Universidad Mayor De San Andrés

Facultad De Ciencias Puras Y Naturales
Carrera De Matemática

Teoría De Picard - Vessiot

(ÁLGEBRA)

Proyecto de Grado

para obtener el Titulo de Licenciatura.

Por: Erasmo Chura Callisaya

Tutor: M.Sc. Charlie Lozano

La Paz - Bolivia

2018

En Memoria de

CÁRDENAS - MAMANI

mi familia

oriunda de Wilila, La Paz.

(Wilila actualmente Villa Armonía, ciudad de La Paz.)

Agradecimientos

A M.Sc. Charlie Lozano por su paciencia conmigo y guía durante la elaboración de este proyecto.

A Lic. Ramiro Choque por la paciencia y ser el artifice de este momento.

A Lic. Raul Borda por la paciencia, comprensión y colaboración durante mis exposiciones.

Introducción

Consideramos ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de orden n sobre un campo diferencial K de la forma:

$$\mathcal{L}(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

donde $a_i \in K$ para $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Si L es una extensión campo diferencial de K, es decir un campo diferencial que contiene a K con derivación extendida de K, el conjunto de soluciones de $\mathcal{L}(y) = 0$ en L es un espacio vectorial sobre C_L de dimensión $\leq n$. Un sistema fundamental de soluciones de $\mathcal{L}(y) = 0$ es un conjunto de n soluciones de la ecuación diferencial en alguna extensión diferencial L de K linealmente independiente sobre C_L.

Una extensión Picard - Vessiot para $\mathcal{L}(y) = 0$ sobre K es una extensión campo diferencial de K diferencialmente generado por un sistema fundamental de soluciones de $\mathcal{L}(y) = 0$, es decir generado por los elementos del sistema fundamental y sus derivadas, y no agrega constantes. La teoría de Picard - Vessiot es debido a E. Picard, E. Vessiot y en forma riguroso a E. Kolchin, quién construyo con el trabajo de J.F. Ritt en álgebra diferencial. La teoría de Picard - Vessiot construido bajo la hipótesis que el campo de constantes C_K del campo diferencial K es algebraicamente cerrado. Obtenemos existencia y unicidad, hasta K- isomorfismo diferencial, de la extensión Picard - Vessiot de la ecuación diferencial.

Índice general

Capítulo 1

Estructuras diferenciales

En este capítulo introducimos la noción de derivación y algunas propiedades algebraicas. Estudiamos las estructuras diferenciales tales como: morfismos diferenciales, anillos cocientes diferenciales, extensiones de campos diferenciales. En todo el trabajo tratamos con anillos conmutativos con identidad y campos de características cero.

1.1. Derivación

Definición 1.1.1. Una *derivación* del anillo R es un aplicación

$$\begin{aligned} d_R : R &\longrightarrow R \\ a &\longmapsto d_R(a) \end{aligned}$$

tal que

1. $d_R(a+b) = d_R(a) + d_R(b)$
2. $d_R(ab) = d_R(a)b + ad_R(b)\ \forall a, b \in R.$

Definición 1.1.2. Sea $a \in R$, $d_R^{(n)}(a) = d_R(d_R \cdots d_R(a) \cdots))$, donde d_R es aplicado $n \in \mathbb{Z}^+$ veces, convención $d_R^{(0)}(a) = a$.

Notación, $d_R(a) = a', d_R^{(2)}(a) = a^{(2)}, \ldots, d_R^{(n)}(a) = a^{(n)}$ y $d_R(d_R^{(n)}(a)) = d_R^{(n+1)}(a)$.

Tenemos ejemplos de derivación.

Ejemplo 1.1.3. Sea R anillo no conmutativo, con aplicación

$$\begin{aligned} d_a : R &\longrightarrow R \\ x &\longmapsto d_a = ax - xa \end{aligned}$$

para cualquier $a \in R$.

Demostración. Verificamos la primera definición de derivación, sea cualquier $x, y \in R$

$$\begin{aligned} d_a(x+y) &= a(x+y) - (x+y)a \\ &= ax + ay - (xa + ya) \\ &= ax + ay - xa - ya \\ &= ax - xa + ay - ya \\ &= (ax - xa) + (ay - ya) \\ &= d_a(x) + d_a(y) \end{aligned}$$

y finalmente la segunda definición.

$$\begin{aligned} d_a(xy) &= a(xy) - (xy)a \\ &= axy - xay + xay - xya \\ &= (ax - xa)y + x(ay - ya) \\ &= d_a(x)y + ad_a(y) \end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.1.4. Cualquier anillo conmutativo con identidad R puede ser dotado con la *derivación trivial* $d_R = 0$, por lo tanto R es anillo diferencial.

En $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$, las únicas derivaciones son las *derivaciones triviales*.

Ejemplo 1.1.5. Sea R anillo diferencial y $R[x]$ un anillo polinomial en una indeterminada x sobre R. Una derivación en $R[x]$ extendido de R satisface

$$\begin{aligned} d_{R[x]} : R[x] &\longrightarrow R[x] \\ \left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right) &\longmapsto d_{R[x]}\left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{m} (d_R(a_i)x^i + a_i i x^{i-1} d_{R[x]}(x)) \end{aligned}$$

Entonces extendemos la derivación de R a $R[x]$ asignando a $d_{R[x]}(x)$ un valor arbitrario en $R[x]$.Por iteración, damos una estructura diferencial a $R[x_1, \ldots, x_n]$.

Demostración. Sea

$$p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i,\ q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i \in R[x]$$

por definición de suma en $R[x]$ consideramos el caso cuando $p(x)$ y $q(x)$ tienen el mismo grado, para el otro caso completamos con coeficientes cero hasta tener de mismo grado.

$$p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i + \sum_{i=0}^{m} b_i x^i = \sum_{i=0}^{m} (a_i + b_i) x^i$$

por definición de multiplicación en $R[x]$

$$p(x)q(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \sum_{j=0}^{n} b_j x^j = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_i b_j x^{i+j}$$

- demostramos la primera definición de anillo diferencial

$$\begin{aligned}
d_{R[x]}((p(x)+q(x))) &= d_{R[x]}\left(\left(\sum_{i=0}^{m}(a_i+b_i)x^i\right)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{m} d_R(a_i+b_i)x^i + \sum_{i=0}^{m}(a_i+b_i)x^{i-1}d_{R[x]}(x) \\
&= \sum_{i=0}^{m}(d_R(a_i)+d_R(b_i))x^i + \sum_{i=0}^{m} a_i i x^{i-1} d_{R[x]}(x) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{m} b_i i x^{i-1} d_{R[x]}(x) \\
&= \sum_{i=0}^{m} d_R(a_i)x^i + \sum_{i=0}^{m} d_R(b_i)x^i + \sum_{i=0}^{m} a_i i x^{i-1} d_{R[x]}(x) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{m} b_i i x^{i-1} d_{R[x]}(x) \\
&= \sum_{i=0}^{m} d_R(a_i)x^i + \sum_{i=0}^{m} a_i i x^{i-1} d_{R[x]}(x) + \sum_{i=0}^{m} d_R(b_i)x^i \\
&+ \quad \sum_{i=0}^{m} b_i x^{i-1} d_{R[x]}(x) \\
&= d_{R[x]}(p(x)) + d_{R[x]}(q(x))
\end{aligned}$$

- demostramos la segunda definición de anillo diferencial

$$d_{R[x]}(p(x)q(x)) = d_{R[x]}\left(\left(\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j x^{i+j}\right)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= d_{R[x]}\left(\sum_{i=0}^{m}\left(\sum_{j=0}^{n} a_i b_j\right) x^{i+j}\right)\\
&= \sum_{i=0}^{m} d_R\left(\sum_{j=0}^{n} a_i b_j\right) x^{i+j} + \sum_{i=0}^{m}\left(\sum_{j=0}^{n} a_i b_j\right)(i+j)x^{i+j-1} d_{R[x]}(x)\\
&= \sum_{i=0}^{m}\left(\sum_{j=0}^{n} d_R(a_i)b_j + a_i d_R(b_j)\right) x^{i+j}\\
&\qquad + \sum_{i=0}^{m}\left(\sum_{j=0}^{n} a_i b_j\right)(i+j)x^{i+j-1} d_{R[x]}(x)\\
&= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} d_R(a_i)b_j x^{i+j} + \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_i d_R(b_j) x^{i+j}\\
&\qquad + \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j i x^{i+j-1} d_{R[x]}(x) + \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j j x^{i+j-1} d_{R[x]}(x)\\
&= \sum_{i=0}^{m} d_R(a_i)x^i \sum_{j=0}^{n} b_j x^j + \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \sum_{j=0}^{n} d_R(b_j)x^j\\
&\qquad + \sum_{i=0}^{m} a_i i x^{i-1} d_{R[x]}(x) \sum_{j=0}^{n} b_j x^j + \sum_{i=0}^{m} a_i x^{i-1} d_{R[x]}(x) \sum_{j=0}^{n} b_j j x^j\\
&= \left(\sum_{i=0}^{m} d_R(a_i)x^i + \sum_{i=0}^{m} a_i i x^{i-1} d_{R[x]}(x)\right)\sum_{j=0}^{n} b_j x^j\\
&\qquad + \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \sum_{j=0}^{n} d_R(b_j)x^j + \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \sum_{j=0}^{n} b_j j x^{j-1} d_{R[x]}(x)\\
&= d_{R[x]}(p(x))q(x) + \sum_{i=0}^{m} a_i x^i\left(\sum_{j=0}^{n} d_R(b_j)x^j + \sum_{j=0}^{n} b_j j x^{j-1} d_{R[x]}(x)\right)\\
&= d_{R[x]}(p(x))q(x) + p(x)d_{R[x]}(q(x))
\end{aligned}
$$

Por iteración, damos una estructura diferencial a $R[x_1,\ldots,x_n]$ para un anillo diferencial R de la siguiente manera:

$$
R \subset R[x_1] \subset \underbrace{(R[x_1])[x_2]}_{R[x_1,x_2]} \subset \cdots \subset \underbrace{(R[x_1,x_2,\ldots,x_{n-2}])[x_{n-1}]}_{R[x_1,x_2,\ldots,x_{n-2},x_{n-1}]} \subset \underbrace{(R[x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}])[x_n]}_{R[x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n]}
$$

aplicando el anterior hecho a $(R[x_1])[x_2]$ es anillo diferencial y así sucesivamente hasta $(R[x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}])[x_n] = R[x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n]$ es anillo diferencial. □

Propiedad 1.1.6. *Sea R anillo conmutativo con identidad entonces tenemos.*

a) Sea d_R derivación del anillo R con $a, b \in R$, y para cualquier entero $n \geq 1$, tenemos

$$(ab)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{(i)} b^{(n-i)}.$$

b) Sea d_R derivación del anillo conmutativo R con $a \in R$, y para cualquier entero $n \geq 1$ tenemos $d_R(a^n) = na^{n-1} d_R(a)$.

c) Sea d_R derivación del anillo con identidad R entonces $d_R(1) = 0$.

d) Sea d_R derivación del anillo conmutativo con división R, si $a \in R$ entonces

$$d_R(a^{-1}) = -d_R(a)/a^2$$

Demostración. a) Probamos por inducción matemática

para $n = 1$

$$(ab)' = a'b + ab' = \binom{1}{0} a'b + \binom{1}{1} ab'$$

para $n = h$

$$(ab)^{(h)} = \sum_{i=0}^{h} \binom{h}{i} a^{(i)} b^{(h-i)}$$

y para $n = h + 1$ demostramos

$$(ab)^{(h+1)} = \sum_{i=0}^{h+1} \binom{h+1}{i} a^{(i)} b^{(h+1-i)}$$

$$\begin{aligned}
(ab)^{(h+1)} &= ((ab)^{(h)})' \\
&= \left(\sum_{i=0}^{h} \binom{h}{i} a^{(i)} b^{(h-i)} \right)' \\
&= \sum_{i=0}^{h} \binom{h}{i} \left(a^{(i+1)} b^{(h-i)} + a^{(i)} b^{(h-i+1)} \right) \\
&= \binom{h}{0} a' b^{(h)} + \binom{h}{1} a^{(2)} b^{(h-1)} + \binom{h}{2} a^{(3)} b^{(h-2)} + \cdots + \binom{h}{h} a^{(h+1)} b^{(0)} \\
&\quad + \binom{h}{0} a^{(0)} b^{(h+1)} + \binom{h}{1} a^{(1)} b^{(h)} + \binom{h}{2} a^{(2)} b^{(h-1)} + \binom{h}{3} a^{(3)} b^{(h-2)} + \cdots \\
&\quad + \binom{h}{h} a^{(h)} b^{(1)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \binom{h}{0}a^{(0)}b^{(h+1)} + \left(\binom{h}{0}+\binom{h}{1}\right)(a^{(1)}b^{(h)}) + \left(\binom{h}{1}+\binom{h}{2}\right)(a^{(2)}b^{(h-1)}) \\
&\quad + \left(\binom{h}{2}+\binom{h}{3}\right)a^{(3)}b^{(h-2)} + \cdots + \left(\binom{h}{h-1}+\binom{h}{h}\right)a^{(h)}b^{(1)} \\
&\quad + \binom{h}{h}a^{(h+1)}b^{(0)} \\
&= \binom{h+1}{0}a^{(0)}b^{(h+1)} + \binom{h+1}{1}a^{(1)}b^{(h)} + \binom{h+1}{2}a^{(2)}b^{(h-1)} + \cdots \\
&\quad + \binom{h+1}{3}a^{(3)}b^{(h-2)} + \cdots + \binom{h+1}{h}a^{(h)}b^{(1)} + \binom{h+1}{h+1}a^{(h+1)}b^{(0)} \\
&= \sum_{i=0}^{h+1}\binom{h+1}{i}a^{(i)}b^{(h+1-i)}
\end{aligned}
$$

b) Demostramos por inducción matemática.

Para $n = 1$ tenemos $(a^1)' = 1a^{1-1}a'$

para $n = h$ tenemos $(a^h)' = ha^{h-1}a'$

y para $n = h + 1$ tenemos

$$
\begin{aligned}
(a^{h+1})' &= (a^h a^1)' \\
&= (a^h)'a + a^h a' \\
&= (ha^{h-1}a')a + a^h a' \\
&= ha^h a' + a^h a' \\
&= (h+1)a^h a'
\end{aligned}
$$

c) Sabemos que R es anillo con identidad, derivamos

$$d_R(1) = d_R(1 \cdot 1) = d_R(1) \cdot 1 + 1 \cdot d_R(1)$$

entonces $d_R(1) = 0$.

d) Sea $a \in R$ con su inverso $a^{-1} \in R$, tenemos $aa^{-1} = 1$,

derivamos

$$d_R(a)a^{-1} + ad_R(a^{-1}) = 0$$

entonces $d_R(a^{-1}) = -a^{-1}d_R(a)a^{-1}$.

Sabemos $d_R(a)$ conmuta con a, entonces obtenemos $d_R(a^{-1}) = -d_R(a)/a^2$.

□

1.2. Campo fracción diferencial

Si R es dominio integral diferencial entonces $Q(R)$ es campo fracción y tiene una estructura diferencial única, extendiendo la derivación de R al campo de fracciones $Q(R)$.

Proposición 1.2.1. *Sea R un dominio integral provisto con una derivación d_R. Entonces d_R extendemos al campo de fracciones $Q(R)$ en una manera única. Es decir existe sólo una derivación $\widetilde{d}$ en $Q(R)$ tal que $\widetilde{d}|_R = d_R$.*

Demostración. Definimos una aplicación en $Q(R)$

$$\begin{aligned}\widetilde{d} : Q(R) &\longrightarrow Q(R)\\ \frac{a}{b} &\longmapsto \widetilde{d}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{d_R(a)b - ad_R(b)}{b^2}\end{aligned}$$

Probamos que la aplicación $\widetilde{d}$ esta bien definida.

Sean $a, b, c, d \in R$, con $\frac{a}{b}, \frac{ac}{bc} \in Q(R)$, si $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ entonces

$$\begin{aligned}\widetilde{d}\left(\frac{ac}{bc}\right) &= \frac{d_R(ac)bc - (ac)d_R(bc)}{(bc)^2}\\ &= \frac{(d_R(a)c + ad_R(c))bc - (ac)(d_R(b)c + bd_R(c))}{(bc)^2}\\ &= \frac{d_R(a)cbc + ad_R(c)bc - acd_R(b)c - acbd_R(c)}{(bc)^2}\\ &= \frac{d_R(a)c^2b - ac^2d_R(b)}{(bc)^2}\\ &= \frac{c^2(d_R(a)b - ad_R(b))}{b^2c^2}\\ &= \frac{d_R(a)b - ad_R(b)}{b^2}\\ &= \widetilde{d}\left(\frac{a}{b}\right)\end{aligned}$$

Verificamos la primera definición de derivación sean $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q(R)$ entonces

$$\begin{aligned}\widetilde{d}\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) &= \widetilde{d}\left(\frac{ad + bc}{bd}\right)\\ &= \frac{d_R(ad + bc)bd - (ad + bc)d_R(bd)}{(bd)^2}\\ &= \frac{(d_R(a)d + ad_R(d) + d_R(b)c + bd_R(c))bd - (ad + bc)(d_R(b)d + bd_R(d))}{(bd)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d_R(a)dbd + ad_R(d)bd + d_R(b)cbd + bd_R(c)bd - add_R(b)d - adbd_R(d)}{(bd)^2} \\
&\quad + \frac{-bcd_R(b)d - bcbd_R(d)}{(bd)^2} \\
&= \frac{d_R(a)dbd + bd_R(c)bd - add_R(b)d - bcbd_R(d)}{(bd)^2} \\
&= \frac{d_R(a)d^2b + b^2d_R(c)d - ad^2d_R(b) - b^2cd_R(d)}{(bd)^2} \\
&= \frac{(d_R(a)b - ad_R(b))d^2}{b^2d^2} + \frac{b^2(d_R(c)d - cd_R(d))}{b^2d^2} \\
&= \widetilde{d}\left(\frac{a}{b}\right) + \widetilde{d}\left(\frac{c}{d}\right)
\end{aligned}$$

Verificamos la segunda definición

$$\begin{aligned}
\widetilde{d}\left(\frac{a}{b}\frac{c}{d}\right) &= \widetilde{d}\left(\frac{ac}{bd}\right) \\
&= \frac{d_R(ac)bd - (ac)d_R(bd)}{(bd)^2} \\
&= \frac{(d_R(a)c + ad_R(c))bd - (ac)(d_R(b)d + bd_R(b))}{(bd)^2} \\
&= \frac{d_R(a)cbd + ad_R(c)bd - acd_R(b)d - acbd_R(b)}{(bd)^2} \\
&= \frac{d_R(a)cbd - acd_R(b)d + ad_R(c)bd - acbd_R(b)}{(bd)^2} \\
&= \frac{(d_R(a)b - ad_R(b))cd}{(bd)^2} + \frac{ab(d_R(c)d - cd_R(b))}{(bd)^2} \\
&= \left(\frac{d_R(a)b - ad_R(b)}{b^2}\right)\frac{c}{d} + \frac{a}{b}\left(\frac{(d_R(c)d - cd_R(b))}{d^2}\right) \\
&= \widetilde{d}\left(\frac{a}{b}\right)\frac{c}{d} + \frac{a}{b}\widetilde{d}\left(\frac{c}{d}\right)
\end{aligned}$$

y finalmente probamos la unicidad de $\widetilde{d}$.

Tomamos una aplicación $\widetilde{\widetilde{d}} : Q(R) \to Q(R)$ tal que $\widetilde{\widetilde{d}}|_R = d|_R$.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\widetilde{d}}\left(\frac{a}{b}\right) &= \widetilde{\widetilde{d}}\left(a\frac{1}{b}\right) \\
&= \widetilde{\widetilde{d}}(a)\frac{1}{b} + a\widetilde{\widetilde{d}}\left(\frac{1}{b}\right) \\
&= d_R(a)\frac{1}{b} + a\left(-\frac{\widetilde{\widetilde{d}}(b)}{b^2}\right) \\
&= d_R(a)\frac{1}{b} + a(-\frac{1}{b^2}d_R(b))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= d_R(a)\frac{1}{b} - \frac{ad_R(b)}{b^2} \\
&= \frac{d_R(a)b}{b^2} - \frac{ad_R(b)}{b^2} \\
&= \frac{d_R(a)b - ad_R(b)}{b^2} \\
&= \widetilde{d}\left(\frac{a}{b}\right)
\end{aligned}
$$

entonces $\widetilde{\widetilde{d}} = \widetilde{d}$. ☐

Proposición 1.2.2. *Si R es un anillo conmutativo sin divisores de cero dotado con derivación d_R y S un sistema multiplicativo de R, entonces extendemos la derivada de R al $S^{-1}R$ en una manera única.*

Demostración. Definimos la aplicación en RS^{-1} por

$$
\begin{aligned}
d_{RS^{-1}} : RS^{-1} &\longrightarrow RS^{-1} \\
\frac{a}{b} &\longmapsto d_{RS^{-1}}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{d_R(a)b - ad_R(b)}{b^2}
\end{aligned}
$$

demostramos que esta bien definido, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces existe $s \in S$ con $s(ad-bc) = 0 \in R$, entonces derivamos $0 = s(ad - bc)$.

$$
\begin{aligned}
0 &= s'(ad - bc) + s(ad - bc)' \\
&= s'(ad - bc) + s(a'd + ad' - b'c - bc')
\end{aligned}
$$

multiplicamos por bds

$$
\begin{aligned}
&= bdss'(ad - bc) + bdss(a'd + ad' - b'c - bc') \\
&= 0 + bds^2(a'd + ad' - b'c - bc') \\
&= s^2(bda'd + bdad' - bdb'c - bdbc') \\
&= s^2(bd^2a' + bdad' - bdb'c - b^2dc') \\
&= s^2((bd^2a' - ab'd^2 + ab'd^2) + bdad' - bdb'c + (-b^2dc' + b^2d'c - b^2d'c)) \\
&= s^2((ba' - ab')d^2 + b^2(-dc' + d'c) - b^2d'c + ab'd^2 + bdad' - bdb'c) \\
&= s^2((ba' - ab')d^2 + b^2(-dc' + d'c) + ad(b'd + bd') - bc(bd' + db')) \\
&= s^2((ba' - ab')d^2 + b^2(-dc' + dc') + (ad - bc)(b'd + bd'))
\end{aligned}
$$

$$= s^2((ba' - ab')d^2 - b^2(dc' - d'c) + (ad - bc)(b'd + bd'))$$
$$= s^2(ba' - ab')d^2 - s^2b^2(dc' - d'c) + s^2(ad - bc)(b'd + bd')$$
$$= s^2((ba' - ab')d^2 - b^2(dc' - d'c))$$

tenemos

$$(ba' - ab')\frac{1}{b^2} = (dc' - d'c)\frac{1}{d^2}$$

entonces $d(\frac{a}{b}) = d(\frac{c}{d})$ también escribimos así $d_{RS^{-1}}(\frac{a}{b}) = d_{RS^{-1}}(\frac{c}{d})$.

Las demás pruebas son similares a la pruebas de la propiedad 1.2.1. □

1.3. Anillos diferenciales

Definición 1.3.1. Un *anillo diferencial* es un anillo conmutativo con identidad dotado con derivación.

Definimos de manera similar para *campos diferenciales*, en este caso R es campo.

Ejemplo 1.3.2. Sea R anillo de todas las funciones diferenciables infinitamente en la línea real con la usual derivada es un anillo diferencial.

Demostración. Dotaremos de estructura diferencial a R, definimos la aplicación en R

$$\begin{aligned} d_R : R &\longrightarrow R \\ f &\longmapsto d_R(f) = f' \end{aligned}$$

esta aplicación es la usual derivación, y cumple los dos condiciones de derivación, por lo tanto R es anillo diferencial. □

Ejemplo 1.3.3. Sea R un anillo diferencial. Consideramos el anillo $R[x_i]$ de polinomios en las indeterminadas $x_i, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Demostraremos que $R[x_i]$ es un anillo diferencial.

Demostración. 1. Construimos el polinomio diferencial.

Sea

$$i = (i_0, i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1} \quad \text{para } n \in \mathbb{N},$$

$$x^i = (x^{(0)})^{i_0}(x')^{i_1}(x'')^{i_2} \cdots (x^{(n)})^{i_n} \quad \text{para } i = 0, 1, \ldots, m$$

cambiamos notación y escribimos:

$$x^i = x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n} = \prod_{k=0}^{n} x_k^{i_k}.$$

Tenemos el polinomio diferencial en las indeterminadas $x_i, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \quad \text{con } a_i = a_{i_0,i_1,\ldots,i_n} \in R.$$

De manera similar construimos el siguiente polinomio diferencial

$$q(x) = \sum_{j=0}^{o} b_j x^j \quad \text{donde } b_j = b_{j_0,j_1,\ldots,j_n} \in R,\ x^j = \prod_{l=0}^{o} x_l^{j_l}.$$

Tenemos el anillo diferencial R, el conjunto de polinomios en las indeterminadas $x_i, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, con $a_i \in R$ se denota por $R[x_i]$.

2. Probamos que $R[x_i]$ es un anillo primero observamos este hecho,

$$R \subseteq \underbrace{R[x_0]}_{A_1} \subseteq \underbrace{(R[x_0])[x_1]}_{A_2} \subseteq \cdots \subseteq \underbrace{(R[x_0,\ldots,x_{n-1}])[x_n]}_{A_{n+1}}$$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = R[x_i] = R[x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots].$$

Si $p(x), q(x) \in R[x_i]$ entonces $p(x) \in A_j$ y $q(x) \in A_k$ para algún $j, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $j \leq k$ entonces $A_j \subseteq A_k$ tenemos $p(x), q(x) \in A_k$, sabemos que A_k es anillo se cumple todas las propiedades de anillo entonces $p(x) + q(x), p(x) \cdot q(x) \in A_k \subseteq R[x_i]$ finalmente tenemos $p(x) + q(x), p(x) \cdot q(x) \in R[x_i]$, por lo tanto $R[x_i]$ es anillo.

Definimos la suma en $R[x_i]$, consideramos el caso cuando tienen el mismo grado, para el otro caso se completa con coeficientes ceros hasta tener del mismo grado.

$$p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i + \sum_{i=0}^{m} b_i x^i = \sum_{i=0}^{m} (a_i + b_i) x^i.$$

Definimos la multiplicación en $R[x_i]$

$$p(x)q(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \sum_{j=0}^{o} b_j x^j = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{o} a_i b_j x^{i+j} \quad \text{con } a_i b_j \in R$$

$$\text{donde} \quad x^{i+j} = x^i x^j = x_0^{i_0+j_0} x_1^{i_0+j_0} \cdots x_n^{i_n+j_n}.$$

3. Demostramos que la aplicación

$\widetilde{d}: R[x_i] \to R[x_i]$ es diferencial, dado por:

$$\widetilde{d}\Big(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\Big) = \sum_{i=0}^{m} d_R(a_i)x^i + \sum_{i=0}^{m} a_i \widetilde{d}(x^i)$$

donde $\widetilde{d}(x^i)$ es definido por:

$$\widetilde{d}(x^i) = \sum_{k=0}^{n} i_k x_k^{i_k - 1} x_{k+1} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} x_j^{i_j}.$$

Si $p(x), q(x) \in R[x_i]$, entonces probamos la primera definición de anillo diferencial:

$$\begin{aligned}
\widetilde{d}\Big(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i + \sum_{i=0}^{m} b_i x^i\Big) &= \widetilde{d}\Big(\sum_{i=0}^{m}(a_i + b_i)x^i\Big) \\
&= \sum_{i=0}^{m}[d_R(a_i + b_i)x^i + (a_i + b_i)\widetilde{d}(x^i)] \\
&= \sum_{i=0}^{m}\big[d_R(a_i)x^i + d_R(b_i)x^i\big] + \sum_{i=0}^{m}\big[a_i\widetilde{d}(x^i) + b_i\widetilde{d}(x^i)\big] \\
&= \sum_{i=0}^{m} d_R(a_i)x^i + \sum_{i=0}^{m} a_i\widetilde{d}(x^i) + \sum_{i=0}^{m} d_R(b_i)x^i + \sum_{i=0}^{m} b_i\widetilde{d}(x^i) \\
&= \widetilde{d}(p(x)) + \widetilde{d}(q(x))
\end{aligned}$$

probamos la segunda definición de anillo diferencial.

$$\begin{aligned}
\widetilde{d}(p(x)q(x)) &= \widetilde{d}\Big(\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{o} a_i b_j x^{i+j}\Big) \\
&= \sum_{i=0}^{m} d_R\Big(\sum_{j=0}^{o} a_i b_j\Big)x^{i+j} + \sum_{i=0}^{m}\Big(\sum_{j=0}^{o} a_i b_j\Big)\widetilde{d}(x^{i+j})
\end{aligned}$$

$\widetilde{d}(x^{i+j}) = \widetilde{d}(x^i)x^j + x^i\widetilde{d}(x^j)$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{m}\Big(\sum_{j=0}^{o} d_R(a_i)b_j + a_i d_R(b_j)\Big)x^{i+j} + \sum_{i=0}^{m}\Big(\sum_{j=0}^{o} a_i b_j\Big)\widetilde{d}(x^{i+j}) \\
&= \sum_{i=0}^{m}\Big(\sum_{j=0}^{o} d_R(a_i)b_j x^{i+j} + \sum_{j=0}^{o} a_i d_R(b_j)x^{i+j}\Big) \\
&\qquad + \sum_{i=0}^{m}\Big(\sum_{j=0}^{o} a_i b_j\Big)\big(\widetilde{d}(x^i)x^j + x^i\widetilde{d}(x^j)\big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{o} d_R(a_i)b_j x^{i+j} + \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{o} a_i d_R(b_j) x^{i+j} + \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{o} a_i b_j \widetilde{d}(x^i) x^j \\
&\qquad + \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{o} a_i b_j x^i \widetilde{d}(x^j) \\
&= \sum_{i=0}^{m} d_R(a_i)x^i \sum_{j=0}^{o} b_j x^j + \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \sum_{j=0}^{o} d_R(b_j)x^j + \sum_{i=0}^{m} a_i \widetilde{d}(x^i) \sum_{j=0}^{o} b_j x^j \\
&\qquad + \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \sum_{j=0}^{o} b_j \widetilde{d}(x) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{m} d_R(a_i)x^i + \sum_{i=0}^{m} a_i \widetilde{d}(x^i) \right) \sum_{j=0}^{o} b_j x^j \\
&\qquad + \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \left(\sum_{j=0}^{o} d_R(b_j)x^j + \sum_{j=0}^{o} b_j \widetilde{d}(x) \right) \\
&= \widetilde{d}(p(x))q(x) + p(x)\widetilde{d}(q(x))
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $R[x_i]$ es un anillo diferencial.

□

Definición 1.3.4. Dado un anillo diferencial R sea

$$C_R = \{a \in R / d_R(a) = 0\}$$

el conjunto de *constantes* de la derivación d_R.

Ejemplo 1.3.5. Si K es un campo diferencial de característica $p \in \mathbb{Z}^+$ entonces para cada $a \in K$ con a^p tenemos $C_K = \{a^p\}$.

Demostración. Derivamos a^p

$$d_K(a^p) = pa^{p-1}d(a) = p1_K a^{p-1}d(a) = 0$$

así C_K contiene todas de la forma a^p. □

Propiedad 1.3.6. *Si R es anillo diferencial entonces C_R es un subanillo diferencial.*

Si R es un campo diferencial entonces C_R es un subcampo diferencial.

Demostración. Sean cualquier $a, b \in C_R$, si $d_R(a+b) = d_R(a) + d_R(b) = 0 + 0 = 0$ entonces $a + b \in C_R$.

Derivamos $d_R(ab) = d_R(a)b + ad_R(b) = 0b + a0 = 0$ por lo tanto $ab \in R$, hemos demostrado que C_R es subanillo.

Para el segundo item solo demostramos que $a^{-1} \in R$, el resto ya esta demostrado por ser C_R subcampo entonces es subanillo, sabemos $d_R(a^{-1}) = -d_R(a)/a^2 = 0$ entonces $a^{-1} \in C_R$. $\square$

Ejemplo 1.3.7. Sea $\mathbb{Z}$ anillo diferencial con derivación trivial entonces $C_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$.

Demostración. Si $\mathbb{Z}$ es anillo diferencial con $d_{\mathbb{Z}} = 0$. Probamos las inclusiones $C_{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z} \subset C_{\mathbb{Z}}$ probamos la primera inclusión, por propiedad 1.3.6 $C_{\mathbb{Z}}$ es subanillo diferencial. Ahora la segunda inclusión si $a \in \mathbb{Z}$, derivamos $d_{\mathbb{Z}}(a) = 0$ entonces $a \in C_{\mathbb{Z}}$, por las dos inclusiones tenemos $C_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$. $\square$

1.4. Ideales diferenciales y anillos cocientes

Si R es un anillo diferencial e I ideal de R, entonces dotamos de una estructura diferencial a R/I, aprovechando la estructura diferencial de R.

Definición 1.4.1. Sea R un anillo diferencial e I un ideal de R. Decimos I es un *ideal diferencial*, si I esta cerrado bajo la derivación d_R, es decir:

$$d_R(I) \subset I.$$

Ejemplo 1.4.2. Sea R un anillo diferencial, y $A \subseteq R$ un subconjunto. Definimos el *ideal diferencial generado por* A por

$$(A)_d = \bigcap_{\substack{A \subseteq I \\ I \text{ ideal dif.}}} I.$$

Demostración. Sabemos que $(A)_d$ es ideal, sólo falta probar que es diferencial, consideramos $a \in (A)_d$ entonces $a \in I$ para cada ideal diferencial I que contiene a A. Los I son todos ideales diferenciales entonces $d_R(a) \in I$, de donde tenemos $d_R(a) \in (A)_d$. $\square$

Ahora tenemos cuando $A = \{a\}$.

Ejemplo 1.4.3. Sea R un anillo diferencial y $A = \{a\} \subset R$ entonces

$$(a)_d = (\{a\})_d = \left\{ \sum_{r=0}^{m} b_r d_R^{(r)}(a) | m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, b_r \in R \right\}.$$

Demostración. Aplicamos el ejemplo 1.4.2 a $(a)_d$ por tanto es un ideal diferencial y sea $a \in (a)_d$ entonces $d^{(r)}(a) \in (a)_d$ tenemos $b_r d^{(r)}(a) \in (a)_d$ con $b_r \in R$ entonces $\sum_{r=0}^{m} b_r d^{(r)}(a) \in (a)_d$ tenemos

$$L = \left\{ \sum_{r=0}^{m} b_r d^{(r)}(a) | b_r \in R, m \in \mathbb{N} \cup 0 \right\} \subseteq (a)_d.$$

Dado J un ideal diferencial con $J \supseteq (a)_d$ entonces

$$J \supseteq L = \left\{ \sum_{r=0}^{m} b_r d^{(r)}(a) | b_r \in R, m \in \mathbb{N} \cup 0 \right\}.$$

Aplicamos la definición de intersección de ideales diferenciales que contienen a

$$(a)_d = \bigcap_{\substack{\{a\} \subseteq J \\ J \text{ ideal dif.}}} J \supset L = \left\{ \sum_{r=0}^{m} b_r d^{(r)}(a) | b_r \in R, m \in \mathbb{N} \cup 0 \right\}.$$

□

Dotamos de derivación al anillo cociente.

Proposición 1.4.4. *Si R es un anillo diferencial, e $I \subseteq R$ un ideal diferencial, el anillo cociente R/I es un anillo diferencial con la derivación*

$$\begin{aligned} \widetilde{d} : R/I &\longrightarrow R/I \\ \overline{a} &\longmapsto \widetilde{d}(\overline{a}) = \overline{d_R(a)} \end{aligned}$$

Demostración. Sabemos que $(R/I, +, \cdot)$ es un anillo, probamos que $\widetilde{d}$ es una derivación en R/I. Primero probamos que la aplicación $\widetilde{d}$ esta bien definida, si $\overline{a_1} = \overline{a_2}$ entonces $a_1 - a_2 \in I$ y tenemos $d_R(a_1) - d_R(a_2) = d_R(a_1 - a_2) \in I$ ya que I es ideal diferencial, por lo tanto tenemos $\overline{d_R(a_1)} = \overline{d_R(a_2)}$.

Ahora probamos que $\widetilde{d}$ es una derivación:

a) $\widetilde{d}(\overline{a} + \overline{b}) = \overline{d_R(a+b)} = \overline{d_R(a) + d_R(b)} = \widetilde{d}(\overline{a}) + \widetilde{d}(\overline{b})$

b) $\widetilde{d}(\overline{a} \cdot \overline{b}) = \overline{d_R(a \cdot b)} = \overline{d_R(a)b + ad_R(b)} = \widetilde{d}(\overline{a})\overline{b} + \overline{a}\widetilde{d}(\overline{b})$.

□

Sea R anillo, I ideal de R y $\pi : R \to R/I$ el morfismo natural, definido por $\pi(a) = \overline{a}$ es la clase lateral en R/I entonces existe una biyección

$$\begin{aligned} \psi : \{\text{ideales de } R \text{ que contienen a } I\} &\longrightarrow \{\text{ideales de } R/I\} \\ J &\longmapsto \psi(J) = \overline{J} = \pi(J) \end{aligned}$$

Ahora tenemos el teorema para el caso con aplicación diferencial.

Teorema 1.4.5. *Sea R anillo diferencial, e I un ideal diferencial, entonces existe una biyección entre ideales diferenciales de dos anillos diferenciales.*

$$\begin{aligned} \psi : \{\textit{ideales diferenciales de } R \textit{ que contienen a } I\} &\longrightarrow \{\textit{ideales diferenciales de } R/I\} \\ J &\longmapsto \psi(J) = \overline{J} = \pi(J) \end{aligned}$$

a) Si J es un ideal diferencial de R entonces $\psi(J) = \overline{J} = \pi(J)$ es un ideal diferencial en R/I.

b) Si $\overline{J}$ es ideal diferencial en R/I entonces $\psi^{-1}(\overline{J}) = J = \pi^{-1}(J)$ es un ideal diferencial en R.

Demostración. Las demostraciones son inmediatas.

a) Se tiene $\widetilde{d}(\overline{a}) = \overline{d_R(a)} \in \overline{J}$ ya que $d_R(a) \in J$.

b) Sea $a \in J$, $\pi(d_R(a)) = \overline{d_R(a)} = \widetilde{d}(\overline{a}) \in \overline{J}$ así $d_R(a) \in \pi^{-1}(\overline{J}) = J$.

□

Este teorema es muy importante en anillos cocientes diferenciales, aplicamos en la propiedad 1.4.10 y en el teorema 3.1.1.

Definición 1.4.6. Sea R un anillo diferencial, e $I \subseteq R$ un ideal diferencial.

a) Decimos I es un *ideal diferencial maximal* si dado un ideal diferencial J con la propiedad $I \subseteq J \subseteq R$ entonces $J = I$ o $J = R$.

b) Decimos I es un *ideal diferencial primo* si es un ideal primo $ab \in I \Rightarrow a \in I$ o $b \in I$ $\forall a, b \in R$.

c) Decimos I es un *ideal diferencial propio* si $\{0\} \subsetneq I \subsetneq R$.

La siguiente proposición es trivial.

Propiedad 1.4.7. *Sea R un anillo diferencial, e $I \subseteq R$ un ideal diferencial.*

Entonces I ideal diferencial primo $\Leftrightarrow R/I$ es un dominio integral diferencial.

Demostración. Conocemos la proposición

$$I \text{ es un ideal primo} \Leftrightarrow R/I \text{ es un dominio integral.}$$

Sea R anillo diferencial e I ideal diferencial entonces por proposición 1.4.4 tenemos anillo diferencial R/I.

($\Leftarrow$) Ya esta dada, I es ideal diferencial por hipótesis. □

Demostramos la existencia de ideal diferencial maximal, necesitamos el siguiente lema. Primero hacemos las siguientes convenciones.

Sean R anillo diferencial con identidad, P el conjunto de todos los ideales diferenciales de R excepto R no es vacío, contiene al ideal diferencial trivial $\{0\}$, parcialmente ordenado por la inclusión. Sea T un subconjunto totalmente ordenado de P; demostraremos que T tiene una cota superior.

Lema 1.4.8. *Si T es un subconjunto totalmente ordenado de ideales entonces la unión $\cup T$ es ideal.*

Si los elementos de T son diferenciales entonces $\cup T$ es diferencial.

Demostración. Sean $a, b \in \cup T$ entonces $a \in K$ y $b \in J$ donde $K, J \in T$ son ideales, sabemos que T esta totalmente ordenado entonces $K \subseteq J$ o $J \subseteq K$.

Entonces por el primer caso tenemos $a \in J$ por lo tanto $a - b \in J \subseteq \cup T$.

Sean $r \in R, a \in \cup T$ entonces $a \in J$ por lo tanto $ra \in J \subseteq \cup T$, entonces tenemos $\cup T$ es ideal.

Ahora probamos que $\cup T$ es diferencial. Sea $a \in \cup T$ entonces $a \in J$ por tanto $d(a) \in J \subseteq \cup T$, por tanto $\cup T$ es ideal diferencial. □

Proposición 1.4.9. *Sea R anillo diferencial con identidad entonces existe ideal diferencial maximal I.*

Demostración. Haremos la prueba en varias etapas.

- Sea $\cup T = I$ la unión de todos los ideales diferenciales de T, esta unión es un ideal diferencial por el lema 1.4.8, sabemos $J \subseteq I$, $\forall J \in T$, entonces I es cota superior de T.

- Demostramos que I es distinto de R, observamos que un ideal es igual a R si y sólo si incluye a 1. Por contradicción, si $I = R$ entonces incluye a 1, entonces existe un $J \in T$ tal que $1 \in J$, y por lo tanto $J = R$ contradice a la definición de P, que no le incluye.

- Demostramos que T tiene una cota superior en P, aplicamos el lema de Zorn, se tiene que P tiene un elemento maximal I, y por lo tanto, R tiene un ideal diferencial maximal.

$\square$

Resultado importante sobre ideal diferencial maximal.

Propiedad 1.4.10. *Sea K un campo y $K \subset R$ una extensión anillo diferencial. Sea I un ideal diferencial maximal del conjunto de ideales diferenciales propios de R. Entonces I es un ideal primo.*

Demostración. Sea I un ideal diferencial, R/I es un anillo cociente diferencial por proposición 1.4.4, denotamos su derivación por $\widetilde{d}$.

Para probar la propiedad, lo hacemos en dos partes, debido a la propiedad 1.4.7 sólo es necesario probar que R/I es un dominio integral.

1. Probamos que cualquier divisor cero $\overline{c}$ de R/I es un nilpotente. Sea $\overline{c} \in R/I$ con $\overline{c} \neq \overline{0}$, existe $\overline{d} \in R/I$ no cero tal que $\overline{c}\overline{d} = \overline{0}$. Entonces:

$$\overline{0} = \widetilde{d}(\overline{c}\overline{d}) = \widetilde{d}(\overline{c})\overline{d} + \overline{c}\widetilde{d}(\overline{d}) \underset{\text{multiplicamos por } \overline{d}}{\Longrightarrow} \widetilde{d}(\overline{c})\overline{d}^2 = \overline{0}.$$

Entonces obtenemos

$$\widetilde{d}^{(k)}(\overline{c})\overline{d}^{k+1} = \overline{0} \quad \text{para todo } k \geq 0. \tag{1.1}$$

Consideramos el ideal diferencial generado por $\overline{d}$,

$$\overline{J} = (\overline{d})_d \subseteq R/I \tag{1.2}$$

por el teorema 1.4.5 b) tenemos: $\pi^{-1}(\overline{J}) = J$ es un ideal diferenciad de R que contiene a I, donde π es la biyección entre ideales diferenciales de R que contienen a I e ideales diferenciales de R/I. Tenemos $I \subseteq J \subseteq R$, es I un ideal diferencial maximal, entonces $J = I$ o $J = R$ el primero no es posible por $d \notin I$ ($\overline{d} \neq \overline{0}$).

Por tanto $J = R$ entonces $\overline{J} = R/I$, aplicamos 1.4.3 a $\overline{c} \in R/I$ obtenemos

$$\overline{c} = \sum_{j=0}^{n} \overline{g}_j \widetilde{d}^{(j)}(\overline{d}) \quad \text{para algún} \;\; n \geq 0, \; \overline{g}_j \in R/I$$

tenemos:

$$\overline{c}^{j+2} = \sum_{j=0}^{n} \overline{g}_j \widetilde{d}^{(j)}(\overline{d}) \overline{c}^{j+1} = \overline{0}$$

por lo tanto $\overline{c}$ es nilpotente.

2. Ahora probamos que R/I es un dominio integral, consideramos cualquier $\overline{a}, \overline{b} \in R/I$, con $\overline{a}\overline{b} = \overline{0}$, $\overline{a} \neq \overline{0}$ y probaremos $\overline{b} = \overline{0}$.

   Lo hacemos por contradicción, supongamos $\overline{b} \neq \overline{0}$ entonces $\overline{a}$ es un divisor cero por lo tanto $\overline{a}$ es nilpotente, tomamos m número mínimo y derivamos:

$$\overline{0} = \widetilde{d}(\overline{a}^m) = m\overline{a}^{m-1}\widetilde{d}(\overline{a})$$

   $m\overline{a}^{m-1} \neq \overline{0}$, $\widetilde{d}(\overline{a})$ es divisor cero, procedemos en la misma manera varias veces, probamos $\widetilde{d}^{(k)}(\overline{a})$ es un divisor cero para todo $k \geq 0$, entonces todos los elementos de $(\overline{a})_d$ son nilpotentes.

   Tenemos $I \subseteq \pi^{-1}((\overline{a})_d) \subseteq R$, por lo tanto $\pi^{-1}((\overline{a})_d) = I$ o $\pi^{-1}((\overline{a})_d) = R$, la primera posibilidad no se da $a \notin I$ ($\overline{a} \neq \overline{0}$).

   Por lo tanto $\pi^{-1}((\overline{a})_d) = R$, tenemos $(\overline{a})_d = R/I$, si $\overline{1} \in R/I$ entonces $\overline{1} \in (\overline{a})_d$, pero $\overline{1}$ no es nilpotente, contradicción.

   Por lo tanto $\overline{b} = \overline{0}$ hemos demostrado que R/I es un dominio integral, entonces aplicamos la propiedad 1.4.7, I es un ideal diferencial primo.

□

1.5. Morfismos diferenciales

Sean dos anillos diferenciales con distintas derivaciones, queremos preservar las estructuras de anillos diferenciales, lo hacemos a través de morfismo diferencial.

Definición 1.5.1. Sean R y R' dos anillos diferenciales, con derivaciones d_R y $d_{R'}$ respectivamente. Una función:

$$f : R \to R'$$

es dicho *morfismo diferencial* si:

a) Es un morfismo.

1) $f(a+b) = f(a) + f(b)$

2) $f(ab) = f(a)f(b) \quad \forall a, b \in R.$

b) Preserva las derivaciones:

$$d_{R'} \circ f = f \circ d_R.$$

Si f es un isomorfismo entonces tenemos

$$d_{R'} = f \circ d_R \circ f^{-1} \tag{1.3}$$

es una derivada en R'.

Un *isomorfismo diferencial* es un isomorfismo de anillos y que preserva las derivaciones.

Ejemplo 1.5.2. Sea R anillo diferencial, y consideramos I la aplicación identidad en R, es un morfismo de anillos diferenciales.

Demostración. Sea la aplicación identidad $I : R \to R$ dada por $I(x) = x$ para todo $x \in R$.

Verificamos el morfismo de anillos.

$$I(a+b) = a + b = I(a) + I(b)$$

$$I(ab) = ab = I(a)I(b)$$

Y verificamos que I es morfismo diferencial

$$(I \circ d_R)(a) = I(d_R(a)) = d_R(a)$$

$$(d_R \circ I)(a) = d_R(I(a)) = d_R(a)$$

por lo tanto I_R es morfismo diferencial. □

Propiedad 1.5.3. *Si $f : R \to R'$ es un morfismo diferencial, entonces* $\ker(f)$ *es un ideal diferencial de R, $Im(f)$ es un subanillo diferencial de R' y el isomorfismo*

$\overline{f} : R/\ker(f) \to Im(f)$ dado por $\overline{f}(\overline{a}) = f(a)$ es un isomorfismo diferencial.

Demostración. Para $a \in \ker(f)$, tenemos

$$f(d_R(a)) = (f \circ d_R)(a) = (d_{R'} \circ f)(a) = d_{R'}(f(a)) = d_{R'}(0) = 0$$

así $d_R(a) \in \ker(f)$, por lo tanto $\ker(f)$ es un ideal diferencial.

Dado un elemento $a \in Im(f)$, probaremos que $d_{R'}(a) \in Im(f)$. Por definición, existe un elemento $b \in R$ tal que $f(b) = a$. Consideramos el elemento $d_R(b) \in R$, entonces un simple cálculo muestra que su imagen es $d_{R'}(a)$

$$f(d_R(b)) = (f \circ d_R)(b) = (d_{R'} \circ f)(b) = d_{R'}(f(b)) = d_{R'}(a)$$

y así $d_{R'}(a) \in Im(f)$.

Para cualquier $\overline{a} \in R/\ker(f)$, tenemos

$$\overline{f}(\widetilde{d}(\overline{a})) = \overline{f}(\overline{d_R(a)}) = f(d_R(a)) = d_{R'}(f(a)) = d_{R'}(\overline{f}(\overline{a}))$$

así $\overline{f}$ es un isomorfismo diferencial. □

1.6. Extensiones de campos y anillos diferenciales

Definición 1.6.1. Sea R anillo diferencial, una *extensión anillo diferencial* de R es un anillo diferencial T tal que:

a) $R \subseteq T$

b) $d_T|_R = d_R$.

De manera análoga definimos *extensión campo diferencial.*

Definición 1.6.2. Un *subanillo diferencial* de R es un subanillo S la cual esta cerrada bajo la derivación de R, $d_R(S) \subseteq S$ también de manera análoga definimos *subcampo diferencial.*

Ejemplo 1.6.3. Si R es un dominio integral diferencial entonces $Q(R)$ es una extensión anillo diferencial de R, además la extensión de d_R a $Q(R)$ es única.

Definición 1.6.4. Sea T un anillo diferencial, $R \subseteq T$ un subanillo diferencial y $S \subset T$ entonces denotamos por $R\{S\}$ el *subanillo diferencial más pequeño* de T que contiene R, S y todas sus derivadas de elementos de S.

Sea L un campo diferencial, $K \subset L$ un subcampo diferencial y S un subconjunto de L, denotamos por $K < S >$ el *subcampo diferencial más pequeño* de L generado por S sobre K.

Sea $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ un conjunto finito, decimos la extensión $K \subset K < S >$ es *generado finitamente diferencialmente.*

Ejemplo 1.6.5. Consideramos el campo diferencial $F = \mathbb{R}(t) < e^t >$ con derivación $\frac{d}{dt}$.

Dotamos de estructura diferencial a $K(\alpha) \cong K[x]/(Irr(\alpha, K)(x))$, extendemos la derivación d_K de K al campo algebraico $K(\alpha)$, donde α es algebraico sobre K. El polinomio irreducible de α sobre K es

$$Irr(\alpha, K)(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \alpha^n = 0.$$

Aplicamos el ejemplo 1.1.5, donde K es un campo diferencial y derivamos el polinomio irreducible de α sobre K

$$\underbrace{d(a_0) + d(a_1)\alpha + \cdots + d(a_{n-1})\alpha^{n-1}}_{Irr_d(\alpha,K)(\alpha)=Irr_{d_K}(\alpha,K)(\alpha)(d|_K=d_K)} + \underbrace{(a_1 + 2a_2\alpha + \cdots + n\alpha^{n-1})}_{Irr(\alpha,K)'(\alpha)} d(\alpha) = 0$$

y así

$$d(\alpha) = \frac{-Irr_{d_K}(\alpha, K)(\alpha)}{Irr(\alpha, K)'(\alpha)} \tag{1.4}$$

Ejemplo 1.6.6. Si K es un campo diferencial, $K \subset L$ una extensión campo algebraico separable, la derivación de K es extendido únicamente a L.

Sea $\alpha \in L = K(\alpha)$, consideramos el campo $K(\alpha)$, y su polinomio irreducible sobre K,

$$Irr(\alpha, K)(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n, a_i \in K.$$

Extendemos la derivación de K a $K[x]$ mediante:

$$\begin{aligned} \widetilde{d} : K[x] &\longrightarrow K[x] \\ a &\longmapsto \widetilde{d}(a) = d_K(a) \quad \forall a \in K \\ x &\longmapsto \widetilde{d}(x) = -Irr_{d_K}(\alpha, K)(x) \cdot q(x) \end{aligned}$$

donde

$$Irr_{d_K}(\alpha, K)(x) = d_K(a_0) + d_K(a_1)x + \cdots + d_K(a_{n-1})x^{n-1}$$

y $q(x) \in K[x]$ es tal que:

$$Irr(\alpha, K)(x) \cdot p(x) + Irr(\alpha, K)'(x) \cdot q(x) = 1.$$

a) Con la derivación $\widetilde{d}$, el ideal $(Irr(\alpha, K)(x))$ es un ideal diferencial.

b) El campo cociente $K[x]/(Irr(\alpha, K)(x))$ es un campo diferencial, tenemos:

$$K[x]/(Irr(\alpha, K)(x)) \cong K(\alpha)$$

campos diferenciales, con la derivación en $K(\alpha)$ inducida por isomorfismo:

$$\begin{aligned} d_{K(\alpha)} : K(\alpha) &\longrightarrow K(\alpha) \\ a &\longmapsto d_{K(\alpha)}(a) = d_K(a), \forall a \in K \\ \alpha &\longmapsto d_{K(\alpha)}(\alpha) = -\frac{Irr_{d_K}(\alpha, K)(\alpha)}{Irr(\alpha, K)'(\alpha)} \end{aligned}$$

es la única derivación en $K(\alpha)$ extendido de K.

Demostración. a) Tenemos la aplicación $\widetilde{d}$, aplicamos el ejemplo 1.1.5 al $K[x]$, entonces $K[x]$ es un anillo diferencial. La derivación $\widetilde{d}$ es completamente determinado con la definición de $\widetilde{d}(x)$: si $h(x) \in K[x]$,

$$\begin{aligned} \widetilde{d}(h(x)) &= \widetilde{d}(b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n) \\ &= (\widetilde{d}(b_0) + \widetilde{d}(b_1)x + \cdots + \widetilde{d}(b_n)x^n) + (b_1\widetilde{d}(x) + b_2\widetilde{d}(x^2) + \cdots + b_n\widetilde{d}(x^n)) \\ &= (d_K(b_0) + d_K(b_1)x + \cdots + d_K(b_n)x^n) + (b_1 + 2b_2x + \cdots + nb_nx^{n-1})\widetilde{d}(x) \\ &= h_{d_K}(x) + h'(x) \cdot \widetilde{d}(x) \end{aligned} \tag{1.5}$$

donde $\widetilde{d}(b_i) = d_K(b_i)$ para todo $b_i \in K$ y $\widetilde{d}(x) = -Irr_{d_K}(\alpha, K)(x) \cdot q(x)$.

Ahora probamos que $(Irr(\alpha, K)(x))$ es un ideal diferencial, consideramos

$h(x) \in (Irr(\alpha, K)(x))$ entonces $h(x) = Irr(\alpha, K)(x) \cdot h_1(x)$ con $h_1(x) \in K[x]$.

Mostraremos que $\widetilde{d}(h(x)) \in (Irr(\alpha, K)(x))$, primero calculamos:

$$\widetilde{d}(h(x)) = \widetilde{d}(Irr(\alpha, K)(x) \cdot h_1(x))$$

$$= \widetilde{d}(Irr(\alpha, K)(x)) \cdot h_1(x) + \underbrace{Irr(\alpha, K)(x) \cdot \widetilde{d}(h_1(x))}_{\text{múltiplo de } Irr(\alpha,K)(x)}$$

Sólo necesitamos probar que $\widetilde{d}(Irr(\alpha, K)(x)) \in (Irr(\alpha, K)(x))$. Utilizamos 1.5 que la derivada de $Irr(\alpha, K)(x)$ es simplemente:

$$\widetilde{d}(Irr(\alpha, K)(x)) = Irr_{d_K}(\alpha, K)(x) + Irr(\alpha, K)'(x) \cdot \widetilde{d}(x)$$

utilizamos la definición de $\widetilde{d}(x)$, entonces obtenemos

$$\begin{aligned} \widetilde{d}(Irr(\alpha, K)(x)) &= Irr_{d_K}(\alpha, K)(x) - Irr(\alpha, K)'(x) \cdot Irr_{d_K}(\alpha, K)(x) \cdot q(x) \\ &= Irr_{d_K}(\alpha, K)(x)[1 - Irr(\alpha, K)'(x) \cdot q(x)] \end{aligned}$$

trabajamos con campos K de característica 0, $Irr(\alpha, K)'(x) \neq 0$, tenemos que $mcd(Irr(\alpha, K)(x), Irr(\alpha, K)'(x)) = 1$, $Irr(\alpha, K)(x)$ es irreducible, por identidad de Bézout, existen $p(x), q(x) \in K[x]$ tal que:

$$Irr(\alpha, K)(x) \cdot p(x) + Irr(\alpha, K)'(x) \cdot q(x) = 1$$

finalmente calculamos la derivada de $Irr(\alpha, K)(x)$:

$$\begin{aligned} \widetilde{d}(Irr(\alpha, K)(x)) &= Irr_{d_K}(\alpha, K)(x) \underbrace{[1 - Irr(\alpha, K)'(x) \cdot q(x)]}_{Irr(\alpha,K)(x) \cdot p(x)} \\ &= \underbrace{Irr(\alpha, K)(x) \cdot Irr(\alpha, K)(x) p(x)}_{\text{múltiplo de } Irr(\alpha,K)(x)} \end{aligned}$$

por tanto $\widetilde{d}(Irr(\alpha, K)(x)) \in (Irr(\alpha, K)(x))$, por lo tanto $(Irr(\alpha, K)(x))$ es un ideal diferencial.

b) Por proposición 1.4.4, el anillo cociente $K[x]/(Irr(\alpha, K)(x))$ es un anillo cociente diferencial, también es un campo diferencial y $(Irr(\alpha, K)(x))$ es un ideal maximal de $K[x]$. Del primer teorema de isomorfismo, conocemos

$$k[x]/(Irr(\alpha, K)(x)) \cong K(\alpha)$$

son campos isomórficos, con el isomorfismo dado por

$$\begin{aligned} \overline{f} : K[x]/(Irr(\alpha, K)(x)) &\longrightarrow K(\alpha) \\ \overline{p(x)} &\longmapsto p(\alpha). \end{aligned}$$

Dotaremos de estructura diferencial a $K(\alpha)$, aprovechamos la estructura diferencial de $K[x]/(Irr(\alpha, K)(x))$ y el isomorfismo $\overline{f}$, definimos la aplicación $d_{K(\alpha)}$ en $K(\alpha)$ por medio del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} K(\alpha) \arrow[r, "\overline{f}^{-1}"] \arrow[d, "d_{K(\alpha)}"'] & K[x]/(Irr(\alpha, K)(x)) \arrow[d, "\widetilde{d}"'] \\ K(\alpha) & K[x]/(Irr(\alpha, K)(x)) \arrow[l, "\overline{f}"'] \end{tikzcd}$$

tenemos,

$$\begin{aligned} d_{K(\alpha)} :& K(\alpha) \to K(\alpha) \\ & a \mapsto d_{K(\alpha)}(a) = (\overline{f} \circ \widetilde{d} \circ \overline{f}^{-1})(a) = d_K(a) \quad \forall a \in K \\ & \alpha \mapsto d_{K(\alpha)}(\alpha) = (\overline{f} \circ \widetilde{d} \circ \overline{f}^{-1})(\alpha) = Irr_{d_K}(\alpha, K)(\alpha) \cdot q(\alpha) \end{aligned}$$

donde $d_{K(\alpha)} = \overline{f} \circ \widetilde{d} \circ \overline{f}^{-1}$ es una derivación por 1.3, utilizamos la identidad de Bézout y evaluamos en α:

$$\underbrace{Irr(\alpha, K)(\alpha)}_{\text{es } 0} \cdot p(\alpha) + Irr(\alpha, K)'(\alpha) \cdot q(\alpha) = 1 \Rightarrow q(\alpha) = \frac{1}{Irr(\alpha, K)'(\alpha)}$$

escribimos

$$\begin{aligned} d_{K(\alpha)} :& K(\alpha) \longrightarrow K(\alpha) \\ & a \longmapsto d_{K(\alpha)}(a) = d_K(a) \quad \forall a \in K \\ & \alpha \longmapsto d_{K(\alpha)}(\alpha) = -\frac{Irr_{d_K}(\alpha, K)(\alpha)}{Irr(\alpha, K)'(\alpha)} \end{aligned}$$

esta derivación $d_{K(\alpha)}$ es la única extendido de K.

□

1.7. K - Álgebra diferencial

Estudiamos el producto tensor de dos K - álgebras diferenciales.

Definición 1.7.1. Un K- *álgebra* es un espacio vectorial R sobre K equipado con una multiplicación de elementos de R.

Ejemplo 1.7.2. Sea K un campo diferencial y $K \subseteq R$ una extensión anillo diferencial, entonces R es un K - álgebra.

Demostración. Tenemos el anillo R por lo tanto los axiomas, se cumplen los axiomas de suma vectorial y también la multiplicación para R , y solo falta los axiomas de multiplicación escalar, sabemos $R \supset K$ por lo tanto se cumplen los axiomas de multiplicación escalar y por definición de K - álgebra, R es un K - álgebra. □

Tenemos el K - álgebra $A \otimes_K B$ de dos K - álgebras A, B llamado *producto tensor* de dos K - álgebras A, B.

Ahora dotamos de estructura diferencial.

Proposición 1.7.3. *El campo K con la derivación d_K, A y B con derivaciones d_A y d_B respectivamente tal que las derivaciones cumplen: $d_{A|K} = d_{B|K} = d_K$, entonces damos una estructura diferencial a $A \otimes_K B$ con la aplicación:*

$$\begin{aligned} d = d_A \otimes d_B : A \otimes_K B &\longrightarrow A \otimes_K B \\ a \otimes b &\longmapsto d(a \otimes b) = d_A(a) \otimes b + a \otimes d_B(b) \end{aligned}$$

Demostración. Probamos que esta bien definido, si $a \otimes b = a_1 \otimes b_1$ entonces $a = ka_1$ y $b = k^{-1}b$ con $k \in K$.

$$\begin{aligned} d(a \otimes b) &= d_A(a) \otimes b + a \otimes d_B(b) \\ &= d_A(ka_1) \otimes k^{-1}b_1 + ka_1 \otimes d_B(k^{-1}b_1) \\ &= (d_A(k)a_1 + kd_A(a_1)) \otimes (k^{-1}b_1) + ka_1 \otimes (d_B(k^{-1})b_1 + k^{-1}d_B(b_1)) \\ &= d_A(k)a_1 \otimes (k^{-1}b_1) + kd_A(a_1) \otimes (k^{-1}b_1) + ka_1 \otimes d_B(k^{-1})b_1 + ka_1 \otimes k^{-1}d_B(b_1) \\ &= d_A(k)a_1 \otimes k^{-1}b_1 + kd_A(a_1) \otimes k^{-1}b_1 + ka_1 \otimes (-d_B(k)\backslash k^2)b_1 + ka_1 \otimes k^{-1}d_B(b_1) \\ &= d_A(k)a_1 \otimes k^{-1}b_1 + d_A(a_1) \otimes b_1 - d_B(k)k^{-1}a_1 \otimes b_1 + a_1 \otimes d_B(b_1) \\ &= d_A(a_1) \otimes b_1 + a_1 \otimes d_B(b_1) \\ &= d(a_1 \otimes b_1) \end{aligned}$$

Verificamos la primera definición de derivación.

Sean $a \otimes b, a_1 \otimes b_1 \in A \otimes_K B$, la suma esta dada por $a \otimes b + a_1 \otimes b_1 = a \otimes (b + k^{-1}b_1)$ con $k^{-1}a = a_1$.

$$\begin{aligned} d((a \otimes b) + a_1 \otimes b_1) &= d(a \otimes (b + k^{-1}b_1)) \\ &= d_A(a) \otimes (b + k^{-1}b_1) + a \otimes d_B(b + k^{-1}b_1) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= d_A(a)\otimes b + d_A(a)\otimes k^{-1}b_1 + a\otimes(d_B(b) + d_B(k^{-1}b_1))\\
&= d_A(a)\otimes b + d_A(a)\otimes k^{-1}b_1 + a\otimes d_B(b) + a\otimes d_B(k^{-1}b_1)\\
&= d_A(a)\otimes b + a\otimes d_B(b) + d_A(a)\otimes k^{-1}b_1 + a\otimes d_B(k^{-1}b_1)\\
&= d(a\otimes b) + d(a\otimes k^{-1}b_1)\\
&= d(a\otimes b) + d(k^{-1}a\otimes b_1)\\
&= d(a\otimes b) + d(a_1\otimes b_1)
\end{aligned}
$$

Verificamos la segunda definición de derivación.

$$
\begin{aligned}
d((a\otimes b)(a_1\otimes b_1)) &= d(aa_1\otimes bb_1)\\
&= d_A(aa_1)\otimes bb_1 + aa_1\otimes d_B(bb_1)\\
&= (d_A(a)a_1 + ad_A(a_1))\otimes bb_1 + aa_1\otimes(d_B(b)b_1 + bd_B(b_1))\\
&= d_A(a)a_1\otimes bb_1 + ad_A(a_1)\otimes bb_1 + aa_1\otimes d_B(b)b_1 + aa_1\otimes bd_B(b_1)\\
&= (d_A(a)\otimes b)(a_1\otimes b_1) + (a\otimes b)(d_A(a_1)\otimes b_1) + (a\otimes d_B(b))(a_1\otimes b_1)\\
&\qquad + (a\otimes b)(a_1\otimes d_B(b_1))\\
&= ((d_A(a)\otimes b + a\otimes d_B(b))(a_1\otimes b_1) + (a\otimes b)(d_A(a_1)\otimes b_1 + a_1\otimes d_B(b_1))\\
&= d(a\otimes b)(a_1\otimes b_1) + (a\otimes b)d(a_1\otimes b_1)
\end{aligned}
$$

□

Proposición 1.7.4. *Las aplicaciones*

$$
\begin{aligned}
\phi_A :A &\longrightarrow A\otimes_K B & \phi_B :B &\longrightarrow A\otimes_K B\\
a &\longmapsto a\otimes 1 & b &\longmapsto 1\otimes b
\end{aligned}
$$

son morfismos diferenciales.

Demostración. Probamos que ϕ_A esta bien definida.

Si $a = a_1$ entonces

$$
\begin{aligned}
\phi_A(a) &= a\otimes 1\\
&= a_1\otimes 1\\
&= \phi_A(a_1).
\end{aligned}
$$

Probamos que ϕ_A es morfismo

$$\begin{aligned}\phi_A(a+a_1) &= (a+a_1)\otimes 1\\ &= a\otimes 1 + a_1\otimes 1\\ &= \phi_A(a)+\phi_A(a_1)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\phi_A(aa_1) &= aa_1\otimes 1\\ &= (a\otimes 1)(a_1\otimes 1)\\ &= \phi_A(a)\phi_A(a_1)\end{aligned}$$

Probamos que ϕ_A es diferencial

$$\begin{aligned}(\phi_A\circ d_A)(a) &= \phi_A(d_A(a))\\ &= d_A(a)\otimes 1\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(d\circ\phi_A)(a) &= d(\phi_A(a))\\ &= d(a\otimes 1)\\ &= d_A(a)\otimes 1 + a\otimes d_B(1)\\ &= d_A(a)\otimes 1\end{aligned}$$

Son iguales $\phi_A\circ d_A = d\circ\phi_A$, entonces ϕ_A es morfismo diferencial. De la misma manera probamos que ϕ_B esta bien definida, es morfismo y diferencial. $\square$

Capítulo 2

Ecuaciones diferenciales homogéneas

2.1. Operadores diferenciales

Estudiamos las soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de grado n sobre K es decir el sistema fundamental, que esta en alguna extension diferencial de K.

En adelante K representa un campo diferencial de característica 0 con derivación d, también denotamos la derivación del elemento $a \in K$ así $d^{(n)}(a) = a^{(n)}$ para $n \in \mathbb{Z}, n \geq 1$.

Sea K campo diferencial de característica cero consideramos en este capítulo *ecuaciones diferenciales lineales homogéneas sobre un campo diferencial K con campo de constantes C_K*

$$\mathcal{L}(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0, a_i \in K.$$

Definición 2.1.1. Un *operador diferencial $\mathcal{L}$ de orden n* es una expresión

$$\mathcal{L} = a_n d^{(n)} + \cdots + a_1 d + a_0 \quad a_i \in K \ \forall i.$$

donde $n \in \mathbb{Z}, n \geq 1$.

Definimos el operador diferencial $\mathcal{L} = a_n d^{(n)} + \cdots + a_1 d + a_0$ en K y en extensiones diferenciales de K

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : & K \longrightarrow K \\ & y \longmapsto \mathcal{L}(y) = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y. \end{aligned}$$

Asociamos a cada $\mathcal{L}$ la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n sobre K

$$\mathcal{L}(y) = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Ejemplo 2.1.2. Sea el operador lineal $\mathcal{L} = d^{(2)} + \frac{1}{x}d$.

Ejemplo 2.1.3. Sea el operador lineal $\mathcal{L} = d^{(2)} + 1$.

2.2. Conjunto solución de $\mathcal{L}(y) = 0$

Dada una ecuación diferencial lineal homogénea $\mathcal{L}(y) = 0$ de orden n sobre K, y una extension diferencial $K \subseteq L$, el conjunto solución de $\mathcal{L}(y) = 0$ en L, es denotado por $Sol(\mathcal{L})_L$ es un espacio vectorial sobre C_L, donde C_L es el conjunto de constantes de L que también es un campo.

Definición 2.2.1. Sean $y_1, \ldots, y_n$ elementos del campo diferencial K.

El determinante

$$W(y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

es el *wronskiano (determinante)* de $y_1, \ldots, y_n$.

Proposición 2.2.2. *Sea K campo diferencial con campo de constantes C_K y sean $y_1, \ldots, y_n$ $\in K$ entonces $y_1, \ldots, y_n$ son linealmente independiente sobre $C_K \Leftrightarrow W(y_1, \ldots, y_n) \neq 0$.*

Demostración. Por contradicción.
($\Leftarrow$) Si $y_1, \ldots, y_n$ son linealmente dependiente sobre C_K entonces existen $c_1, \ldots, c_n \in K$ no todos cero tal que:

$$c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n = 0.$$

Los c_i son constantes, diferenciamos la igualdad hasta $n-1$ veces

$$\begin{cases} c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n = 0 \\ c_1y' + c_2y_2' + \cdots + c_ny_n' = 0 \\ \vdots \\ c_1y_1^{(n-1)} + c_2y_2^{(n-1)} + \cdots + c_ny_n^{(n-1)} = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

tenemos en notación matricial;

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

El determinante de 2.2

$$W(y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2.3}$$

sin perdida de generalidad, supongamos que $c_1 \neq 0$ del sistema 2.1 despejamos

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{-c_2 y_2 - \cdots - c_n y_n}{c_1} \\ y_1' &= \frac{-c_2 y_2' - \cdots - c_n y_n'}{c_1} \\ &\vdots \\ y_1^{(n-1)} &= \frac{-c_2 y_2^{(n-1)} - \cdots - c_n y_n^{(n-1)}}{c_1} \end{aligned}$$

ahora reemplazamos en 2.3

$$\begin{vmatrix} (-c_2 y_2 - \ldots - c_n y_n) \setminus c_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ (-c_2 y_2' - \ldots - c_n y_n') \setminus c_1 & y_2' & \cdots & y_n' \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ (-c_2 y_2^{(n-1)} - \ldots - c_n y_n^{(n-1)}) \setminus c_1 & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

la primera columna es combinación lineal de otras columnas por lo tanto

$$W(y_1, \ldots, y_n) = 0$$

es una contradicción a 2.3.

($\Rightarrow$) Procedemos por inducción sobre n.

El caso $n = 1$ es trivial, es decir si y_1 es linealmente independiente sobre C_K entonces $W(y_1) \neq 0$.

Ahora para $n-1$, sean $y_1, \ldots, y_{n-1} \in K$ son linealmente independiente sobre C_K entonces $W(y_1, \ldots, y_{n-1}) \neq 0$.

Por contradicción.

Ahora para n, sean $y_1, \ldots, y_n$ son linealmente independiente sobre C_K entonces $W(y_1, \ldots, y_n) = 0$.

Entonces el sistema

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

tiene una solución no trivial $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n (\star)$.

Sea $\alpha_i \neq 0$, asumimos sin pérdida de generalidad $\alpha_1 = 1$, tenemos para $0 \leq k \leq n-1$

$$y_1^{(k)} + \alpha_2 y_2^{(k)} + \cdots + \alpha_n y_n^{(k)} = 0$$

derivamos esta ecuación para $0 \leq k \leq n-2$, obtenemos

$$\underbrace{(y_1^{(k+1)} + \alpha_2 y_2^{(k+1)} + \cdots + \alpha_n y_n^{(k+1)})}_{\text{es 0 por la ecuación anterior}} + (\alpha_2' y_2^{(k)} + \cdots + \alpha_n' y_n^{(k)}) = 0$$

$$\alpha_2' y_2^{(k)} + \cdots + \alpha_n' y_n^{(k)} = 0.$$

Por lo tanto $(\alpha_2', \ldots, \alpha_n') \in K^{n-1}$ es una solución para el sistema

$$\begin{pmatrix} y_2 & \cdots & y_n \\ y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_2^{(n-2)} & \cdots & y^{(n-2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tenemos

$$\alpha_2' y_2 + \cdots + \alpha_n' y_n = 0$$

por hipótesis de inducción los $y_2, \ldots, y_n$ son linealmente independiente sobre C_K y

$W(y_2, \ldots, y_n) \neq 0$, y así la solución de este sistema es trivial: $\alpha_i' = 0$ para $i = 2, \ldots, n$.

Así $\alpha_i \in C_K$ para $i = 1, \ldots, n$ con $\alpha_1 = 1$ tenemos

$$y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n = 0$$

contradice a $(\star)$. $\square$

Proposición 2.2.3. *Sea $\mathcal{L}(y) = 0$ una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n sobre un campo diferencial K. Si $y_1, \ldots, y_{n+1}$ soluciones de $\mathcal{L}(y) = 0$ en una extension L de K, n grado de $\mathcal{L}(y) = 0$. Entonces $W(y_1, \ldots, y_{n+1}) = 0$.*

Demostración. Los $y_1, \ldots, y_{n+1}$ son soluciones $\mathcal{L}(y) = 0$ entonces tenemos

$$\begin{cases} a_0 y_1 + a_1 y_1' + \cdots + y_1^{(n)} = 0 \\ a_0 y_2 + a_1 y_2' + \cdots + y_2^{(n)} = 0 \\ \vdots \\ a_0 y_{n+1} + a_1 y_{n+1}' + \cdots + y_{n+1}^{(n)} = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

En notación matricial

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_1' & \cdots & y_1^{(n)} \\ y_2 & y_2' & \cdots & y_2^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n+1} & y_{n+1}' & \cdots & y_{n+1}^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

despejamos de 2.4

$$\begin{cases} y_1^{(n)} = -a_0 y_1 - a_1 y_1' - \cdots - a_{n-1} y_1^{(n-1)} \\ y_2^{(n)} = -a_0 y_2 - a_1 y_2' - \cdots - a_{n-1} y_2^{(n-1)} \\ \vdots \\ y_{n+1}^{(n)} = -a_0 y_{n+1} - a_1 y_{n+1}' - \cdots - a_{n-1} y_{n+1}^{(n-1)} \end{cases}$$

el wronskiano de 2.5 es

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_1' & \cdots & y_1^{(n)} \\ y_2 & y_2' & \cdots & y_2^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n+1} & y_{n+1}' & \cdots & y_{n+1}^{(n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & \cdots & -a_0 y_1 - a_1 y_1' - \cdots - a_{n-1} y_1^{(n-1)} \\ y_2 & y_2' & \cdots & -a_0 y_2 - a_1 y_2' - \cdots - a_{n-1} y_2^{(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n+1} & y_{n+1}' & \cdots & -a_0 y_{n+1} - a_1 y_{n+1}' - \cdots - a_{n-1} y_{n+1}^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

por propiedad de determinantes las columnas se pueden escribir como filas y reemplazamos los $y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \ldots, y_{n+1}^{(n)}$.

La última columna del wronskiano es una combinación lineal de las otras columnas entonces $W(y_1, \ldots, y_{n+1}) = 0$. $\square$

De estas proposiciones deducimos que el conjunto de soluciones de $\mathcal{L}(y) = 0$ en L tiene a lo más n soluciones linealmente independiente sobre C_L.

Si tenemos n soluciones $\{y_1, \ldots, y_n\}$ linealmente independiente sobre C_L en L, llamamos a este conjunto de soluciones *conjunto fundamental de soluciones* de $\mathcal{L}(y) = 0$ en L.

Cualquier otra solución de $\mathcal{L}(y) = 0$ es una combinación lineal sobre C_L del conjunto fundamental de soluciones $\{y_1, \ldots, y_n\}$.

Capítulo 3

Extensiones Picard - Vessiot

En este capitulo construimos la extension Picard - Vesssiot de K para la ecuación diferencial lineal homogénea de grado n sobre K, en esta extension diferencial están todas las soluciones de la ecuación diferencial, probamos su unicidad y finalmente citamos dos ejemplos que gracias a esta teoría obtenemos la adjunción de la integral y exponencial de la integral.

Consideramos ecuaciones diferenciales lineales homogéneas definidas sobre un campo diferencial K

$$\mathcal{L}(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{3.1}$$

donde $a_i \in K$ para $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Si L es una extensión campo diferencial de K, entonces el conjunto de soluciones de $\mathcal{L}(y) = 0$ en L es un espacio vectorial sobre C_L de dimensión $\leq n$.

Definimos una extensión Picard - Vessiot L para ecuación 3.1 sobre un campo diferencial K, donde K es un campo de característica cero con campo algebraicamente cerrado de constantes C_K, entonces probamos que podemos asociar a esta ecuación 3.1 una extensión L de K que contiene un conjunto fundamental de soluciones de 3.1. En el caso descrito esta extensión L es único hasta K - isomorfismo diferencial.

Definición 3.0.4. Sea K un campo diferencial y $\mathcal{L}(y) = 0$ una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n con coeficientes en K. Decimos que $K \subseteq L$ es una *extensión Picard - Vessiot* de K para $\mathcal{L}(y) = 0$ si

1. L es generado sobre K, como un campo diferencial por las soluciones de $\mathcal{L}(y) = 0$

en L, $L = K < y_1, y_2, \ldots, y_n >$ donde $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de $\mathcal{L}(y) = 0$ en L.

2. Sin nuevos constantes $C_L = C_K$.

Proposición 3.0.5. *Sea K campo diferencial, A extension anillo diferencial, $a \in A$ con $d_A(a) = 0$ y a es algebraico sobre K, entonces a es algebraico sobre el campo de constantes C_K.*

Demostración. Sea $p(x)$ el polinomio irreducible de a sobre K entonces $p(a) = 0$ ahora derivamos $p(a)$

$$\begin{aligned}
d_A(p(a)) &= d_A(b_0 + b_1 a + \cdots + b_{n-1}a^{n-1} + a^n) \\
&= d_A(b_0) + d_A(b_1)a + b_1 d_A(a) + \cdots + d_A(b_{n-1})a^{n-1} + b_{n-1}(n-1)a^{n-2}d_A(a) \\
&\qquad + na^{n-1}d_A(a) \\
&= d_A(b_0) + d_A(b_1)a + \cdots + d_A(b_{n-1})a^{n-1} + b_1 d_A(a) + \cdots + b_{n-1}(n-1)a^{n-2}d_A(a) \\
&\qquad + na^{n-1}d_A(a) \\
&= d_A(b_0) + d_A(b_1)a + \cdots + d_A(b_{n-1})a^{n-1} + (b_1 + \cdots + b_{n-1}(n-1)a^{n-2} \\
&\qquad + na^{n-1})d_A(a) \\
0 &= d_A(b_0) + d_A(b_1)a + \cdots + d_A(b_{n-1})a^{n-1}
\end{aligned}$$

la minimalidad de n implica que $d_A(b_i) = d_K(b_i) = 0$ para $i = 0, 1 \ldots, n-1$ entonces $b_i \in C_K$ tenemos a es algebraico sobre C_K. □

Demostramos la proposición necesario para la definición 2 de la extensión Picard - Vessiot L.

Proposición 3.0.6. *Sea K un campo diferencial con campo de constantes C_K y $K \subset A$ una extensión anillo diferencial tal que A es un dominio integral, generado finitamente como un K-álgebra, sea L el campo fracción de A. Asumimos C_K algebraicamente cerrado y A sin ideales diferenciales propios. Entonces L sin nuevos constantes, $C_L = C_K$.*

Demostración.

- Primero demostramos $C_L \subset C_A$, hacemos en varias etapas.

  Para cualquier $a \in C_L$, tenemos $a = p\backslash q$, con $p, q \in A$.

1. Probamos que $J = \{b \in A \setminus ba \in A\}$ es ideal.

   Sean $b, b_1 \in J$ entonces $ba, b_1 a \in A$, A un anillo tenemos $(b - b_1)a = ba - b_1 a \in A$ entonces $b - b_1 \in J$.

   Sea $r \in A, b \in J$ entonces $r \in A, ba \in J$ tenemos $(rb)a = r(ba) \in A$ entonces $rb \in J$.

2. Probamos que J es diferencial.

   Sea $b \in J$ entonces $ba \in A$ ahora derivamos

$$d_A(ba) = d_A(b)a + bd_A(a) = d_A(b)a \in A$$

   entonces $d_A(b) \in J$ por lo tanto J es ideal diferencial.

Por hipótesis A sin ideales diferenciales propios entonces $A = J$.

Sea $a = 1a$ para $a \in A$ entonces $a \in J$ por lo tanto $a \in A$. Hemos demostrado $C_L \subset A$.

- Ahora tenemos, supongamos que $a \notin C_K$ de lo contrario la demostración termina entonces para cada $c \in C_K$, sea $(a - c)A$.

1. Demostramos que $(a - c)A = \{(a - c)r | r \in A\}$ es ideal.

   Sean $x, y \in (a - c)A$ entonces $x = (a - c)r, y = (a - c)r_1$ con $r, r_1 \in A$ entonces tenemos

$$\begin{aligned} x - y &= (a - c)r - (a - c)r_1 \\ &= (a - c)(r - r_1), \text{donde } r - r_1 \in A \end{aligned}$$

   entonces $x - y \in (a - c)A$.

   Ahora $x \in (a - c)A$ y $r_1 \in A$ sea

$$\begin{aligned} r_1 x &= r_1(a - c)r \\ &= r_1 r(a - c) \\ &= (a - c)(r_1 r) \end{aligned}$$

   con $r_1 r \in A$ entonces $r_1 x \in (a - c)A$.

2. Demostramos $(a-c)A$ es diferencial.

   Si $x \in (a-c)A$ entonces $x = (a-c)r, r \in A$ derivamos

$$\begin{aligned} d_A(x) &= d_A((a-c)r) \\ &= d_A(a-c)r + (a-c)d_A(r) \\ &= (d_A(a) - d_A(c))r + (a-c)d_A(r) \\ &= (a-c)d_A(r), d_A(r) \in A \end{aligned}$$

   entonces $d_A(x) \in (a-c)A$ por lo tanto $(a-c)A$ es ideal diferencial.

- Por hipótesis A sin ideales diferenciales propios entonces $A = (a-c)A$ entonces implica que $a-c$ es un elemento invertible de A para cada $c \in C_K$.

  Por hipótesis A es un dominio integral; por lema de Rosenlicht implica que $a \in A$ es algebraico sobre K y $a \in A$ es una constante, por proposición 3.0.5 implica que a es algebraico sobre C_K y por lo tanto $a \in C_K$, hemos probado $C_L \subset C_K$.

  Probamos la otra inclusión, sea $a \in C_K$, hacemos las siguientes extensiones

$$0 = d_K(a) = d_A|_K(a) = (d_L|_A)|_K(a)$$

  por lo tanto $a \in C_L$.

□

3.1. Existencia

Teorema 3.1.1 (Existencia de extensiones Picard - Vessiot). *Sea K un campo diferencial con campo de constantes algebraicamente cerrado C_K. Sea $\mathcal{L}(y) = 0$ una ecuación diferencial lineal homogénea sobre K. Sea A álgebra solución universal completo para $\mathcal{L}(y) = 0$ y sea J el ideal diferencial maximal de A. Entonces J es un ideal primo y el campo fracción L del dominio integral A/J es una extensión Picard - Vessiot de K para $\mathcal{L}(y) = 0$.*

Probamos por construcción y en varias etapas. Dada una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n sobre K

$$\mathcal{L}(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y, \ a_i \in K.$$

Construimos un K - álgebra A, contiene el conjunto completo de soluciones de $\mathcal{L}(y) = 0$ entonces hacemos el cociente por un ideal primo diferencial J, obtenemos un dominio integral diferencial A/J, por proposición 3.0.6 $Q(A/J)$ sin nuevos constantes y tenemos una extensión Picard - Vessiot $L = Q(A/J)$ de K para $\mathcal{L}(y) = 0$.

Demostración. 1. Sea un anillo polinomial en n^2 indeterminadas

$$K[\{Y_{0,1}, Y_{0,2}, \dots, Y_{0,n}\}, \{Y_{1,1}, Y_{1,2}, \dots, Y_{1,n}\}, \dots, \{Y_{n-1,1}, Y_{n-1,2}, \dots, Y_{n-1,n}\}]$$

también escribimos así

$$K[\{Y_{i,j}\}]_{\substack{i=0,\dots,n-1 \\ j=1,\dots,n}}$$

extendemos la derivación de K al $K[\{Y_{i,j}\}]_{\substack{i=0,\dots,n-1 \\ j=1,\dots,n}}$, asignamos a

$$\begin{cases} Y'_{i,j} & = Y_{i+1,j} \quad \forall i = 0, \dots, n-2, \quad \forall j = 1, \dots, n \\ Y'_{n-1,j} & = -a_{n-1}Y_{n-1,j} - \cdots - a_1 Y_{1,j} - a_0 Y_{0,j} \end{cases}$$

De la primera definición obtenemos $Y_{0,j}^{(i)} = Y_{i,j}$ $\forall i, j$, aplicamos este hecho a la segunda definición y obtenemos

$$\mathcal{L}(Y_{0,j}) = Y_{0,j}^{(n)} + a_{n-1}Y_{0,j}^{(n-1)} + \cdots + a_1 Y'_{0,j} + a_0 Y_{0,j} = 0 \quad \forall j$$

es la ecuación diferencial lineal homogénea $\mathcal{L}(Y_{0,j})$ de orden n sobre K, este anillo diferencial de polinomios es isomorfo al cociente de anillo de polinomios en $Y_{0,1}, Y_{0,2}, \dots, Y_{0,n}$ sobre K, por el ideal diferencial generado I, aplicamos la propiedad 1.5.3

$$(K[\{Y_{i,j}\}],') \cong K\{Y_{0,1}, \dots, Y_{0,n}\}/I$$

donde $I = (\mathcal{L}(Y_{0,1}), \dots, \mathcal{L}(Y_{0,n}))_d$.

2. Convertimos el conjunto $\{Y_{0,1}, \dots, Y_{0,n}\}$ en un conjunto fundamental de soluciones de $\mathcal{L}(y) = 0$, entonces los $Y_{0,1}, \dots, Y_{0,n}$ son linealmente independiente sobre el campo de constante C_K, por proposición 2.2.2 tenemos

$$\det(Y_{i,j}) = W(Y_{0,1}, \dots, Y_{0,n}) \neq 0$$

tenemos el wronskiano $W(Y_{0,1},\ldots,Y_{0,n})$ no cero y pertenece a $K[\{Y_{i,j}\}]$ y tenemos el K - álgebra

$$A = K\big[\{Y_{i,j}\}\big]\Big[\frac{1}{\det(Y_{i,j})}\Big].$$

El wronskiano $\det(Y_{i,j}) = W(Y_{0,1},\ldots,Y_{0,n})$ es invertible en A; por la proposición 1.2.2 A es un anillo diferencial.

3. Definimos el *álgebra solución universal completa* para $\mathcal{L}(y) = 0$:

$$A = K\big[\{Y_{i,j}\}\big]\Big[\frac{1}{\det(Y_{i,j})}\Big] \cong K\{Y_{0,1},\ldots,Y_{0,n}\}/I\Big[\frac{1}{\det(Y_{i,j})}\Big]$$

$$\text{con} \quad I = (\mathcal{L}(Y_{0,1}),\ldots,\mathcal{L}(Y_{0,n}))_d.$$

Por proposición 1.4.9 existe ideal diferencial maximal J de A.

Sea $K \subseteq A$ es una extensión anillo diferencial, por propiedad 1.4.10 J es un ideal diferencial primo y por propiedad 1.4.7 A/J es un dominio integral diferencial.

Sea A/J sin ideales diferenciales propios, si no fuese así existiría un ideal diferencial propio $\overline{I}$ tal que $\overline{0} \subsetneq \overline{I} \subsetneq A/J$, utilizamos el teorema 1.4.5, tenemos $\pi^{-1} : A/J \to A$

$$\begin{tikzcd}
J \arrow[r, phantom, "\subsetneq"] & \pi^{-1}(\overline{I}) \arrow[r, phantom, "\subsetneq"] & A \\
\{\overline{0}\} \arrow[u, "\pi^{-1}"'] \arrow[r, phantom, "\subsetneq"] & \overline{I} \arrow[u, "\pi^{-1}"'] \arrow[r, phantom, "\subsetneq"] & A \setminus J \arrow[u, "\pi^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

y $\pi^{-1}(\overline{I})$ es un ideal diferencial propio de A que contiene a J contradicción, J es ideal diferencial maximal.

4. Sabemos que A/J es un dominio integral, sin ideales diferenciales propios ahora hacemos el cociente de A/J y obtenemos $L = Q(A/J)$.

Observamos que es una extensión diferencial.

- Es generado finitamente sobre K, como un campo diferencial por las soluciones de $\mathcal{L}(y) = 0$, $\{Y_{0,1},\ldots,Y_{0,n}\}$.

$$L = Q(A/J) =$$
$$Q(K[\{Y_{i,j}\}]\Big[\frac{1}{\det(Y_{i,j})}\Big]/J) \cong Q(K\{Y_{0,1},\ldots,Y_{0,n}\}/I\Big[\frac{1}{\det(Y_{i,j})}\Big]/J).$$

- El wronskiano $\det(Y_{i,j})$ no cero es invertible en L, así el conjunto $\{Y_{0,1},\ldots,Y_{0,n}\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de $\mathcal{L}(y)=0$ en L.
- La condición $C_L = C_K$ esta dada por proposición 3.0.6 entonces $K \subseteq L$ es una extensión Picard - Vesiot de K para $\mathcal{L}(y)=0$.

□

Tenemos que A sin ideales diferenciales propios resultado muy importante para la hipótesis de la proposición 3.0.6.

3.2. Unicidad

Para probar la unicidad de la extensión Picard - Vessiot es necesario probar la siguiente propiedad.

Propiedad 3.2.1. *Sean $K \subseteq L_1, L_2$ extensiones Picard - Vessiot de K para la ecuación diferencial lineal homogénea $\mathcal{L}(y) = 0$ de orden n y $K \subseteq E$ es una extensión campo diferencial con $C_E = C_K$, asumimos que*

$$\sigma_1 : L_1 \to E$$
$$\sigma_2 : L_2 \to E$$

son K - morfismos inyectivos diferenciales. Entonces existe un K - isomorfismo diferencial entre L_1 y L_2.

Demostración. Definimos $V_1 = \{y \in L_1 \setminus \mathcal{L}(y) = 0\} \subseteq L_1$, $V_2 = \{y \in L_2 \setminus \mathcal{L}(y) = 0\} \subseteq L_2$ y $V = \{y \in E \setminus \mathcal{L}(y) = 0\} \subseteq E$.

Sean V_1, V_2 espacios vectoriales sobre K de dimensión n y V es un espacio vectorial sobre K de dimensión $\leq n$, con $C_E = C_K$ y E no es una extensión Picard - Vessiot no garantizamos la misma dimension.

Tenemos $\sigma_1(L_1), \sigma_2(L_2) \subseteq E$, obtenemos $\sigma_1(V_1), \sigma_2(V_2) \subseteq V$, los σ_1, σ_2 son inyectivos y así $\sigma_1(V_1), \sigma_2(V_2)$ tienen la misma dimensión $\dim = n$.

Los dos espacios vectoriales están en V y sus dimensiones son $\dim = n$, entonces los tres espacios coinciden:

$$\sigma_1(V_1) = \sigma_2(V_2) = V.$$

Escribimos $L_1 = K < V_1 >, L_2 = K < V_2 >$, sabemos σ_1, σ_2 son K - morfismos diferenciales, obtenemos:

$$\sigma_1(L_1) = K < \sigma_1(V_1) >= K < \sigma_2(V_2) >= \sigma_2(L_2).$$

Obtenemos el resultado restringiendo σ_1, σ_2 a sus imágenes:

$$L_1 \to \sigma_1(L_1) = \sigma_2(L_2) \leftarrow L_2.$$

Por lo tanto entre L_1 y L_2 existe un K- isomorfismo diferencial. $\square$

Ahora probamos la unicidad del teorema.

Teorema 3.2.2. *(Unicidad de extensiones Picard - Vessiot)*

Sea K un campo diferencial con campo cerrado algebraicamente de constantes C_K.

Sea $\mathcal{L}(y) = 0$ una ecuación diferencial lineal homogénea definido sobre K. Sean L_1 y L_2 dos extensiones Picard- Vessiot de K para $\mathcal{L}(y) = 0$. Asumimos que L_1 es el construido del teorema 3.1.1.

$$L_1 = Q(A/J) \text{ es } \begin{cases} A = K[\{y_{i,j}\}][\frac{1}{\det(y_{i,j})}] \\ J = \textit{ideal diferencial maximal de } A. \end{cases}$$

Entonces existe un K - isomorfismo diferencial entre L_1 y L_2.

Demostración. Consideramos el siguiente anillo diferencial:

$$R = A/J \otimes_K L_2$$

con derivación definida en proposición 1.7.3.

Hacemos la misma construcción que hecho en la etapa 3 del teorema 3.1.1, obtenemos un ideal maximal diferencial $I \subseteq R$, es R/I un dominio integral sin ideales diferenciales propios.

Tenemos las aplicaciones

$$\begin{array}{ccccc} A \setminus J & \xrightarrow{\phi_{A\setminus J}} & R & \xrightarrow{\pi} & R \setminus I \\ a & \longmapsto & a \otimes 1 & \longmapsto & \overline{a \otimes 1} \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} L_2 & \xrightarrow{\phi_{L_2}} & R & \xrightarrow{\pi} & R \setminus I \\ b & \longmapsto & 1 \otimes b & \longmapsto & \overline{1 \otimes b} \end{array}$$

probamos que la primera aplicación $\pi \circ \phi_{A/J}$ es inyectivo, sabemos que $\phi^{-1}_{A/J}(I)$ es un ideal diferencial de A/J, sin ideales diferenciales propios, así tenemos $\phi^{-1}_{A/J}(I) = A/J$ o $\{0\}$.

Si $\phi_{A/J}^{-1}(I) = A/J$, el elemento identidad $1 \otimes 1$ esta en I por $\phi_{A/J}(1) = 1 \otimes 1 \in I$ es una contradicción entonces $\phi_{A/J}^{-1}(I) = \{0\}$.

Ahora probamos que $\pi \circ \phi_{A/J}$ es inyectivo, entonces si $a, a' \in A/J$ tal que

$$(\pi \circ \phi_{A/J})(a) = (\pi \circ \phi_{A/J})(a')$$

tenemos

$$\overline{a \otimes 1} = \overline{a' \otimes 1}$$

$$(a - a') \otimes 1 \in I$$

entonces $a - a' \in \phi_{A/J}^{-1}(I) = \{0\}$, tenemos $a = a'$ por tanto es $\pi \circ \phi_{A/J}$ inyectivo.

De la misma manera probamos que la segunda aplicación $\pi \circ \phi_{L_2}$ es inyectivo.

Obtenemos las dos aplicaciones anteriores con la siguiente forma.

$$A \setminus J \xrightarrow{\pi \circ \phi_{A \setminus J}} R \setminus I \qquad L_2 \xrightarrow{\pi \circ \phi_{L_2}} R \setminus I$$

es $R \setminus I$ un dominio integral extendemos su campo fracción $Q(R \setminus I) = E$.

$$\begin{tikzcd} A \setminus J \arrow[r, "\pi \circ \phi_{A \setminus J}"] \arrow[d] & R \setminus I \arrow[d] & L_2 \arrow[r, "\pi \circ \phi_{L_2}"] \arrow[d] & R \setminus I \arrow[d] \\ L_1 = Q(A \setminus J) \arrow[r, "\sigma_1"] & E = Q(R \setminus I) & L_2 \arrow[r, "\sigma_2"] & E = Q(R \setminus I) \end{tikzcd}$$

Tenemos dos K - morfismos diferenciales inyectivos $\sigma_1 : L_1 \to E$ y $\sigma_2 : L_2 \to E$. Utilizamos la propiedad 3.0.6, aplicamos a $Q(R \setminus I) = E$ y tenemos $C_E = C_{Q(R/I)} = C_{L_2} = C_K$. Aplicamos la propiedad 3.2.1 entonces existe un K - isomorfismo diferencial entre L_1 y L_2. $\square$

3.3. Ejemplos

Ejemplo 3.3.1. Adjunción del integral.

Consideramos la extensión diferencial $L = K < \alpha >$, con $\alpha' = a \in K$ tal que a no es una derivada en K. Decimos L es obtenido de K por adjunción de una integral.

Sea $K \subset K < \alpha >$ una extensión Picard - Vessiot de la ecuación diferencial

$$y'' - \frac{a'}{a} y' = 0, \quad a' \backslash a \in K. \tag{3.2}$$

Demostración. Demostraremos que α es transcendental sobre K. Por contradicción sea α es algebraico sobre K, entonces existe un polinomio irreducible no cero $p(x)$ sobre K tal que $p(\alpha) = 0$ donde $p(\alpha) = b_0 + b_1\alpha + b_2\alpha^2 + \cdots + b_{n-1}\alpha^{n-1} + \alpha^n = 0$ derivamos

$$\begin{aligned}
d(p(\alpha)) &= d(b_0 + b_1\alpha + \cdots + b_{n-1}\alpha^{n-1} + \alpha^n) \\
&= d(b_0) + d(b_1)\alpha + b_1 d(\alpha) + \cdots + d(b_{n-1})\alpha^{n-1} + b_{n-1}(n-1)\alpha^{n-2}d(\alpha) \\
&\qquad + n\alpha^{n-1}d(\alpha) \\
&= d(b_0) + d(b_1)\alpha + b_1 d(\alpha) + \cdots + b_{n-1}(n-1)\alpha^{n-2}d(\alpha) + d(b_{n-1})\alpha^{n-1} \\
&\qquad + n\alpha^{n-1}d(\alpha) \\
&= d(b_0) + d(b_1)\alpha + b_1 d(\alpha) + \cdots + b_{n-1}(n-1)\alpha^{n-2}d(\alpha) + (d(b_{n-1}) \\
&\qquad + nd(\alpha))\alpha^{n-1} \\
0 &= d(b_0) + d(b_1)\alpha + b_1 d(\alpha) + \cdots + b_{n-1}(n-1)\alpha^{n-2}d(\alpha) + (d(b_{n-1}) \\
&\qquad + na)\alpha^{n-1} \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

por minimalidad n de $p(x)$ tenemos que todos los coeficientes de 3.3 son iguales a cero, entonces $d(b_{n-1}) + na = 0$ de donde $a = -d(b_{n-1}) \setminus n$ es una contradicción.

Entonces α es transcendental sobre K y consideramos la extensión campo diferencial

$$K \subseteq K(\alpha) = L$$

con la derivación $\alpha' = a$.

Sea $K \subseteq L = K < 1, \alpha >= K(\alpha)$ una extensión Picard - Vessiot de K para la ecuación diferencial lineal 3.2.

Verificamos las condiciones de extension Picard - Vessiot

1. Sea $L = K < 1, \alpha >= K < \alpha >= K(\alpha)$, $\{1, \alpha\}$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal en L.

   Ahora probamos el inciso 2) de la definición 3.0.4.

2. Sin nuevos constantes $C_L = C_K$.

   Por contradicción, supongamos que tenemos un elemento constante en $L = K(\alpha)$
   $$\frac{p(\alpha)}{q(\alpha)} = \frac{\sum_{i=0}^{m_1} a_i\alpha^i}{\sum_{j=0}^{m_2} b_j\alpha^j} \quad a_i, b_j \in K \text{ con } a_{m_1} \neq 0, b_{m_2} = 1$$
   con $mcd(p(x), q(x)) = 1$, donde $p(x), q(x) \in K[x]$.

- Si $q(\alpha)$ no es una constante entonces $q(\alpha)' \neq 0$ y tenemos que $\frac{p(\alpha)}{q(\alpha)}$ es una constante

$$0 = \left(\frac{p(\alpha)}{q(\alpha)}\right)' = \frac{p(\alpha)'q(\alpha) - p(\alpha)q(\alpha)'}{q(\alpha)^2} \Rightarrow \frac{p(\alpha)}{q(\alpha)} = \frac{p(\alpha)'}{q(\alpha)'}$$

donde el grado de q' es menor que el grado de p', entonces tenemos una contradicción, con $p(x)$ y $q(x)$ coprimos.

- Si $q(\alpha)$ es una constante

$$\begin{aligned}
0 &= q(\alpha)' \\
&= \left(\sum_{j=0}^{m_2} b_j\alpha^j\right)' \\
&= (b_{m_2}\alpha^{m_2})' + (b_{m_2-1}\alpha^{m_2-1})' + \left(\sum_{j=0}^{m_2-2} b_j\alpha^j\right)' \\
&= b'_{m_2}\alpha^{m_2} + b_{m_2}m_2\alpha^{m_2-1}\alpha' + b'_{m_2-1}\alpha^{m_2-1} + b_{m_2-1}(m_2-1)\alpha^{m_2-2}\alpha' \\
&\quad + \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{m_2-2} b_j\alpha^j\right)'}_{\text{términos de grado}\leq m_2-2} \\
&= 0 + 1m_2\alpha^{m_2-1}a + b'_{m_2-1}\alpha^{m_2-1} + b_{m_2-1}(m_2-1)\alpha^{m_2-2}a \\
&\quad + \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{m_2-2} b_j\alpha^j\right)'}_{\text{términos de grado}\leq m_2-2} \\
&= am_2\alpha^{m_2-1} + b'_{m_2-1}\alpha^{m_2-1} + (m_2-1)b_{m_2-1}a\alpha^{m_2-2} \qquad + \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{m_2-2} b_j\alpha^j\right)'}_{\text{términos de grado}\leq m_2-2}
\end{aligned}$$

α es transcendental entonces los coeficientes de α^j son cero para todo j, en particular $j = m_2 - 1$

$$am_2 + b'_{m_2-1} = 0 \Rightarrow a = -\frac{b'_{m_2-1}}{m_2}$$

es una contradicción, a no es una derivada de cualquier elemento de K, por lo tanto sin nuevos constantes.

□

Ejemplo 3.3.2. Adjunción de la exponencial del integral.

Consideramos la extensión diferencial $L = K < \alpha >$, con $\alpha'/\alpha = a \in K\backslash\{0\}$. Decimos L es obtenido de K por adjunción de la exponencial de una integral.

Consideramos la ecuación diferencial lineal

$$y' - ay = 0, a \in K \tag{3.4}$$

Demostración. Sea α transcendental sobre K. Por contradicción, sea α algebraico sobre K entonces existe polinomio no cero $p(x)$ sobre K tal que $p(\alpha) = 0$, donde

$$p(\alpha) = b_0 + b_1\alpha + b_2\alpha^2 + \cdots + b_{n-1}\alpha^{n-1} + \alpha^n = 0, \text{con } b_i \in K$$

derivamos

$$\begin{aligned} d(p(\alpha)) &= d(b_0 + b_1\alpha + \cdots + b_{n-1}\alpha^{n-1} + \alpha^n) \\ &= d(b_0) + d(b_1)\alpha + b_1 d(\alpha) + \cdots + d(b_{n-1})\alpha^{n-1} + b_{n-1}(n-1)\alpha^{n-2}d(\alpha) \\ &\quad + n\alpha^{n-1}d(\alpha) \\ &= d(b_0) + d(b_1)\alpha + b_1 d(\alpha) + \cdots + b_{n-1}(n-1)\alpha^{n-2}d(\alpha) + d(b_{n-1})\alpha^{n-1} \\ &\quad + n\alpha^{n-1}d(\alpha) \\ &= d(b_0) + d(b_1)\alpha + b_1 d(\alpha) + \cdots + b_{n-1}(n-1)\alpha^{n-2}d(\alpha) + (d(b_{n-1}) \\ &\quad + nd(\alpha))\alpha^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = d(b_0) + d(b_1)\alpha + b_1 d(\alpha) + \cdots + b_{n-1}(n-1)\alpha^{n-2}d(\alpha) + (d(b_{n-1}) \\ + na\alpha)\alpha^{n-1} \end{aligned} \tag{3.5}$$

por minimalidad de n tenemos que todos los coeficientes de 3.5 son cero $d(b_{n-1}) - na\alpha = 0$ entonces $a = -d(b_{n-1})/n\alpha$, es una contradicción por lo tanto α es transcendental sobre K, tenemos la extensión campo diferencial

$$K \subseteq K(\alpha) = L$$

con la derivación definido por $\alpha' = a\alpha$.

Sea $K \subseteq K(\alpha) = L = K < \alpha >$ una extensión Picard - Vessiot de K para la ecuación diferencial lineal 3.4.

Verificamos las condiciones de extension Picard - Vessiot.

1. Sea $L = K < \alpha >= K(\alpha)$, $\{\alpha\}$ un conjunto fundamental de solución de la ecuación diferencial lineal en L.

2. Sin nuevos constantes $C_L = C_K$.

   Por contradicción, supongamos que tenemos un elemento constante en $L = K(\alpha)$

$$\frac{p(\alpha)}{q(\alpha)} = \frac{\sum_{i=0}^{i=m_1} a_i \alpha^i}{\sum_{j=0}^{m_2} b_j \alpha^j} \quad a_i, b_j \in K, a_{m_1} \neq 0, b_{m_2} = 1$$

   con $mcd(p(x), q(x)) = 1$ donde $p(x), q(x) \in K[x]$.

   - Supongamos que $q(\alpha)$ no es una constante entonces $q(\alpha)' \neq 0$, y tenemos $\frac{p(\alpha)}{q(\alpha)}$ es una constante

$$0 = \Big(\frac{p(\alpha)}{q(\alpha)}\Big)' = \frac{p(\alpha)'q(\alpha) - p(\alpha)q(\alpha)'}{q(\alpha)^2} \Rightarrow \frac{p(\alpha)}{q(\alpha)} = \frac{p(\alpha)'}{q(\alpha)'} \Rightarrow \frac{q(\alpha)'}{q(\alpha)} = \frac{p(\alpha)'}{p(\alpha)}$$

     entonces $q(\alpha)$ divide $q(\alpha)'$, es decir $q(\alpha)'$ es múltiplo de $q(\alpha)$.

     Tenemos

$$q(\alpha) = \alpha^{m_2} + b_{m_2-1}\alpha^{m_2-1} + \cdots + b_1\alpha + b_0, b_i \in K$$

     y derivamos

$$\begin{aligned} q(\alpha)' &= m_2\alpha^{m_2-1}\alpha' + b'_{m_2-1}\alpha^{m_2-1} + b_{m_{2-1}}(m_2-1)\alpha^{m_2-2}\alpha' + \cdots + b'_1\alpha + b_1\alpha' + b'_0 \\ &= m_2\alpha^{m_2}\alpha^{-1}\alpha' + b'_{m_2-1}\alpha^{m_2-1} + b_{m_{2-1}}(m_2-1)\alpha^{m_2}\alpha^{-1}\alpha^{-1}\alpha' + \cdots + b'_1\alpha \\ &\qquad + b_1\alpha' + b'_0 \\ &= m_2\alpha^{m_2}a + b'_{m_2-1}\alpha^{m_2-1} + b_{m_{2-1}}(m_2-1)\alpha^{m_2}\alpha^{-1}a + \cdots + b'_1\alpha + b_1\alpha' + b'_0 \\ &= am_2\alpha^{m_2} + [a(m_2-1)b_{m_2-1} + b'_{m_2-1}]\alpha^{m_2-1} + \cdots + [ab_1 + b'_1]\alpha + b'_0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

     así tenemos de 3.6

$$q(\alpha)' = am_2 q(\alpha)$$

     entonces $q(\alpha)|q(\alpha)'$ con factor am_2.

     Comparamos sus términos independientes obtenemos

$$b'_0 = am_2 b_0$$

     es una contradicción con a.

- Ahora si $q(\alpha)$ es una constante

$$0 = q(\alpha)' = \Big(\sum_{j=0}^{m_2} b_j\alpha^j\Big)' = \sum_{j=0}^{m_2}(b_j'\alpha^j + jb_j\alpha^{j-1}\alpha') = \sum_{j=0}^{m_2}(b_j' + jb_ja)\alpha^j$$

sabemos α es transcendental sobre K, los coeficientes de α^j son cero para todo j

$$b_j' = -jb_ja \quad \forall j = 0, \ldots, m_2$$

es una contradicción. Por lo tanto sin nuevos constantes, probamos la extensión $K \subseteq L = K < \alpha >= K(\alpha)$ es una extensión Picard - Vessiot de K para ecuación diferencial lineal 3.4.

□

3.4. Conclusión

Una extension de Picard-Vessiot es una extension sin nuevas constantes, generada por n soluciones linealmente independientes de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n.

Una adjunción de una integral es la adjunción de un elemento a tal que a' derivada de a pertenece al campo de base.

Una adjunción de una exponencial de una integral es la adjunción de un elemento a tal que a'/a pertenece al campo de base.

Una extension de Liouville es el resultado final de un numero finito de extensiones, cada una adjunción de una integral, o de la exponencial de una integral.

Una extension de Liouville generalizada es el resultado final de un numero finito de extensiones, cada una adjunción de una integral o adjunción de la exponencial de una integral, o extension algebraica finita.

Una solución de tipo Liouville es una expresable mediante las que Liouville llamo funciones elementales: funciones polinomiales, racionales, exponenciales, logarítmicas.

Llámense soluciones liouvillianas, o de Liouville, a las que pertenecen a algún campo diferencial de Liouville.

Apéndice A

Producto tensor

Definición A.0.1. Sean A, B y C espacios vectoriales sobre un campo K.

El producto tensor $A \otimes_K B$ es un espacio vectorial sobre K junto con una aplicación bilineal $u : A \times B \longrightarrow A \otimes_K B$ tal que para cualquier aplicación bilineal $f : A \times B \longrightarrow C$ existe un único aplicación lineal $F : A \otimes_K B \longrightarrow C$ tal que $f = F \circ u$.

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & A \otimes_K B \arrow[dl, "F"'] \\ C & \end{tikzcd}$$

Para $a \in A, b \in B$ denotamos $u(a, b)$ por $a \otimes b$, cuando esto no lleva a confusión, denotamos $A \otimes_K B$ por $A \otimes B$.

Presentamos la suma vectorial, la multiplicación escalar y multiplicación en $A \otimes_K B$.

1. Sean $a \otimes b, a_1 \otimes b_1 \in A \otimes_K B, k \in K$, la suma esta dada por

$$a \otimes b + a_1 \otimes b_1 = a \otimes (b + k^{-1}b_1) \text{ con } k^{-1}a = a_1.$$

Demostración. Utilizamos una de las propiedades de producto tensor, si $a, a_1 \in A \setminus \{0\}$ y $b, b_1 \in B \setminus \{0\}$ entonces $a \otimes b = a_1 \otimes b_1$ implica que existe un elemento $k \in K$ tal que $a = ka_1$ y $b = k^{-1}b_1$, también podemos escribir $a_1 = k^{-1}a$ y $b_1 = k^{-1}b$.

Si $a \otimes b + a_1 \otimes b_1 = a \otimes b + k^{-1}a \otimes b_1 = a \otimes b + a \otimes k^{-1}b_1 = a \otimes (b + k^{-1}b_1)$ con $k^{-1}a = a_1$, $k \in K$. $\square$

2. Tenemos la multiplicación escalar, sea $a \otimes b \in A \otimes_K B, k \in K$

$$k(a \otimes b) = ka \otimes b = a \otimes kb.$$

3. La multiplicación, sea $a \otimes b, a_1 \otimes b_1 \in A \otimes_K B$

$$(a \otimes b)(a_1 \otimes b_1) = aa_1 \otimes bb_1$$

Con estas operaciones la suma vectorial y multiplicación en $A \otimes B$, tenemos un anillo.

Bibliografía

[1] W.W. Rouse Ball, *A short account of the history of mathematics*, Dover, 1960.

[2] Teresa Crespo and Zbigniew Hajto, *Introduction to differential galois theory*, Wydawnictwo PK, Cracow Poland, 2007.

[3] Irving Kaplansky, *An introduction to differential algebra*, Hermann, Paris, 1957.

[4] Ellis Kolchin, *Differential algebra and algebraic groups*, Academic Press, New York, 1973.

[5] Andy Magid, *Lectures on differential galois theory*, University Lecture Serie, States United of America, 1994.

[6] Juan Jose Morales-Ruiz, *Differential galois theory and non integrability of hamiltonian systems*, Birkhäuser, 1999.

[7] Marius Van Der Put and Michael Singer, *Galois theory in linear differential equations*, Springer Verlag, New York, 2003.

[8] D.E. Smith, *History of mathematics*, vol. II, Dover, 1925.