UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRES
FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES
CARRERA DE MATEMÁTICA

PROYECTO DE GRADO

TEOREMA INDUCIDO DE RAMSEY

(Teoría de Ramsey)

AUTOR: Univ. Rubén Limbert Mamani Velasco

TUTOR: Msc. Marcelo Machicao Rossy

La Paz – Bolivia
2019

A MIS PADRES

A MI TUTOR

A MIS DOCENTES EN GENERAL

Agradecimientos

A mis padres Rosa Velasco y Secundino Mamani, por todo su esfuerzo a lo largo de mi vida.

A mi tutor Msc. Marcelo Machicao Rossy, que colaboro con la elección de este proyecto y brindo su tiempo durante su culminación.

A mis tribunales Lic. Zenon Condori y Lic. Raúl Borda, por todo el tiempo y paciencia dedicada en las reviciones, evaluaciones y las oportunas correcciones y sugerencias realizadas durante el desarrollo de este trabajo.

Por último agradezco a todo el plantel docente de la carrera Matemática en la UMSA, por haberme trasmito satisfactoriamente sus conocimientos durante mi formación.

RESUMEN

En este Trabajo de Proyecto de Grado, estudiaremos la Teoría de Ramsey. La cual afirma que en general, dado un conjunto suficientemente grande y dada cualquier partición finita de este conjunto, se garantiza la existencia de un subconjunto con una estructura de nuestro interés contenido en una de las particiones.

La Teoría de Ramsey tiene una estrecha relación con la Teoría de Grafos siendo por ello que algunos de los teoremas son presentados en términos de grafos. Así también se dará la definición de un Grafo de Ramsey con el fin demostrar el Teorema principal de este trabajo que garantiza su existencia.

Seguidamente veremos las aplicaciones que tienen estos resultados de Ramsey en distintas áreas de las Matemáticas, no sólo en la Teoría de Grafos.

Finalmente, se presenta la definición de lo que son los Números de Ramsey, y después de presentar un teorema que nos facilitará su cálculo, se dará a conocer algunos de estos números.

Índice general

Introducción.

El trabajo se enmarca en la Teoría de Grafos que tiene como idea principal estudiar la Teoría de Ramsey para Grafos.

La Teoría de Ramsey es una de las herramientas matemáticas más importantes en el área de combinatoria. Esta teoría está inspirada en un teorema clásico de F. P. Ramsey, conocido como el Teorema de Ramsey que en cierto sentido constituye a una generalización del principio del palomar, y su importancia se debe a que permite demostrar una gran cantidad de resultados sobre la existencia de ciertos números.

En términos generales, los resultados de la Teoría de Ramsey determinan bajo que condiciones se garantiza que alguna configuración de interés aparezca en alguna de las clases de partición. Así dichos resultados tienen la forma típica: *Dada una estructura discreta suficientemente grande y una partición finita de está se asegura que cierta configuración está contenida en alguna de las clases de la partición.*

La Teoría de Ramsey tiene un alcance bastante amplio, por ese motivo el resultado que se ha decidido abordar en este trabajo es un teorema inducido de Ramsey sobre los Grafos de Ramsey.

Antecedentes.

La Teoría de Ramsey obtiene su nombre en honor a Frank Plumptom Ramsey (1903-1930) y a su celebre teorema, que demostró en 1928.

Sin haber llegado a sus 27 años, Ramsey hizo grandes contribuciones a la lógica, la filosofía, la economía y la matemática. Trabajó en el King's College de Cambridge, y en 1928, a la edad de 25 años realizó su paper titulado ¨*On a* *problem of formal logic¨* que fue publicado posteriormente en 1930. Esta contenía las versiones finita e infinita de lo que se conoce como Teorema de Ramsey o principio de Ramsey.

Relevancia del tema.

La teoría de grafos tiene sus fundamentos en las matemáticas discretas y de las matemáticas aplicadas. Es una teoría que requiere de diferentes conceptos de diversas áreas como combinatoria, álgebra, probabilidad, geometría de polígonos, aritmética y topología. Por ello mismo en la actualidad goza de gran interés, debido principalmente a que los problemas que se abordan en ella han resultado tener varias aplicaciones en diversas ramas del saber que son de interés práctico como son: la computación, la física y la química, Sin olvidar que también algunos de sus resultados tienen su aplicación en otras ramas de la matemática pura como: la teoría de números, el análisis y la topología, por mencionar algunas.

Planteamiento del Problema y Objetivo del Trabajo.

No es trivial el concepto de un grafo de Ramsey, menos aún probar la existencia de este. Un conjunto de herramientas para abordar este problema esta dado por la teoría de Ramsey. Con este objeto dedicaremos el capítulo 1 a una introducción de la Teoría de Ramsey y al desarrollo de su teorema principal en sus tres versiones que será objeto de nuestro estudio, en el capitulo 2 se introduce el concepto de grafos de Ramsey,para luego presentar y demostrar el teorema principal de este trabajo, seguidamente el capitulo 3 contiene algunas aplicaciones de lo desarrollado en los anteriores capítulos y finalmente en el capitulo 4 se presentan algunos números exactos de Ramsey.

1

Teoría de Ramsey

Bajo el nombre de Teoría de Ramsey se agrupo una clase especial de resultados que tratan con el estudio de particiones finitas de estructuras discretas, tales como grafos, colecciones de puntos, subconjuntos de los números enteros, sucesiones en los números reales, etc. En términos generales, los resultados de la Teoría de Ramsey determinan, la existencia de subestructuras de nuestro interés que aparecen en una de las particiones de un conjunto suficientemente grande. Así dichos resultados tienen la siguiente forma:*Dada una estructura discreta suficientemente grande y una partición finita de está, se asegura que cierta configuración está contenida en alguna de las clases de la partición.* Los resultados que adoptan esta forma son conocidos como resultados tipo Ramsey.

La primera vez que aparece el Teorema de Ramsey es en el contexto de un problema de la Lógica Formal. Ramsey introduce el teorema para el caso finito como herramientas para poder demostrar dicho problema. En años posteriores, se ha ido descubriendo el interés y las numerosas posibilidades de aplicación de estos resultados de Ramsey fuera del ámbito estricto de la Lógica.

1.1. Teoría de Ramsey para Grafos

El original teorema de Ramsey ha sido extendido en muchas direcciones, dando como resultado a lo que llamamos Teoría de Ramsey, basada en la generalización del principio del palomar o casillas de Dirichlet. Mientras el principio del palomar de Dirichlet garantiza que nosotros tenemos *muchos* objetos en la misma clase sin ninguna condición en sus relaciones entre cada una, la Teoría de Ramsey para Grafos, garantiza la existencia de suficientes *muchas* aristas en una partición de las aristas de un grafo suficientemente grande.

Del mismo modo que en el Principio de Palomar, existen tres versiones del teorema de Ramsey, a saber, la versión original (forma simple), generalizada e infinita.

Antes de presentar el Teorema de Ramsey, es oportuno enunciar el Principio de palomar en sus diferentes versiones.

1.2. El Principio del palomar

El principio del Palomar tiene tres presentaciones, su versión simple, generalizada e infinita al igual que veremos más adelante en el Teorema de Ramsey, siendo útil en la demostración de este teorema.

Teorema 1.1. *(Principio del Palomar) Si $n+1$ o más objetos son colocados en n cajas, entonces como mínimo una de las cajas contiene dos o más de los objetos.*

Demostración. Supongamos lo contrario, que cada una de las n cajas contiene no más de un objeto, entonces las n cajas juntas contienen no más de n objetos, esto es una contradicción.

□

Teorema 1.2. *(Principio del Palomar Generalizado)*

(a) Si $nk + 1$ o más objetos son colocados en n cajas, entonces como mínimo una de las cajas contiene $k + 1$ o más de los objetos.

(b) Si $p_1 + p_2 + ... + p_n + 1$ o más objetos son colocados en n cajas enumeradas desde 1 hasta n, entonces, para para algún r, la caja r-ésima contiene p_r+1 o más de los objetos.

Demostración. Notar que la parte (a) se sigue de (b) tomando $p_r = k, 1 \leq r \leq n$, así es suficiente probar la parte (b). Como antes se probara por contradicción. Si cada caja r-ésima contiene a lo mucho p_r objetos, entonces las n cajas juntas contienen a lo mucho $p_1 + p_2 + ... + p_n$ objetos. Esto contradice la hipótesis de que $p_1 + p_2 + ... + p_n + 1$ objetos son puestas en las n cajas.

□

Teorema 1.3. *(Principio del Palomar versión infinita) Si tenemos un conjunto $\mathcal{X}$ infinito y distribuimos sus elementos en un número finito de cajas, entonces hay una caja que contiene infinitos elementos.*

Demostración. Supongamos que ninguna caja tiene una cantidad infinita de elementos, entonces todas las cajas juntas contienen una cantidad finita de elementos, luego esto contradice el hecho de$\mathcal{X}$ que es infinito.

□

1.3. Coloración de conjuntos

Es usual en la Teoría de Ramsey considerar particiones de conjuntos como coloreamientos. Un coloreamiento de (los elementos de) un conjunto X *con c colores*, o una $c-$ *coloración*, es simplemente una partición de X en c *classes* indexadas por los colores. Veamos un definición más formal.

Definición 1.1. Una $c-$coloración de un conjunto X es una función $f : X \longrightarrow C$ donde C es un conjunto de c colores. Es común tomar al conjunto C como $\{1, 2, ..., c\}$.

Naturalmente esto genera una partición en c *clases*, $C_1, \ldots, C_c$, donde $C_i = f^{-1}(i)$ con $i = 1, \ldots, c$ (siempre y cuando ninguna de estas clases sea el conjunto vacio). De modo similar a partir un partición $P = \{C_1, \ldots, C_c\}$ de X, siempre podemos definir una coloración para un cierto conjunto $C = \{1, 2, ..., c\}$ de c colores, como sigue

$$f(x) = i, \text{sí, y sólo si } x \in C_i, \text{ Para todo } x \in X \text{ y } i \in \{1, 2, ..., c\}.$$

Notemos que muchos coloreamientos pueden definir una misma partición, y que una partición puede definir muchos coloreamientos.

Particularmente, una $c-$coloración de aristas de un grafo G es una función $f : E(G) \longrightarrow C$ donde C es un conjunto de c colores.

Definición 1.2. Sea A un conjunto, denotamos por $[A]^k$ al conjunto de todos los subconjuntos de A con k elementos, $k \in \mathbb{N}$. Conjuntos con k elementos serán llamados *k-conjuntos*; subconjuntos con k elementos son *k-subconjuntos*.
Nota: Si $k > |A|$, claramente $[A]^k = \emptyset$.
Si A es infinito numerable, también lo es $[A]^k$.

Definición 1.3. Dado una c-coloración de $[X]^k$, llamaremos al conjunto $Y \subseteq X$ *monocromático* si todos los elementos de $[Y]^k$ tienen el mismo color.

En caso de realizar una c-coloración de las aristas de un grafo G, se dice que H es un subgrafo monocromático de G (con respecto a sus aristas), si todas las aristas de H tienen el mismo color.

Ejemplo 1.1. En el siguiente grafo se ha definido una 3-coloración de aristas de un grafo G, $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$. El conjunto de colores es $C = \{azul, rojo, verde\}$. Las clases que genera está coloración son:

$$C_{azul} = \{v_3v_4, v_3v_5, v_5v_6\},\ C_{rojo} = \{v_1v_2, v_2v_3, v_1v_3, v_3v_6\},\ C_{verde} = \{v_4v_5, v_4v_6, v_5v_7\}$$

.

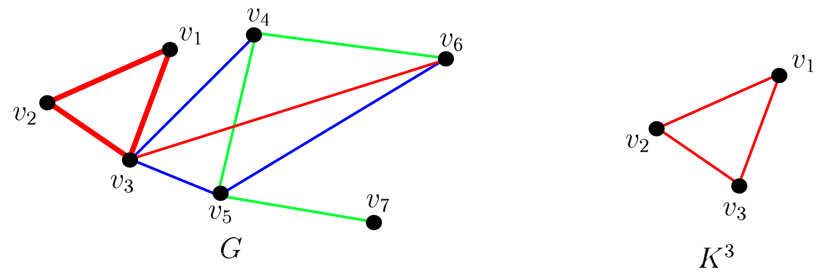

Figura 1.1. Una 3-coloración de G y un subgrafo monocromático K^3

1.4. Subgrafos Inducidos

Seguidamente introducimos una definición que tendrá importancia en futuros teoremas.

Definición 1.4. Si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$, entonces G' es un *subgrafo* de G, escribimos como $G' \subseteq G$. Si $G' \subseteq G$ y G' contiene todas las aristas $xy \in E$ con $x, y \in V'$, entonces G' es un *subgrafo inducido* de G; decimos que V' *induce* o *genera* G' en G y escribimos $G' =: G[V']$.

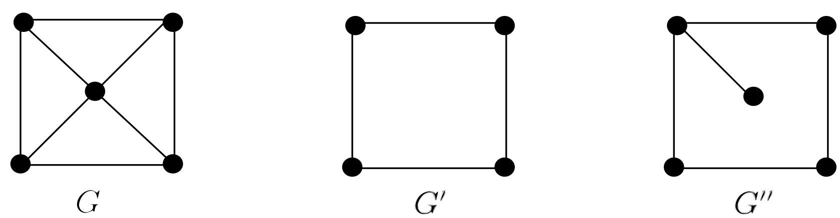

Figura 1.2. Un grafo G con subgrafos G' y G'':
G' es un subgrafo inducido, pero G'' no lo es

Proposición 1.1. Todo subgrafo que es a la vez un grafo completo, es un subgrafo inducido.

Demostración. Sea K^n un subgrafo de un grafo G. Dados los vértices $a, b \in V(K^n)$, tales que $\{a, b\} \in E(G)$, por definición de grafo completo se cumple que $E(K^n) = [V(K^n)]^2$, es decir $\{a, b\} \in E(K^n)$. Luego K^n es un subgrafo inducido de G $\square$

Proposición 1.2. Si $\overline{A}$ es un subgrafo inducido de G, entonces A es un subgrafo inducido de $\overline{G}$

Demostración. Sea $\overline{A}$ un subgrafo inducido de G, de donde $V(\overline{A}) \subseteq V(G)$ y $E(\overline{A}) \subseteq E(G)$. Además por definición del complemento de un grafo se tiene que $V(\overline{A}) = V(A)$, $[V(A)]^2 \setminus E(A) = E(\overline{A})$ y $V(\overline{G}) = V(G)$,
$[V(G)]^2 \setminus E(G) = E(\overline{G})$.

Si $\{a,b\} \in E(A)$, entonces $a,b \in V(A) = V(\overline{A})$, de donde $\{a,b\} \notin E(G)$ (si $\{a,b\} \in E(G)$, ya que $\overline{A}$ es subgrafo inducido de G, se debería cumplir que $\{a,b\} \in E(\overline{A}) \Rightarrow\Leftarrow$).
Así $\{a,b\} \in E(\overline{G})$, por tanto $E(A) \subseteq E(\overline{G})$. Luego A es un subgrafo de $\overline{G}$, para probar que A es inducido, supongamos que $a,b \in V(A)$, tales que $\{a,b\} \in E(\overline{G})$, entonces $\{a,b\} \notin E(G)$, de ahí $\{a,b\} \notin E(\overline{A})$ y como resultado $\{a,b\} \in E(A)$. □

1.5. Teorema original de Ramsey

Es conocido también como la versión simple del Teorema de Ramsey, la presentación del teorema dada en esta sección es la original salvo por la manera de presentarla en este caso en un ámbito de la teoría de Grafos.

Esta versión del teorema nos dice que, dado un entero $r \geq 0$, cada grafo suficientemente grande contiene un grafo completo K^r o su complemento $\overline{K^r}$ como un subgrafo inducido. Para su demostración a partir de una correcta selección de un grafo G tendremos que construir un K^r o $\overline{K^r}$ en G inductivamente, comenzando con un vértice arbitrario $v_1 \in V_1 := V(G)$. Si $|G|$ es suficientemente grande, habrá un subconjunto también grande $V_2 \subseteq V_1 \smallsetminus \{v_1\}$ de vértices que son todos adyacentes a v_1 o ninguno es adyacente a v_1. De esta manera podemos considerar a v_1 como el primer vértice de K^r o $\overline{K^r}$ cuyos otros vértices pertenecen a V_2. A continuación tomamos otro vértice $v_2 \in V_2$ para nuestro K^r o $\overline{K^r}$. Ya que V_2 es también suficientemente grande, existirá un subconjunto V_3 (todavía grande) de vértices que son todos del mismo tipo con respecto a v_2 así como sucedió con v_1 (todos adyacentes o no adyacentes a el). Entonces continuamos nuestra búsqueda por vértices en V_3, y así hasta completar los vértices del grafo.

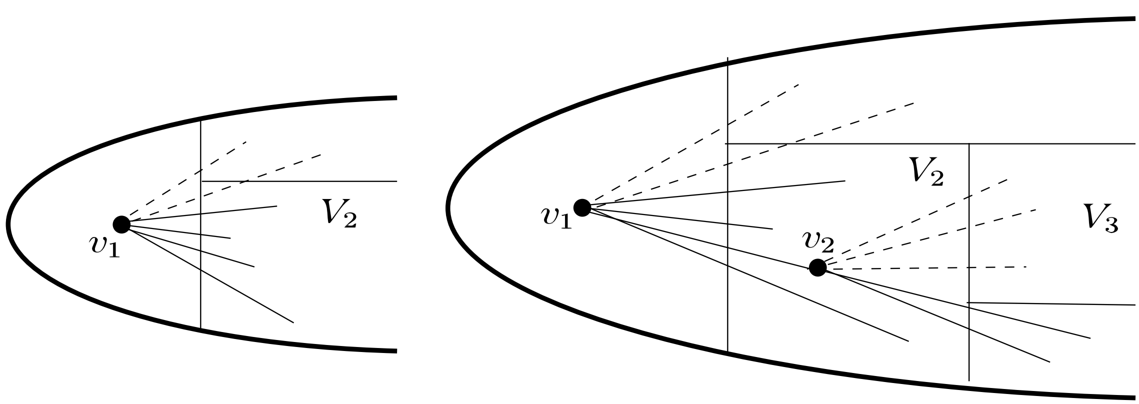

Figura 1.3. Escogiendo la sucesión $v_1, v_2 \ldots$

Para continuar este procedimiento, depende del tamaño del conjunto inicial V_1; cada conjunto V_i tiene al menos la mitad del tamaño de su predecesor V_{i-1}, por lo que podemos completar los pasos de construcción si G tiene orden 2^s. Los que nos queda decidir, es el número de conjuntos V_i necesarios para garantizar la existencia del grafo K^r o su complemento $\overline{K^r}$. Ya que los vértices v_i serán los que formen dicho grafo (K^r o $\overline{K^r}$), y en cada paso de la construcción puede que sea adyacente a los vértices de V_{i+1} o no, entonces necesitaremos una cantidad semejante al doble de r para así utilizar el Principio del palomar en su forma generalizada y obtener los r vértices, todos adyacentes (los cuales generaran a K^r) o no adyacentes (que generaran $\overline{K^r}$). Como veremos en la demostración, la elección de $s = 2r-3$ vértices v_i es suficiente para encontrar entre ellos los vértices de un K^r o $\overline{K^r}$.

Teorema 1.4. (Ramsey 1930)
Para todo $r \in \mathbb{N}$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que todo grafo de orden como mínimo n contiene a K^r o $\overline{K^r}$ como un subgrafo inducido.

Demostración. La afirmación es trivial para $r \leq 1$, ya que el grafo completo K^1 o su complemento $\overline{K^1}$ consta de un solo vértice y cualquier grafo con más de un vértice lo contiene; asumimos que $r \geq 2$. Como se analizo previamente elegimos $n = 2^{2r-3}$, y sea G un grafo de orden como mínimo n. Definimos la sucesión $V_1, V_2, ..., V_{2r-2}$ de conjuntos y eligiendo vértices $v_i \in V_i$ con las siguientes propiedades:

(i) $|V_i| = 2^{2r-2-i}$ $\qquad (i = 1, ..., 2r-2)$;

(ii) $V_i \subseteq V_{i-1} \setminus \{v_{i-1}\}$ $\qquad (i = 2, ..., 2r-2)$;

(iii) v_{i-1} es adyacente y todos los vértices de V_i o a ningún vértice de V_i.

Sea $V_1 \subseteq V(G)$ un conjunto cualquiera de 2^{2r-3} vértices. Entonces para $i = 1$ se cumple (i), mientras que (ii) y (iii) se cumple trivialmente. Construyamos V_2 a partir de V_1. Escogemos $v_1 \in V_1$ arbitrariamente, de donde

$$\begin{aligned} |V_1 \setminus \{v_1\}| &= 2^{2r-3} - 1 \\ &= 2(2^{2r-4} - 1) + 1 \end{aligned}$$

por el Principio del palomar generalizado (Teorema 1.2(b)) existirá un subconjunto de $V_1 \setminus \{v_1\}$ con 2^{2r-2-2} elementos de tal forma que v_1 sea adyacente a todos los vértices de este subconjunto o a ninguno de sus vértices. Llamemos a dicho subconjunto V_2, claramente satisface (i), (ii) y (iii). Del mismo modo podemos construir V_3 a partir de V_2, elegimos arbitrariamente un vértice $v_2 \in V_2$, luego $|V_2 \setminus \{v_2\}| = 2^{2r-4} - 1 = 2(2^{2r-5} - 1) + 1$ y por el Principio del palomar generalizado, existe un subconjunto, al que llamaremos V_3, con 2^{2r-2-3} vértices tal que todos son adyacentes a v_2 o ninguno lo es. De modo general, supongamos ahora que V_{i-1} ha sido escogido de tal forma que satisface (i), (ii) y (iii) para $i-1$, donde $1 < i \leq 2r-2$, y escojamos arbitrariamente $v_{i-1} \in V_{i-1}$. Ya que

$$\begin{aligned} |V_{i-1} \setminus \{v_{i-1}\}| &= 2^{2r-1-i} - 1 \\ &= 2(2^{2r-2-i} - 1) + 1 \end{aligned}$$

por el Principio del palomar generalizado (Teorema 1.2(b)) existirá un subconjunto de $V_{i-1} \setminus \{v_{i-1}\}$ con 2^{2r-2-i} elementos de tal forma que v_{i-1} sea adyacente a todos los vértices de este subconjunto o a ninguno de sus vértices. Nombramos a dicho subconjunto V_i, por su construcción claramente satisface las propiedades (i) a (iii); podemos escoger $v_i \in V_i$ arbitrariamente y repetir el procedimiento anterior. Notemos que el ultimo conjunto de esta sucesión, V_{2r-2} contendrá solo un vértice. De esta forma garantizamos la existencia de la sucesión $V_1, V_2, ..., V_{2r-2}$.

Ahora entre los $2r-3 = 2(r-2)+1$ vértices $v_1, v_2, ..., v_{2r-3}$ hay r-1 vértices que todos son adyacentes a v_{2r-2} o ninguno lo es (por el principio del palomar generalizado). Notemos que si los r-1 vértices son adyacentes a v_{2r-2} también lo son cada par de ellos debido a su construcción, pues sean v_j y v_k cualesquiera de estos r-1 vértices con $j < k$ o lo que es los mismo $j+1 \leq k$, luego por la manera en que fueron construidos todos los V_i, se cumple que $V_{2r-2} \subseteq V_k \subseteq V_{j+1} \subseteq V_j$ entonces $v_k, v_{2r-2} \in V_{j+1}$ de donde v_j al ser adyacente a v_{2r-2} también debe ser adyacente a todos los demás vértices de V_{j+1}, en particular a v_k. De este modo los r-1 vértices junto con el vértice v_{2r-2} forman un subgrafo K^r inducido en G, y por el contrario si los r-1 vértices no son adyacentes a v_{2r-2}, bajo el mismo análisis anterior, formarían un subgrafo $\overline{K^r}$ inducido en G.

□

El mínimo entero n asociado a r en el teorema es el *número de Ramsey* $R(r)$ de r, la prueba anterior muestra que $R(r) \leq 2^{2r-3}$. En el teorema, dado r, sea G un grafo tal que $|G| \geq n$, luego se cumple que $K^r \subseteq G$ o $\overline{K^r} \subseteq G$, lo segundo es equivalente a $K^r \subseteq \overline{G}$ (proposición 1.1 y 1.2), es más nosotros podemos considerar al grafo completo $K^{|G|} = G \cup \overline{G}$ y una 2-coloración sobre sus aristas de tal modo que las aristas de G tengan el color 1, y las aristas de $\overline{G}$ tengan el color 2, esto logra que se obtenga un $K^r \subseteq K^{|G|}$ monocromático (en términos de sus aristas). Esta observación da lugar a otra habitual presentación del Teorema de Ramsey: *"Para todo $r \in \mathbb{N}$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que todo grafo completo K^n o de orden mayor que n contiene un monocromático K^r con respecto a cualquier 2-coloración de las aristas de K^n."*

Más aun dado cualquier grafo completo $K^n = (V,\ E)$, tenemos que $E = [V]^2$, siendo estas aristas lo esencial en nuestra previa reformulación del Teorema de Ramsey, generando un nuevo enunciado como sigue: *para cada r existe un n*

tal que, dado cualquier $n-$ conjunto X, todo 2-coloración de $[X]^2$ produce un monocromático $r-$ conjunto $Y \subseteq X$.

El beneficio de está ultima modificación del Teorema es que ahora podemos generalizarlo a un $c-$ *coloración* de $[X]^k$ con c y k arbitrarios.

Primeramente probaremos una versión infinita, y entonces deduciremos a partir de esta la versión finita.

1.6. Teorema de Ramsey versión infinita

El Teorema de Ramsey en sus versiones finitas nos dice que en conjuntos finitos y suficientemente grandes contienen homogéneos subconjuntos para alguna coloración. Es natural extender esta idea y preguntar si conjuntos infinitos también admiten subconjuntos homogéneos. El caso más simple de este tipo surge cuando el cardinal de estos conjuntos es infinito numerable $\aleph_0$, que exploraremos en esta sección.

Cabe mencionar que en su trabajo original, Ramsey, de hecho, probó primero la versión de su teorema para conjuntos infinitos.

Teorema 1.5. *Sean k ,c enteros positivos, y X un conjunto infinito. Si $[X]^k$ es coloreado con c colores, entonces X tiene un monocromático subconjunto infinito.*

Demostración. Probaremos el teorema usando inducción sobre k, con c fijo. Veamos para $k=1$, dada una c-coloración en $[X]^1$ es en esencia una coloración en el conjunto X, donde usando el principio del palomar en su versión infinita, es claro que uno de los c colores deber estar asociado a infinitos elementos de X, ya que la cantidad de colores posibles es una cantidad finita. Así se cumple el enunciado para $k=1$.

Ahora sea $k>1$ y supongamos el enunciado se verifica para valores más pequeños que k. Dada una c-coloración $f:[X]^k \longrightarrow C=\{1,2,\ldots,c\}$. Construiremos una sucesión infinita $X_0, X_1, \ldots$ de subconjuntos infinitos de X y escogeremos elementos $x_i \in X_i$ con las siguientes propiedades:

(i) $X_{i+1} \subseteq X_i \setminus \{x_i\}$;

(ii) todos los *k-conjuntos* $\{x_i\} \cup Z$ con $Z \in [X_{i+1}]^{k-1}$ tienen el mismo color, los cuales los asociamos con el respectivo x_i.

Para la construcción de nuestra deseada sucesión infinita, comenzamos con definir $X_0 := X$ y escogemos $x_0 \in X_0$ arbitrariamente, por hipótesis X_0 es infinito.

Ahora construyamos X_1. Definimos una c-coloración g, de $[X_0 \setminus \{x_0\}]^{k-1}$ a partir de f como sigue:

$$g(Z)=f(\{x_0\} \cup Z); \quad \text{donde } \{x_0\} \cup Z \in [X]^k \text{ y } Z \in [X_0 \setminus \{x_0\}]^{k-1}$$

Por la hipótesis de inducción, $X_0 \setminus \{x_0\}$ tiene un monocromático subconjunto infinito, el cual será X_1, es decir los elementos de $[X_1]^{k-1}$ están igualmente coloreados por un cierto color $t \in \{1, 2, \ldots, c\}$. Veamos que X_1 satisface (i) y (ii). La primera condición es obvia, por la construcción de $X_1 \subseteq X_0 \setminus \{x_0\}$, para la segunda, sea $\{x_0\} \cup Z$ con $Z \in [X_1]^{k-1}$, por (i), se tiene que $[X_1]^{k-1} \subseteq [X_0]^{k-1}$. Luego

$$\begin{aligned} f(\{x_0\} \cup Z) &= g(Z); \quad \textit{pues } Z \in [X_1]^{k-1} \subseteq [X_0]^{k-1} \\ &= t; \quad \textit{pues } [X_1]^{k-1} \textit{ es monocromático con el color } t \end{aligned}$$

De este modo cualquier *k-conjunto* $\{x_0\} \cup Z$ con $Z \in [X_1]^{k-1}$ tiene asignado el color t. Además asociamos este color t, a x_0.

Podemos continuar la construcción por recurrencia, teniendo escogido un conjunto infinito X_i y $x_i \in X_i$ para algún i, definamos X_{i+1}. Para ello sea g una c-coloración de $[X_i \setminus \{x_i\}]^{k-1}$ definida a partir de nuestra c-coloración f como sigue:

Para todo $Z \in [X_i \setminus \{x_i\}]^{k-1}$

$$g(Z) = f(\{x_i\} \cup Z); \quad \text{donde } \{x_i\} \cup Z \in [X]^k$$

Por la hipótesis de inducción, $X_i \setminus \{x_i\}$ tiene un monocromático subconjunto infinito, al cual nosotros nombraremos como X_{i+1}, es decir los elementos de $[X_{i+1}]^{k-1}$ están igualmente coloreados por un cierto color de $C = \{1, 2, \ldots, c\}$ que lo asociamos a x_i. De este modo X_{i+1} satisface (i) y (ii), finalmente escogemos $x_{i+1} \in X_{i+1}$ arbitrariamente y podemos repetir el procedimiento. Esto garantiza la existencia de la sucesión infinita que buscábamos, e implícitamente también tenemos la sucesión infinita $\{x_i\}$.

Recordemos que cada $x_i \in X_i$ para todo i está asociado a uno de los c colores, como existe una cantidad infinita de estos elementos y cantidad finita de colores asociados a ellos, entonces debe existir una cantidad infinita x_i asociados con al menos un color en común, Teorema 1.3. Llamemos l a dicho color, $1 \leq l \leq c$ y $\{x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, \ldots\} = \{x_{i_j}\} \subseteq \{x_i\} \subseteq X$ la subsucesión infinita de elementos asociados al color l, $i_1 < i_2 < i_3 \ldots$..Afirmamos que está subsucesión es el monocromático subconjunto infinito, veamos:

Tomemos k elementos aleatorios de $\{x_{i_j}\}$, supongamos son los siguientes $x_{i_{j_1}}, x_{i_{j_2}}, \ldots, x_{i_{j_k}}$ con $i_{j_1} < i_{j_2} < \ldots < i_{j_k}$ de donde por la construcción de los X_i, se cumple que

$$X_{i_{j_k}} \subseteq \ldots \subseteq X_{i_{j_2}} \subseteq X_{i_{j_1}}$$

Además $i_{j_1} < i_{j_2} \Leftrightarrow i_{j_1} + 1 \leq i_{j_2}$, así $X_{i_{j_2}} \subseteq X_{i_{j_1}+1} \subseteq X_{i_{j_1}}$. De este modo, $Z = \{x_{i_{j_2}}, \ldots, x_{i_{j_k}}\} \in [X_{i_{j_1}+1}]^{k-1}$, luego el conjunto

$\{x_{i_{j_1}}, x_{i_{j_2}}, \ldots, x_{i_{j_k}}\} = \{x_{i_{j_1}}\} \cup Z$ tiene el mismo color asociado a $x_{i_{j_1}}$, es decir l. Por tanto todos los elementos del conjunto $[\{x_{i_j}\}]^k$, tienen asignado el color l, es decir $\{x_{i_j}\}$ es monocromático. $\square$

1.7. Teorema de Ramsey versión finita generalizada

Para la demostración de la versión finita del Teorema 1.5 necesitamos el uso de un Lema sobre Grafos infinitos. A su vez es oportuno enunciar las siguientes definiciones necesarias para el desarrollo del mencionado Lema.

Definición 1.5. Un *camino* es un grafo no vació $P = (V, E)$ de la forma

$$V = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\} \quad E = \{x_0x_1, x_1x_2, \ldots, x_{k-1}x_k\}$$

donde los x_i son todos distintos. Para referirnos a un camino por la sucesión natural de sus vértices, escribimos, $P = x_0x_1 \ldots x_k$ y llamamos a P un camino de x_0 a x_k.

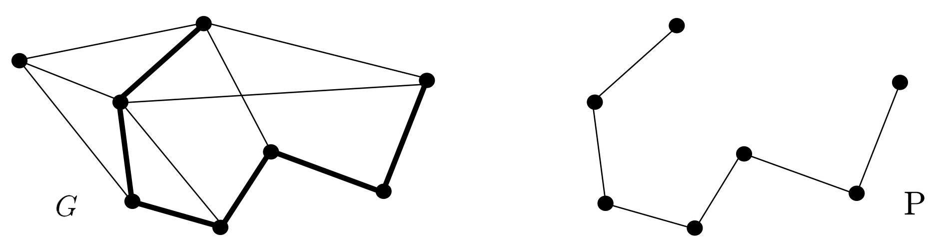

Figura 1.4. Un camino P en G

Definición 1.6. Un *rayo* es un grafo infinito (V, E) de la forma

$$V = \{x_0, x_1, x_2 \ldots\} \quad E = \{x_0x_1, x_1x_2, x_2x_3 \ldots\}$$

Lema 1.1. *(Lema infinito de König)*
Sea $V_0, V_1, \ldots$ una sucesión infinita de conjuntos finitos, no-vacíos y disjuntos, y sea G un grafo sobre su unión. Asumiendo que cada vértice v en un conjunto V_n con $n \geq 1$ tiene un vecino v' en V_{n-1}. Entonces G contiene un rayo $v_0v_1 \ldots$ con $v_n \in V_n$ para todo n.

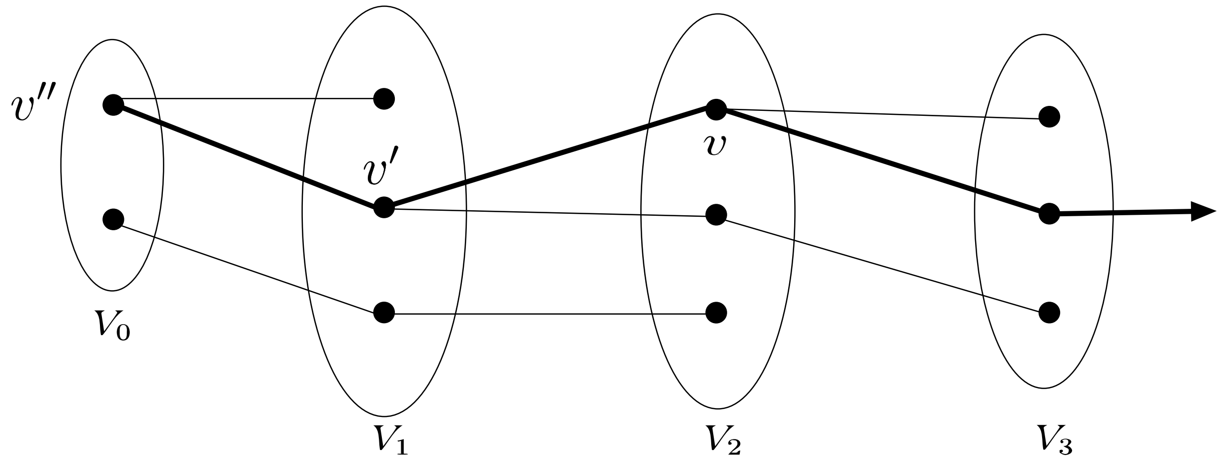

Figura 1.5. Lema infinito de König

Demostración. Llamemos $\mathcal{P}$ el conjunto de todos los caminos finitos de la forma $vv'v''\ldots$ terminando en un elemento de V_0, es decir
$\mathcal{P} = \{vv'v''\ldots w|v \in V_n, v' \in V_{n-1}, \ldots, w \in V_0, \text{ para cualquier } n \in \mathbb{N}\}$ ya que $V_0, V_1, \ldots$ es una sucesión infinita, entonces por el Teorema 1.2, $\mathcal{P}$ también contiene infinitos elementos (caminos cada vez de mayor tamaño). Como V_0 es finito y $\mathcal{P}$ infinito, entonces una cantidad infinita de caminos en $\mathcal{P}$ terminan en un vértice en común de V_0 (Principio del Palomar Generalizado), llamemos $v_0 \in V_0$ a dicho vértice. Del mismo modo considerando estos infinitos caminos que terminan en el vértice v_0 y ya que V_1 es también finito, deberá existir una cantidad infinita de caminos que terminan en v_0 y que además tenga un vértice en común de V_1, al cual llamaremos $v_1 \in V_1$. Ahora de aquellos infinitos caminos que pasan por v_0, y v_1, existirá nuevamente una cantidad infinita que también pasara por un vértice $v_2 \in V_2$, pues V_2 es finito, y podemos continuar de esta manera. Aunque el conjunto de caminos que consideramos decrece paso a paso, es todavía infinito después de cualquier número infinito de pasos, así v_n es definido para cada $n \in \mathbb{N}$. Por definición, cada vértice v_n es adyacente a v_{n-1} en uno de aquellos caminos, así $v_0v_1\ldots$ es en efecto un rayo. $\square$

Teorema 1.6. *Sean k, c, $r \geq 1$ existe un $n \geq k$ tal que todo $n-$ conjunto X tiene un monocromático $r-$ conjunto con respecto a cualquier $c-$ coloración de $[X]^k$.*

Demostración. Se demostrará usando el método por contradicción. Primeramente reescribiremos el teorema en su forma lógica.

«Para todo k, c, $r \geq 1$ existe un $n \geq k$ tal que todo $n-$ conjunto X, si f es cualquier $c-$ coloración de $[X]^k$, entonces X tiene un monocromático $r-$ conjunto.»
Cuya negación es:

«Existen k, c, $r \geq 1$, tal que para todo $n \geq k$, existe un $n-conjunto$ X y una $c-coloración$ f de $[X]^k$ tal que X no tiene algún monocromático $r-conjunto$.»
Como es acostumbrado en la teoría de conjuntos, denotamos también por $n \in \mathbb{N}$ al conjunto $\{0, \ldots, n-1\}$. Supongamos que la afirmación no se cumple para ciertos k, c, r. Entonces para cada $n \geq k$ existe un n-conjunto (sin perdida de generalidad podemos considerar el conjunto n) y una c-coloración $[n]^k \to c$ tal que n no contiene algún monocromático r-conjunto. Llamaremos a tales coloreamientos como *coloraciones malas*, de este modo podemos asumir que para cada $n \geq k$ existe una coloración mala de $[n]^k$. Ahora a partir de esto construiremos una coloración mala de $[\mathbb{N}_0]^k$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ que será una contradicción al Teorema 1.5.

Para cada $n \geq k$ sea $V_n \neq \emptyset$ el conjunto de todas las coloraciones malas de $[n]^k$, dado que el conjunto $[n]^k$ es finito y c es un entero positivo, existe un numero finito de posibles asignaciones de estos c colores, de este modo también V_n es finito. Luego tenemos la sucesión infinita $V_k, V_{k+1}, \ldots$ de conjuntos finitos disjuntos y no-vacíos. Definamos un grafo sobre estos conjuntos, de tal modo que sea la función f con la asignación:

$$f(g) = g|[n-1]^k, \quad donde\, g \in V_n,\ para\, todo\, n \geq k$$

Es decir $f(g)$ es la restricción de cualquier $g \in V_n$ a $[n-1]^k \subseteq [n]^k$, siento todavía una coloración mala, y de ahí $f(g) \in V_{n-1}$. Finalmente podemos considera $f(g)$ como un vértice vecino de g.

Por el lema infinito 1.1, existe una sucesión infinita $g_k, g_{k+1}, \ldots$ de coloraciones malas $g_n \in V_n$ tales que $f(g_n) = g_{n-1}$ para todo $n > k$. Para cada $m \geq k$, todos las coloraciones g_n con $n \geq m$ coinciden sobre la restricción al conjunto $[m]^k \subseteq [n]^k$, así para cada $Y \in [\mathbb{N}_0]^k$ la asignación $g_n(Y)$ coincide para todo $n > max Y$. Ahora definimos una c-coloración g sobre $[\mathbb{N}_0]^k$ de la siguiente forma

$$g(Y) = g_n(Y); \quad para\, todo\, Y \in [\mathbb{N}_0]^k\, dónde\, n > max\, Y$$

Notemos que $Y \in [n]^k$. Afirmamos que g es una coloración mala de $[\mathbb{N}_0]^k$, pues cada r-conjunto $S \subseteq \mathbb{N}_0$ está contenido en conjunto n suficientemente grande, así S no puede ser monocromático ya que g coincide en $[n]^k$ con la coloración mala g_n.

Como deseábamos esto genera una contradicción con el Teorema 1.5, y hemos demostrado el teorema. □

Al mínimo entero n asociado con k, c, r es el número de Ramsey denotado por $R(k, c, r)$.

2

Teorema inducido de Ramsey

Como el nombre del capítulo sugiere, estamos listos para presentar el Teorema principal de este trabajo, siendo necesario tener en cuenta la definición de un $subgrafo$ *inducido*, presentada en el Capítulo anterior.

De acuerdo al teorema de Ramsey para cualquier grafo H existe un grafo suficientemente grande G tal que dada cualquier bipartición de las aristas de G, siempre encontraremos una copia de H como subgrafo con sus aristas contenidas en una de las particiones, en efecto nosotros simplemente consideramos en el Teorema 1.4, $r = |H|$ y el grafo completo $K^n = G$ notando que $H \subseteq K^{|H|}$. Sin embargo el grafo H no es necesariamente un $subgrafo$ *inducido* de G.

2.1. Grafo de Ramsey

El teorema de Ramsey puede ser reescrito como sigue. Para cada grafo $H = K^r$ existe un grafo G tal que toda 2-coloración de las aristas de G produce un monocromático $H \subseteq G$. Cambiando el problema ligeramente y ahora pedir un grafo G en el cual todo 2-coloración produzca un subgrafo monocromático inducido $H \subseteq G$, donde H es un grafo arbitrario.

Esta pequeña modificación cambia dramáticamente la característica del problema. Lo que ahora necesitamos no es simplemente probar que G es suficientemente grande, sino debemos construir G de tal manera que si bipartimos las aristas del grafo, el grafo contenga una inducida copia de H con todas sus aristas en una clase de la partición. Llamaremos a tal grafo un *Grafo de Ramsey* para H.

Antes de enunciar el teorema principal, es necesario definir la construcción de un nuevo grafo a partir de dos previos, esta construcción sera importante para la demostración del teorema.

Definición 2.1. Dados dos grafos $G = (V, E)$ y H, sea U un subconjunto de vértices de V, denotaremos por $G[U \to H]$ al grafo obtenido mediante G por reemplazar cada vértice $u \in U$ con una copia del grafo H, denotado por $H(u)$ y uniendo completamente todos los vértices de $H(u)$ con todos los vértices de $H(u')$ mientras $uu' \in E$, y a los vértices $v \in V \backslash U$ mientras $uv \in E$. Formalmente $G[U \to H]$ es el grafo sobre

$$(U \times V(H)) \cup ((V \backslash U) \times \{\emptyset\})$$

en los que cualesquiera dos vértices $(v,\ w)$ y $(v'\ w')$ son adyacentes si y sólo si $vv' \in E$, ó $v = v' \in U$ y $ww' \in E(H)$.

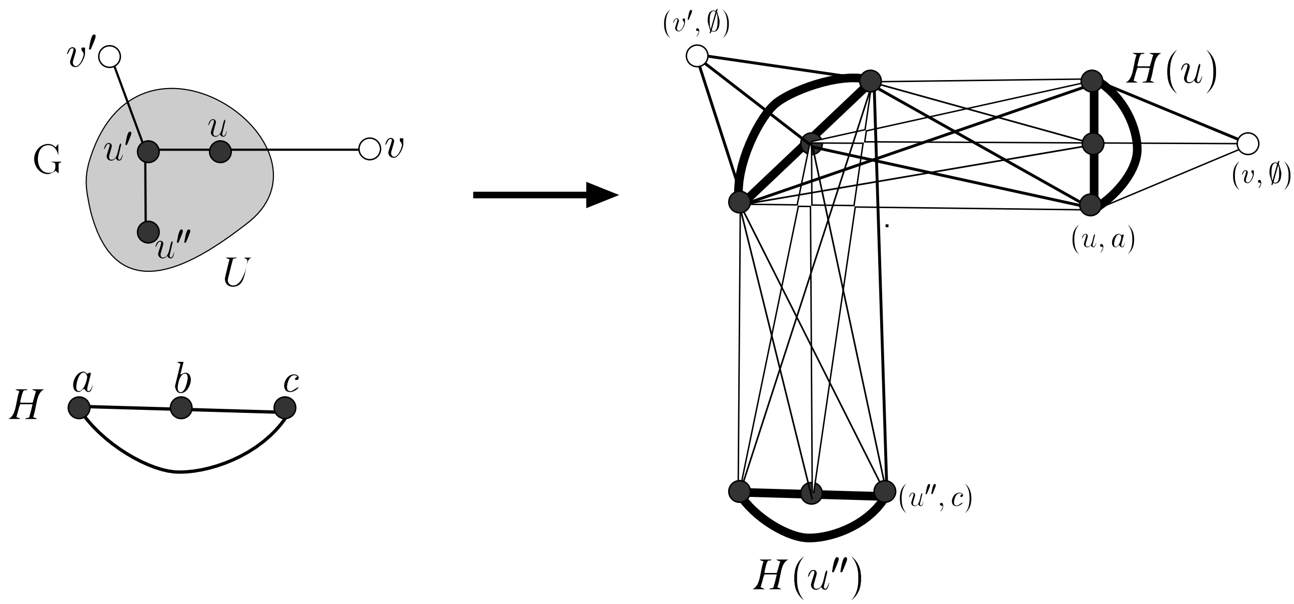

Figura 2.1. Grafo $G[U \to H]$ con $H = K^3$

2.2. (∗)Teorema

(∗)Teorema 2.1. *Todo grafo tiene un grafo de Ramsey. En otras palabras, para cada grafo H existe un grafo G tal que, para toda partición $\{E_1, E_2\}$ de $E(G)$, contiene un subgrafo inducido H con $E(H) \subseteq E_1$ o $E(H) \subseteq E_2$.*

Demostración. Nosotros probaremos un version ligeramente más fuerte que el teorema.

> *Para cualesquiera dos grafos H_1, H_2 existe un grafo $G = G(H_1,\ H_2)$ tal que cada coloramiento de las aristas de G con los colores 1 y 2 produce un subgrafo inducido $H_1 \subseteq G$ con todas sus aristas coloreadas con el color 1 o un inducido $H_2 \subseteq G$ con todas sus aristas coloreadas con el color 2.* $(*)$

Notemos que si tomamos $H = H_1 = H_2$ habríamos demostrado el teorema que nos interesa.

Está formal ampliación del teorema nos permite poder aplicar inducción en $|H_1| + |H_2|$, como sigue.

Supongamos que $|H_1| + |H_2| = 1$, entonces es claro que H_1 o H_2 no posee aristas. Así en general si uno de los dos subgrafos no posee aristas, podemos tomar un grafo $G = \overline{K^n}$ para un n suficientemente grande ($n \geq max\{|H_1|, |H_2|\}$). Evidentemente $G = G(H_1,\ H_2)$ cumple $(*)$.

Para el siguiente paso de la inducción, asumimos que ambos H_1 y H_2 tienen como mínimo una arista, y que $(*)$ se cumple para todos los pares $(H_1',\ H_2')$ con $|H_1'| + |H_2'| < |H_1| + |H_2|$.

Para cada $i = 1\ , 2$, escogemos un vértice $x_i \in H_i$ tal que sea incidente con alguna arista. Sea $H_i' = H_i - x_i$, y sea H_i'' el subgrafo de H_i' inducido por los vértices vecinos de x_i.

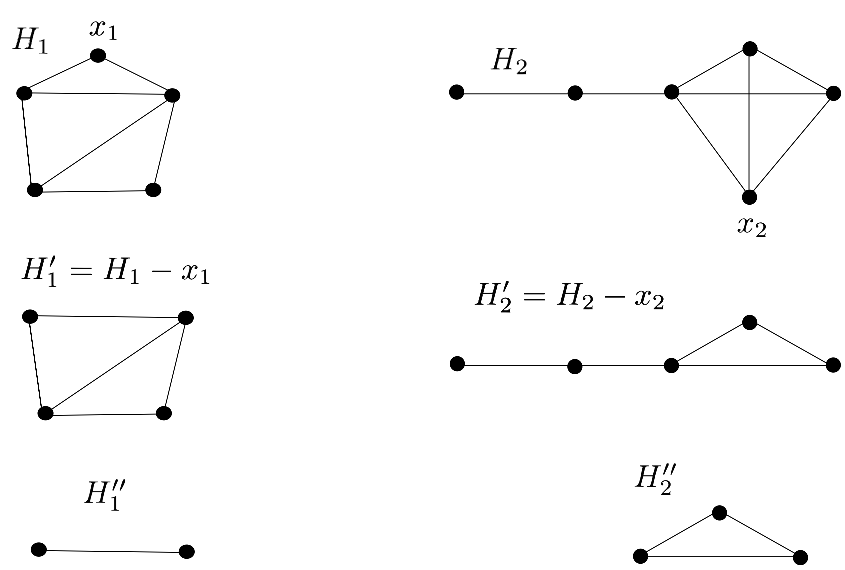

Figura 2.2. Construcción de H_i, H_i' y H_i'' con $i = 1\ , 2$

Ahora para la construcción del Grafo de Ramsey deseado, primero construiremos una sucesión de grafos disjuntos $G^0,\ G^1\ \ldots,\ G^n$; donde G^n será el Grafo de

Ramsey $G(H_1, H_2)$. También definiremos subconjuntos $V^i \subseteq V(G^i)$ y una función

$$f : V^1 \cup \ldots \cup V^n \longrightarrow V^0 \cup \ldots \cup V^{n-1}$$

tal que

$$f(V^i) = V^{i-1} \tag{1}$$

para todo $i \geq 1$.

Notemos que para cualquier $v \in V^2$, se tiene que $f(v) \in V^1$, de donde $f(f(v)) \in V^0$. De modo similar para todo $v \in V^3$, se cumple que $f(f(f(v))) \in V^0$, más aún para todo $v \in V^i$, $1 \leq i \leq n$, $\underbrace{f(f(\ldots(f}_{i-veces}(v))\ldots) \in V^0$. Escribimos $f^i(v)$ para representar la aplicación $\underbrace{f(f(\ldots(f}_{i-veces}(v))\ldots)$ con $v \in V^i$, y f^0 para la función identidad en $V^0 = V(G^0)$, así tenemos $f^i(v) \in V^0$ para todo $v \in V^i$ con $0 \leq i \leq n$. Llamaremos a $f^i(v)$ el *origen* de v.

Por la hipótesis de inducción, como

$$|H_1| + |H_2'| < |H_1| + |H_2| \quad \text{y} \quad |H_1'| + |H_2| < |H_1| + |H_2|$$

existen los grafos de Ramsey

$$G_1 := G(H_1,\ H_2') \quad \text{y} \quad G_2 := G(H_1',\ H_2)$$

Sea G^0 una copia de G_1, y sea $V^0 := V(G^0)$. Ahora ya que cualquier 2-coloración de las aristas de G_1 debe producir un grafo inducido H_1 o un H_2' con los colores 1 o 2 respectivamente, entonces este grafo contiene más de una copia de H_2' como subgrafo inducido. Llamemos $W_0', \ldots, W_{n-1}'$ los subconjuntos de V^0 generadores de un H_2' en G^0. Así, n está definido como el número de copias inducidas de H_2' en G^0, y construiremos un grafo G^i por cada conjunto W_{i-1}', $i = 1\,, \ldots,\, n$. Notemos que $G^0[W_i] \cong H_2'$, para $i = 0, \ldots, n-1$, sea W_i'' la imagen de $V(H_2'')$ bajo algún isomorfismo $H_2' \to G^0[W_i]$.

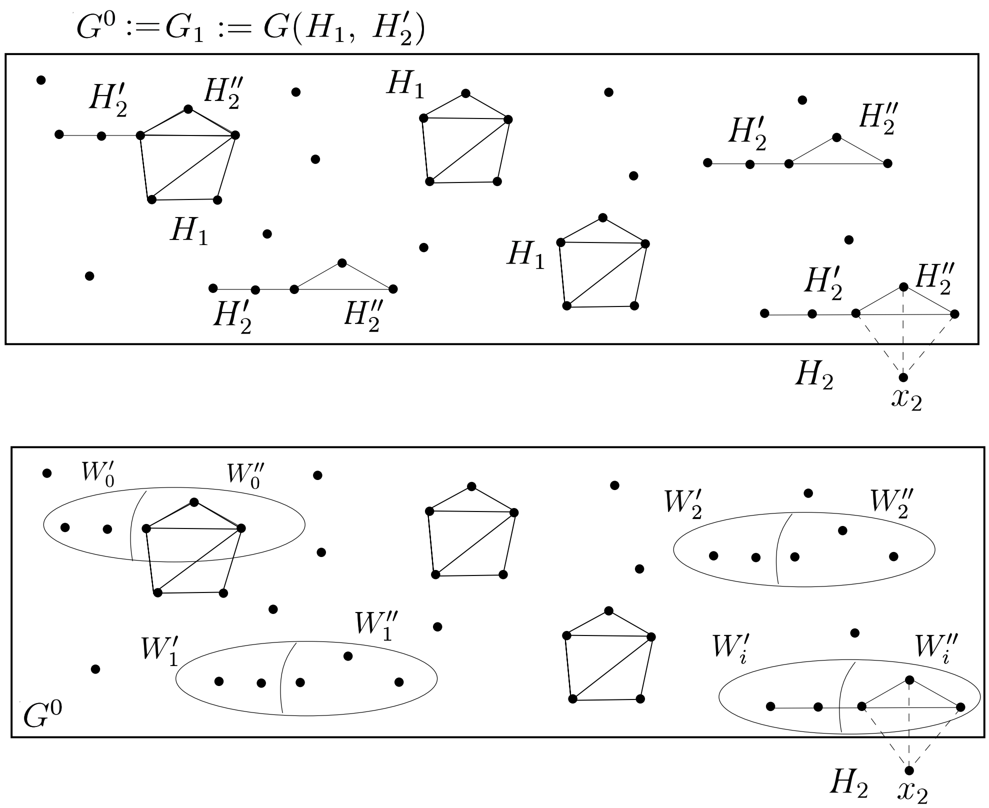

Figura 2.3. G^0, W'_{i-1} y W''_{i-1} con $i = 1, \ldots, n$

Primeramente construyamos G^1. Definimos U^0 el conjunto de todos los vértices $v \in V^0$ cuyos orígenes $f^0(v)$ pertenecen a W_0'', ya que f^0 es la función identidad definida en V^0 y $W_0'' \subseteq V^0$, entonces $U^0 = W_0''$. Ahora expandamos G^0 al grafo $\tilde{G}^0$ reemplazando cada vértice $u \in U^0$ con una copia $G_2(u)$ de G_2. Es decir

$$\tilde{G}^0 = G^0[U^0 \to G_2]$$

Sea

$$V^1 = (U^0 \times V(G_2)) \cup ((V^0 \backslash U^0) \times \{\emptyset\}); \qquad [si\, u \in U^0,\ \{u\} \times V(G_2) = V(G_2(u))]$$

Definimos la función f como sigue:

$$f : V^1 \longrightarrow V^0$$

Donde para todo $u \in U^0$ y para cada $u' \in G_2(u)$,

$$f(u') = u$$

y para todo $v' = (v, \emptyset) \in V^1$, con $v \in V^0 \backslash U^0$

$$f(v') = v$$

Así $f(V^1) = V^0$, de donde se cumple (1).

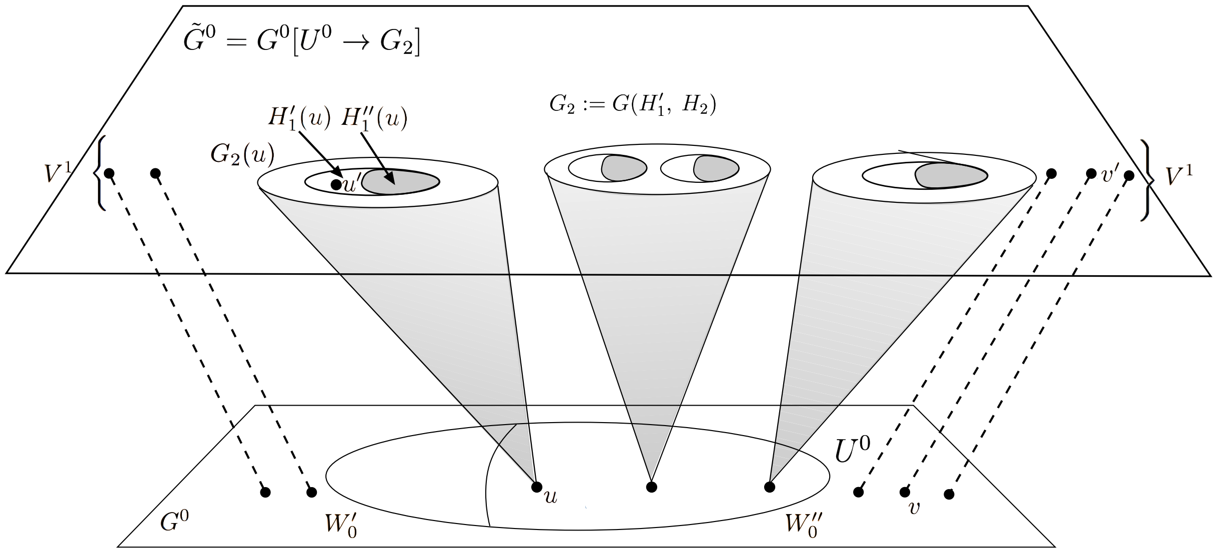

Figura 2.4. Construcción de $\tilde{G}^0 = G^0[U^0 \to G_2]$

A continuación adicionaremos algunos vértices $x \notin V^1$ en $\tilde{G}^0$ para formar G^1. Para ello definimos $\mathfrak{F}$ conjunto de todas las familias F de la forma

$$F = (H_1'(u)|u \in U^0),$$

donde cada $H_1'(u)$ es un inducido subgrafo de $G_2(u)$ isomorfo a H_1'. (Menos formal: $\mathfrak{F}$ es la colección de formas de seleccionar simultáneamente de cada $G_2(u)$ exactamente una copia inducida de H_1'.)

Como $H_1'' \subseteq H_1'$ y $H_1' \simeq H_1'(u)$, para todo $u \in U^0$, por cada $F \in \mathfrak{F}$, adicionamos un vértice $x(F)$ a $\tilde{G}^0$ y lo unimos, a todos los vértices de $H_1''(u) \subseteq H_1'(u) \subseteq G_2(u)$, donde $H_1''(u)$ es la imagen de H_1'' sobre algún isomorfismo de H_1' a $H_1'(u)$ seleccionado por F. Denotamos al resultante grafo por G^1.

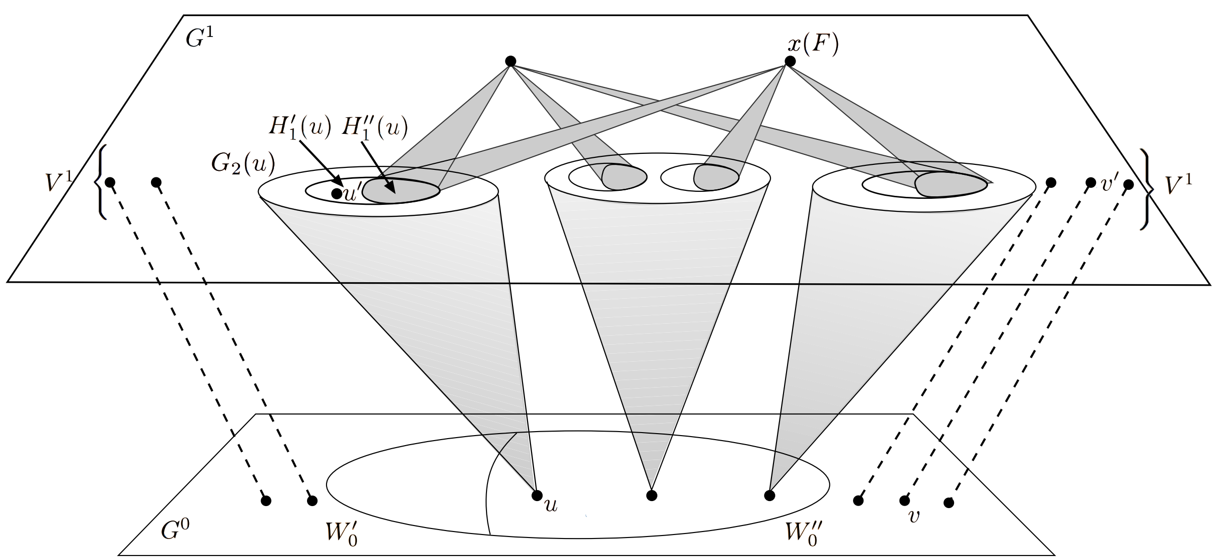

Figura 2.5. Construcción de G^1

Ahora para la construcción de G^i para algún $i = 1, \ldots, n$, podemos asumir que $G^0, \ldots, G^{i-1}$ y $V^0, \ldots, V^{i-1}$ están ya definidos, y que f este definido sobre $V^1 \cup \ldots \cup V^{i-1}$ y satisface (1).

Construiremos G^i a partir de G^{i-1} en dos pasos:

- Sea U^{i-1} el conjunto de todos los vértices $v \in V^{i-1}$ cuyos orígenes $f^{i-1}(v)$ pertenecen a W''_{i-1}. Ahora formamos el grafo $\tilde{G}^{i-1}$ a través de G^{i-1} reemplazando cada vértice $u \in U^{i-1}$ con una copia $G_2(u)$ de G_2. Es decir

  $$\tilde{G}^{i-1} = G^{i-1}[U^{i-1} \to G_2]$$

  Sea
  $$V^i = (U^{i-1} \times V(G_2)) \cup ((V^{i-1} \backslash U^{i-1}) \times \{\emptyset\});$$
  $$[si\ u \in U^{i-1},\ \{u\} \times V(G_2) = V(G_2(u))]$$

  Podemos extender la función f como sigue:

  $$f : V^1 \cup \ldots \cup V^{i-1} \cup V^i \longrightarrow V^0 \cup \ldots \cup V^{i-1}$$

  Donde para todo $u \in U^{i-1}$ y para cada $u' \in G_2(u)$,

  $$f(u') = u$$

  y para todo $v' = (v, \emptyset) \in V^i$, con $v \in V^{i-1} \backslash U^{i-1}$

  $$f(v') = v$$

  Así $f(V^i) = V^{i-1}$ y (1) continua cumpliéndose.

  El grafo $\tilde{G}^{i-1}$ ya es una parte esencial de G^i.

- Ahora extenderemos $\tilde{G}^{i-1}$ al grafo deseado G^i adicionando algunos vértices $x \notin V^i$. Definimos $\mathfrak{F}$ conjunto de todas las familias F de la forma

  $$F = (H'_1(u) | u \in U^{i-1}),$$

  donde cada $H'_1(u)$ es un subgrafo inducido de $G_2(u)$ isomorfo a H'_1.

  Para cada $F \in \mathfrak{F}$, adicionamos un vértice $x(F)$ a $\tilde{G}^{i-1}$ y lo unimos, a todos los vértices de $H''_1(u) \subseteq H'_1(u) \subseteq G_2(u)$. Denotamos al resultante grafo por G^i. Esto completa la definición inductiva de los grafos $G^0, \ldots, G^n$.

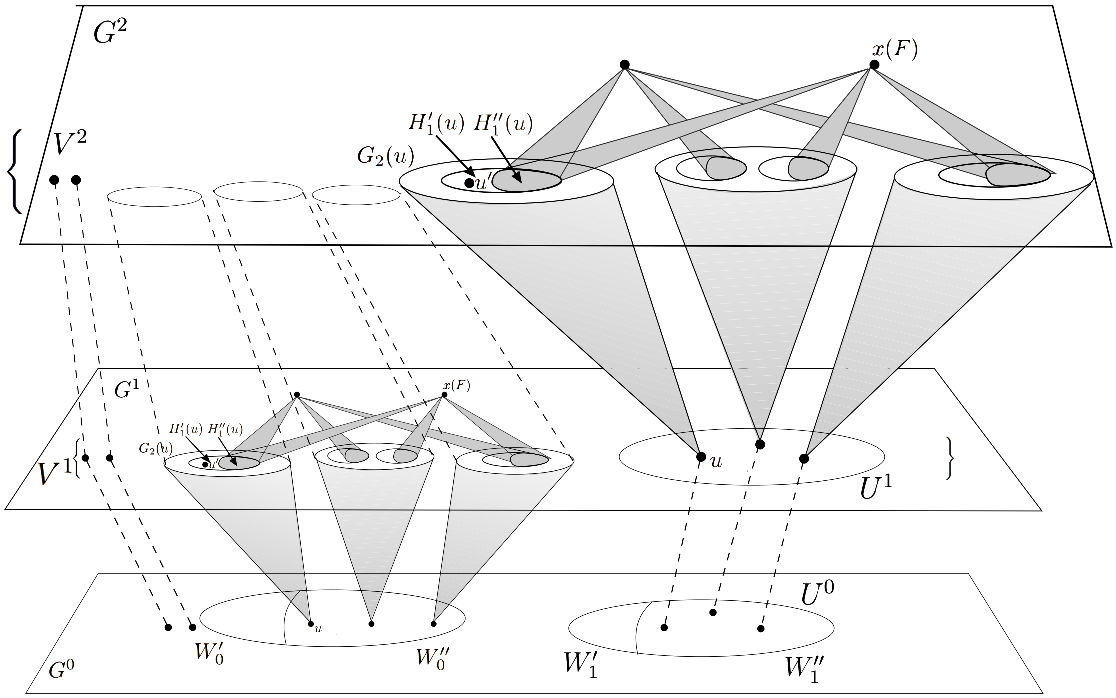

Figura 2.6. Construcción de G^2

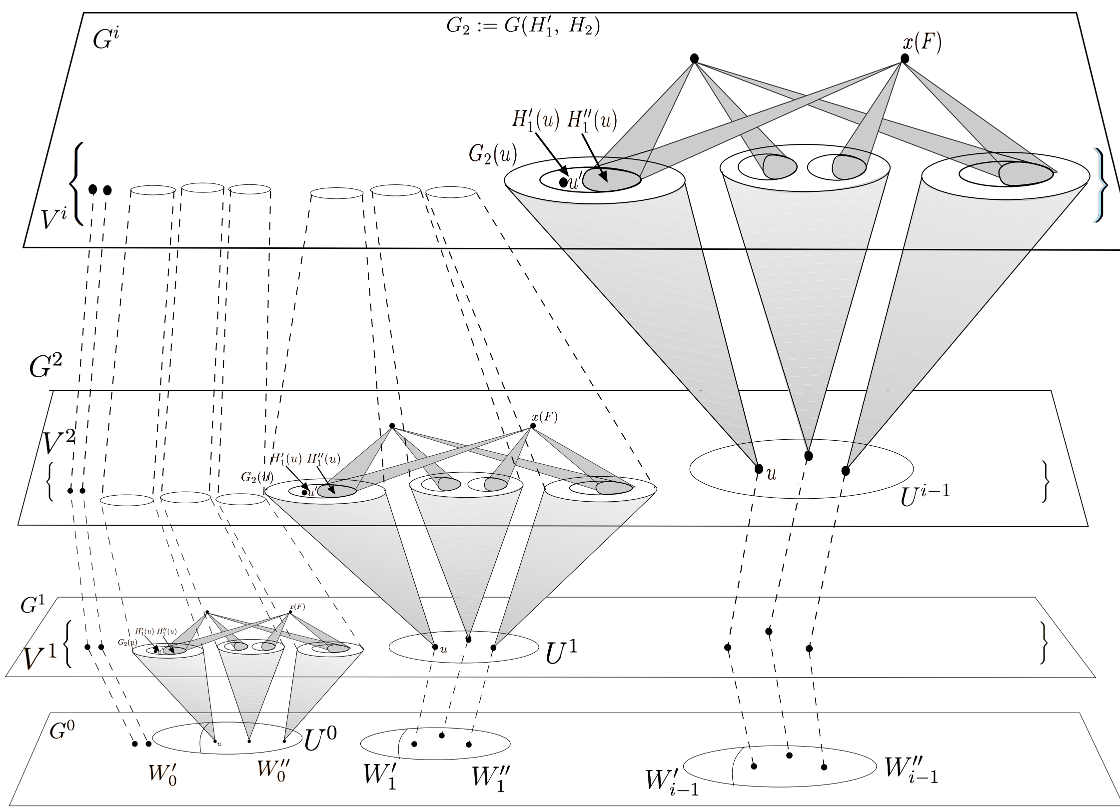

Figura 2.7. Construcción de G^i

Ahora mostraremos que $G := G^n$ satisface $(*)$. Para este fin, probaremos el siguiente enunciado $(**)$ sobre G^i para $i = 0, \dots, n$:

Para cada coloramiento de aristas con los colores 1 y 2, G^i contiene un subgrafo inducido H_1 coloreado con 1, o un subgrafo inducido H_2 coloreado con 2, o un subgrafo inducido H coloreado con 2 tal que $V(H) \subseteq V^i$ y la restricción de f^i a $V(H)$ es un isomorfismo entre H y $G^0[W'_k]$ para algún $k \in \{i, \ldots, n-1\}$. (**)

Nuevamente usaremos inducción para la demostración del enunciado $(**)$. Para $i = 0$, recordemos que G^0 es una copia de $G_1 = G(H_1, H'_2)$ y la definición de los conjuntos W_k, además que la función f^0 es la identidad en V^0. Así cualquier 2-coloración de las aristas de G^0 contiene un grafo inducido H_1 coloreado con 1, o un grafo inducido H'_2 coloreado con 2. Si contiene un grafo inducido H_1 se verifica $(**)$, si ocurre el segundo caso llamemos H al grafo inducido H'_2 coloreado con el color 2, de donde este grafo es uno de los $G[W_k]$ con $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, por tanto la restricción de la función identidad f^0 a $H \subseteq V^0$ es un isomorfismo entre H con sigo mismo. Luego se cumple $(**)$.

Ahora sea $1 \leq i \leq n$, y asumimos $(**)$ para valores más pequeños de i.

Supongamos una 2-coloración de las aristas de G^i ha sido dada. Para cada $u \in U^{i-1}$ hay una copia de de G_2 en G^i:

$$G^i \supseteq G_2(u) \simeq G(H'_1, H_2).$$

Si $G_2(u)$ contiene un inducido H_2 coloreado con 2 para algún $u \in U^{i-1}$, nosotros habríamos terminado la demostración.

Si no, entonces cada $G_2(u)$ tiene un subgrafo inducido $H'_1(u) \simeq H'_1$ coloreado con 1. Sea F la familia de estos grafos $H'_1(u)$, uno por cada $u \in U_{i-1}$, y sea $x := x(F)$, recordemos que x tiene como vértices adyacentes a todos los vértices de $H''_1(u) \subseteq H'_1(u)$ para cada $u \in U^{i-1}$, de donde los vértices $\{x\} \cup V(H'_1(u))$ generan un grafo isomorfo a H_1. Así, si, para algún $u \in U^{i-1}$, todas las aristas $x - H''_1(u)$ en G^i también están coloreadas con el color 1, esto produciría un subgrafo inducido H_1 de G^i coloreado con el color 1, y nuevamente terminaríamos la demostración.

Por tanto podemos asumir que cada $H''_1(u)$ tiene un vértice y_u para el cual la arista xy_u es coloreado con 2.

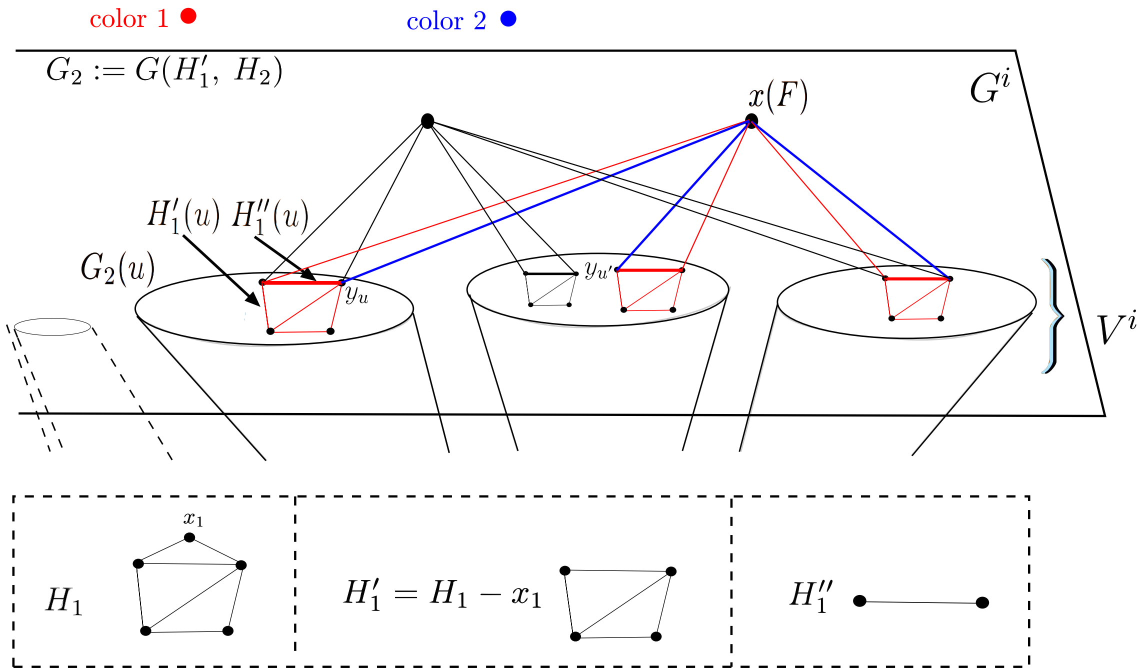

Figura 2.8. Coloreamiento de G^i

Definimos el conjunto

$$\tilde{U}^{i-1} := \{y_u |\ u \in U^{i-1}\} \subseteq V^i$$

de donde

$$f(y_u) = u; \quad [y_u \in H_1''(u) \subseteq G_2(u)] \tag{2}$$

definimos también

$$\tilde{G}^{i-1} := G^i \left[\tilde{U}^{i-1} \cup \{(v, \emptyset)|\ v \in V(G^{i-1}) \backslash U^{i-1}\}\right]$$

Ahora restringimos la función f a $f|\tilde{U}^{i-1}$ y extendemos su dominio con el conjunto $\{(v, \emptyset)|\ v \in V(G^{i-1}) \backslash U^{i-1}\}$ por la regla

$$(v, \emptyset) \mapsto v \tag{3}$$

De ahí usando (2), (3) y el hecho que $G^{i-1}[U^{i-1} \to G_2] \subseteq G^i$, esta función es un isomorfismo entre $\tilde{G}^{i-1}$ y G^{i-1}. De donde un coloreamiento de las aristas de G^i induce un coloreamiento de las aristas de G^{i-1}. Usando la hipótesis de inducción, dicha 2-coloración produce en G^{i-1}, un H_1 coloreado con el color 1, o un H_2 coloreado con el color 2, o un subgrafo inducido H' coloreado con el color 2, tal que $f^{i-1}|\ V(H')$, es un isomorfismo entre H' y $G^0[W_k'] \simeq H_2'$ para algún $k \in \{i-1, \ldots, n-1\}$. Si ocurre una de las dos primeras opciones, entonces esto también se cumple para $\tilde{G}^{i-1} \subseteq G^i$ y nuevamente tendríamos el resultado deseado.

Así asumamos el tercer caso y sea $\tilde{H}'$ el correspondiente subgrafo inducido de $\tilde{G}^{i-1} \subseteq G^i$ que también tiene el color 2, además $V(\tilde{H}') \subseteq V^i$,

$$f^i(V(\tilde{H}')) = f^{i-1} \circ f(V(\tilde{H}')) = f^{i-1}(V(H')) = W'_k$$

y de ahí $f^i|\, V(\tilde{H}')$ es un isomorfismo entre $\tilde{H}'$ y $G^0[W'_k]$.

Si $k \geq i$, esto completa la prueba de $(**)$ con $H := \tilde{H}'$; por tanto asumiremos que $k < i$, y de ahí $k = i - 1$. Como $f^{i-1} : V(H') \subseteq V^{i-1} \longrightarrow W'_{i-1} \supseteq W''_{i-1}$ produce un isomorfismo, entonces la imagen inversa de W''_{i-1} bajo f^{i-1} es un subconjunto de los vértices de H', en otras palabras H' contiene vértices $v \in V^{i-1}$ cuyos orígenes $f^{i-1}(v) \in W''_{i-1}$, de donde un subconjunto de U^{i-1} está contenido en $V(H')$, llamemos A a dicho conjunto. Ahora si consideramos el isomorfismo $\tilde{H}' \simeq G^0[W'_{i-1}]$, con la función

$$f^i : V(\tilde{H}') \longrightarrow V(H') \longrightarrow W'_{i-1},$$

De donde existe $\tilde{A} \subseteq \tilde{U}^{i-1}$ contenido en $V(\tilde{H}')$, tal que $f(\tilde{A}) = A$ aún más W'_{i-1} es la imagen de $\tilde{A}$ en el isomorfismo mencionado.

Por ultimo ya que $G^0[W'_{i-1}] \simeq H'_2$, considerando la definición de W''_{i-1} y el hecho de que x forma una arista con cada $y_u \in \tilde{A} \subseteq \tilde{U}^{i-1}$ y ningún otro vértice de $\tilde{H}$, entonces el conjunto de los vértices $\{x\} \cup V(\tilde{H}')$, generan un grafo isomorfo a H_2. Como $\tilde{H}'$ tiene coloreadas todas sus aristas del color 2 y cada xy_u también tiene el color 2, entonces hemos hallado una copia de H_2 con el color 2 en G^i, y la prueba de $(**)$ esta completa.

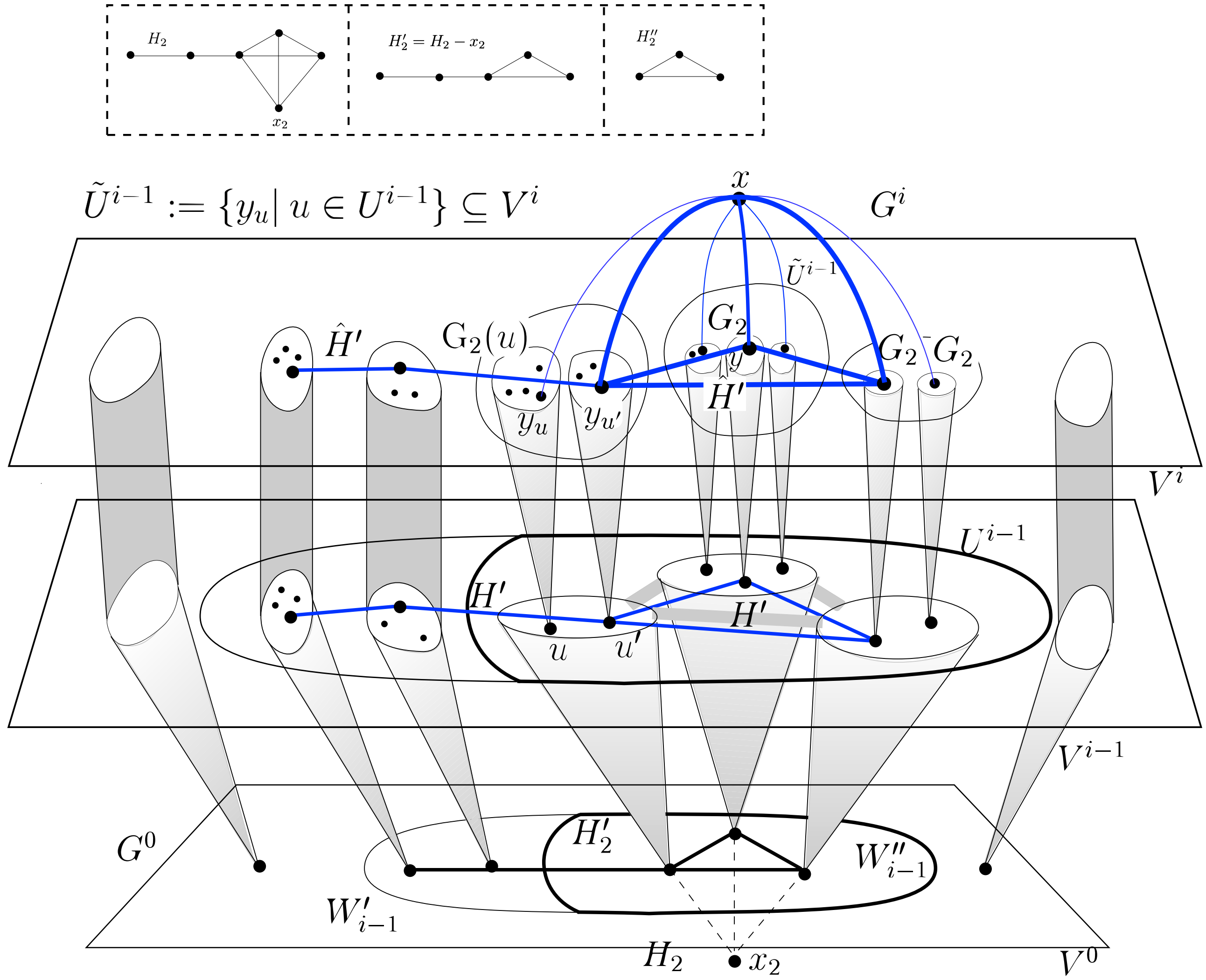

Figura 2.9. Copia monocromática de H_2 en G^i

$\square$

3

Aplicaciones de la Teoría de Ramsey

En está sección se presentaran algunos resultados tipo Ramsey en diferentes ramas de la matemática.

3.1. Teorema de I. Schur

Ahora presentaremos el primer teorema de tipo Ramsey, debido a I. Schur, el cual afirma que para cualquier coloración de los numeros naturales siempre es posible hallar subsucesiones monocromáticas arbitrariamente largas con la propiedad que el término mayor de la sucesión es la suma de los que le preceden.

Analicemos primeramente un ejemplo mas concreto dada una 2-coloración de los número naturales $\{1, 2, \ldots\}$ notemos que siempre existe un subconjunto monocromático que contiene los números a, b, c, de tal modo que $a + b = c$, donde es posible que $a = b$. Veamos, sin perdida de generalidad podemos suponer que 1 se ha coloreado de rojo, luego el número 2 tiene que ser azul ya que $2 = 1 + 1$, análogamente el número 4 debe ser rojo pues $4 = 2 + 2$, de este modo se sigue que el número 3 tiene que ser azul ya que $4 = 1 + 3$. Hasta ahora tenemos:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4$$

Pero ahora el número 5 no puede colorearse de tal modo que no se cumpla que es la suma de dos números monocromáticos, pues $5 = 1 + 4 = 2 + 3$.

Observemos que esto se cumple para cualquier subconjunto de los números naturales de la forma $\{1, 2, \ldots, n\}$, con $n \geq 5$, además como obtuvimos 1, 2, 3, 4, $n = 5$ es el menor número que lo cumple. Pero como es típico en problemas tipo Ramsey, para probar la existencia del menor número que satisfaga una propiedad, es suficiente encontrar al menos un número que lo cumpla. Dado la estrecha relación entre una coloración y una partición de un conjunto, a continuación presentamos formalmente el teorema de I. Schur.

Teorema 3.1. (Teorema de I. Schur) *Para cualesquiera enteros positivos t y r con $r \geq 2$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que, para cada partición de $\{1, \ldots, n\}$ en t conjuntos, como mínimo uno de los subconjuntos contiene números $x_1, x_2, \ldots, x_r$(no necesariamente distintos) tales que*

$$\sum_{i=1}^{r-1} x_i = x_r.$$

Demostración. Afirmamos que $n = R(2, t, r)$ satisface el enunciado, donde $R(2, t, r)$ es el número de ramsey que satisface que cualquier t-coloración de las aristas del grafo completo K^n contiene un subgrafo monocromático K^r. Sea $V(K^n) = \{1, \ldots, n\}$, dada un t-partición $P = \{C_1, \ldots, C_t\}$ de $\{1, \ldots, n\}$, definimos una t-coloración $f : E(K^n) = [\{1, \ldots, n\}]^2 \longrightarrow C$ para un cierto conjunto $C = \{1, 2, ..., t\}$ de t colores, como sigue:

$$f(\{a, b\}) = i, \text{sí, y sólo si } |a - b| \in C_i,$$
$$\text{Para todo } \{a, b\} \in E(K^n) = [\{1, \ldots, n\}]^2 \text{ y } i \in \{1, 2, ..., t\}.$$

(Notemos que como $a, b \in \{1, \ldots, n\}$ de ahí $1 \leq a \leq n$ y $-n \leq b \leq -1$ de donde $1 \leq |a - b| \leq n - 1$, pues $a \neq b$, luego $|a - b| \in \{1, \ldots, n\}$.) Por definición de $n = R(2, k, r)$ existe un monocromático r-conjunto $\{y_1, y_2, \ldots, y_r\}$(las vértices de un cierto subgrafo K^r de K^n). Sin perdida de generalidad asumamos que

$$1 \leq y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_r$$

Además

$$f(\{y_i, y_j\}) = c, \text{para todo } y_i, y_j \text{ distintos en } \{y_1, y_2, \ldots, y_r\}$$

$$\text{y } c \in C = \{1, 2, ..., t\} \text{ un color fijo}$$

también se cumple que $|y_i - y_j| \in C_c$.

Sean

$$\begin{aligned}
x_1 &= y_2 - y_1\\
x_2 &= y_3 - y_2\\
&\vdots\\
x_i &= y_{i+1} - y_i\\
&\vdots\\
x_{r-1} &= y_r - y_{r-1}\\
y\ finalmente&\\
x_r &= y_r - y_1
\end{aligned}$$

Evidentemente $x_i \in C_c$ para todo $i = 1, 2, \ldots, r$ y $C_c \in P = \{C_1, \ldots, C_t\}$. Además

$$\sum_{i=1}^{r-1} x_i = \sum_{i=1}^{r-1} y_{i+1} - y_i = y_r - y_1 = x_r.$$

$\square$

3.2. Erdös and Szekeres

La segunda aplicación será en el área de la geometría. Para ello se dará a continuación algunos conceptos necesarios.

Definición 3.1. Dado un conjunto A de puntos en el plano, se define el *el polígono que encierra a* A como el menor polígono convexo, P, que satisface que todo punto de A esta en P o en el *interior* de P. A este poligóno P se le da usualmente el nombre de *envolvente convexa.*

Definición 3.2. Un conjunto de A puntos en el plano se haya en posición general, si cualesquiera tres puntos de A no se encuentran sobre una misma linea recta.

Lema 3.1. *Dados $k \geq 4$ puntos en el plano, en posición general, si cualesquiera 4 de ellos son vértices de un cuadrilátero convexo, entonces los k puntos son los vértices de un k-gono convexo.*

Demostración. Sea l el número de lados de la envolvente convexa de estos k puntos, si $k = l$, habríamos terminado, Supongamos entonces que $l < k$ y sean $v_1, v_2, \ldots, v_l$ sus vértices. A partir del vértice v_1 tracemos rectas hacia los vértices $v_2, v_3, \ldots, v_l$. Como $l < k$, hay al menos un punto en el interior de l-gono convexo, además como los puntos están en posición general, este punto debe ser interior a unos de los triángulos: $\triangle v_1v_2v_3$, $\triangle v_1v_3v_4, \ldots, \triangle v_1v_{l-1}v_l$. Pero entonces, el punto interior y los 3 vértices del triángulo no forman un cuadrilátero convexo, lo cual es una contradicción. □

El siguiente problema fue propuesto por Esther Klein en 1933.

Problema 3.1. Probar que cualquier configuración de 5 puntos en el plano en posición general, siempre pueden hallarse 4 que constituyen los vértices de un cuadrilátero convexo.

E. Klein resolvió este problema analizando las posibles configuraciones de los 5 puntos. Como estos puntos están en posición general la envolvente convexa es un polígono de 5, 4 o 3 lados:

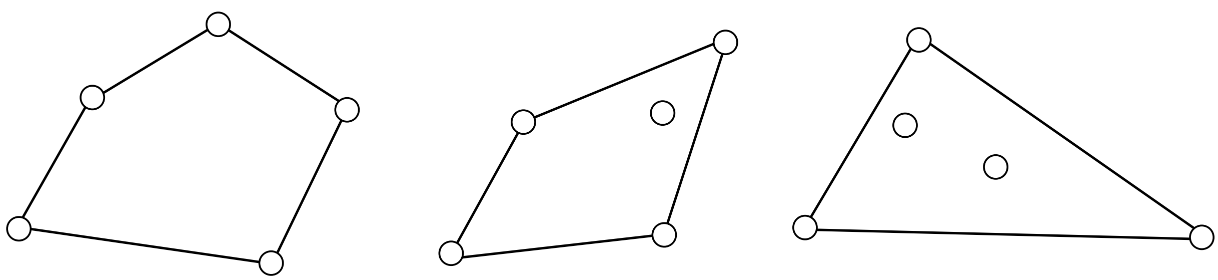

Figura 3.1. Envolvente convexa de 5 puntos (pentágono, cuadrilátero, triángulo)

En los dos primeros casos el resultado es inmediato. Y en el tercero, la linea l que une los puntos interiores corta al triángulo en dos de sus lados. Los dos puntos interiores, junto con los dos vértices del triángulo que quedan al mismo lado de la linea l forman el cuadrilátero convexo pedido.

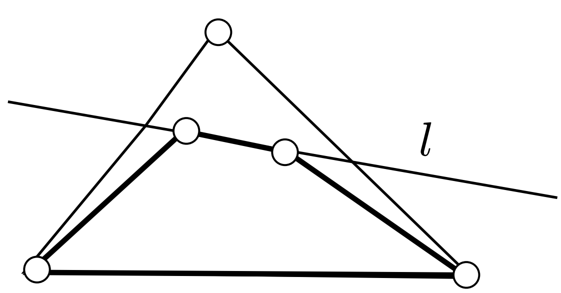

Figura 3.2. Cuadrilátero convexo cuando el cierre convexo está determinado por tres puntos

Pero podemos plantearnos una pregunta más general, como hicieron Erdös and Szekeres, la respuesta a esta cuestión está recogida en el siguiente teorema:

Teorema 3.2. (Erdös and Szekeres) *Para todo $k \geq 3 \in \mathbb{N}$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que entre cualesquiera n puntos en el plano, dados en posición general, hay k puntos que generan un k-gono convexo.*

Demostración. Si $k = 3$ o $k = 4$, el teorema esta resulto en particular para $n = 5$ por el problema 3.1. Supongamos $k \geq 5$, y afirmamos que $n = R(4, 2, k)$ satisface el enunciado, donde $n = R(4, 2, k)$ es el número de ramsey que satisface que cualquier 2-coloración de $[X]^4$, donde X es un n-conjunto contiene un monocromático k-conjunto.

Sea X el conjunto de n puntos en plano en posición general, y definamos una 2-coloración $f : [X]^4 \to C = \{1, 2\}$, de la siguiente forma:
Para todo $\{a, b, c, d\} \in [X]^4$

$$f(\{a,b,c,d\}) = \begin{cases} 1, & si\, los\, puntos\, a,\ b,\ c,\ d\, forman\, un\, cuadril\acute{a}tero\, no\, convexo \\ 2, & si\, los\, puntos\, a,\ b,\ c,\ d\, forman\, un\, cuadril\acute{a}tero\, convexo \end{cases}$$

Ahora por definición de n existe un monocromático k conjunto, notemos que como $k \geq 5$, el monocromático conjunto no puede tener el color 1, pues por el problema 3.1 un conjunto con más de 5 puntos forma al menos un cuadrilátero convexo. Entonces lo que se tiene es un subconjunto de k puntos con todos sus 4-subconjuntos coloreados con el color 2, es decir con todos sus cuadriláteros convexos. Luego por el Lema , se tiene que los k puntos forman un polígono convexo. ☐

3.3. Todo semigrupo finito tiene un elemento idempotente

Nos introducimos ahora al área del álgebra y dar uso a la teoría de Ramsey.

Un semigrupo finito es un conjunto finito en el que se define una operación binaria asociativa, que llamaremos producto. Un elemento e se dice que es idempotente si se cumple que $e * e = e$.

Teorema 3.3. *Todo semigrupo finito tiene un elemento idempotente.*

Demostración. Sea $(G, *)$ un semigrupo finito y sea $n = |G|$ (el orden del semigrupo). Tomemos un elemento aleatorio $a \in G$, luego llamemos a^t el producto (t-veces) del elemento a. Sea $m = R(2, n, 3)$, donde $R(2, n, 3)$ es el número de ramsey que satisface que cualquier n-coloración de las aristas del grafo completo K^m contiene un triángulo monocromático K^3. Dado un m-conjunto $\{1, 2, ..., m\}$

(pueden ser considerados los vértices enumerados de un K^m), definimos una n-coloración $f : [\{1, \ldots, m\}]^2 = E(K^m) \to G = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ (considerando a G como un conjunto de n colores) como sigue:
Para cualesquiera $\{i, j\} \in E(K^m)$ con $i < j$

$$f(\{i, j\}) = a^{j-i}; \quad \textit{donde } a^{j-i} \textit{ pertenece a } G \textit{ por la clausura en un semigrupo}$$

Así por la definición de $m = R(2, n, 3)$ y el teorema 1.6, existe un 3-conjunto $\{i, j, k\} \subseteq \{1, \ldots m\}$ monocromático (triángulo monocromático K^3).

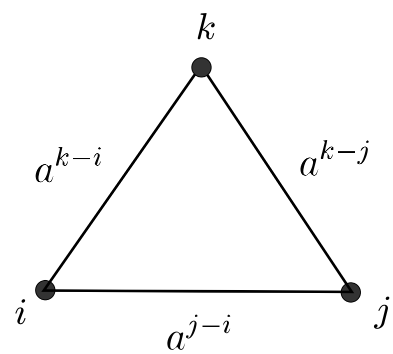

Figura 3.3. triángulo monocromático K^3 en K^m

Sin perdida de generalidad podemos asumir que $i < j < k$, de donde

$$f(\{i, j\}) = f(\{j, k\}) = f(\{i, k\}) = e \in G$$

es decir

$$a^{j-i} = a^{k-j} = a^{k-i} = e$$

además

$$a^{j-i} * a^{k-j} = a^{k-i}$$

por tanto

$$e * e = e$$

□

3.4. Teorema de Bolzano

Aquí daremos el primer uso del Teorema de Ramsey en su forma infinita aplicada en el área de Cálculo, y como es de esperarse si hablamos de conjuntos infinitos numerables un buen ejemplo de ello son las sucesiones infinitas de números reales. El Teorema de Bolzano afirma que dada cualquier sucesión infinita, siempre podemos encontrar una subsucesión infinita con un comportamiento regular, efectivamente este es un problema tipo Ramsey.

Teorema 3.4. *Cualquier sucesión infinita $\{a_n\}$ de números reales, contiene una subsucesión infinita que es o bien no decreciente o bien no creciente.*

Demostración. Para el empleo de el Teorema de Ramsey, buscaremos una c-coloración adecuada para $[\{a_n\}]^3$. Sean a_i, a_j, a_k tres elementos aleatorios de la sucesión $\{a_n\}$, con $i < j < k$ números naturales, por la tricotomía de los números reales tenemos el siguiente diagrama de árbol de decisiones.

- a_i, a_j, a_k
  - $a_i < a_j$
    - $a_j < a_k \longrightarrow \boxed{a_i < a_j < a_k}$
    - $a_j = a_k \longrightarrow \boxed{a_i < a_j = a_k}$
    - $a_j > a_k \longrightarrow \boxed{a_j > a_i \ \ y \ \ a_j > a_k}$
  - $a_i = a_j$
    - $a_j < a_k \longrightarrow \boxed{a_i = a_j < a_k}$
    - $a_j = a_k \longrightarrow \boxed{a_i = a_j = a_k}$
    - $a_j > a_k \longrightarrow \boxed{a_i = a_j > a_k}$
  - $a_i > a_j$
    - $a_j < a_k \longrightarrow \boxed{a_j < a_i \ \ y \ \ a_j < a_k}$
    - $a_j = a_k \longrightarrow \boxed{a_i > a_j = a_k}$
    - $a_j > a_k \longrightarrow \boxed{a_i > a_j > a_k}$

Podemos clasificarlos en solo 4 grupos definiendo una 4-coloración $f : [\{a_n\}]^3 \to C\{1,2,3,4\}$ como sigue:
Para todo $\{a_i, a_j, a_k\} \in [\{a_n\}]^3$ con $i < j < k$

$$f(\{a_i, a_j, a_k\}) = \begin{cases} 1, \quad si\ a_i \leq a_j \leq a_k \\ 2, \quad si\ a_j > a_i \ \ y \ \ a_j > a_k \\ 3, \quad si\ a_j < a_i \ \ y \ \ a_j < a_k \\ 4, \quad si\ a_i \geq a_j \geq a_k \ \ y \ \ a_i \neq a_j \neq a_k \end{cases}$$

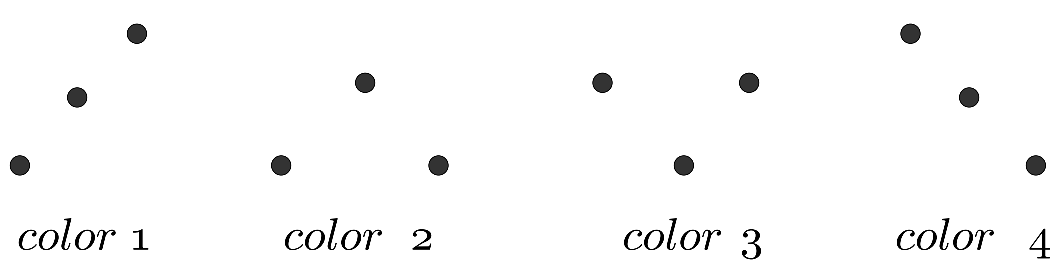

Figura 3.4. 4-coloración de $[\{a_n\}]^3$

De este modo por el Teorema 1.5 existe una subsucesión monocromática infinita $\{a_{n_k}\}$ de $\{a_n\}$, afirmamos que no puede tener el color 2 o 3. Supongamos que $\{a_{n_k}\}$ es monocromático respecto al color 2 y consideremos los subconjuntos, $\{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}\}$, $\{a_{n_2}, a_{n_3}, a_{n_4}\}$ de $\{a_{n_k}\}$ con $n_1 < n_2 < n_3 < n_4$. Se debería cumplir que

$$f(\{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}\}) = f(\{a_{n_2}, a_{n_3}, a_{n_4}\}) = 2$$

es decir se debe cumplir a la vez que

$$a_{n_2} > a_{n_1} \ \ y \ \ a_{n_2} > a_{n_3};$$
$$a_{n_3} > a_{n_2} \ \ y \ \ a_{n_3} > a_{n_4}$$

Lo que no puede ocurrir, y de modo similar para el color 3. Por tanto la subsucesión $\{a_{n_k}\}$ será monocromática respecto al color 1 o 2, es decir es una subsucesión infinita no decreciente (color 1) o no creciente (color 4).

$\square$

4

Números de Ramsey

En este último capitulo, se mostrara algunos resultados en la Teoría de Ramsey para grafos que nos permitirán conocer el número exacto de ciertos *nmeros de Ramsey*, o al menos tener cotas aproximadas, que gracias al Capítulo 2, tenemos garantizada su existencia.

4.1. Números de Ramsey

En el Capítulo 2 vimos dos notaciones para ciertos número de Ramsey $R(r)$ y $R(k, c, r)$, también consideramos alternativas formas de enunciar el Teorema 1.4, de donde siendo más precisos podemos denotar $R(r) = R(2, 2, r)$. Del mismo modo existe algunos casos particulares que aún no consideramos, que requieren una notación más general.

Para dar precisión a los número de Ramsey que estudiaremos en este capítulo, se presenta seguidamente otra alternativa de enunciar el Teorema de Ramsey.

Teorema 4.1. *Para cualquiera enteros positivos $r \geq 1$, $k \geq 1$, y $p_1, p_2 \ldots, p_r \geq k$, existe un entero positivo n tal que para todo conjunto finito X con $|X| \geq n$ se cumple lo siguiente. Para cada r-coloración de $[X]^k$ existe al menos un $i \in \{1, 2, \ldots r\}$ y un p_i-subconjunto X_i de X que es monocromático respecto al color i.*

Demostración. Sean $s = max\{p_1, p_2 \ldots, p_r \geq k\}$, entonces por el Teorema 1.6, existe un n tal que si $|X| \geq n$, entonces para cada r-coloración de $[X]^k$, X tiene un monocromático s-conjunto con respecto a algún color $i \in \{1, 2, \ldots r\}$. Por la definición de s, se tiene que $s \geq p_i$, de donde existe un p_i-conjunto, subconjunto del monocromático s-conjunto que continuara siendo monocromático, finalmente llamemos X_i a dicho p_i-conjunto. $\square$

Definición 4.1. Llamaremos *número de Ramsey* $R(p_1, p_2, \ldots, p_r; k)$ al mínimo entero n que cumpla las condiciones del Teorema 4.1.

Como en este capitulo será principalmente dedicado a resultados en Grafos, cabe mencionar un enunciado más del teorema de Ramsey que es solo un caso particular del anterior teorema.

Teorema 4.2. *Sean $p_1, p_2 \ldots, p_r \in \mathbb{N}$ tales que $p_1, p_2 \ldots, p_r \geq 2$. El número de Ramsey $R(p_1, p_2, \ldots, p_r; k)$ es el orden del grafo completo más pequeño el cuál al ser sus aristas r-coloreadas, posee un K^{p_i} monocromático de color i, para algún $i \in \{1, 2, \ldots r\}$.*

Demostración. En efecto si G es un grafo completo se tiene que $E(G) = [V(G)]^2$, luego el enunciado de este teorema no es otra cosa que el Teorema 4.1 para el caso en que $k = 2$. $\square$

4.2. Cotas superiores

Recordemos que en la demostración del Teorema 1.4, mostramos que $R(r, r; 2) \leq 2^{2r-3}$, está fue la única aproximación para ciertos números de Ramsey que se presento durante este trabajo, que ha sido suficiente para garantizar la existencia del mismo, al igual que se hizo en muchos resultados de tipo Ramsey. En el siguiente teorema se presentan algunos resultados relativos a estos números, mismos que nos serán de utilidad para acotarlos superiormente, y en algunos casos para conocerlos de manera precisa.

Teorema 4.3. *Para los números de Ramsey se verifica lo siguiente:*

a) $R(p_1, p_2, \ldots, p_r; 1) = p_1 + p_2 + \ldots + p_r - r + 1$.

b) $R(p, k; k) = R(k, p; k) = p$.

c) $R(p, q; 2) \leq R(p-1, q; 2) + R(p, q-1; 2)$.

d) $R(p, q; 2) < R(p-1, q; 2) + R(p, q-1; 2)$, *siempre que* $R(p-1, q; 2)$ *y* $R(p, q-1; 2)$ *son ambos pares.*

e) $R(p, q; 2) \leq \binom{p+q-2}{p-1}$.

f) $R(p_1, p_2, \ldots, p_r; k) \leq R(p_1, p_2, \ldots, p_{r-2}, R(p_{r-1}, p_r; k); k)$.

g) *Si* $r \geq 2$ *y* $p_1, p_2, \ldots, p_r \geq 3$, *entonces:*

$$R(p_1, p_2, \ldots, p_r; 2) \leq R(p_1 - 1, p_2, \ldots, p_r; 2) + R(p_1, p_2 - 1, \ldots, p_r; 2) +$$
$$\ldots + R(p_1, p_2, \ldots, p_r - 1; 2) - r + 2$$

Demostración. .

a) Sea $n = p_1 + p_2 + \ldots + p_r - r + 1$ y cualquier conjunto X, tal que $|X| = n$, notemos que los elementos de $[X]^1$, son los conjuntos unitarios de X, de donde $[X]^1$ también tiene n elementos, además $n = (p_1 - 1) + (p_2 - 1) + \ldots + (p_r - 1) + 1$, dada una r-coloración de $[X]^1$, con el conjunto de colores $C = \{1, 2, \ldots, r\}$ podemos considerar cada un de los r colores como r cajas, así por el Teorema 1.2(b), para algún $i \in \{1, \ldots, r\}$ existen p_i elementos de $[X]^1$ coloreados con el color i. Sean $\{x_1\}, \{x_2\}, \ldots \{x_{p_i}\}$ dichos elementos, sea $X_i = \bigcup_{j=1}^{p_i} \{x_j\}$, de ahí X_i es el monocromático p_i-subconjunto de X respecto al color i.

De este modo se obtuvo que $R(p_1, p_2, \ldots, p_r; 1) \leq p_1 + p_2 + \ldots + p_r - r + 1$, además el principio de palomar generalizado asegura que
$n = (p_1 - 1) + (p_2 - 1) + \ldots (p_r - 1) + 1$ es el menor entero con el que asegura que habrán p_i elementos coloreados con el color i, para un cierto $i \in \{1 \ldots r\}$. Por lo tanto $R(p_1, p_2, \ldots, p_r; 1) \geq p_1 + p_2 + \ldots + p_r - r + 1$ y así
$R(p_1, p_2, \ldots, p_r; 1) = p_1 + p_2 + \ldots + p_r - r + 1$

b) Veamos el caso $R(k, p\,; k)$, la demostración para el otro caso es análoga. Sea X un conjunto tal que $|X| = p$. Dado cualquier 2-coloración de $[X]^k$ con los colores $C = \{1, 2\}$, si existe al menos un elemento $\{x_1, \ldots, x_k\}$ de $[X]^k$ coloreado con el color 1, entonces este mismo conjunto es un k-subconjunto de X monocromático con respecto al color 1. Por otra parte si no existe algún elemento de $[X]^k$ coloreado con el color 1, significa que todos sus elementos tienen el color 2, de donde X mismo es un p-conjunto monocromático respecto al color 2. Así se tiene que $R(k, p; k) \leq p$. Ahora si $|X| \leq p - 1$, considerando la 2-coloración en que todos los elementos de $[X]^k$ tienen el color 2, es claro que no existe un k-conjunto X_1 monocromático respecto al color 1, ni un p-subconjunto X_2 monocromático respecto al color 2. Luego $R(k, p; k) \geq p$ y por tanto $R(k, p; k) = p$.

c) Sea $n = R(p-1, q; 2) + R(p, q-1; 2)$ y consideremos cualquier 2-coloración de las aristas de K^n con el conjunto de colores $C = \{1, 2\}$. Debemos mostrar que está coloración produce un monocromático K^p o un monocromático K^q respectivamente a los colores 1 y 2. Para esto, sea x un vértice de K^n. Como en un grafo completo cada vértice es adyacente a todos los demás, así $d(x) = n - 1 = R(p-1, q; 2) + R(p, q-1; 2) - 1 = (R(p-1, q; 2) - 1)$ $+ (R(p, q-1; 2) - 1) + 1$, de donde por el Teorema 1.2(b), existen como mínimo $n_1 = R(p-1, q; 2)$ aristas incidentes con x coloreados con el color 1, o existen como mínimo $n_2 = R(p, q-1; 2)$ aristas incidentes con x coloreados con el color 2. Supongamos que ocurre el primer caso, consideramos un subgrafo K^{n_1} de K^n generado por n_1 vértices unidos a x mediante aristas coloreadas con el color 1. Ya que $n_1 = R(p-1, q; 2)$ y la 2-coloración de las aristas de K^n también genera una 2-coloración de las aristas de K^{n_1}, entonces K^{n_1} contiene un monocromático K^{p-1} respecto al color 1 o un monocromático K^q respecto al color 2. Si ocurre lo segundo habríamos terminado, y si ocurre lo primero, K^{p-1} junto al vértice x forman un monocromático K^p en K^n respecto al color 1. Para el caso en que existan $n_2 = R(p, q-1; 2)$ aristas incidentes con x coloreados con el color 2, la demostración es análoga. Por tanto $R(p, q; 2) \leq R(p-1, q; 2) + R(p, q-1; 2)$.

d) Sea $n = R(p-1, q; 2) + R(p, q-1; 2) - 1$, como $R(p-1, q; 2)$ y $R(p, q-1; 2)$ son pares entonces n es impar. Para todo vértice x de K^n,se tiene que $d(x) = n - 1 = R(p-1, q; 2) + R(p, q-1; 2) - 2$. Dada una 2-coloración de las aristas de K^n, si ocurre que existe algún vértice de K^n con igual o más $R(p-1, q; 2)$ aristas incidentes coloreados con el color 1, o $R(p, q-1; 2)$ aristas incidentes coloreados con el color 2, entonces por la demostración de (c) se tiene un monocromático K^p o K^q en K^n con los colores 1 o 2 respectivamente.

Si no ocurre ninguno de esos dos casos, entonces todos los vértices de K^n tienen exactamente $R(p-1, q; 2) - 1$ y $R(p, q-1; 2) - 1$ aristas incidentes coloreadas con el color 1 y 2 respectivamente. Sean $V = V(K^n)$ y $E = \{\{v, w\} \in E(K^n) | \{a, b\}$ tienen el color $1\}$, ahora consideremos al grafo $G = (V, E)$. Claramente $|G| = n$ y además por lo mencionado anteriormente para todo $v \in V = V(G)$, v tiene $m = R(p-1, q; 2) - 1$ aristas incidentes en G, es decir $d(v) = m$, como n y m son números impares, esto es una contradicción con la Proposición A.1 (G tiene una cantidad impar de vértices con grado impar). Por tanto este caso no es posible de donde tenemos que

$$R(p, q; 2) \leq R(p-1, q; 2) + R(p, q-1; 2) - 1 < R(p-1, q; 2) + R(p, q-1; 2).$$

e) Se utilizara inducción sobre $p + q$. Supongamos que $p = 2$ o $q = 2$, luego de

b), se cumple que:

$$R(2,q;2) = q = \binom{2+q-2}{2-1} = \binom{q}{1} \;\; o \;\; R(p,2;2) = p = \binom{p+2-2}{p-1}$$

Y se verifica la proposición.

Supongamos ahora que $p > 2$ y $q > 2$ y que la desigualdad en e) se cumple para todo par (p',q') con $4 \leq p' + q' < p + q$. Luego usando c) y la hipótesis de inducción en los pares $(p-1, q)$ y $(p, q-1)$, se tiene que

$$\begin{aligned} R(p,q;2) &\leq R(p-1,q;2) + R(p,q-1;2) \\ &\leq \binom{p+q-3}{p-2} + \binom{p+q-3}{p-1} \\ &= \binom{p+q-2}{p-1} \end{aligned}$$

f) Sean $n = R(p_1, p_2, \ldots, p_{r-2}, R(p_{r-1}, p_r; k); k)$ y un conjunto X tal que $|X| \geq n$. Sea f cualquier r-coloración de $[X]^k$, $f : [X]^k \longrightarrow C = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$, construyamos una $r-1$-coloración $g : [X]^k \longrightarrow D = \{b_1, b_2, \ldots, b_{r-1}\}$, a partir de f, como sigue:
Para todo $x \in [X]^k$

$$g(x) = \begin{cases} b_i, & si\ f(x) = a_i, para\ todo\ i = 1, 2, \ldots, r-2 \\ b_{r-1}, & si\ f(x) = a_{r-1}\ o\ f(x) = a_r \end{cases};$$

Luego por el Teorema 4.1, existe un p_i-subconjunto X_i monocromático de X respecto al color b_i, con $i = \{1 \ldots, r-2\}$ o un monocromático subconjunto Y de X con respecto al color b_{r-1}, tal que $|Y| = R(p_{r-1}, p_r; k)$. Si ocurre lo primero, por la definición de g respecto a la coloración f, el p_i-subconjunto X_i monocromático de X respecto al color b_i, también será monocromático respecto al color a_i, con $i = \{1 \ldots, r-2\}$. Supongamos entonces que existe el monocromático subcojunto Y con respecto al color b_{r-1}, es decir para todo $y \in [Y]^k$, $g(y) = b_{r-1}$, o bien $f(y) = a_{r-1}$ o a_r. Sea $h : [Y]^k \longrightarrow \{c_1, c_2\}$ una 2-coloración de $[Y]^k$ como sigue:
Para todo $y \in [Y]^k$

$$h(y) = c_1,\ si\ f(y) = a_{r-1}\ \ y\ \ h(y) = c_2\ si\ f(y) = a_r$$

Ya que $|Y| = R(p_{r-1}, p_r; k)$, entonces nuevamente por el Teorema 4.1, existe un
p_{r-1}-subconjunto X_{r-1} de $Y \subseteq X$ monocromático respecto al color c_1, o un

p_r-subconjunto X_r de $Y \subseteq X$ monocromático respecto al color c_1. Finalmente por la definición de h, estos conjuntos también serán monocromáticos respecto a los colores a_{r-1} o a_r respectivamente.

Por tanto $R(p_1, p_2, \ldots, p_r; k) \leq R(p_1, p_2, \ldots, p_{r-2}, R(p_{r-1}, p_r; k); k)$.

g) Para cada i, $1 \leq i \leq r$ definimos:

$$R_i = R(p_1, \ldots, p_{i-1}, p_1 - 1, p_{i+1}, \ldots, p_r; 2.$$

Sean $n = R_1 + R_2 + \ldots + R_r - r + 2$ y $f : E(K^n) \longrightarrow C = \{1, 2, \ldots, r\}$ una r-coloración de las aristas de K^n. Dado un vértice arbitrario $v \in K_n$ definimos el conjunto

$$V_i = \{w \in V(K^n) | w \neq v \;\; y \;\; f(\{v, w\}) = i\}.$$

Ahora como

$$\sum_{i=1}^{r} |V_i| = n - 1 = \sum_{i=1}^{k} R_i - r - 1 = (R_1 - 1) + (R_2 - 1) + \ldots + (R_r - 1) + 1.$$

Por el Principio de Palomar generalizado, se sigue que para algún
$i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ V_i contiene al menos R_i elementos, es decir $|V_i| \geq R_i$. Luego el subgrafo completo generado por V_i contiene un subgrafo completo K^{p_j} monocromático de color j, para algún $j \neq i$, o contiene un subgrafo $K^{p_i - 1}$ de color i. Si ocurre el primer caso ya hemos terminado, y si ocurre el segundo caso entonces los vértices de $K^{p_i - 1}$ y el vértice v generan un subgrafo completo K^{p_i} monocromático de color i.

□

4.3. Números exactos

Ahora tenemos las herramientas necesarias para conocer ciertos números exactos de Ramsey. A continuación se presentan algunos ejemplos.

Ejemplo 4.1. $R(3, 3; 2) = 6$.

Nuestro primer ejemplo es un famoso problema que generalmente se lo presenta como sigue:

En un fiesta de seis personas siempre hay un grupo de tres en que todos se conocen uno al otro, o todos son extraños para cada uno.

Por supuesto la manera más fácil de demostrar este problema es usando la Teoría de Grafos. Consideremos el grafo completo $G = K^6$. Se representa las seis personas por los seis vértices de G. Ahora coloreamos las aristas uniendo dos vértices de azul, si las correspondientes personas se conocen uno al otro. Si dos personas no se conocen el uno al otro, coloreamos la arista entre los correspondientes de rojo. Si existen tres personas quienes se conocen uno al otro, entonces esto es representado por un triángulo en K^6, mediante los vértices correspondientes a las personas. Simuladamente, si hay tres personas quienes no se conocen uno al otro entonces esto es representado por un triángulo rojo.

Dada una 2-coloración arbitraria de $G = K^6$ con el conjunto de colores $C = \{azul,\ rojo\}$, tomemos un vértice arbitrario $a \in G$, como $d(a) = 5$, cuando coloremos las aristas incidentes con a, por el Principio del palomar, un color debe ser usado como mínimo tres veces. Sin perdida de generalidad asumamos que a tiene al menos tres aristas incidentes de color $azul$.

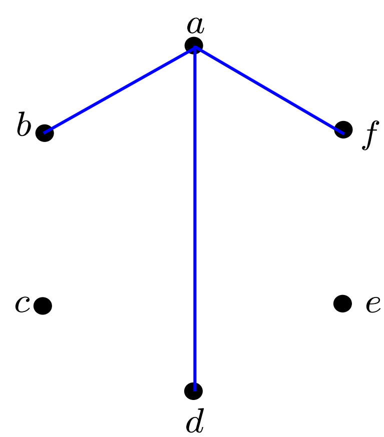

Figura 4.1. tres aristas azules incidentes con a.

Sean ab, ad, af las aristas coloreadas de $azul$, si cualquiera de las aristas bd, df o bf son coloreadas con el color $azul$, ya tendríamos el deseado triángulo azul, de donde podemos suponer que las aristas bd, df y bf son coloreadas con el color $rojo$. Sin embargo, esto entonces nos da un triángulo rojo y el argumento es completado.

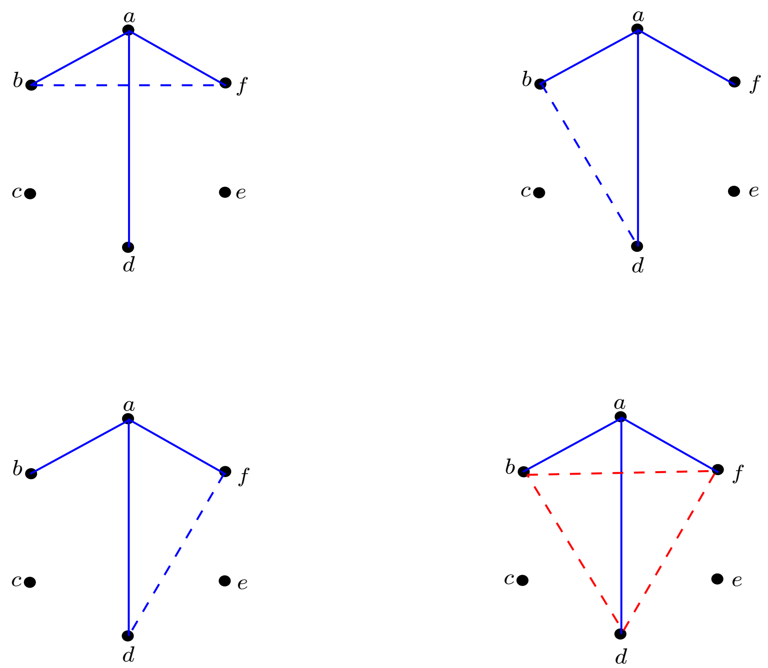

Figura 4.2. Posibles triángulos K^3 monocromáticos en K^6.

De este modo se obtiene que $R(3,3;2) \leq 6$. Y de la siguiente 2-coloración de K^5 se tiene que $R(3,3;2) > 5$. Pues claramente no hay un K^3 rojo o azul.

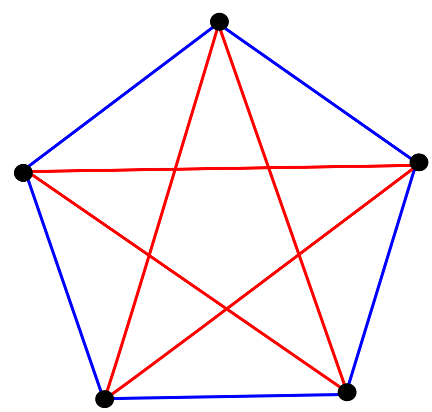

Figura 4.3. 2-coloración de K^5.

Finalmente concluimos que $R(3,3;2) = 6$.

Ejemplo 4.2. $R(3,4;2) = 9$.

Por el Teorema 4.3(b), tenemos que $R(2,4;2) = 4$, además por el ejemplo anterior $R(3,3;2) = 6$, luego por el Teorema 4.3(d) se cumple que:

$$R(3,4;2) < R(2,4;2) + R(3,3;2) = 10$$

Por tanto $R(3,4;2) \leq 9$.

Ahora obsérvese que en la siguiente 2-coloración de K^8 no hay K^3 azules, ni K^4 rojos.

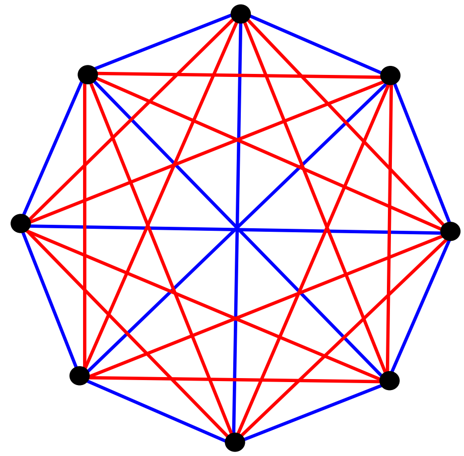

Figura 4.4. 2-coloración de K^8.

De esto se sigue que $R(3,4;2) > 8$, y por tanto $R(3,4;2) = 9$.

Ejemplo 4.3. (R. E. Greenwood, A. M. Gleason).$R(3,5;2) = 14$.

Tenemos que $R(2,5;2) = 5$ gracias al inciso (b) del Teorema 4.3, y por el resultado del ejemplo anterior $R(3,4;2) = 9$, luego por el Teorema 4.3(c), tenemos que:

$$R(3,5;2) \leq R(2,5;2) + R(3,4;2) = 14$$

Además de la siguiente 2-coloración de K^{13} se sigue que $R(3,5;2) > 13$. Ya que como puede observarse está no contiene K^3 rojos o K^5 azules.

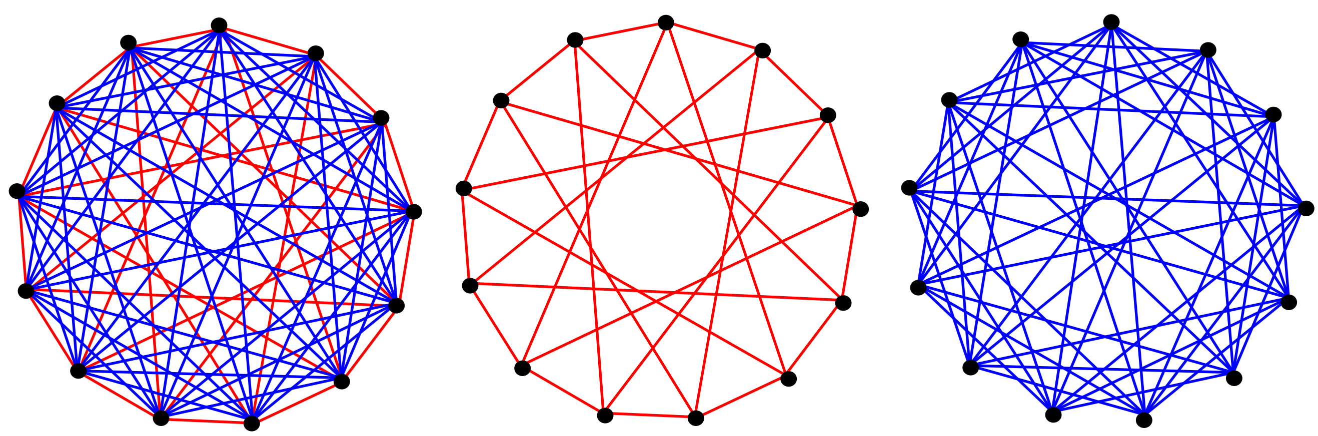

Figura 4.5. 2-coloración de K^{13}.

De donde, $R(3,5;2) = 14$.

Ejemplo 4.4. $R(3,3,3;2) \leq 17$.

Usando el inciso g) del Teorema 4.3, se tiene

$$\begin{aligned} R(3,3,3;2) &\leq R(2,3,3;2) + R(3,2,3;2) + R(3,3,2;2) - 3 + 2 \\ &= 3R(2,3,3;2) - 1. \end{aligned}$$

Ahora por el Teorema 4.3(f), se sigue

$$\begin{aligned} R(3,3,3;2) &\leq 3R(2, R(3,3;2);2) - 1 \\ &= 3R(2,6;2) - 1 \quad [\textit{pues del ejemplo}\, 5{,}1\ R(3,3;2) = 6] \\ &= 3(6) - 1 \quad [\textit{Teorema}\, 4.3(\mathrm{b})] \\ &= 17. \end{aligned}$$

Bibliografía

[1.] Reinhard Diestel, *Graph Theory*. Graduate Text in Mathematis, Vol. 173, Springer.

[2.] Béla Bollobás,*Modern graph theory*. Graduate Text in Mathematis, Vol. 184, Springer.

[3.] Robin J. Wilson, *Teoría de Grafos*.

[4.] On a problem of formal logic, Proccedings of London Mathematical Society, *F. P. Ramsey* 30 (1930), 264286.

[5.] Duane Detemple, William Webb, *Combinatorial Reasoning*. Department of Mathematics, Univ. Pullman, WA.

[6.] P. Erdös, G. Szekeres, *A combinatorial problem in geometry*. Compositio Mathematica 2 (1935).

[7.] Emilio Fernández y Luz Roncal, *Los números de Ramsey y el álgebra*. Gaceta. R. Soc. Mat. Esp. 15, 2012.

[8.] Jhon Clark y Derek Allan Holton, *A first look at graph theory*. World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 1991.

[9.] Matthew Steed, *Some theorems and applications of Ramsey Theory*.

[10.] Pablo Fernández y Jose L. Fernández, *El desorden absoluto es imposible: La Teoría de Ramsey*. La Gaceta, (2), 263-289,1999.

[11.] Stanislaw P. Radziszowski, *Small Ramsey Numbers*. Department of Computer Science Rochester Institute of Technology Rochester, NY 14623, 2004.

A

Apéndice

A.1. Conceptos básicos de la Teoría de Grafos

Para el desarrollo de algunas ideas necesarias en el presente trabajo se requerirá de algunos conceptos de la teoría de grafos, mismos que se exponen a continuación.

Definición A.1. Un grafo es un par $G = (V, E)$ de conjuntos tales que $E \subseteq [V]^2$. Los elementos de V y E son los *vértices* y *aristas* de G respectivamente.

Una grafo $G = (V; E)$ admite una representación en el plano de la siguiente manera: a cada vértice $u \in V$ se le asigna un punto en el plano (puntos distintos se asignan a vértices distintos), y cada arista $\{u, v\} \in E$ se representa por una línea entre los puntos que le corresponden a los vértices u y v. La manera en la que los puntos y las líneas es dibujada es irrelevante, pues lo que interesa es saber cuáles vértices determinan una arista y cuáles no. Un grafo con el conjunto de vértices V es llamado un grafo sobre V. El conjunto de vértices de un grafo G es denotado por $V(G)$ y su conjunto de aristas como $E(G)$. Esta convención es independiente de los nombres asignados a estos conjuntos, así el conjunto de vértices W de un grafo $H{=}(W, F)$ se seguiría denotando por $V(H)$, no por $W(H)$. No siempre se distinguirá estrictamente entre un grafo y sus conjuntos de vértices y aristas. Por ejemplo, se puede hacer referencia a un vértice $v \in G$ (en lugar de $v \in V(G)$), o a una arista $e \in G$ (en vez de $e \in E(G)$).

El número de vértices de un grafo G es su *orden*, se denota como $|G|$; el número de sus aristas es denotado por $||G||$. Un grafo puede ser *finito*, *infinito*, *contable*, y así de acuerdo a su orden. Un grafo es llamada trivial si su orden es 0 o 1. Una arista $\{x, y\}$ será escrita usualmente como xy, (o yx). Un vértice v es *incidente* con una arista e si $v \in e$; entonces e es una arista en v. Los dos vértices incidentes con una arista son sus *extremos*.

Dos vértices x, y de G son *adyacentes*, o *vecinos*, si xy es una arista de G. Dos aristas $e \neq f$ si tienen un extremo en común. Dos vértices o aristas no adyacentes serán llamados *independientes*. Más aún, un conjunto de vértices o aristas es independiente si no contiene algún par de elementos adyacentes.

Un grafo G que satisface que todos sus pares de vértices son adyacentes es llamado un *grafo completo*. Un grafo completo de orden n se denota por K^n.

Definición A.2. Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ dos grafos. Llamamos G y G' *isomorfos*, y escribimos $G \simeq G'$, si existe una biyección $\varphi : V \to V'$ con $xy \in E \Leftrightarrow \varphi(X)\varphi(Y) \in E'$ para cada $x, y \in V$. Una función φ que satisface lo anterior es llamada un *isomorfismo*; si $G = G'$, es llamada un *automorfismo*.

Definición A.3. Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ grafos, diremos que:

- $G \cup G' := (V \cup V', E \cup E')$ y $G \cap G' := (V \cap V', E \cap E')$.
- Si U es cualquier conjunto de vértices (usualmente de G), escribimos $G - U$ en vez de $G[V \setminus U]$,es decir $G - U$ es el grafo obtenido desde G por eliminar todos los vértices en $V \cap U$ y sus aristas incidentes. Si $U = \{v\}$ escribimos $G - v$ en vez de $G \setminus \{v\}$.
- El complemento $\overline{G}$ de G es el grafo sobre V con el conjunto de aristas $[V]^2 \setminus E$.

Definición A.4. Dado un vértice v de un grafo G, el grado de v, denotado por $d(v)$, es la cantidad de aristas que inciden con él o el número de vértices adyacentes con él. Un vértice de grado 0 es *aislado*.
par Si sumamos todos los grados de cada vértice en de un grafo G, entonces contaremos cada arista de G exactamente dos veces, una vez por cada uno de sus vértices extremos. Así

$$|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v)$$

Proposición A.1. El número de vértices de grado impar en un grafo es siempre par.

Demostración. Dado un grafo $G = (V, E)$, entonces se cumple que

$$\begin{aligned}
2|E| &= \sum_{v \in V} d(v) \\
&= \sum_{v \in V_1} d(v) + \sum_{v \in V_2} d(v); \quad \textit{donde } V_1 \textit{ es el conjunto de vértices} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{de grado impar y } V_2 \textit{ de grado par} \\
&= \sum_{v \in V_1} d(v) + 2m \;\; \textit{para un cierto entero } m \; (\textit{suma de números pares es par}) \\
&\Rightarrow \sum_{v \in V_1} d(v) = 2k \;\; \textit{para un cierto entero } k \\
&\Rightarrow |V_1| \textit{ es par.}
\end{aligned}$$

Es decir hay una cantidad par de vértices con grado impar. □