarrow \|Y\|_A < \delta$$

<u>Finalmente $\mathcal{M}$ reduce $A - Y$</u>
Probemos $(A-Y)P = P(A-Y)$ (ver:Apend A_6)
veamos

$$\begin{aligned}
(A-Y)P &= [A - (I-P)AP - PA(I-P)]P \\
&= AP - (I-P)AP^2 - PA(P-P^2) \\
&= AP - (I-P)AP - PA(P-P) \\
&= AP - (I-P)AP \\
&= PAP
\end{aligned}$$

$$P(A-Y) = P[A - (I-P)AP - PA(I-P)]$$

$$\begin{aligned} &= PA - PAP + P^2AP - P^2A(I-P) \\ &= PA - PAP + PAP - PA(I-P) \\ &= PA - PA + PAP \\ &= PAP \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{M}$ reduce $A - Y$ ∎
Si bien probamos la existencia del operador de Hilbert-Schmidt Y ,pero no sabemos nada sobre que $A - Y$ sea un operador auto-adjunto compacto.
En el siguiente teorema ,aplicaremos sucesivamente el lema 5.2 para construir operadores de Hilbert-Schmidt $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, \ldots$ de manera que $A - Y_1 - Y_2 - Y_3 - Y_4 - Y_5 - \cdots$ sea un operador auto-adjunto compacto ,donde $Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 + \cdots$ tiene norma tan pequeña como se quiera .
La siguiente observación que denotamos por OBS será fundamental, para transformar $A - Y_1 - Y_2 - Y_3 - Y_4 - Y_5 - \cdots$ en auto-adjunto compacto.

$\boxed{\text{OBS}}$

$$\begin{aligned} &1) \quad x \in \mathcal{M}^{\perp} \text{ , } Yx = PAx \\ &2) \quad x \in \mathcal{M} \text{ , } PYx = 0 \\ &3) \quad x \in \mathcal{M} \text{ , } Yx = Ax - PAx \end{aligned}$$

5.4 Conjunto total

Pasemos a definir conjunto total, para luego definir espectro puntual puro para un operador lineal acotador que la aplicamos al teorema 5.1.

Definición 5.4 *Una combinación lineal de vectores x_1 ,..., x_m de un espacio vectorial X es una expresión de la forma*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m$$

donde los coeficientes α_1 ,..., α_m son cualquier escalar

Definición 5.5 *Para un $\emptyset \neq M \subset X$ el conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de M es llamado el Span de M , escrito Span M.*

Observación 5.5

$$Span\ M = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i / x_i \in M \right\}$$

$Y = Span\ M$ *dice que* Y *es generado por* M

Definición 5.6 *Un conjunto total en un espacio normado* X *es un subconjunto* $M \subset X$ *cuyo subespacio generado es denso en* X.
Es decir

$$M \text{ es total en } X \text{ si y sólo si} \overline{Span\ M} = X$$

5.5 Espectro puntual puro

Definición 5.7 *Un operador lineal acotado auto-adjunto* $T : H \longrightarrow H$ *sobre un espacio de Hilbert* $H \neq \{0\}$ *es dicho que tiene espectro puntual puro si* T *tiene un conjunto ortonormal de eigenvectores que es total en* H.

5.6 Existencia espectro puntual puro de aproximación

Para la prueba del siguiente teorema, aplicaremos el teorema 3.1(cap.3),lema 5.1,lema 5.2 y las proposiciones del apéndice :proposición A.7,proposición A.15,proposición A.16 y proposición A.19.
Lo que hacemos es perturbar el operador $A : H \longrightarrow H$, los operadores de perturbación ,son los operadores auto-adjuntos de Hilbert-Schmidt $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, \ldots$ que resultan como aplicación sucesiva del lema 5.2.Estos operadores de perturbación transforman a $A - Y_1 - Y_2 - Y_3 - Y_4 - Y_5 - \cdots$ en un operador auto- adjunto compacto ,donde $X = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 + \cdots$ es operador de Hilbert-Schmidt auto-adjunto con norma tan pequeña como se quiera.X es compacto (ver teorema 3.2 sección 3.3),$A - X$ es operador auto-adjunto compacto .Notemos que para $A - X$ existe una base ortonormal $\{\phi_i\} \subset H$ tal que $(A - X)\phi_i = \lambda_i \phi_i$, $\lim_{i \to \infty} \lambda_i = 0$.
El espectro puntual de $A - X$ está formado por estos λ_i.
El teorema que probamos, reduce el estudio de un operador auto-adjunto con espectro arbitrario al estudio de un operador auto-adjunto con un espectro puntual,la reducción se debe a la adición de un operador de Hilbert-Schmidt con norma tan pequeña como se quiera.

<u>Teorema</u> **5.1 (TEP)** *Para cada operador lineal acotado auto-adjunto* $A : H \longrightarrow H$ *sobre un espacio de Hilbert separable* H, *existe un operador de Hilbert-Schmidt* X,$\|X\|_A$ *arbitrariamente pequeña tal que* $A - X$ *tiene espectro puntual puro*

<u>*Prueba*</u>
Como H es un espacio de Hilbert-Schmidt separable.

Sea $f_1, f_2, \ldots$ una serie densa sobre H.Ahora hacemos una aplicación sucesiva del lema 5.2
Sea $a > 0$
$A : H \longrightarrow H$ es auto-adjunto
Tomemos $\epsilon = \delta = \frac{a}{2} > 0$
Para $f_1 \in H$, existen $\mathcal{M}_1 \subset H$, Y_1 auto-adjunto de Hilbert-Schmidt tal que

$$\|P_1^{\perp} f_1\| < \frac{a}{2} \, , \; \|Y_1\|_A < \frac{a}{2}$$

es mas $\mathcal{M}_1$ reduce $A - Y_1$.
$A - Y_1 : H \longrightarrow H$ es auto-adjunto
Tomemos $\epsilon = \delta = \frac{a}{2^2} > 0$
$A - Y_1 : \mathcal{M}_1^{\perp} \longrightarrow \mathcal{M}_1^{\perp}$
Para $P_1^{\perp} f_2 \in \mathcal{M}_1^{\perp}$, existen $\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_1^{\perp}$, Y_2 auto-adjunto de Hilber-Schmidt tal que

$$\|(P_1^{\perp} - P_2)P_1^{\perp} f_2\| < \frac{a}{2^2} \, , \; \|Y_2\|_A < \frac{a}{2^2}$$

donde $P_1^{\perp} - P_2$ proyecta H sobre $\mathcal{M}_1^{\perp} \cap \mathcal{M}_2^{\perp}$
es mas
$\mathcal{M}_2$ reduce $A - Y_1 - Y_2$
$A - Y_1 - Y_2 : H \longrightarrow H$ es auto-adjunto

$$A - Y_1 - Y_2 : \mathcal{M}_1^{\perp} \cap \mathcal{M}_2^{\perp} \longrightarrow \mathcal{M}_1^{\perp} \cap \mathcal{M}_2^{\perp}$$

Veamos
Sea $x \in \mathcal{M}_1^{\perp} \cap \mathcal{M}_2^{\perp}$

$$\begin{aligned}
(P_1^{\perp} - P_2)(A - Y_1 - Y_2)(x) &= (A - Y_1 - Y_2)(x) - P_1(A - Y_1 - Y_2)(x) - P_2(A - Y_1 - Y_2)(x) \\
&\quad (\text{Ya que } (A - Y_1 - Y_2)(x) \in \mathcal{M}_2^{\perp})) \\
&= (A - Y_1 - Y_2)(x) - P_1(A - Y_1)(x) + P_1 Y_2)(x) \\
&\quad (\text{Pues } (A - Y_1)(x) \in \mathcal{M}_1^{\perp}) \\
&= (A - Y_1 - Y_2)(x) + P_1 Y_2(x) \\
&= (A - Y_1 - Y_2)(x) + P_1(P_2(A - Y_1)x) \; (Ver\ \underline{OBS}) \\
&= (A - Y_1 - Y_2)(x)
\end{aligned}$$

Tomemos $\epsilon = \delta = \frac{a}{2^3} > 0$
Para $(P_1^{\perp} - P_2)f_3 \in \mathcal{M}_1^{\perp} \cap \mathcal{M}_2^{\perp}$, existen $\mathcal{M}_3 \subset \mathcal{M}_1^{\perp} \cap \mathcal{M}_2^{\perp}$, Y_3 auto-adjunto de Hilber-Schmidt tal que

$$\|(P_1^{\perp} - P_2 - P_3)(P_1^{\perp} - P_2)f_3\| < \frac{a}{2^3} \, , \; \|Y_3\|_A < \frac{a}{2^3}$$

donde $P_1^{\perp} - P_2 - P_3$ proyecta H sobre $\mathcal{M}_1^{\perp} \cap \mathcal{M}_2^{\perp} \cap \mathcal{M}_3^{\perp}$
es mas
$\mathcal{M}_3$ reduce $A - Y_1 - Y_2 - Y_3$

.

.

.

$A - Y_1 - Y_2 - Y_3 - \cdots - Y_{l-1} : H \longrightarrow H$ es auto-adjunto

$A - Y_1 - Y_2 - Y_3 - \cdots - Y_{l-1} : \mathcal{M}_1^{\perp} \cap \mathcal{M}_2^{\perp} \cap \mathcal{M}_3^{\perp} \cap \cdots \cap \mathcal{M}_{l-1}^{\perp} \longrightarrow \mathcal{M}_1^{\perp} \cap \mathcal{M}_2^{\perp} \cap \mathcal{M}_3^{\perp} \cap \cdots \cap \mathcal{M}_{l-1}^{\perp}$
Tomemos $\epsilon = \delta = \frac{a}{2^l} > 0$
Para $(P_1^{\perp} - P_2 - P_3 - \cdots - P_{l-1})f_l \in \mathcal{M}_1^{\perp} \cap \mathcal{M}_2^{\perp} \cap \mathcal{M}_3^{\perp} \cap \cdots \cap \mathcal{M}_{l-1}^{\perp}$, existen
$\mathcal{M}_l \subset \mathcal{M}_1^{\perp} \cap \mathcal{M}_2^{\perp} \cap \mathcal{M}_3^{\perp} \cap \cdots \cap \mathcal{M}_{l-1}^{\perp}$,Y_l auto-adjunto de Hilbert-Schmidt tal que

$$\|(P_1^{\perp} - P_2 - P_3 - \cdots - P_l)(P_1^{\perp} - P_2 - P_3 - \cdots - P_{l-1})f_l\| < \frac{a}{2^l} \text{ , } \|Y_l\|_A < \frac{a}{2^l}$$

donde $P_1^{\perp} - P_2 - P_3 - \cdots - P_l$ proyecta H sobre $\mathcal{M}_1^{\perp} \cap \mathcal{M}_2^{\perp} \cap \mathcal{M}_3^{\perp} \cap \cdots \cap \mathcal{M}_{l-1}^{\perp} \cap \mathcal{M}_l^{\perp}$
es mas
$\mathcal{M}_l$ reduce $A - Y_1 - Y_2 - Y_3 - \cdots - Y_{l-1} - Y_l$
Ahora como $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_l$ son mutuamente ortogonales

$$\|(P_1^{\perp} - P_2 - P_3 - \cdots - P_l)(P_1^{\perp} - P_2 - P_3 - \cdots - P_{l-1})f_l\| < \frac{a}{2^l} \Rightarrow \|(P_1^{\perp} - P_2 - P_3 - \cdots - P_l)f_l\| < \frac{a}{2^l} \text{ [*]}$$

Probemos $H = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}_i$
($\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}_i$ es un subespacio de H,ver apéndice:proposición A.19)
Para ello probamos $(\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}_i)^{\perp} = \{0\}$
Sea $f \in (\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}_i)^{\perp}$,sea $\alpha > 0$
Como $\{f_i\}$ es denso en H,existe una subsucesión $\{f_n^*\}$ de $\{f_i\}$ tal que

$$f_n^* \longrightarrow f$$

es mas se tiene la subsucesión $\{\frac{a}{2^n}\}$ de $\{\frac{a}{2^i}\}$
Como $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a}{2^i} < \infty$, así pues $\frac{a}{2^n} \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$. [**]
Ahora

$$\text{Para } \frac{\alpha}{2} > 0 \text{ , } \exists N > 0 / \ n > N \Rightarrow \|f - f_n^*\| < \frac{\alpha}{2}$$

Aplicando [*] y [**] cuando $n \to \infty$

$$\|(P_1^{\perp} - P_2 - P_3 - \cdots - P_n)f_n^*\| \longrightarrow 0$$

Así pues

$$\text{Para } \frac{\alpha}{2} > 0 \text{ , } \exists M > 0 / \ n > M \Rightarrow \|(P_1^{\perp} - P_2 - P_3 - \cdots - P_n)f_n^*\| < \frac{\alpha}{2}$$

De aquí

$$\|f_n^* - \sum_{i=1}^{n} P_i f_n^*\| < \frac{\alpha}{2}$$

Ahora sea P la proyección que proyecta H sobre $\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}_i$

$$\sum_{i=1}^{n} P_i f_n^* \in \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}_i$$

$$\begin{aligned} \|f - Pf\| \leq \|f - \sum_{i=1}^{n} P_i f_n^*\| &\leq \|f - f_n^*\| + \|f_n^* - \sum_{i=1}^{n} P_i f_n^*\| \\ &< \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \\ &= \alpha \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|f - Pf\| < \alpha$$

Ya que $\alpha > 0$ es cualesquiera

$$\begin{aligned} f - Pf &= 0 \\ Pf &= f \\ f \in \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}_i \cap \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}_i \right)^{\perp} &= \{0\} \end{aligned}$$

Por lo tanto $f = 0$, es decir

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}_i \right)^{\perp} = \{0\}$$

Así pues $H = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}_i$

Veamos que existe $X \in HS$ tal que $X = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i \ , \ S_n \in HS$$

Sea $\epsilon > 0$, $m > n$

$$\begin{aligned} \|S_m - S_n\|_A &= \| \sum_{j=n+1}^{m} Y_j \|_A \\ &\leq \sum_{j=n+1}^{m} \|Y_j\|_A \\ &\leq \sum_{j=n+1}^{m} \frac{a}{2^j} \end{aligned}$$

Sea $r_q = \sum_{j=1}^{q} \frac{a}{2^j}$

$$r_q \longrightarrow a \text{ cuando } q \to \infty$$

$\{r_q\}$ es de Cauchy en los reales, así para $\epsilon > 0$

$$\exists \mathcal{B} > 0/\ m > n > \mathcal{B} \Rightarrow \epsilon > |r_m - r_n| = \left|\sum_{j=n+1}^{m} \frac{a}{2^j}\right| = \sum_{j=n+1}^{m} \frac{a}{2^j}$$

Así pues

$$\|S_m - S_n\|_A < \epsilon$$

Por lo tanto $\{S_n\}$ es de Cauchy en HS,como HS es de Banach(ver:teorema 3.1),

$$\exists X \in HS/\ X = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i$$

es más

$$a = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a}{2^i} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \|Y_i\|_A \geq \|\sum_{i=1}^{\infty} Y_i\|_A = \|X\|_A$$

Por lo tanto $\|X\|_A \leq a$

Ya que Y_i son auto-adjuntos, entonces X es auto-adjunto ,esto es por aplicación del lema 5.1

Veamos $\forall x \in H$, $(A - X)(x) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i A P_i x$

$$\mathcal{M}_l \subset \mathcal{M}_1^\perp \cap \mathcal{M}_2^\perp \cap \mathcal{M}_3^\perp \cap \cdots \cap \mathcal{M}_{l-1}^\perp$$

Con la misma idea de haber encontrado $\mathcal{M}_l$ se pueden encontrar $\mathcal{M}_{l+1}$, $\mathcal{M}_{l+2}$, $\mathcal{M}_{l+3}$, ...

$$\begin{array}{lcl}
\mathcal{M}_{l+1} & \subset & \mathcal{M}_1^\perp \cap \mathcal{M}_2^\perp \cap \mathcal{M}_3^\perp \cap \cdots \cap \mathcal{M}_{l-1}^\perp \cap \mathcal{M}_l^\perp \\
\mathcal{M}_{l+2} & \subset & \mathcal{M}_1^\perp \cap \mathcal{M}_2^\perp \cap \mathcal{M}_3^\perp \cap \cdots \cap \mathcal{M}_{l-1}^\perp \cap \mathcal{M}_l^\perp \cap \mathcal{M}_{l+1}^\perp \\
\mathcal{M}_{l+3} & \subset & \mathcal{M}_1^\perp \cap \mathcal{M}_2^\perp \cap \mathcal{M}_3^\perp \cap \cdots \cap \mathcal{M}_{l-1}^\perp \cap \mathcal{M}_l^\perp \cap \mathcal{M}_{l+1}^\perp \cap \mathcal{M}_{l+2}^\perp \\
 & \vdots &
\end{array}$$

Así podemos ver:

$$\mathcal{M}_l \subset \mathcal{M}_{l+1}^\perp\ ,\ \mathcal{M}_{l+2}^\perp\ ,\ \mathcal{M}_{l+3}^\perp\ ,\ ....$$

Ahora recurrimos a la construcción hecha en el lema 5.2 (Ver OBS)

$$x_l \in \mathcal{M}_l$$

Veamos $Y_i x_l = 0$ para $i > l$ $(i \geq 2\ ,\ l \geq 1)$ [K]

Ya que $i > l$, entonces $i - 1 \geq l$

$$CASO(\ i - 1 = l\ )$$

$$\begin{aligned} Y_{l+1}x_l &= P_{l+1}(A - Y_1 - Y_2 - Y_3 - \cdots - Y_l)x_l \qquad [1] \\ &= P_{l+1}(A - Y_1 - Y_2 - Y_3 - \cdots - Y_{l-1})x_l - P_{l+1}Y_lx_l \end{aligned}$$

Ahora

$$Y_lx_l = (A - Y_1 - Y_2 - Y_3 - \cdots - Y_{l-1})x_l - P_l(A - Y_1 - Y_2 - Y_3 - \cdots - Y_{l-1})x_l$$

De aquí

$$\begin{aligned} P_{l+1}Y_lx_l &= P_{l+1}(A - Y_1 - Y_2 - Y_3 - \cdots - Y_{l-1})x_l - P_{l+1}P_l(A - Y_1 - Y_2 - Y_3 - \cdots - Y_{l-1})x_l \\ &= P_{l+1}(A - Y_1 - Y_2 - Y_3 - \cdots - Y_{l-1})x_l \qquad [2] \end{aligned}$$

De [1] y [2]

$$Y_{l+1}x_l = 0$$

$$CASO(\, i - 1 > l\,)$$

Ya que $i > l$, $x_l \in \mathcal{M}_i^{\perp}$

$$\begin{aligned} Y_ix_l &= P_i(A - Y_1 - Y_2 - Y_3 - \cdots - Y_{i-1})x_l \qquad [a] \\ &= P_i(A - Y_1 - Y_2 - Y_3 - \cdots - Y_{l-1})x_l - P_iY_lx_l - P_iY_{l+1}x_l - \cdots - P_iY_{i-1}x_l \end{aligned}$$

Ahora

$$Y_lx_l = (A - Y_1 - Y_2 - Y_3 - \cdots - Y_{l-1})x_l - P_l(A - Y_1 - Y_2 - Y_3 - \cdots - Y_{l-1})x_l$$

De aquí

$$P_iY_lx_l = P_i(A - Y_1 - Y_2 - Y_3 - \cdots - Y_{l-1})x_l \qquad [b]$$

De [a] y [b]

$$Y_ix_l = -P_iY_{l+1}x_l - \cdots - P_iY_{i-1}x_l \qquad [c]$$

Ahora

$$[d] \begin{cases} Y_{l+1}x_l = P_{l+1}(A - Y_1 - Y_2 - \cdots - Y_l)x_l & \text{pues}[\ x_l \in \mathcal{M}_{l+1}^{\perp}, \text{OBS1}] \\ Y_{l+2}x_l = P_{l+2}(A - Y_1 - Y_2 - \cdots - Y_{l+1})x_l & \text{pues}[\ x_l \in \mathcal{M}_{l+2}^{\perp}, \text{OBS1}] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_{i-1}x_l = P_{i-1}(A - Y_1 - Y_2 - \cdots - Y_{i-2})x_l & \text{pues}[\ x_l \in \mathcal{M}_{i-1}^{\perp}, \text{pues } i - 1 > l] \end{cases}$$

Aplicando [d] a [c] y como $P_iP_{l+1} = 0$, $P_iP_{l+2} = 0$, ..., $P_iP_{i-1} = 0$
entonces [c] se reduce a: $Y_ix_l = 0$

Veamos $P_l A x_l = (A - Y_1 - Y_2 - \cdots - Y_l)x_l$ [L]
Ya que $\mathcal{M}_l$ reduce $A - Y_1 - Y_2 - \cdots - Y_l$,

$$P_l(A - Y_1 - Y_2 - \cdots - Y_l) = (A - Y_1 - Y_2 - \cdots - Y_l)P_l$$

Así

$$P_l(A - Y_1 - Y_2 - \cdots - Y_l)x_l = (A - Y_1 - Y_2 - \cdots - Y_l)x_l$$
$$P_l A x_l - P_l Y_1 x_l - P_l Y_2 x_l - \cdots - P_l Y_l x_l = (A - Y_1 - Y_2 - \cdots - Y_l)x_l \quad [R]$$

Ya que

$$\mathcal{M}_l \subset \mathcal{M}_1^{\perp} \cap \mathcal{M}_2^{\perp} \cap \mathcal{M}_3^{\perp} \cap \cdots \cap \mathcal{M}_{l-1}^{\perp}$$

Así aplicando $[OBS1]$

$$[w]\begin{cases} Y_1 x_l &= P_1 A x_l \qquad \text{pues}[\ x_l \in \mathcal{M}_1^{\perp}] \\ Y_2 x_l &= P_2(A - Y_1)x_l \qquad \text{pues}[\ x_l \in \mathcal{M}_2^{\perp}] \\ . & \\ . & \\ . & \\ Y_{l-1}x_l &= P_{l-1}(A - Y_1 - Y_2 - \cdots - Y_{l-2})x_l \end{cases}$$

$P_l Y_l x_l = 0$ $[x_l \in \mathcal{M}_l\ ,\ OBS2]$ [z]
Aplicando [w] y [z] a [R] y como $P_l P_1 = 0$, $P_l P_2 = 0$,..., $P_l P_{l-1} = 0$
entonces ,[R] se reduce a :

$$P_l A x_l = (A - Y_1 - Y_2 - \cdots - Y_l)x_l$$

Aplicando ahora [K],[L],$H = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}_i$ y $X = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i$
Veremos $\forall x \in H$, $(A - X)(x) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i A P_i x$
Sea $x \in H$,así

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\ ,\ x_i \in \mathcal{M}_i$$

$$\begin{aligned} (A - X)(x) &= (A - X)(\sum_{i=1}^{\infty} x_i) \\ &= (A - \sum_{i=1}^{\infty} Y_i)(\sum_{i=1}^{\infty} x_i) \\ &= (Ax_1 - \sum_{i=1}^{\infty} Y_i x_1) + (Ax_2 - \sum_{i=1}^{\infty} Y_i x_2) + (Ax_3 - \sum_{i=1}^{\infty} Y_i x_3) + \cdots \\ &\quad \cdots + (Ax_l - \sum_{i=1}^{\infty} Y_i x_l) + \cdots \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= [(Ax_1 - Y_1x_1) - \sum_{i=2}^{\infty} Y_ix_1] + [(Ax_2 - Y_1x_2 - Y_2x_2) - \sum_{i=3}^{\infty} Y_ix_2] + \cdots \\
&\quad \cdots + [(Ax_l - Y_1x_l - Y_2x_l - \cdots - Y_lx_l) - \sum_{i=l+1}^{\infty} Y_ix_l] + \cdots \\
&= (Ax_1 - Y_1x_1) + (Ax_2 - Y_1x_2 - Y_2x_2) + \cdots \\
&\quad \cdots + (Ax_l - Y_1x_l - Y_2x_l - \cdots - Y_lx_l) + \cdots \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} P_iAx_i \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} P_iAP_ix \ [\textit{pues } \mathcal{M}_i \textit{ son mutuamente ortogonales}]
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$(A - X)(x) = \sum_{i=1}^{\infty} P_iAP_ix$$

Es claro que $Ran(P_iAP_i) \subset \mathcal{M}_i$, $\dim \mathcal{M}_i < \infty$
así pues $\dim[Ran(P_iAP_i)] < \infty$
Por lo tanto, P_iAP_i son operadores compactos(ver apéndice:proposición A.7),así $A - X$ es un operador compacto(ver:[i] página 407) y ya que es auto-adjunto, existe una base ortonormal
$\{\phi_i\} \subset H$ tal que

$$(A - X)\phi_i = \lambda_i\phi_i \ , \ \lambda_i \longrightarrow 0 \ \text{(ver [iv] página 203)} \qquad [m]$$

$$\overline{Span\{\phi_i\}} = H \qquad [n]$$

pues $\{\phi_i\}$ es base ortonormal de H.
Por lo tanto de [m] y [n], aplicando definición 5.6 ,$\{\phi_i\}$ es un conjunto ortonormal de eigenvectores que es total en H así por definición 5.7 $A - X$ tiene espectro puntual puro.
∎
El teorema que probamos es fundamental para estudiar el espectro de operadores de Carleman (ver:[v] página 38-55 y [viii] página 73) y profundizar la teoría de operadores auto-adjuntos compactos a partir de un operador auto-adjunto.
Dada la importancia de un operador compacto ,hacemos en el apéndice, un estudio detallado de resultados importantes.

APENDICE

Introducción

Toda la teoría desarrollada,sirve de apoyo,para demostrar algunas propiedades del capítulo 1,capítulo 2,capítulo 3,capítulo 4 y capítulo 5.
Vemos secciones como Subespacio Cerrado,Espacio Dual,Espacio Compacto,Operador Compacto,Proyecciones Ortogonales y la demostración del subespacio $\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}_i$ de H ,donde $\mathcal{M}_i$ son mutuamente ortogonales.

Subespacio Cerrado y Espacio Dual

En esta sección nos interesa probar el *Apend* A_o y *Apend* A_1.
Para probar *Apend* A_o ,usamos la proposición A_1 , proposición A_2 y proposición A_3,que la aplicamos al capítulo 1.

Definición A. 1.1 *Una funcional lineal f es un operador lineal con dominio un espacio vectorial X y rango el campo escalar K de X, esto es*

$$f : X \longrightarrow K$$

donde K=R si X es real y K=C si X es complejo.

Definición A. 1.2 *Sea X un espacio normado.Entonces el conjunto de todas las funcionales lineales acotadas sobre X constituye un espacio normado con norma definido por*

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

que es llamado el espacio dual de X que es denotado por X'.

Proposición A.1 *Sea* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *un conjunto de vectores linealmente independiente en un espacio normado X(de cualquier dimensión).Entonces* $\exists c > 0$ *tal que para cada escalar* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *tenemos*

$$\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|)$$

Este resultado lo aplicamos para probar la proposición A_3.

Proposición A.2 *Sea M un subespacio de un espacio métrico completo X .*

$$Si\ M\ es\ completo\ ,\ entonces\ M\ es\ cerrado\ en\ X$$

Prueba
Sea M completo. Para cada $x \in \overline{M}$ hay una sucesión $\{x_n\}$ en M tal que $x_n \longrightarrow x$ así $\{x_n\}$ es de Cauchy y como M es completo $\{x_n\}$ converge en M y por la unicidad del límite $x \in M$ de esta manera M es cerrado. ▩

Proposición A.3 *Sea Y un subespacio de un espacio normado X. Si* $\dim Y < \infty$, *entonces Y es completo.*

Prueba
Sea $\{y_m\} \subset Y$ de Cauchy.
Sea $\dim Y = n$ asi sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ cualquier base para Y.Así cada y_m tiene una representación única de la forma

$$y_m = \alpha_1^{(m)} e_1 + \cdots + \alpha_n^{(m)} e_n$$

Ya que $\{y_m\}$ es una sucesión de Cauchy $\forall \epsilon > 0 \; \exists N > 0 / \|y_m - y_r\| < \epsilon$ cuando $m, r > N$
Por proposición A.1

$$\epsilon > \|y_m - y_r\| = \|\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}) e_j\| \geq c \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}|$$

donde $m, r > N$.
Dividiendo por $c > 0$

$$|\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}| \leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}| < \frac{\epsilon}{c}$$

Esto muestra, para cada $j = 1, \ldots, n$
$\{\alpha_j^{(m)}\} = \{\alpha_j^{(1)}, \alpha_j^{(2)}, \ldots\}$ es de Cauchy en $\boldsymbol{R}$ o $\boldsymbol{C}$ así esta sucesión converge.
Sea α_j el límite, es decir $\alpha_j^{(m)} \longrightarrow \alpha_j \; j = 1, \ldots, n$
definamos

$$y = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$$

es claro que $y \in Y$

$$\|y_m - y\| = \|\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j) e_j\| \leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j| \|e_j\|$$

como $\alpha_j^{(m)} \longrightarrow \alpha_j$ así $\|y_m - y\| \longrightarrow 0$ esto es $y_m \longrightarrow y$ y como $y \in Y$ esto prueba que Y es completo. ▩

$\boxed{\text{Apend } A_\circ}$ *Cada subespacio Y de dimensión finita de un espacio normado X es cerrado en X.*

Prueba
Por proposición A.3 Y es completo
Por proposición A.2 Y es cerrado. ▩
Para su prueba aplicamos fundamentalmente el teorema de Hahn-Banach,que es un resultado de análisis funcional,que nos dice: sea f una funcional lineal acotada sobre un subespacio Z de un espacio normado X.Entonces existe una funcional lineal acotada $\tilde{f}$ sobre X que es una extensión de f a X y tiene la misma norma.

Apend A_1 *Sea Y un subespacio propio cerrado de un espacio normado X. Sea $x_o \in X - Y$ arbitrario y*

$$\delta = \inf_{\bar{y} \in Y} \|\bar{y} - x_o\|$$

la distancia de x_o a Y, entonces existe un $\tilde{f} \in X'$ tal que $\|\tilde{f}\| = 1$
$\tilde{f}(y) = 0 \; \forall y \in Y$, $\tilde{f}(x_o) = \delta$

Prueba
consideremos el subespacio $Z \subset X$ generado por Y y x_o , definimos sobre Z una funcional lineal acotada f por

$$f(z) = f(y + \alpha x_o) = \alpha\delta \quad y \in Y$$

veamos
Cada $z \in Z = Span(Y \cup \{x_o\})$ tiene una única representación $z = y + \alpha x_o$ $y \in Y$
La linealidad de f es claro.
Ya que Y es cerrado, $\delta > 0$ como también $f \neq 0$.
Ahora
para $\alpha = 0$ se tiene $f(y) = 0 \; \forall y \in Y$
para $\alpha = 1$ y $y = 0$ tenemos $f(x_o) = \delta$.
Probemos que f es acotada
1° $\alpha = 0$, $f(z) = 0$
así f es acotada.
2° $\alpha \neq 0$
es claro que $-(\frac{1}{\alpha})y \in Y$ así tenemos

$$\begin{aligned} |f(z)| = |\alpha|\delta &= |\alpha| \inf_{\bar{y} \in Y} \|\bar{y} - x_o\| \\ &\leq |\alpha| \| - \frac{1}{\alpha} y - x_o\| \\ &= \|y + \alpha x_o\| \end{aligned}$$

esto es

$$|f(z)| \leq \|z\|$$

de aquí f es acotada, es mas $\|f\| \leq 1$.
Probemos que $\|f\| \geq 1$

Por definición de ínfimo , Y contiene una sucesión $\{y_n\}$ tal que $\|y_n - x_o\| \longrightarrow \delta$
Sea $z_n = y_n - x_o$ así $f(z_n) = -\delta$ con $\alpha = -1$
También

$$\|f\| = \sup_{\substack{z\in Z \\ z\neq 0}} \frac{|f(z)|}{\|z\|} \geq \frac{|f(z_n)|}{\|z_n\|} = \frac{\delta}{\|z_n\|} \longrightarrow \frac{\delta}{\delta} = 1 \text{ cuando } n \to \infty$$

De aquí $\|f\| \geq 1$
Por lo tanto $\|f\| = 1$
Por el Teorema de Hahn–Banach, extendemos f a X.
Así existe $\tilde{f} \in X'$ tal que $\|\tilde{f}\| = 1$, $\tilde{f}(y) = 0 \; \forall y \in Y$, $\tilde{f}(x_o) = \delta$ ■

Espacio Compacto

Probamos la proposición A_5 como consecuencia de la proposición A_4,aplicamos al capítulo 2.

Definición A. 1.3 *Un espacio métrico X se dice que es compacto si cada sucesión en X tiene una subsucesión convergente. Un subconjunto M de X es dicho compacto si M es considerado compacto como un subespacio de X, esto es, si cada sucesión en M tiene una subsucesión convergente cuyo límite es un elemento de M.*

Definición A. 1.4 *En un espacio normado de dimension finita X (esto es $\dim X < \infty$), cualquier subconjunto $M \subset X$ es compacto si y sólo si M es cerrado y acotado.*

Proposición A.4(F. Riesz's) *Sean Y y Z subespacios de un espacio normado X (de cualquier dimension) , y supongamos que Y es cerrado y es un subconjunto propio de Z. Entonces para todo número real ξ en el intervalo $\langle 0, 1\rangle$ existe un $z \in Z$ tal que $\|z\| = 1$, $\|z - y\| \geq \xi \; \forall y \in Y$.*

Prueba
$Z - Y \neq \emptyset$ pues Y es subconjunto propio de Z
sea $v \in Z - Y \subset X$

$$a = \inf_{y\in Y} \|v - y\| \text{ (distancia de } v \text{ a } Y)$$

$a > 0$ pues Y es cerrado
sea $\xi \in \langle 0, 1\rangle$
$a > 0$, $0 < \xi < 1$, $1 < \frac{1}{\xi}$, $a < \frac{a}{\xi}$ así $\frac{a}{\xi} - a > 0$
Ahora por definición de ínfimo

$$\text{para } \frac{a}{\xi} - a > 0 \text{ , } \exists y_o \in Y / \|v - y_o\| - a < \frac{a}{\xi} - a$$

así $\|v - y_\circ\| < \frac{a}{\xi}$ es más $\|v - y_\circ\| \neq 0$ pues $0 < a \leq \|v - y_\circ\| < \frac{a}{\xi}$
sea $z = c(v - y_\circ) \in Z$ donde $c = \frac{1}{\|v-y_\circ\|}$

$$\|z\| = |c|\|v - y_\circ\| = \frac{1}{\|v - y_\circ\|}\|v - y_\circ\| = 1$$

veamos que $\|z - y\| \geq \xi \; \forall y \in Y$
sea $y \in Y$

$$\begin{aligned}
\|z - y\| &= \|c(v - y_\circ) - y\| \\
&= \|c[(v - y_\circ) - c^{-1}y]\| \\
&= |c|\|v - y_\circ - c^{-1}y\| \\
&= c\|v - y_\circ - c^{-1}y\| \\
&= c\|v - y_1\|
\end{aligned}$$

donde $y_1 = y_\circ + c^{-1}y \in Y$
Por definición de ínfimo $a \leq \|v - y_1\|$

$$\|z - y\| = c\|v - y_1\| \geq ca = \frac{a}{\|v - y_\circ\|} \geq \frac{a}{\frac{a}{\xi}} = \xi$$

Por lo tanto $\|z - y\| \geq \xi \;\; \forall y \in Y$. ■

Proposición A.5 *Si en un espacio normado X se tiene la propiedad de que $M = \{x \in X / \|x\| \leq 1\}$ es compacto.Entonces X es de dimensión finita.*

Prueba
Veamos por contradicción
asumimos que M es compacto pero $\dim X = \infty$
Sea $x_1 \in X / \|x_1\| = 1$, $X_1 = \langle x_1 \rangle$ (X_1 es subespacio de X generado por x_1)
$\dim\langle x_1 \rangle < \infty$
X_1 es subespacio propio de X ya que $\dim X = \infty$.Por Apend $A_\circ$ X_1 es cerrado y por proposición A.4

$$\exists x_2 \in X / \|x_2\| = 1 \; , \; \|x_2 - x_1\| \geq \xi = \frac{1}{2}$$

Sea $X_2 = \langle x_1, x_2 \rangle$ (X_2 es subespacio de X generado por x_1 , x_2)
$\dim X_2 < \infty$
X_2 es subespacio propio de X pues $\dim X = \infty$
Por Apend $A_\circ$ X_2 es cerrado y por proposición A.4

$$\exists x_3 \in X / \|x_3\| = 1 \; , \; \|x_3 - x\| \geq \frac{1}{2} \; \forall x \in X_2$$

En particular

$$\|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$$
$$\|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2}$$

Ya que x_1 , $x_2 \in X_2$.
Procediendo por inducción , se obtiene una sucesión $\{x_n\}$ de elementos $x_n \in M$ tal que

$$\|x_m - x_n\| \geq \frac{1}{2} \ (m \neq n)$$

obiamente, $\{x_n\}$ no puede tener una subsucesión convergente lo que es contradictorio pues M es compacto. ∎

Operador Compacto

Esta sección esta orientada para ser aplicado al capítulo 5 y capítulo 1.
Hacemos un estudio detallado de operadores compactos,con relación: a su adjunto,a la formación de espacios nulos y con sucesiones ortonormales.

Definición C. 1.1 *Sea X y Y espacios normados.Un operador $T : X \longrightarrow Y$ es llamado operador lineal compacto ,si T es lineal y si para cada subconjunto acotado M de X ,$\{Tx/x \in M\}$ es relativamente compacto, esto es, $\overline{\{Tx/x \in M\}}$ es compacto.*

Proposición C. 1.1 *Sea X, Y espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal.*
T es compacto si y solamente si para cada $\{x_n\} \subset X$ acotada,$\{Tx_n\}$ tiene una subsucesión convergente en Y.

Prueba
Probamos:
a)Si T es compacto,entonces para cada $\{x_n\} \subset X$ acotada,$\{Tx_n\}$ tiene una subsucesión convergente en Y
b)Si para cada $\{x_n\} \subset X$ acotada,$\{Tx_n\}$ tiene una subsucesión convergente en Y,entonces T es compacto.
Prueba(a)
Aplicando definición C.1.1,la clausura de $\{Tx_n\}$ en Y es compacto y por definición A.1.3, $\{Tx_n\}$ contiene una subsucesión convergente.
Prueba(b)
Sea M un subconjunto acotado de X, y sea $\{y_n\}$ una sucesión cualesquiera en $\{Tx/x \in M\}$,así $\exists x_n \in M / y_n = Tx_n$.
$\{x_n\}$ es acotada pues M es acotada ,así pues $\{Tx_n\}$ contiene una subsucesión convergente.De aquí,por definición C.1.1,$\overline{\{Tx/x \in M\}}$ es compacto,esto porque $\{y_n\}$ es cualesquiera en $\{Tx/x \in M\}$.
Por lo tanto T es compacto. ∎

Definición A. 1.5 *Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal acotado, donde X y Y son espacios normados.Entonces el operador adjunto de T es*

$$T^{\times} : Y' \longrightarrow X'$$

definido por

$$(T^{\times}g)(x) = g(Tx) \quad (g \in Y')$$

donde X' , Y' son los espacios duales de X y Y respectivamente.

Proposición A.6 *Sean X, Y espacios normados. Si $T : X \longrightarrow Y$ es un operador lineal compacto, entonces $T^{\times} : Y' \longrightarrow X'$ es un operador lineal compacto.*

La prueba (ver [i] sección 2.E.9)

Proposición A.7 *Sean X , Y espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal. Entonces:*

a) *Si T es acotado y* $\dim Ran(T) < \infty$, *entonces T es compacto.*

b) *Si* $\dim X < \infty$, *entonces T es compacto.*

Prueba(a)
Sea $\{x_n\} \subset X$ acotada
Así $\exists K / \|x_n\| \leq K \ \ \forall n$

$$\|Tx_n\| \leq \|T\|\|x_n\| \leq \|T\|K \ \ \forall n$$

es decir $\{Tx_n\}$ es acotada, ya que $\dim Ran(T) < \infty$ por Apend A_o $\{Tx_n\}$ es cerrado
Ahora $\dim Ran(T) < \infty$, $\{Tx_n\}$ acotada y cerrada implica por definición A.1.4, $\{Tx_n\}$ es compacto así por definición de conjunto compacto definición A.1.3, $\{Tx_n\}$ tiene una subsucesión convergente.
Por lo tanto T es compacto ∎
Prueba(b)
Como $\dim X < \infty$ así T es acotada ya que $\dim Ran(T) \leq \dim X < \infty$, aplicando *Prueba*(a) tenemos que T es compacto. ∎

$\boxed{\textbf{Apend } A_2}$ *Sea $T : X \longrightarrow X$ un operador lineal compacto sobre un espacio normado X.Entonces para cada $\lambda \neq 0$, $Ran(T_\lambda)$ es cerrado.*

La prueba (ver [viii] página 279).
Para la siguiente prueba aplicamos el lema 1.5 del capítulo 1.

$\boxed{\textbf{Apend } A_3}$ *Sea $T : X \longrightarrow X$ un operador lineal compacto sobre un espacio normado X, λ eigenvalor de T ($\lambda \neq 0$) , $T_\lambda = T - \lambda I$*

$$\{0\} = N(T_\lambda^0) \subset N(T_\lambda) \subset N(T_\lambda^2) \subset \cdots$$

$$\dim N(T_\lambda^n) < \infty \quad n = 1, 2, \ldots$$

Prueba
1° $\{0\} \subset N(T_\lambda)$
veamos

$$x \in \{0\} \Rightarrow x = 0 \ , \ T_\lambda x = T_\lambda 0 = 0 \Rightarrow x \in N(T_\lambda)$$

2° $N(T_\lambda^n) \subset N(T_\lambda^{n+1}) \ \forall n \in N$
Veamos
Sea $n \in N$
$x \in N(T_\lambda^n)$
así

$$T_\lambda^n x = 0 \ , \ T_\lambda^{n+1} x = T_\lambda^n T_\lambda x = T_\lambda T_\lambda^n x = T_\lambda 0 = 0$$

Por lo tanto $x \in N(T_\lambda^{n+1})$
De 1° y 2° $\{0\} = N(T_\lambda^0) \subset N(T_\lambda) \subset N(T_\lambda^2) \subset \cdots$ Ahora veamos que $\dim N(T_\lambda^n) < \infty \quad n = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} T_\lambda^n = (T - \lambda I)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T^k (-\lambda)^{n-k} \\ &= (-\lambda)^n I + T \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} T^{k-1} (-\lambda)^{n-k} \end{aligned}$$

Sea $S = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} T^{k-1}(-\lambda)^{n-k}$ y $\mu = -(-\lambda)^n$
Sea $W = TS$, así podemos escribir $T_\lambda^n = W - \mu I$
Ahora S es acotada ya que T es acotada pues T es compacto
Así
T compacto , S acotado implica que TS es compacto.Por lo tanto W es compacto
$\mu \neq 0$,μ es un eigenvalor de W
veamos Ya que λ es eigenvalor de T, $\exists x \neq 0 / T_\lambda x = 0$.
Ahora sea $W_\mu = W - \mu I$

$$W_\mu(x) = T_\lambda^n(x) = T_\lambda^{n-1}(T_\lambda x) = T_\lambda^{n-1}(0) = 0$$

Así pues $\exists x \neq 0 / W_\mu x = 0$.
Como W es compacto y μ es un eigenvalor así $\dim N(W_\mu) < \infty$
Por lo tanto $\dim N(T_\lambda^n) < \infty$,esto es por lema 1.5 ▩
En lo que sigue vemos una relación de espacios nulos para un operador compacto,donde hay un momento en que los espacios nulos comienzan hacer todos iguales.
Aplicamos la proposición A.4,Apend A_0,Apend A_3.

Apend A_4 *Sea $T : X \longrightarrow X$ un operador lineal compacto sobre un espacio normado X , y sea $\lambda \neq 0$. Entonces existe $r = \min\{n \in N \cup \{o\} / N(T_\lambda^n) = N(T_\lambda^{n+1})\}$*

(r depende de λ) tal que

$$N(T_\lambda^r) = N(T_\lambda^{r+1}) = N(T_\lambda^{r+2}) = \cdots$$

y si $r > 0$, las inclusiones

$$N(T_\lambda^0) \subset N(T_\lambda) \subset \cdots \subset N(T_\lambda^r)$$

son todas propias.

Prueba
Sea $N_n = N(T_\lambda^n)$ por simplicidad
Sabemos por Apend A_3 que $N_m \subset N_{m+1}$. Demostramos por contradicción.
Supongamos que $N_m = N_{m+1}$ para ningún m.
Entonces N_n es un subespacio propio de N_{n+1} $\forall n$.
Ya que estos espacios $N(T_\lambda^n)$ son cerrados pues $\dim N(T_\lambda^n) < \infty$ (ver Apend A_o y Apend A_3), $N(T_\lambda^n) \subset X$ es subespacio.
Por Proposición de F. Riesz's, esto implica la existencia de una sucesión $\{y_n\}$ tal que

$$y_n \in N_n \;,\; \|y_n\| = 1 \;,\; \|y_n - x\| \geq \frac{1}{2} \;\forall x \in N_{n-1}$$

Probemos que

$$\|Ty_n - Ty_m\| \geq \frac{1}{2}|\lambda| \;\; (m < n)$$

veamos
$T_\lambda = T - \lambda I$ así $T = T_\lambda + \lambda I$ y es más $Ty_n - Ty_m = \lambda y_n - \widehat{x}$ donde

$$\widehat{x} = T_\lambda y_m + \lambda y_m - T_\lambda y_n$$

Sea $m < n$. Probamos que $\widehat{x} \in N_{n-1}$ ya que $m \leq n-1$
Claramente tenemos $\lambda y_m \in N_m \subset N_{n-1}$ también $y_m \in N_m$ implica

$$0 = T_\lambda^m y_m = T_\lambda^{m-1}(T_\lambda y_m)$$

Esto es

$$T_\lambda y_m \in N_{m-1} \subset N_{n-1}$$

Similarmente, $y_n \in N_n$ implica $T_\lambda y_n \in N_{n-1}$.Por lo tanto $\widehat{x} \in N_{n-1}$ Ahora
$x = \lambda^{-1}\widehat{x} \in N_{n-1}$ así

$$\|\lambda y_n - \widehat{x}\| = |\lambda|\|y_n - x\| \geq \frac{1}{2}|\lambda| \;,\; |\lambda| > 0$$

Por lo tanto $\|Ty_n - Ty_m\| \geq \frac{1}{2}|\lambda|$ y esto es una contradicción ya que $\{y_n\}$ es acotada, como T compacto , $\{Ty_n\}$ tiene una subsucesión convergente.
Así pues $\exists m / N_m = N_{m+1}$

Ahora probemos que $N_m = N_{m+1}$ implica $N_n = N_{n+1}$ $\forall n > m$
Veamos por contradicción nuevamente entonces N_n es un subespacio propio de N_{n+1} para algún $n > m$
Consideremos $x \in N_{n+1} - N_n$ así $T_\lambda^{n+1}x = 0$ pero $T_\lambda^n x \neq 0$.
Ya que $n > m$, tenemos $n - m > 0$
Sea $z = T_\lambda^{n-m}x$
Entonces
$T_\lambda^{m+1}z = T_\lambda^{n+1}x = 0$ pero $T_\lambda^m z = T_\lambda^n x \neq 0$
Ya que $z \in N_{m+1}$ pero $z \notin N_m$, se tiene N_m es un subespacio propio de N_{m+1} y esto es una contradicción al hecho de que $N_m = N_{m+1}$
Por lo tanto sea r el más pequeño n tal que $N_n = N_{n+1}$.
Consecuentemente, si $r > 0$, las inclusiones son propias para $N_k \subset N_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, r-1$. ∎
Lo que veremos son convergencias en relación a operadores compactos y sucesiones ortonormales en un espacio de Hilbert.

Definición A. 1.6 *Sea H un espacio de Hilbert*
Una sucesión $\{f_n\} \subset H$ converge débilmente a f si $\forall g \in H$

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n, g\rangle = \langle f, g\rangle$$

Definición A. 1.7 *Una sucesión $\{f_n\} \subset H$ converge fuertemente a f si*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0 \text{ es decir } \lim_{n\to\infty} f_n = f$$

De aquí en adelante, damos proposiciones con el objetivo de probar Apend A_5.

Proposición B.1 *Si un operador lineal acotado A sobre H es compacto entonces*

Si $\{f_n\}$ converge débilmente , entonces $\{Af_n\}$ converge fuertemente

Proposición A.8

1. *Si la sucesión $\{f_n\}$ converge fuertemente a f, entonces $\{f_n\}$ converge débilmente a f.*
2. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión que converge débilmente.*
   Existe un único f tal que $\{f_n\}$ converge débilmente a f.
3. *Sea A un operador lineal acotado sobre H.*
   Si $\{f_n\}$ converge débilmente a f , entonces $\{Af_n\}$ converge débilmente a Af.

Aplicamos para probar lo siguiente: la proposición B.1 y proposición A.8.

Proposición A.9 *Sea A un operador lineal compacto sobre H.*
Si $\{f_n\}$ converge débilmente a f, entonces $\{Af_n\}$ converge fuertemente a Af.

Prueba
Por proposición B.1 existe un g tal que

$$\lim_{n\to\infty} Af_n = g$$

Por proposición A.8.1 $\{Af_n\}$ converge débilmente a g
Por proposición A.8.3 $\{Af_n\}$ converge débilmente a Af
De estos dos últimos hechos, aplicando proposición A.8.2 $Af = g$.
Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} Af_n = Af \blacksquare$$

Proposición A.10 *Si $\{e_n\}$ es una sucesión ortonormal en H, entonces $\{e_n\}$ converge débilmente a* 0.

Prueba
Sea $g \in H$, por la desigualdad de Bessel's

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, g\rangle|^2 \leq \|g\|^2$$

Así pues

$$|\langle e_n, g\rangle|^2 \longrightarrow 0$$

De aquí

$$\langle e_n, g\rangle \longrightarrow 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \langle e_n, g\rangle = 0 = \langle 0, g\rangle$$

Así por definición A.1.6, $\{e_n\}$ converge débilmente a 0 $\blacksquare$

Proposición A.11 *Sea $\{e_n\}$ una sucesión ortonormal en H, A operador lineal compacto sobre H.Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} Ae_n = 0$$

Prueba
Por proposición A.9 y proposición A.10

$$\lim_{n\to\infty} Ae_n = A0 = 0 \blacksquare$$

$\boxed{\textbf{Apend } A_5}$ *Si $\{e_n\}$ es una sucesión ortonormal y si A es un operador lineal compacto sobre H.Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \langle Ae_n, e_n\rangle = 0$$

Prueba
Por la desigualdad de Cauchy's

$$|\langle Ae_n, e_n\rangle| \leq \|Ae_n\| \, \|e_n\| = \|Ae_n\|$$

Así

$$\lim_{n\to\infty} |\langle Ae_n, e_n\rangle| \leq \lim_{n\to\infty} \|Ae_n\| = 0$$

De aquí

$$\lim_{n\to\infty} \langle Ae_n, e_n\rangle = 0 \blacksquare$$

Proyecciones ortogonales

Esta sección es aplicada al capítulo 5.Aquí vemos propiedades sobre proyecciones que proyectan el espacio de Hilbert H sobre subespacios de este y propiedades en relación a un operador lineal acotado auto-adjunto A sobre H asociado a su familia espectral .

Definición A. 1.8 *Sea H un espacio de Hilbert.*
Un operador lineal $P : H \longrightarrow H$ es una proyección sobre H si existe un subespacio cerrado Y de H tal que $Y = RanP = \{Pg/g \in H\}$ y $Y^\perp = N(P) = \{g \in H/Pg = 0\}$ y $P|_Y$ es el operador identidad sobre Y

Observación A. 1.1 $H = Y \bigoplus Y^\perp$
P es llamado proyección que proyecta H sobre Y

Nota A. 1.1 *Si P es la proyección que proyecta H sobre $\mathcal{M}$, entonces*

$$\mathcal{M} = \{f \in H/Pf = f\} = \{f \in H/\|Pf\| = \|f\|\} = \{Pg/g \in H\}$$

Es más si $P^\perp$ es la proyección que proyecta H sobre $\mathcal{M}^\perp$, entonces $P^\perp = I - P$

Proposición B.2 *Un operador lineal acotado $P : H \longrightarrow H$ sobre un espacio de Hilbert H es una proyección si y sólo si P es auto-adjunto y $P^2 = P$ ($P^2 = P \circ P$)*
La prueba (ver [iii] página 153)

Apliquemos este resultado a lo que sigue:

Proposición A.12 *Sean P y Q proyecciones que proyectan H sobre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ respectivamente.*

$$PQ = QP \text{ si y sólo si } PQ \text{ es proyección}$$

Prueba
Probamos:
a)Si $PQ = QP$,entonces PQ es proyección
b)Si PQ es proyección,entonces $PQ = QP$

Prueba(a)

$$\begin{aligned} (PQ)^* &= Q^*P^* = QP = PQ \\ (PQ)^2 &= PQPQ = PPQQ = PQ \end{aligned}$$

Por lo tanto por proposición B.2 PQ es proyección
Prueba(b)

$$QP = Q^*P^* = (PQ)^* = PQ \blacksquare$$

Como aplicación de lo anterior se tiene:

Proposición A.13 *Sean P y Q proyecciones que proyectan H sobre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ respectivamente. Si PQ es proyección, entonces PQ es proyección que proyecta H sobre $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$*

Prueba
Probamos $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = Ran(PQ)$
veamos
Ya que PQ es proyección entonces $PQ = QP$ así tenemos

$$\begin{aligned} 1^\circ \qquad & Ran(PQ) \subset Ran(P) \subset \mathcal{M} \\ & Ran(PQ) = Ran(QP) \subset Ran(Q) \subset \mathcal{N} \end{aligned}$$

Así pues

$$Ran(PQ) \subset \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$$

$$2^\circ \qquad \text{Sea } f \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$$

$$f = Qf = PQf$$

Así

$$f \in Ran(PQ)$$

Por lo tanto

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \subset Ran(PQ)$$

De 1° y 2° $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = Ran(PQ)$ $\blacksquare$

Definición A. 1.9 *Dos subespacios Y y Z de H son mutuamente ortogonales (denotamos $Y \perp Z$) si $\langle f, g \rangle = 0 \ \forall f \in Y$ y $\forall g \in Z$*

Aplicamos la proposición B.2 para probar la siguiente proposición.

Proposición A.14 *Sean P y Q proyecciones que proyectan H sobre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ respectivamente.*

$$
\begin{array}{ll}
a) & \mathcal{M} \subset \mathcal{N} \\
b) & QP = P \\
c) & PQ = P \\
d) & Q - P \textit{ es proyección} \\
e) & \langle (Q-P)f, f\rangle \geq 0 \ \forall f \in H \\
f) & \|Pf\| \leq \|Qf\| \ \forall f \in H
\end{array}
$$

Son equivalentes

Prueba
$a \Rightarrow b)$ Ya que $Pf \in \mathcal{M} \subset \mathcal{N}$, $QPf = Pf \ \forall f \in H$
$b \Rightarrow c)$ $PQ = P^*Q^* = (QP)^* = P^* = P$
$c \Rightarrow d)$

$$
\begin{aligned}
(Q-P)^* &= Q^* - P^* = Q - P \\
(Q-P)^2 &= Q^2 - QP - PQ + P^2 = Q - (PQ)^* - P + P = Q - P
\end{aligned}
$$

Ahora aplicando proposición B.2, $Q - P$ es proyección.
$d \Rightarrow e)$

$$\langle (Q-P)f, f\rangle = \langle (Q-P)f, (Q-P)f\rangle = \|(Q-P)f\|^2 \geq 0$$

$e \Rightarrow f)$

$$\|Qf\|^2 - \|Pf\|^2 = \langle Qf, f\rangle - \langle Pf, f\rangle = \langle (Q-P)f, f\rangle \geq 0$$

$f \Rightarrow a)$
Sea $f \in \mathcal{M}$ así

$$\|f\| = \|Pf\| \leq \|Qf\| \leq \|f\|$$

De aquí

$$\|Qf\| = \|f\|$$

Así

$$f \in \mathcal{N} \ \blacksquare$$

Nota A. 1.2 $P \leq Q$ *se define* $\|Pf\| \leq \|Qf\| \ \forall f \in H$.

La siguiente proposición será fundamental en el capítulo 5 aplicado al teorema 5.1. La demostración resulta como aplicación de la proposición A.13, proposición A.14.

Proposición A.15 *Sean P y Q proyecciones que proyectan H sobre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ respectivamente.*
Q-P es una proyección que proyecta H sobre $\mathcal{N} \cap \mathcal{M}^{\perp}$

Prueba

$$Q - P = Q(I - P) = QP^{\perp} \text{ es proyección}$$

Por proposición A.13 $QP^{\perp}$ es proyección que proyecta H sobre $\mathcal{N} \cap \mathcal{M}^{\perp}$ ▣
Si P yQ son proyecciones que proyectan H sobre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ respectivamente, diremos que las proyecciónes son ortogonales si $PQ = 0$.
Para la prueba ,de lo que sigue aplicamos la proposición B.2.

Proposición A.16 *Sea P y Q proyecciones que proyectan H sobre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ respectivamente*

$$\begin{array}{ll} a) & \mathcal{M} \perp \mathcal{N} \\ b) & \{Pg/g \in \mathcal{N}\} = \{0\} \\ c) & PQ = 0 \\ d) & P + Q \textit{ es proyección} \end{array}$$

Son equivalentes

Prueba
$a \Rightarrow b)$ Ya que $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}^{\perp}$, es claro $\{Pg/g \in \mathcal{N}\} = \{0\}$
$b \Rightarrow c)$ Ya que $Qf \in \mathcal{N}$, se tiene $PQf = 0 \ \forall f \in H$
$c \Rightarrow d)$ Ya que $QP = (PQ)^* = 0$ se tiene

$$\begin{aligned} (P+Q)^2 &= P^2 + PQ + QP + Q^2 = P + Q \\ (P+Q)^* &= P^* + Q^* = P + Q \end{aligned}$$

Así por proposición B.2, $P + Q$ es proyección.
$d \Rightarrow a)$ Sea $f \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned} \|f\|^2 \geq \|(P+Q)f\|^2 &= \langle (P+Q)f, (P+Q)f \rangle \\ &= \langle (P+Q)f, f \rangle \\ &= \langle Pf, f \rangle + \langle Qf, f \rangle \\ &= \|f\|^2 + \|Qf\|^2 \end{aligned}$$

Así $Qf = 0$
Sea $g \in \mathcal{N}$

$$\langle f, g \rangle = \langle f, Qg \rangle = \langle Qf, g \rangle = \langle 0, g \rangle = 0 \ ▣$$

$\boxed{\textbf{Apend } A_6}$ *Sea A un operador lineal en H y sea P la proyección sobre un subespacio M.El subespacio M reduce A si y sólo si PA=AP.*

La prueba (ver [vi] página 50).
Para terminar esta sección ,nos centramos en probar *Apend* A_8 que nos dice:

$$\|\varphi(A)f\|^2 = \int_{\alpha_1-o}^{\alpha_2} |\varphi(\lambda)|^2 d\|E_\lambda f\|^2 \quad \forall f \in H$$

donde A es un operador lineal acotado auto-adjunto sobre un espacio de Hilbert H,asociado a la familia espectral $\{E_\lambda/\lambda \in R\}$.

$\boxed{\textbf{Apend } A_7}$ *Sea A un operador lineal acotado auto-adjunto sobre H y sea $\alpha_1 = \min\sigma(A)$, $\alpha_2 = \max\sigma(A)$.Entonces existe una familia de proyecciones $\{E_\lambda/\lambda \in R\}$, llamada la familia espectral de A, con las siguientes propiedades:*

$$\begin{array}{ll} a) & E_\lambda \leq E_{\lambda'} \ \textit{para}\ \lambda < \lambda' \\ b) & E_{\alpha_1-o} = 0 \\ & E_{\alpha_2} = I \\ c) & E_{\lambda+o} = E_\lambda \ \ \forall\lambda \in R \\ d) & A = \displaystyle\int_{\alpha_1-o}^{\alpha_2} \lambda \, dE_\lambda \end{array}$$

Observación A. 1.2 *Más generalmente, si φ es un polinomio en λ con coeficientes reales*

$$\varphi(\lambda) = \alpha_n\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_o$$

entonces el operador $\varphi(A)$ definido por

$$\varphi(A) = \alpha_n A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \cdots + \alpha_o I$$

tiene la representación espectral

$$\varphi(A) = \int_{\alpha_1-o}^{\alpha_2} \varphi(\lambda)\, dE_\lambda$$

Es decir
$\forall\epsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ *tal que*

$$\|\varphi(A) - \sum_{k=1}^{n} \varphi(\lambda_k')[E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}}]\| \leq \epsilon$$

Donde

$$\begin{array}{l} \lambda_o < \alpha_1 = \lambda_1 < \cdots < \lambda_{n-1} < \lambda_n = \alpha_2 \\ \lambda_k - \lambda_{k-1} \leq \delta \ \textit{para}\ 1 \leq k \leq n \\ \lambda_k' \in [\lambda_{k-1}, \lambda_k] \ \textit{para}\ 1 \leq k \leq n \end{array}$$

(Ver [viii] página 345)

Proposición A.17 *Sea A y $\{E_\lambda/\lambda \in R\}$ como en Apend A_7.Entonces*

$$\varphi(A)f = \int_{\alpha_1 - o}^{\alpha_2} \varphi(\lambda) dE_\lambda f \ \ \forall f \in H$$

$$\langle \varphi(A)f, g\rangle = \int_{\alpha_1 - o}^{\alpha_2} \varphi(\lambda) d\langle E_\lambda f, g\rangle \ \ \forall f \in H \ y \forall g \in H$$

Es decir, para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\|\varphi(A)f - \sum_{k=1}^{n} \varphi(\lambda_k')[E_{\lambda_k} f - E_{\lambda_{k-1}} f]\| \leq \epsilon\|f\| \ \forall f \in H$$

$$|\langle\varphi(A)f, g\rangle - \sum_{k=1}^{n} \varphi(\lambda_k')[\langle E_{\lambda_k} f, g\rangle - \langle E_{\lambda_{k-1}} f, g\rangle]| \leq \epsilon\|f\|\|g\| \ \forall f \in H \ y \forall g \in H$$

Prueba
Es claro

$$\varphi(A)f = \int_{\alpha_1 - o}^{\alpha_2} \varphi(\lambda) dE_\lambda f \ \ \forall f \in H$$

Veamos el otro

$$|\langle\varphi(A)f, g\rangle - \sum_{k=1}^{n} \varphi(\lambda_k')[\langle E_{\lambda_k} f, g\rangle - \langle E_{\lambda_{k-1}} f, g\rangle]| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left|\langle\varphi(A)f - \sum_{k=1}^{n} \varphi(\lambda_k')[E_{\lambda_k} f - E_{\lambda_{k-1}} f], g\rangle\right| \\
&\leq \|\varphi(A)f - \sum_{k=1}^{n} \varphi(\lambda_k')[E_{\lambda_k} f - E_{\lambda_{k-1}} f]\|\|g\| \\
&\leq \epsilon\|f\|\|g\| \ \blacksquare
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{Apend } A_8}$ *Sea A y $\{E_\lambda/\lambda \in R\}$ como en Apend A_7.Entonces*

$$\|\varphi(A)f\|^2 = \int_{\alpha_1 - o}^{\alpha_2} |\varphi(\lambda)|^2 d\|E_\lambda f\|^2 \ \ \forall f \in H$$

Es decir, para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\left|\|\varphi(A)f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\varphi(\lambda_k')|^2[\|E_{\lambda_k} f\|^2 - \|E_{\lambda_{k-1}} f\|^2]\right| \| \leq \epsilon\|f\|^2 \ \forall f \in H$$

Prueba
Por Proposición A.17

$$\begin{aligned} [\varphi(A)]^*\varphi(A)f &= \int_{\alpha_1-o}^{\alpha_2} \overline{\varphi}(\lambda)\varphi(\lambda)\, dE_\lambda f \\ &= \int_{\alpha_1-o}^{\alpha_2} |\varphi(\lambda)|^2\, dE_\lambda f \end{aligned}$$

También por proposición A.17

$$\langle [\varphi(A)]^*\varphi(A)f, f\rangle = \int_{\alpha_1-o}^{\alpha_2} |\varphi(\lambda)|^2\, d\langle E_\lambda f, f\rangle$$

Así

$$\langle [\varphi(A)]^*\varphi(A)f, f\rangle = \int_{\alpha_1-o}^{\alpha_2} |\varphi(\lambda)|^2\, d\|E_\lambda f\|^2$$

$$\langle \varphi(A)f, \varphi(A)f\rangle = \int_{\alpha_1-o}^{\alpha_2} |\varphi(\lambda)|^2\, d\|E_\lambda f\|^2$$

$$\|\varphi(A)f\|^2 = \int_{\alpha_1-o}^{\alpha_2} |\varphi(\lambda)|^2\, d\|E_\lambda f\|^2 \blacksquare$$

Subespacio $\sum \mathcal{M}_k$

Finalmente,probamos que $\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}_i$ donde $\mathcal{M}_i$ son mutuamente ortogonales ,es un subespacio de H,para ello usamos ,la siguiente proposición.

Proposición A.18 *Sea $\{g_k\}$ una familia ortogonal de vectores de un espacio de Hilbert H.*

1. *Si $\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|^2$ converge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ converge*
2. *Si $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ converge al vector f, entonces $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|^2$*

Prueba(1)
Sea $\epsilon > 0$
Sea

$$V_q = \sum_{k=1}^{q} \|g_k\|^2 \text{ y sea } S_p = \sum_{k=1}^{p} g_k$$

Ya que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|^2 < \infty$$

entonces $\{V_q\}$ es de Cauchy en R .
Así

$$\begin{aligned} \text{para } \epsilon^2 > 0\ ,\ \exists N/m > n > N \Rightarrow \epsilon^2 > |V_m - V_n| &= \sum_{k=n+1}^{m} \|g_k\|^2 \\ &= \|\sum_{k=n+1}^{m} g_k\|^2 \\ &= \|S_m - S_n\|^2 \end{aligned}$$

Así pues $\|S_m - S_n\| < \epsilon$ y por lo tanto $\{S_p\}$ es de Cauchy en H y de aqui

$$\exists f \in H/ \lim_{p\to\infty} S_p = f$$

Es decir

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k \text{ converge}$$

Prueba(2)

$$\begin{aligned} \|f\|^2 = \langle f, f\rangle &= \langle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} g_k, \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} g_k\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle \sum_{k=1}^{n} g_k, \sum_{k=1}^{n} g_k\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle g_k, g_k\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|^2 \ \blacksquare \end{aligned}$$

Definición A. 1.10 *Si $\{\mathcal{M}_k\}$ es una sucesioń de subespacios de un espacio de Hilbert H, definimos*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k = \left\{ f/\ f \in H\ ,\ f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k\ ,\ f_k \in \mathcal{M}_k \text{ para } 1 \le k < \infty \right\}$$

Proposición A.19 *Si $\{\mathcal{M}_k\}$ es una sucesión de subespacios mutuamente ortogonales de H, entonces*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k \text{ es un subespacio de } H$$

Peueba
Sea λ , $\beta \in C$ y f , $g \in \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k$ es claro que $\lambda f + \beta g \in \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k$ pues $\mathcal{M}_k$ son subespacios.
Veamos que $\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k$ es cerrado.
Sea

$$f \in \overline{\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k} \text{ y sea } \epsilon > 0$$

Así

$$\exists \{f_n\} \subset \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k / f = \lim_{n\to\infty} f_n$$

$$\text{donde } f_n = \sum_{k=1}^{\infty} g_{n,k} \quad , \; g_{n,k} \in \mathcal{M}_k \text{ para todo } n \geq 1$$

Así pues

$$\text{para } \frac{\epsilon}{2} > 0 \text{ , } \exists N / n, m > N \Rightarrow \|f_m - f_n\| < \frac{\epsilon}{2}$$

Ahora

$$f_m - f_n = \sum_{k=1}^{\infty} (g_{m,k} - g_{n,k})$$

$\{g_{m,k} - g_{n,k}\}$ es una familia ortogonal de vectores,así por la proposición A.18.2

$$\|f_m - f_n\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|g_{m,k} - g_{n,k}\|^2$$

Ahora

$$\|g_{m,i} - g_{n,i}\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|g_{m,k} - g_{n,k}\|^2 \text{ para todo } i \geq 1$$

De aquí

$$\|g_{m,i} - g_{n,i}\|^2 \leq \|f_m - f_n\|^2 < \frac{\epsilon^2}{4} \text{ para todo } i \geq 1$$

Por lo tanto $\{g_{r,i}\}_{r \in N}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{M}_i$.
Ya que $\mathcal{M}_i$ son suespacios de H, existen los límites

$$g_i = \lim_{r\to\infty} g_{r,i} \; \in \mathcal{M}_i \text{ para todo } i \geq 1 \qquad [1]$$

Para $n, m > N$

$$\sum_{i=1}^{l} \|g_{m,i} - g_{n,i}\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|g_{m,k} - g_{n,k}\|^2 = \|f_m - f_n\|^2 < \frac{\epsilon^2}{4}$$

Así
$$\sum_{i=1}^{l} \|g_{m,i} - g_{n,i}\|^2 < \frac{\epsilon^2}{4} \text{ para } n, m > N$$
Aplicando [1] tenemos
$$\sum_{i=1}^{l} \|g_i - g_{n,i}\|^2 \leq \frac{\epsilon^2}{4}$$
Así pues
$$\sum_{i=1}^{\infty} \|g_i - g_{n,i}\|^2 \leq \frac{\epsilon^2}{4} \text{ para } n > N \qquad [2]$$
Ya que $\{g_i - g_{n,i}\}$ es una familia ortogonal de vectores
$$\sum_{i=1}^{\infty} \|g_i - g_{n,i}\|^2 < \infty \text{ por [2]}$$
Se tiene por proposición A.18.1
$$\sum_{i=1}^{\infty} (g_i - g_{n,i}) \text{ converge}$$
y ya que
$$f_n = \sum_{i=1}^{\infty} g_{n,i} \ , \ g_{n,i} \in \mathcal{M}_i$$
Obtenemos
$$\sum_{i=1}^{\infty} g_i = \sum_{i=1}^{\infty} (g_i - g_{n,i}) + \sum_{i=1}^{\infty} g_{n,i}$$
Ahora
$$\begin{aligned} \|f_n - \sum_{i=1}^{\infty} g_i\|^2 &= \|\sum_{i=1}^{\infty} (g_i - g_{n,i})\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \|g_i - g_{n,i}\|^2 \\ &\leq \frac{\epsilon^2}{4} \end{aligned}$$
así pues $\|f_n - \sum_{i=1}^{\infty} g_i\| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$ Por lo tanto
$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N / n > N \Rightarrow \|f_n - \sum_{i=1}^{\infty} g_i\| < \epsilon$$

es decir

$$f = \lim_{n \to \infty} f_n = \sum_{i=1}^{\infty} g_i$$

Ya que $g_i \in \mathcal{M}_i$,entonces

$$f \in \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}_i$$

Así pues

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}_i \text{ es cerrado } \blacksquare$$

SIMBOLOS

- $\boxed{\inf}$ Infimo.
- $\boxed{\sup}$ Supremo.
- $\boxed{C[a,b]}$ Espacio de funciones continuas sobre $[a,b]$.
- $\boxed{L_2[a,b]}$ Según Lebesgue.
- $\boxed{\rho(T)}$ Conjunto resolvente de T.
- $\boxed{\sigma(T)}$ Espectro de T.
- $\boxed{X'}$ Espacio Dual de X.
- $\boxed{T^{\times}}$ operador adjunto de T sobre un Espacio Dual.
- $\boxed{T^{*}}$ Operador adjunto de T sobre un espacio de Hilbert H.
- $\boxed{Ran(T) = \{Tx/x \in X\}}$ Rango de T sobre un espacio normado X.
- $\boxed{N(T) = \{x \in X/Tx = 0\}}$ Espacio nulo de T sobre un espacio normado X.
- $\boxed{L(H)}$ Espacio de funciones lineales y acotadas sobre H.
- $\boxed{\|T\|_A}$ Norma de un operador de Hilbert-Schmidt T.
- $\boxed{HS}$ La clase de todos los operadores de Hilbert-Schmidt sobre H.
- $\boxed{R_\lambda}$ la inversa de $T - \lambda I$.
- $\boxed{\mathcal{M}^\perp}$ Complemento ortogonal de $\mathcal{M}$.
- $\boxed{P^\perp}$ proyección sobre $\mathcal{M}^\perp$.
- $\boxed{Span\ M}$ Conjunto de combinaciones lineales de vectores de M.
- $\boxed{\dim X}$ Dimensión de un espacio X.

BIBLIOGRAFIA

[i] Roberto Cignoli y Mischa Coilar, *Nociones de Espacios Normados y sus Aplicaciones al Análisis, Tomo II*, Editorial Universitaria de Buenos Aires

[ii] A.N. Kolmogorov y S.V. Fomin, *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*, 1978.

[iii] L.A. Liusternik and V.J. Sobolev, *Elements of Functional Analysis*, 1961.

[iv] Michael Reed y Barry Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, 1972.

[v] Neumann, John Von,*Charakterisierung Des Spektrums Eines Integral-Operators*,Collected Works, Vol. IV, 38-55

[vi] Edgar Raymond Lorch, *Spectral Theory*, New York Oxford University Press 1962.

[vii] György I. Targonski, *Seminar on Functional Operators and Equations*, 1967.

[viii] Angus E. Taylor,*Analysis*,1958.