Universidad Mayor de San Andrés

Facultad de Ciencias Puras y Naturales

Carrera de Matemática

Teorema de D.H. Lee- T.S. Wu

(Grupos Topológicos)

Proyecto de Grado Presentado Para la Obtención Del Título de Licenciatura en Matemática

Postulante: Julio Humberto Mamani Aruquipa

Tutores: Dr. Javier Guachalla Hurtado (†)

Lic. Ramiro Choque Canaza

La Paz – Bolivia

2018

Con mucho cariño a mi padre y madre:

Eusebio Mamani Mullisaca, Eustaquia Aruquipa Condori.

2018

Índice general

Agradecimientos

A:

Dios por darme la oportunidad de seguir viviendo y haber guiado por el buen camino.

Mis padres Eusebio y Eustaquia por su apoyo, paciencia, esfuerzos, desvelos, fatigas y todo lo que han hecho para continuar en cada momento, ustedes son mi ejemplo a seguir, es un orgullo ser su hijo.

Mis hermanas Martha y Rocio que siempre me dieron su ayuda cuando fue necesario y me motivaron a avanzar cada vez mas en mis estudios.

Todos mis profesores a lo largo de mi formación educativa por sus enseñanzas, consejos y llamadas de atención, pues ello me ha permitido pulir varios aspectos de mi persona a nivel profesional y personal.

Mis tutores, Dr. Javier Guachalla Hurtado (†), y el Lic. Ramiro Choque Canaza por sus directrices, sugerencias y correcciones, así como por la confianza para llevar a cabo este trabajo.

Mis tribunales, M. Sc. Willy Condori Equice, Lic. Raúl Borda Vega, por sus finas atenciones, sus sugerencias y sus consejos para mejorar este proyecto.

Finalmente, a quienes directa o indirectamente me han apoyado durante mi vida.

A todos, muchas gracias.

1 Introducción

Los grupos topológicos fueron estudiados por primera vez por Schreirer en 1926 y por F.Leja en su artículo; Sur la notion du groupe abstrait topologique en 1927 donde se establece por primera vez la definición de grupo topológico aunque la idea ya estaba vigente dentro del análisis en los grupos continuos de transformaciones y en el desarrollo de los grupos de Lie y sus propiedades.
La combinación de la estructura algebraica de un grupo con la estructura de espacio topológico ha dado lugar al crecimiento de tres areas bien marcadas de la Matemática: Álgebra, Topología y Análisis Funcional, lo que muestra la riqueza del concepto de grupo topológico. Un grupo topológico es una terna que involucra un conjunto, una función y una transformación continua, por ende para ser considerado como tal, debe cumplir las propiedades tanto de ser grupo como de ser espacio topológico, además de cumplir con la continuidad tanto de la multiplicación en el grupo como la de la inversión.
En el presente trabajo se pretende explorar algunas de las propiedades básicas de grupos topológicos y mostrar las relaciones entre la teoría de grupos y la topología general. Con muy pocas herramientas se obtienen resultados muy útiles. Por ejemplo, se pueden construir subgrupos con propiedades fuertes sin pedir muchas hipótesis y tener buenas propiedades de separación que nos permite estudiar de manera mas sencilla cualquier grupo topológico.
En principio mencionamos que el trabajo esta dividida en tres partes, en la primera parte se introduce la definición de grupo topológico, en el cual se van ha mencionar teoremas básicos, como ser el de las traslaciones y la parte donde enunciamos los axiomas de separación que tienen resultados interesantes con el comportamiento bueno en grupos topológicos por así decir; en la segunda parte mencionamos a los subgrupos de los grupos topológicos y la relación con

su clausura, vale rescatar en esta parte también se estudiaran los automorfismos internos de un grupo topológico.

En la tercera parte se menciona el teorema de **D.H. Lee-T.S. Wu** que es el objetivo central del trabajo pues este afirma la existencia de subgrupos normales abiertos y compactos con la condición de que la parte acotada de G es un abierto, para llegar a este resultado se van ha usar los resultados de las dos primeras partes y con los resultados que se realizaran en la tercera parte claro esta con condiciones que tiene que cumplir la parte acotada de G; en consecuencia dando un ejemplo simple del teorema mencionado, para luego afirmar un teorema que es una consecuencia del teorema de **D.H. Lee-T.S. Wu**, así concluimos en la parte cuarta que es la conclusión del trabajo.

Por otra parte se establecerá convenciones acerca de los conceptos que serán utilizados.

En principio, consideramos los conceptos básicos de Teoría de Conjuntos, Teoría de Grupos y Topológica. Respecto a Teoría de Grupos usaremos $(G, \bullet)$ para denotar un grupo y mas adelante solo se usara el símbolo G, en general, emplearemos las definiciones y teoremas del álgebra abstracta que ya conocemos. Para la parte de Espacio Topológico usaremos los conceptos de entorno abierto para elementos de τ, con $\mathcal{V}_X(x)$ denotaremos a la familia de entornos abiertos de x en el espacio topológico X y cuando no haya lugar a confusión se empleará solamente $\mathcal{V}(x)$, también, $int_X(A)$ y $cl_X(A)$ denotan el interior y la cerradura de un conjunto A en un espacio X, respectivamente, y si no hay ambigüedad se omite el subíndice. Cuando no se especifique la topología de un espacio X se usará X para referirse a ella. En la siguiente sección se presentan algunas definiciones con la finalidad de aclarar en que sentido se usa cada concepto en consideración a la variedad de significados que aparecen en este trabajo.

1.0.1 Planteamiento del Problema

El propósito principal del presente trabajo es realizar la demostración del teorema de *D. H. Lee - T. S. Wu* para este cometido enunciaremos algunas definiciones preliminares.

Definición 1

Una terna $(G, \bullet, \mathcal{T})$, donde G es un conjunto no vacío, $\bullet$ es una operación binaria sobre G y $\mathcal{T}$ es una familia de subconjuntos de G, es un grupo topológico si cumplen las siguientes *condiciones:*

1. $(G,\bullet)$*es un grupo (abstracto).*
2. $(G,\mathcal{T})$ *es un espacio topológico.*
3. *Las funciones* $m:(G,\mathcal{T})\times(G,\mathcal{T})\to(G,\mathcal{T})$ *y la función* $In:(G,\mathcal{T})\to(G,\mathcal{T})$ *definidas por* $m(x;y)=x\bullet y$; $In(x)=x^{-1}$, *son continuas.*

Definición 2

Sea G *un grupo topológico y* g *un elemento de* G *fijo.*

1. *La traslación derecha con respecto a* g *es la función* $\phi_g:G\to G$ *definida por* $\phi_g(x)=xg$.
2. *La traslación izquierda con respecto a* g *es la función* $\sigma_g:G\to G$ *definida por* $\sigma_g(x)=gx$.

Definición 3

Sea G *un grupo (abstracto) y* x *un elemento fijo de* G. *La clase de conjugación de* x *es*

$$C_G(x)=\left\{g^{-1}xg\diagup g\in G\right\}.$$

En caso de que no haya lugar a confusión solo se usara $C(x)$.

Definición 4

Sea G *un grupo topológico*

1. *Un elemento* $g\in G$ *es un* $\overline{FC}$*-* ***elemento*** *o elemento acotado si* $cl(C_G(g))$ *es compacto.*
2. *La parte acotada de* G *es*

$$B(G)=\left\{g\in M\diagup g\text{ es }\overline{FC}-\text{elemento}\right\}.$$

3. G *es un* $\overline{FC}-$ *grupo si* $B(G)=G$.

Definición 5

Sea G un grupo topológico, $I_g : G \to G$, $I_g(A) = gAg^{-1}$ (no necesariamente T_2)

1. *Un subconjunto A de G; es invariante bajo los automorfismos internos de G si para cualquier elemento g de G se cumple $I_g(A)$ esta contenido en A.*
2. *Un elemento g de G es un elemento periódico de G si g pertenece a un subgrupo compacto de G. También, un subconjunto A de G es periódico si todos sus elementos son periódicos.*
3. *La parte periódica de G, denotada por $P(G)$, es el conjunto de elementos periódicos de G, En particular, G es puro si $P(G) = \{e_G\}$.*

Definición 6

Un espacio X se dice homogéneo si para todo par de puntos $x, y \in X$ existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(x) = y$.

1.0.2 Objetivo

El objetivo del presente trabajo es desarrollar una construcción de los grupos topológicos y ver que afirmaciones se cumplen en este espacio los cuales se van ha utilizar para demostrar el teorema de ***D. H. Lee - T.S. Wu*** que es el objetivo principal de este trabajo, este teorema afirma la existencia de subgrupos normales abiertos y compactos, el cual esta sujeto a la hipótesis de que la parte acotada sea un abierto y viceversa, tal teorema se utilizará para un resultado que nos inicia en los $\overline{FC}$ -grupos que es un espacio de estudio amplio el cual solo se dará una introducción de las definiciones más no se desarrollará el estudio de estos grupos, así nosotros nos concentraremos en demostrar el teorema, como objetivo principal de este trabajo, el cual afirma.

Teorema 1 (*D. H. Lee - T.S. Wu*)

Sea G un grupo topológico localmente compacto. Si G es totalmente disconexo, entonces $B(G)$ es abierto si y solo si G tiene un subgrupo normal, abierto y compacto.

1.0.3 Objetivos Específicos

Para llegar a desarrollar el teorema mencionado, debemos estudiar algunos temas y resultados preliminares. Además utilizaremos resultados de la topología general y el álgebra los cuales serán solamente mencionados en la parte del apéndice, estos teoremas no serán demostrados a excepción de algunos. A continuación se mencionan teoremas mas relevantes que se utilizará para demostrar el teorema de ***D. H. Lee - T.S. Wu***.

Teorema 2

Sea G un grupo topológico y g un elemento fijo de G. Se cumple que:

1. *La traslación derecha ϕ_g es un homeomorfismo.*
2. *La traslación izquierda σ_g es un homeomorfismo.*
3. *La función In es un homeomorfismo.*

Teorema 3

Todo grupo topológico es un espacio homogéneo.

Teorema 4

Sean G es un grupo topológico y H y N subgrupos de G. Se afirma lo siguiente.

1. *$cl(H)$ es un subgrupo de G.*
2. *Si N es un subgrupo Normal de G, entonces $cl(N)$ es también un subgrupo normal de G.*
3. *H es abierto si y solo si $int(H) \neq \emptyset$.*
4. *Si H es abierto, entonces $cl(H) = H$ es cerrado.*

Teorema 5 (***Usakoŭ***)

Sea G un grupo topológico totalmente disconexo y localmente compacto. Si A es un subconjunto de G relativamente compacto, periódico e invariante bajo los automorfismos internos de G, entonces el subgrupo cerrado generado por A es un subgrupo normal y compacto de G.

Teorema 6

Sea G un grupo topológico localmente compacto. La parte acotada de G es abierto si y solo si G contiene un entorno compacto invariante de la identidad.

1.0.4 Alcances

El tema a desarrollar es en el marco de los Grupos Topológicos, para alcanzar la demostración del teorema de *D. H. Lee -T.S. Wu*, es necesario la demostración de los teoremas mencionados anteriormente.

1.0.5 Metodología

Se aplicara el método deductivo y expositivo pues se hará revision bibliográfica en artículos, se desarrollara los detalles de la temática con anterioridad en exposiciones con el tutor del proyecto de grado, también se disertará en los diversos seminarios que se presenten con exposiciones magistrales a la cabeza de la comisión de seguimiento.

1.0.6 Contenido del Trabajo

1. **Capitulo 1** Grupos topológicos
   - Resultados Preliminares en Grupos Topológicos
   - Traslaciones en Grupos Topológicos
   - Espacio Homogéneo
2. **Capitulo 2** Subgrupos de Grupos Topológicos
   - Subgrupos

- Subgrupos con Respecto a la Cerradura
- Teoremas de Subgrupos con Respecto a la Cerradura

3. **Capitulo 3** $\overline{FC}$ - *grupos*

- $\overline{FC}$ -grupos
- Teorema de $D.H.Lee$ - $T.S.Wu$
- Aplicación del Teorema $D.H.Lee$ - $T.S.Wu$

2

Grupos Topológicos

2.1 Resultados Preliminares en Grupos Topológicos

En esta parte se revisa los conceptos y resultados que darán soporte a este trabajo.
Se define el grupo topológico seguidos de resultados que se construyen sobre este espacio. Vale mencionar que los resultados importantes son sobre las traslaciones y los resultados de entornos de la identidad.

Definición 7

Una terna $(G, \bullet, \mathcal{T})$, donde $G \neq \emptyset$, $\bullet$ es una operación binaria sobre G y $\mathcal{T}$ una familia de subconjuntos de G es un grupo topológico si cumple las siguientes condiciones

1. *$(G, \cdot)$ es un grupo (abstracto).*
2. *$(G, \mathcal{T})$ es un espacio topológico.*
3. *Las funciones $m : (G, \mathcal{T}) \times (G, \mathcal{T}) \to (G, \mathcal{T})$ y la función, $In : (G, \mathcal{T}) \to (G, \mathcal{T})$ definidas por,*
   $m(x; y) = x.y$; $In(x) = x^{-1}$, son continuas.

Notemos que la tercera condición de la definición se formula de manera natural la relación que existe entre la topología y la operación de un grupo dado, pues exige que la operación en el grupo, vista como función, sea continua y que la inversión de elementos también sea una función continua. Ahora, para simplificar la escritura en lo sucesivo damos la siguiente,

Notación.

Sea $(G, \bullet, \mathcal{T})$ un grupo topológico:

1) Para simplificar un grupo topológico, cuando no haya confusión usaremos G en vez de $(G, \bullet, \mathcal{T})$, a su vez $x, y \in G$ escribiremos xy en lugar de $x \bullet y$, también usaremos $\mathcal{T}_G$ para la topología de G cuando sea necesario.

2) El elemento identidad de G es denotado por e_G, o simplemente e.

Por otro lado vemos que la condición 3) de la definición (7) esta bien definida en efecto: sea $(x, y); (u, v) \in G \times G$, de modo que $(x, y) = (u, v) \Longrightarrow m(x, y) = xy = uv = m(u, v)$ por la propiedad transitiva se tiene $m(x, y) = m(u, v)$, esto afirma que esta bien definida.

Definición 8

Si G es un Grupo Topológico, entonces $\mathcal{T}$ es una topología de grupo.

Definición 9

Sea G un grupo topológico y fijemos un punto $x \in G$.

1. *Diremos que un conjunto $A \subset G$ es un **entorno** de x, si existe $U \in \tau$ talque $x \in U \subset A$.*

2. *A se llamará **entorno abierto** de x si se tiene que $x \in A$ y el mismo $A \in \tau$.*

Definición 10

Sea $x \in G$, se define el conjunto siguiente

$$\mathcal{V}_G(x) = \{U \in \mathcal{T} \,/\, x \in U\},$$

$\mathcal{V}_G(x)$ es la familia de entornos abiertos de x.

En caso de que no haya confusión usaremos simplemente la notación $\mathcal{V}(x)$.

Definición 11

Sean $V, W \subseteq G$. Definimos los siguientes conjuntos:

- *$VW = \{vw \,/\, v \in V\,,\, w \in W\}$, si $V = W$ entonces $VV = V^2$, si $V = \{v\}$, entonces $VW = vW$.*

- *El conjunto de elementos inversos $V^{-1} = \{v^{-1} \,/\, v \in V\}$.*

Lema 1

La condición 3) de la definición (7) se puede expresar de la siguiente forma para $x, y \in G$ se cumple que

- $\forall U \in \mathcal{V}(xy)$, $\exists V \in \mathcal{V}(x)$ *y* $W \in \mathcal{V}(y)$ $\diagup VW \subset U$.
- $\forall U \in \mathcal{V}(x^{-1})$, $\exists V \in \mathcal{V}(x)$ $\diagup V^{-1} \subset U$.

Demostración :

- Sea $U \in \mathcal{V}(xy)$, por definición se afirma $xy \in U$, pero se sabe que G es un grupo topológico, entonces la función m es continua

$$m : \underset{(x,y)}{G \times G} \underset{\longmapsto}{\rightarrow} \underset{m(x,y)=xy}{G}.$$

Por otro lado como G es un grupo topológico implica que G es un espacio topológico, por tanto se está en condición de aplicar resultados conocidos en la topología. Así podemos afirmar que $\forall (x,y) \in G \times G$, y para todo entorno U de $m(x,y) = xy$ existe un entorno N de (x,y), equivalentemente

$$\begin{aligned} \forall (x,y); \exists N &= U \times W \text{ entorno de } (x,y); \\ m(N) &\subset U \\ m(U \times W) &\subset U. \end{aligned}$$

Por otro lado se afirma que $m(V \times W) = UW$ entonces se concluye $UW \subset U$.

- Del mismo modo sea $U \in \mathcal{V}(x^{-1})$, entonces por definición $x^{-1} \in U$, por otro lado se puede advertir $x^{-1} \in G$ que evidentemente es un grupo topológico, por definición (7) se tiene que, $In(x)$ es una función continua es decir,

$$In : \underset{(x,y)}{G \times G} \underset{\longmapsto}{\rightarrow} \underset{In(x,y)=x^{-1}}{G} \text{ es continua},$$

por argumento anterior tenemos la siguiente afirmación,

$$\begin{aligned} \forall x &\in G, \forall U(In(x)); \exists V(x); \\ In(V) &\subset U \\ V^{-1} &\subset U. \end{aligned}$$

■

Ejemplos

Veamos algunos grupos topológicos, los mas conocidos son:

1. Si $(G, \bullet)$ es un grupo abstracto y consideremos la topología discreta, es decir (G, τ_{dis}) formando la terna $(G, \bullet, \tau_{dis})$ es un grupo topológico, el cual se llama ***grupo discreto.*** Pues las funciones m, In son funciones continuas con la topología discreta.

2. Si $(G, \bullet)$ es un grupo abstracto y consideremos la topología indiscreta, es decir (G, τ_{ind}) formando la terna $(G, \bullet, \tau_{ind})$ es un grupo topológico, el cual se llama ***grupo indiscreto***. En particular podemos mencionar grupos topológicos, con la topología discreta $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n, \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ y que son abelianos.

3. El grupo aditivo de los números reales $\mathbb{R}$ con la topología usual, es un grupo topológico. Para mostrarlo, se afirma primeramente que $\mathbb{R}$ es un grupo con respecto a la suma, ya que tiene una estructura de grupo y además es un espacio topológico con la topología usual. Lo que falta ver es que las funciones m, In sean continuas, en efecto.
   Consideremos la base $\{B(x, \epsilon) \diagup x \in \mathbb{R}, \epsilon > 0\}$, donde $B(x, \epsilon) = \{y \in \mathbb{R} \diagup |y - x| < \epsilon\}$, además notemos que $In(x) = -x$ y $m(x, y) = x + y$
   Veamos la continuidad de In, Sean $x \in \mathbb{R}$ y $V \in \mathcal{V}(-x)$, tenemos que existe $\epsilon > 0$, talque $B(-x, \epsilon) \subset V$, vemos que $x \in B(x.\epsilon)$ y $In(B(x, \epsilon)) = B(-x, \epsilon) \subset V$, por tanto la función In es continua.
   Veamos la continuidad de m, para esto sean $x, y \in \mathbb{R}$ y sea $V \in \mathcal{V}(x + y)$, entonces existe $\epsilon > 0$ talque $B(x + y, \epsilon) \subset V$. Sea $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, tenemos que

$$\begin{aligned} x &\in B(x, \delta)\,,\; y \in B(y, \delta) \\ m\left[B(x, \delta) \times B(y, \delta)\right] &\subset B(x + y, \epsilon) \end{aligned}$$

   por la desigualdad triangular se tiene,

$$|z + w - (x + y)| \leq |z - y| + |w - x| < \epsilon,$$

   con esto se concluye que m es continua, por tanto $\mathbb{R}$ es un grupo topológico.

Ahora veamos un teorema que puede simplificar la verificación para saber si es o no un grupo topológico, enunciemos el siguiente teorema.

Teorema 7

Sea $(G,\bullet)$ un grupo y $(G,\mathcal{T})$ un espacio topológico, la terna $(G,\bullet,\mathcal{T})$ es un grupo topológico si y solo si

$$g: \underset{(x,y)\longmapsto g(x,y)=xy^{-1}}{G\times G\longrightarrow G}$$

es función continua.

Demostración : $\Longrightarrow]$

Supongamos que $(G,\bullet,\mathcal{T})$ es un grupo topológico, por otro lado definamos la función diagonal de la identidad y la función In, es decir sea la función,

$$\Delta_{\{1_G,In\}}: \underset{(x,y)\longmapsto\Delta_{\{1_G,In\}}(x,y)=[1(x),In(y)]}{(G\times G)\longrightarrow (G\times G)} .$$

La anterior función esta bien definida para todo $(x,y)\in(G,\mathcal{T})$.

Por otro lado se afirma que $\Delta_{\{1_G,In\}}(x,y)=[1(x),In(y)]$ es una función continua, es evidente por hipótesis, pues se trabaja en un espacio topológico, por afirmaciones hechas las funciones $1_G(x)$ y $In(y)$ son continuas, entonces $\Delta_{\{1_G,In\}}(x,y)=[1(x),In(y)]$ es continua ya que las funciones coordenadas son continuas.

Se sabe también que

$$m: \underset{(x,y)\longmapsto m(x,y)=xy}{(G\times G)\longrightarrow G} \quad \text{es continua}$$

por composición de funciones continuas es continua, se puede ver en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
G\times G \arrow[d, "\Delta_{\{1_G,In\}}"'] \arrow[dr, "m\circ\Delta_{\{1_G,In\}}"] & \\
G\times G \arrow[r, "m"'] & G
\end{tikzcd}$$

es decir la función $m\circ\Delta_{\{1_G,In\}}$ es continua para todo $(x,y)\in(G,\bullet,\mathcal{T})\times(G,\bullet,\mathcal{T})$, además se tiene las siguiente igualdad:

$$m\circ\Delta_{\{1_G,In\}}(x,y)=g\left[(x,y)\right],$$

entonces $g=m\circ\Delta_{\{1_G,In\}}$ concluimos que g es evidentemente continua.

$[\Longleftarrow$

Supongamos que la función g es continua

$$g: \underset{(x,y)\longmapsto g(x,y)=xy^{-1}}{(G,\mathcal{T})\times(G,\mathcal{T})\longrightarrow(G,\mathcal{T})}$$

lo que se quiere demostrar es que m y In son continuas, en efecto.

i) Definamos la función inclusión $f : \underset{x \longmapsto f(x)=(e,x)}{G \longrightarrow G \times G}$, se afirma también que esta función es continua, nuevamente componiendo estas funciones se tendrá una función continua,

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g \circ f"] & \\ G \times G \arrow[r, "g"'] & G \end{tikzcd}$$

además

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(e,x) \\ &= ex^{-1} \\ &= x^{-1} \\ &= In(x) \end{aligned}$$

entonces la función $g \circ f = In$ es evidentemente continua.

ii) Afirmamos que $\Delta_{\{1_G,In\}} : \underset{(x,y) \longmapsto \Delta_{\{1_G,In\}}(x,y)=[1(x),In(y)]}{G \times G \longrightarrow G \times G)}$ es continua, por otro lado tenemos por hipótesis que g es continua componiendo estas funciones continuas obtenemos otra función continua, es decir

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[dr, "g \circ \Delta"] & \\ G \times G \arrow[r, "g"'] & G \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} g \circ \Delta_{\{1_G,In\}}(x,y) &= g\left[\Delta_{\{1_G,In\}}(x,y)\right] \\ &= g(1_G(x), In(y)) \\ &= g(x, y^{-1}) \\ &= x(y^{-1})^{-1} \\ &= xy \\ &= m(x,y), \end{aligned}$$

entonces $g \circ \Delta_{\{1_G,In\}} = m$ es continua para todo $(x,y) \in G \times G$, por tanto $(G, \bullet, \mathcal{T})$ es un grupo topológico. ■

2.2

Traslaciones en Grupos Topológicos

Definición 12

Sea G un grupo topológico y g un elemento de G fijo.

1. *La traslación derecha con respecto a g es la función $\phi_g : G \to G$ definida por $\phi_g(x) = xg$.*

2. *La traslación izquierda con respecto a g es la función $\sigma_g : G \to G$ definida por $\sigma_g(x) = gx$.*

Uno de los teoremas relevantes e interesantes por ser homeomorfismos, se va utilizar en el desarrollo de este trabajo, lo mencionamos a continuación.

Teorema 8

Sea G un grupo topológico y g un elemento fijo de G. Se cumple que:

1. *La traslación derecha ϕ_g es un homeomorfismo.*

2. *La traslación izquierda σ_g es un homeomorfismo.*

3. *La función In es un homeomorfismo.*

Demostración: 1. Para demostrar que ϕ_g es un homeomorfismo es necesario verificar tres afirmaciones, que la función sea biyectiva, continua y que la inversa sea continua, en efecto.

- Veamos la biyectividad, para esto primeramente vemos la existencia del inverso, afirmamos que $\phi_{g^{-1}}$es inversa tanto a izquierda como a derecha de ϕ_g, pues para todo $x \in G$ se cumple

$$\begin{aligned}(\phi_g \circ \phi_{g^{-1}})(x) &= \phi_g(\phi_{g^{-1}}(x)) \\ &= \phi_g(xg^{-1}) \\ &= xg^{-1}g \\ &= xe \\ &= x,\end{aligned}$$

por otro lado se tiene además que para todo $x \in G$

$$\begin{aligned}(\phi_{g^{-1}} \circ \phi_g)(x) &= \phi_{g^{-1}}(\phi_g(x)) \\ &= \phi_{g^{-1}}(xg) \\ &= xgg^{-1} \\ &= xe \\ &= x,\end{aligned}$$

con estos resultados se afirma que la función admite inversa a izquierda y a derecha, lo cual implica que la función es sobreyectiva e inyectiva por tanto biyectiva, así se concluye que la función ϕ_g es evidentemente biyectiva.

- Ahora veamos la continuidad de ϕ_g, en efecto se tiene las siguientes afirmaciones; como G es un grupo topológico entonces estamos trabajando con un espacio topológico $(G, \mathcal{T})$ y un grupo $(G, \bullet)$, además tenemos como hipótesis que la función $m : (G, \mathcal{T}) \times (G, \mathcal{T}) \longrightarrow (G, \mathcal{T})$ es continua. Por otro lado definamos la función

$$f : \underset{x}{(G, \mathcal{T})} \underset{\longmapsto}{\longrightarrow} \underset{f(x)=(x,g)}{(G, \mathcal{T}) \times (G, \mathcal{T})}$$

el cual se puede verificar que la función está bien definida, además por afirmaciones de la topología se puede apreciar que la función es continua, es decir las funciones $f_1 : (G, \mathcal{T}) \longrightarrow (G, \mathcal{T})$ definida por $f_1(x) = x$, es la función identidad esta función es continua, donde la función $f_2 : (G, \mathcal{T}) \longrightarrow (G, \mathcal{T})$ definida por $f_2(x) = g$ es la función constante también es continua por tanto f es evidentemente continua.

Entonces componiendo funciones continuas se tiene que $m \circ f$ es continua.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "m\circ f"] & \\ G \times G \arrow[r, "m"'] & G \end{tikzcd}$$

donde se obtiene que $x \in G$ y se cumple

$$\begin{aligned}(m \circ f)(x) &= m(f(x)) \\ &= m(x, g) \\ &= xg \\ &= \phi_g(x)\end{aligned}$$

como la composición es continua se tiene que ϕ_g es continua.

- Ahora veamos la continuidad de $\phi_{g^{-1}}$, para este cometido definamos la función

$$f : \underset{x}{(G,\mathcal{T})} \underset{\longmapsto}{\longrightarrow} \underset{f(x)=(x,g^{-1})}{(G,\mathcal{T}) \times (G,\mathcal{T})}$$

  por argumentos anteriores se tiene que esta bien definida, y es continua. Realizando la composición de funciones continuas se tiene que $m \circ f = \phi_{g^{-1}}$ es también continua. Por tanto por las afirmaciones anteriores concluimos que la función ϕ_g es un homeomorfismo.

2. En esta segunda parte demostraremos que σ_g es un homeomorfismos, en efecto.

- Para la biyectividad notemos que $\sigma_{g^{-1}}$ es una inversa a izquierda y a derecha de σ_g, pues para todo $x \in G$ se tiene la siguiente igualdad,

$$\begin{aligned}(\sigma_g \circ \sigma_{g^{-1}})(x) &= \sigma_g(\sigma_{g^{-1}}(x)) \\ &= \sigma_g(g^{-1}x) \\ &= gg^{-1}x \\ &= ex \\ &= x,\end{aligned}$$

  del mismos modo para todo $x \in G$ se tiene

$$\begin{aligned}(\sigma_{g^{-1}} \circ \sigma_g)(x) &= \sigma_{g^{-1}}(\sigma_g(x)) \\ &= \sigma_{g^{-1}}(gx) \\ &= g^{-1}gx \\ &= ex \\ &= x,\end{aligned}$$

  por tanto tenemos que σ_g es una función inyectiva y sobreyectiva en consecuencia biyectiva.

- Veamos la continuidad de σ_g, como G es un grupo topológico tenemos pues que $m : G \times G \longrightarrow G$ es continua, por otro lado definamos la función

$$f : \underset{x}{(G,\mathcal{T})} \underset{\longmapsto}{\longrightarrow} \underset{f(x)=(g,x)}{(G,\mathcal{T}) \times (G,\mathcal{T})}$$

  esta función esta bien definida y además por argumentos anteriores también es continua, así componiendo funciones continuas se tiene otra continua es decir;

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "m\circ f"] & \\ G\times G \arrow[r, "m"'] & G \end{tikzcd}$$

la función $m\circ f$ es continua, además para todo $x\in G$

$$\begin{aligned} (m\circ f)(x) &= m(f(x)) \\ &= m(g,x) \\ &= gx \\ &= \sigma_g(x), \end{aligned}$$

es decir que $\sigma_g = mof$ es continua.

- Ahora veamos la continuidad de $\sigma_{g^{-1}}$, en efecto definamos la siguiente función

$$f:(G,\mathcal{T}) \underset{x \quad \longmapsto \quad f(x)=(g^{-1},x)}{\longrightarrow} (G,\mathcal{T})\times(G,\mathcal{T})$$

esta bien definida y además por argumentos anteriores es continua, nuevamente componiendo funciones continuas se tiene otra función continua es decir que $m\circ f$ es también continua, además para todo $x\in G$ se tiene

$$\begin{aligned} (m\circ f)(x) &= m(f(x)) \\ &= m(g^{-1},x) \\ &= g^{-1}x, \\ &= \sigma_{g^{-1}}(x), \end{aligned}$$

por tanto concluimos que $m\circ f = \sigma_{g^{-1}}$ es continua.

3. Por último demostremos que In es un homeomorfismo.

- Primeramente veamos la biyectividad, para este cometido se afirma que la función In es la inversa tanto a izquierda como a derecha de In, en efecto para todo $x \in G$ se tiene,

$$\begin{aligned}(In \circ In)(x) &= In(In(x)) \\ &= In(x^{-1}) \\ &= (x^{-1})^{-1} \\ &= x,\end{aligned}$$

por otra parte se afirma que In es inyectiva y sobreyectiva por tanto biyectiva.

- También se afirma que In es continua por hipótesis.
- Como la inversa de In es la misma función, se tiene que la inversa de In es continua, por las afirmaciones hechas se concluye que In es un homeomorfismo, esto concluye la demostración. ■

Ejemplo Sabemos que $(\mathbb{R}, +, \tau_u)$, es un grupo topológico, si tomamos $g \in \mathbb{R}$ como fijo notemos que la función ***traslación derecha*** con respecto a g es la la función

$$\phi_g : \underset{x}{\mathbb{R}} \underset{\longmapsto}{\longrightarrow} \underset{\phi_g(x)=x+g}{\mathbb{R}}.$$

También podemos definir que la función ***traslación izquierda*** definida por

$$\sigma_g : \underset{x}{\mathbb{R}} \underset{\longmapsto}{\longrightarrow} \underset{\sigma_g(x)=g+x}{\mathbb{R}}$$

se puede advertir por teorema que estas funciones son homeomorfismos, además se puede ver que $\sigma_g = \phi_g$, por otro lado veamos la función inversión

$$In : \underset{x}{\mathbb{R}} \underset{\longmapsto}{\longrightarrow} \underset{In(x)=-x}{\mathbb{R}}$$

A partir del teorema anterior se obtienen los siguientes resultados que permiten caracterizar el comportamiento de la topología de un grupo topológico.

Teorema 9

Sea G un grupo topológico y $\mathcal{T}$ su topología, si $\mathcal{B}(e)$ es una base local del elemento identidad e, entonces las familias $\{xU \diagup x \in G \text{ y } U \in \mathcal{B}(e)\}$ y $\{Ux \diagup x \in G \text{ y } U \in \mathcal{B}(e)\}$ son bases para $\mathcal{T}$.

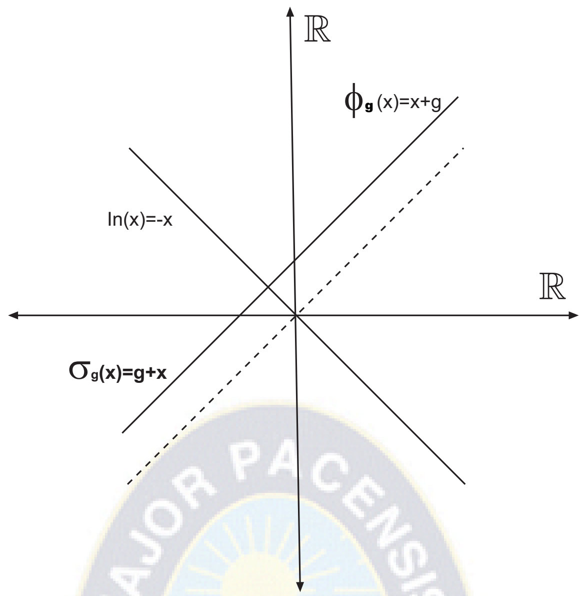

Figura 2.1: Gráfica de traslaciones y la funcion inversión

Demostración : En efecto, veamos primeramente que $\{xU\diagup x\in G \text{ y } U\in\mathcal{B}(e)\}$ es una base, esta familia es una colección de abiertos, pues por teorema (8) se tiene que la función σ_x con $x\in G$ es un homeomorfismo entonces σ_x una aplicación abierta, es decir que como U es un entorno abierto de la identidad se tiene que $\sigma_x(U)=xU$ es un abierto, por tanto podemos afirmar que $\{xU\diagup x\in G \text{ y } U\in\mathcal{B}(e)\}$ es evidentemente que es una colección de abiertos. Por otra parte sea un entorno abierto W de a con $a\in W$, nuevamente por el teorema (8), $\sigma_a : G\longrightarrow G$ es un homeomorfismo entonces la función $\sigma_{a^{-1}} : G\longrightarrow G$ es una aplicación abierta, es decir como W es un abierto implica $\sigma_{a^{-1}}(W)=a^{-1}W$ es un abierto, además como $a\in W$ se puede afirmar $\sigma_{a^{-1}}(a)\in\sigma_{a^{-1}}(W)$, implica $a^{-1}a\in a^{-1}W$ es decir $e\in a^{-1}W$, de este resultado se tiene que $a^{-1}W$ es un entorno de la identidad. Como $\mathcal{B}(e)$ es una base local y $a^{-1}W$ es un entorno de la identidad, se afirma que existe un $V\in\mathcal{B}(e)$, talque $V\subset a^{-1}W$, entonces

$$\begin{aligned}\sigma_a(V) &\subset \sigma_a(a^{-1}W)\\ aV &\subset aa^{-1}W\\ aV &\subset W,\end{aligned}$$

del cual se afirma que $\forall W$ y $a\in G$ $\exists aV\in\{xU\diagup x\in G \text{ y } U\in\mathcal{B}(e)\}$ talque $a\in aV\subset W$ entonces por afirmaciones de la topología concluimos que $\{xU\diagup x\in G \text{ y } U\in\mathcal{B}(e)\}$ es una base para $\mathcal{T}$.

De la misma forma probemos que el conjunto $\{Ux\diagup x\in G \text{ y } U\in\mathcal{B}(e)\}$ es una base para $\mathcal{T}$, de la misma forma por el argumento anterior se afirma que es una familia de abiertos.

Por otro lado sea W un conjunto abierto de G, y sea un elemento $a \in G$, por teorema (8) tenemos que la función ϕ_a es un homeomorfismo para todo $a \in G$, entonces $\phi_{a^{-1}} : G \longrightarrow G$ es una aplicación abierta es decir, como W es un abierto tenemos

$$\phi_{a^{-1}}(W) = Wa^{-1} \text{ es un abierto}$$

pero como $a \in W$, implica $\phi_{a^{-1}}(a) \in \phi_{a^{-1}}(W)$, así $e = aa^{-1} \in Wa^{-1}$, esto quiere decir que Wa^{-1} es un entorno abierto de la identidad.

Por otro lado tenemos por hipótesis que $\mathcal{B}(e)$ es una base local de la identidad y Wa^{-1} es un entorno abierto de la identidad entonces se afirma que existe un $V \in \mathcal{B}(e)$, talque $V \subset Wa^{-1}$

$$\begin{aligned} \phi_a(V) &\subset \phi_a(Wa^{-1}) \\ Va &\subset Wa^{-1}a \\ Va &\subset We \\ Va &\subset W, \end{aligned}$$

así ordenando condiciones se tiene que, $\forall W$ abierto, $a \in G$ $\exists Va \in \{Ux/x \in G \text{ y } U \in \mathcal{B}(e)\}$ talque $a \in aV \subset W$, entonces se concluye por afirmaciones de la topología $\{Ux/x \in G \text{ y } U \in \mathcal{B}(e)\}$ es evidentemente una base para $\mathcal{T}$. ■

Definición 13

*Sea A un subconjunto de un grupo topológico G. Diremos que A **es simétrico** si $A^{-1} = A$. En particular, si V es una entorno abierto, diremos que V es una **entorno simétrico abierto** si $V^{-1} = V$.*

Ejemplo Se sabe que $\mathbb{Z}_n$, $n \in \mathbb{N}$ es un grupo con respecto a la suma y la topología discreta, tomemos en particular para $n = 6$, teniendo $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Sea el subconjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \subset \mathbb{Z}_6$ se afirma, A es un abierto simétrico es decir $A^{-1} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, se cumple $A = A^{-1}$.

Teorema 10

Si G es un grupo topológico y U es una entorno abierto del elemento identidad e, entonces existe una entorno simétrico V de e talque $V \subset U$. Esto equivale a que la familia de entornos abiertos simétricos de la identidad forman una base local de la identidad.

Demostración : Sea G un grupo topológico, U un entorno de la identidad e, esto equivale a la siguiente afirmación $U \in \mathcal{V}(e)$, por otro lado se tiene $In : G \to G$ por teorema (8) es un homeomorfismo esto implica $In(U) = U^{-1}$ es un abierto, como $aa^{-1} = e \in U$, entonces

$$\begin{aligned} In(aa^{-1}) &= (aa^{-1})^{-1} \\ &= (a^{-1})^{-1}a^{-1} \\ &= aa^{-1} \\ &= e \in In(U), \end{aligned}$$

así se tiene que $e \in U^{-1}$ esto equivalente a $U^{-1} \in \mathcal{V}(e)$. Por otro lado sea el conjunto $V = U \cap U^{-1}$, claramente V es abierto y se afirma que $e \in V$, entonces $V \in \mathcal{V}(e)$. Se afirma lo siguiente $V \subset U$, por teoría de conjuntos es cierto.

Por otro lado se afirma $V^{-1} = V$ en efecto.

i) Veamos primeramente $(U \cap U^{-1}) \subset (U \cap U^{-1})^{-1}$ en efecto, sea $x \in U \cap U^{-1}$, entonces por demostrar $x = a^{-1} / a \in U \cap U^{-1}$.

Como $x \in U \cap U^{-1}$ implica $x \in U, x \in U^{-1}$

$$\begin{array}{ccc} \Rightarrow \quad In(x) \in In(U) & & ; In(x) \in In(U^{-1}) \\ \Rightarrow x^{-1} \in U^{-1} & \text{y} & x^{-1} \in U \end{array}$$

Si $x^{-1} = a$, entonces $a \in U \cap U^{-1}$, además $a = x^{-1} \Rightarrow x = a^{-1}$, así $(U \cap U^{-1}) \subset (U \cap U^{-1})^{-1}$.

ii) Veamos que $x \in \left(U \cap U^{-1}\right)^{-1}$, por demostrar $x \in U \cap U^{-1}$.

Entonces como $x \in \left(U \cap U^{-1}\right)^{-1}$ implica que $x = a^{-1} / a \in U \cap U^{-1}$, del cual $a = x^{-1}$, entonces

$$\begin{aligned} x^{-1} &\in U \cap U^{-1} \\ \Rightarrow In(x^{-1}) &\in In(U) \cap In(U^{-1}) \\ x &\in U^{-1} \cap U, \end{aligned}$$

así podemos afirmar la inclusión $\left(U \cap U^{-1}\right)^{-1} \subset U^{-1} \cap U$, por tanto se tiene la igualdad $U \cap U^{-1} = \left(U \cap U^{-1}\right)^{-1}$ entonces $V^{-1} = V$ con lo que se concluye que V es simétrico. ∎

Teorema 11

Sea G un grupo topológico

1. *Si U es un entorno abierto de la identidad e, entonces $\forall n \in \mathbb{N}$ existe un entorno V abierto de la identidad e talque $V^n \subset U$.*

2. *Si U es un entorno abierto de la identidad e, entonces existe un entorno abierto V de la identidad e talque $cl(V) \subset U$.*

Demostración: 1. Sea un entorno V de la identidad e, como $V \in \mathcal{V}(e)$, la demostración se la realizara por inducción sobre n, en efecto.

Si $n = 1$ entonces es suficiente considerar $V = U$ lo cual implica que $V \subset U$.

Se tiene como hipótesis de inducción $P(n)$:$U \in \mathcal{V}(e)$, luego $\exists W \in \mathcal{V}(e) / W^n \subset U$.

Además como hipótesis $P(n+1)$: $U \in \mathcal{V}(e)$, entonces lo que se quiere demostrar es que $\exists V \in \mathcal{V}(e) / V^{n+1} \subset U$.

Como G es un espacio topológico, implica por definición (7) m es continua en particular $m(e,e) = ee = e$, además por el lema (1) se tiene se puede hacer la afirmación siguiente; como $W \in \mathcal{V}(ee) = \mathcal{V}(e)$, entonces $\exists V_1 \in \mathcal{V}(e)\,,\, V_2 \in \mathcal{V}(e) / V_1V_2 \subset W$.

Por otro lado tomando $V = V_1 \cap V_2$, claramente se puede advertir, que $V \in \mathcal{V}(e)$.

También se afirma que $V^2 \subset W$, en efecto sea $n \in V^2 \Rightarrow n = vv / v \in V$, pero como

$$\begin{aligned} v &\in V = V_1 \cap V_2 \Rightarrow v \in V_1 \wedge v \in V_2 \Rightarrow n \in V_1V_2 \\ n &\in W \\ \Rightarrow V^2 &\subset W. \end{aligned}$$

También se puede ver fácilmente que es verdadera la siguientes afirmaciones,

$$\begin{aligned} V^{n+1} &= V^2V^{n-1} \\ WW^{n-1} &= W^n. \end{aligned}$$

Por otro lado se afirma la siguiente inclusión $V^2V^{n-1} \subset WW^{n-1}$, en efecto sea $x \in V^2V^{n-1} \Rightarrow x = a^2b^{n-1} / a \in V \wedge b \in V$ pero $a^2 \in V^2 \subset W \Rightarrow a^2 \in W$, por otro lado

$$\begin{aligned} b &\in V \Rightarrow b = v_1, b = v_2 \Rightarrow v_1 = v_1 e \in V_1 V_2 \subset W \\ b &\in W \\ \Rightarrow x = a^2 b^{n-1} &\in W W^{n-1} \\ V^2 V^{n-1} &\subset W W^{n-1}, \end{aligned}$$

por tanto por las condiciones anteriores se tiene

$$\begin{aligned} V^{n+1} &= V^2 V^{n-1} \subset W W^{n-1} = W^n \\ V^{n+1} &\subset W^n \end{aligned}$$

por hipótesis de inducción

$$\begin{aligned} V^{n+1} &\subset W^n \subset U \\ V^{n+1} &\subset U, \end{aligned}$$

por tanto se concluye que existe un entorno abierto de la identidad talque $V^n \subset U$.

2. Por hipótesis tenemos que U es un entorno abierto de la identidad e, entonces $U \in \mathcal{V}(e)$ así por 1) existe un entorno abierto de la identidad e, es decir $V \in \mathcal{V}(e)$ talque $V^n \subset U$, tomando $n = 2$ implica $V^2 \subset U$.

Por otro lado como $V \in \mathcal{V}(e)$, consecuentemente por teorema (10) existe un entorno abierto W simétrico de la identidad e, talque $W \subset V$.

También afirmamos que $W^2 \subset U$, en efecto sea

$$\begin{aligned} n &\in W^2 \Rightarrow n = w^2 / w \in W \subset V \Rightarrow w \in V \\ n = w^2 \in V^2 &\subset U \\ n &\in U \\ W^2 &\subset U. \end{aligned}$$

Ahora elijamos un elemento $x \in cl(V)$ como Wx es abierto por teorema (8), además $x \in Wx$ es decir Wx es un entorno abierto de x, como $x \in cl(V)$ se tiene,

$$W \cap Wx \neq \emptyset$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \exists x_1, x_2 &\in W / x_2 = x_1 x \\ x &= x_1^{-1} x_2 \Longrightarrow x_1^{-1} x_2 \in W^{-1} W, \end{aligned}$$

pero tenemos que W es simétrico por definición (13) se tiene

$$\begin{aligned} x &\in W^{-1}W = WW = W^2 \\ x \in W^2 &\subset U \\ x &\in U \\ cl(W) &\subset U. \end{aligned}$$

■

Teorema 12

Sea G un grupo topológico, consideremos $a \in G$, A, B, O y $M \subset G$, entonces

1. *Si O es un conjunto abierto entonces aO, Oa, O^{-1}, MO y MO son abiertos.*
2. *Si A es un conjunto cerrado entonces aA, Aa, A^{-1} son cerrados.*
3. *La cerradura A se puede expresar como intersección de todos los productos de A por entornos abiertos de la identidad, tanto a izquierda como por derecha es decir*

$$cl(A) = \bigcap_{W \in \mathcal{V}(e)} AW = \bigcap_{W \in \mathcal{V}(e)} WA$$

Demostración: 1. Supongamos que O es un abierto, y sea $a \in G$.

i) Tenemos por (8) $\sigma_a : G \to G$ es un homeomorfismo, entonces σ_a es una aplicación abierta es decir $\sigma_a(O) = aO$ es abierto, por el mismo argumento Oa es abierto.

ii) Por el teorema (8) se tiene que la función In es un homeomorfismo entonces también es una aplicación abierta, entonces $In(O) = O^{-1}$ es abierto.

iii) Sea $M \subset G$, entonces tenemos $\forall m \in M$, se cumple $MO = \bigcup_{m \in M} mO$, por i) mO es abierto y por topología la unión de abierto es abierto, por tanto MO es abierto, de la misma forma se cumple que OM también es abierto.

2. Aplicando nuevamente el teorema (8), tenemos que para $a \in G$, las funciones σ_a, ϕ_a y la función In son homeomorfismos por tanto son continuas así por topología, se afirma, que $\sigma_a(A) = aA$, $\phi_a(A) = Aa$ y $In(A) = A^{-1}$ son cerrados.

3. Para esto veamos la primer parte de la inclusión $cl(A) \subset \bigcap_{W\in\mathcal{V}(e)} AW$, en efecto.

   Sea $x \in cl(A)$ entonces $x \in \bigcap_{W\in\mathcal{V}(e)} AW$ por demostrar $(x \in AW, \forall W \in \mathcal{V}(e))$ así pues.

   Elijamos $W \in \mathcal{V}(e)$, implica que W es un entorno abierto de e por teorema (10) existe V entorno abierto y simétrico de la identidad e talque $V \subset W$, por 1) se afirma que AV es un abierto, se tiene también, que $A \subset AV$.

   Por otro lado, como V es un abierto nuevamente por 1) se afirma que xV es un abierto, además $x \in xV$, implica que xV es un entorno abierto de x; como escogimos un elemento de la forma $x \in cl(A)$, entonces por topología se tiene la siguiente afirmación; tomando a xV

$$\begin{aligned} A\cap xV \neq \emptyset \Longrightarrow \exists a &\in A; v\in V \diagup a = xv \\ a = xv \Longrightarrow & \; av^{-1} = x \\ \Longrightarrow x \in & \; AV^{-1} \end{aligned}$$

   como V es simétrico se tiene,

$$x \in AV^{-1} = AV$$

   como $V \subset W \Longrightarrow AV \subset AW$

$$\begin{aligned} x &\in AV^{-1} = AV \subset AW \\ x &\in AW \\ x &\in \bigcap_{W\in\mathcal{V}(e)} AW \\ \Rightarrow cl(A) &\subset \bigcap_{W\in\mathcal{V}(e)} AW. \end{aligned}$$

   Ahora veamos la otra implicación es decir $\bigcap_{W\in\mathcal{V}(e)} AW \subset cl(A)$, en efecto.

   Sea $x \in \bigcap_{W\in\mathcal{V}(e)} AW$ se mostrará que si $(V \in \mathcal{V}(x) \Longrightarrow V \cap A \neq \emptyset)$ como $V \in \mathcal{V}(x)$, entonces V es un entorno abierto de x, por otro lado se afirma por 1) que $V^{-1}x$ es abierto, como $x \in V$ se tiene por definición de In se afirma que $x^{-1} \in V^{-1}$ así pues,

$$\begin{aligned} x^{-1}x &\in V^{-1}x \\ e &\in V^{-1}x \\ V^{-1}x &\in \mathcal{V}(e). \end{aligned}$$

Tomando $W = V^{-1}x$, se tiene las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} x &\in AW \\ x &\in AV^{-1}x \implies \exists a \in A, v \in V; \\ x &= av^{-1}x \\ e &= av^{-1} \\ a &= v \implies a \in A; v \in V \end{aligned}$$

esto implica, que $a \in A \cap V \implies A \cap V \neq \emptyset$. ∎

Teorema 13

Sea G un grupo topológico, entonces las siguientes condiciones son equivalentes

1. *G es de Haussdorff,*
2. *$\{e\}$ es cerrado,*
3. *$\bigcap_{U \in \mathcal{V}(e)} U = \{e\}$.*

Demostración : $1 \Rightarrow 2$) Supongamos que G es Haussdorff, entonces por topología $\forall x \in G$ se cumple $\{x\}$ es cerrado en particular $\{e\}$ es cerrado.

$2 \Rightarrow 3$) Supongamos que el conjunto $\{e\}$ es cerrado, entonces $cl\left[\{e\}\right] = \{e\}$, por teorema (12) se tiene la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} cl\left[\{e\}\right] &= \bigcap_{U \in \mathcal{V}(e)} \{e\} U \\ &= \bigcap_{U \in \mathcal{V}(e)} eU \\ &= \bigcap_{U \in \mathcal{V}(e)} U \\ \Rightarrow \bigcap_{U \in \mathcal{V}(e)} U &= \{e\}. \end{aligned}$$

$3 \Rightarrow 1$) Para demostrar que es de Hausdorff sean $x, e \in G$ talque $x \neq e$, implica

$$x \notin \{e\} \Rightarrow x \notin \bigcap_{U \notin U} U$$

del cual se tiene $\exists U \in \mathcal{V}(e) / x \notin U$, por otro lado se tiene que $U \in \mathcal{V}(e)$, por teorema (10), existe $V \in \mathcal{V}(e)$ que es simétrico talque $e \subset V \subset U$, así se tiene que $x \notin V$, entonces encontramos entornos abiertos con las siguientes propiedades $e \in V$ y $x \notin V$ por tanto es un espacio T_0, por tanto es un espacio de Hausdorff. Este resultado se lo muestra en teorema (11). ■

2.3

Espacio Homogéneo

Definición 14

Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ ***es un espacio homogéneo*** *si $\forall x, y \in X$ existe un homeomorfismo $h : X \to X$ talque $h(x) = y$.*

Teorema 14

Todo grupo topológico es un espacio homogéneo.

Demostración: En efecto sea G un grupo topológico, elijamos dos elementos de este es decir sea $x, y \in G$ por teorema (8) se afirma que ϕ es un homeomorfismo, como G es un grupo topológico, entonces $x^{-1}y \in G$, así podemos construir la función siguiente, que $\forall u \in G$

$$\begin{array}{rcl} \phi_{x^{-1}y} : G & \longrightarrow & G \\ u & \longmapsto & \phi_{x^{-1}y}(u) \end{array}.$$

Por otro lado sea la función definida de la siguiente forma

$$\begin{array}{rcl} f : G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & f(x) = \phi_{x^{-1}y}(x) \end{array}$$

así se puede aseverar que la función f es un homeomorfismo pues $\phi_{x^{-1}y}$ es un homeomorfismo, además

$$\begin{aligned} f(x) &= \phi_{x^{-1}y}(x) \\ &= xx^{-1}y \\ &= ey \\ &= y, \end{aligned}$$

luego por definición de espacio homogéneo se tiene que G es un espacio homogéneo. ■

Los grupos topológicos en el ámbito de los axiomas de separación se puede decir que tienen un comportamiento bueno por así decir, pues es suficiente que el grupo topológico cumpla un axioma débil para tener los demás axiomas. Para más entendimiento se lo va ha mencionar en los siguientes teoremas.

Teorema 15

Sea G un grupo topológico si G es T_0, entonces G es T_1.

Demostración : En efecto sea $x, y \in G$ con $x \neq y$, por teorema (9) y sin pérdida de generalidad escogemos un elemento cualquiera de la base, es decir sea Ux con $U \in \mathcal{B}(e)$, por otro lado es fácil comprobar que $x \in Ux$, como G es T_0 entonces $y \notin Ux$, por definición de la función traslación por derecha $\phi_{x^{-1}}(y) \notin \phi_{x^{-1}}(Ux)$, entonces

$$yx^{-1} \notin Uxx^{-1}$$

por definición de la función In se tiene

$$In(yx^{-1}) \notin In(U) \implies (yx^{-1})^{-1} \notin U^{-1} \implies xy^{-1} \notin U^{-1}$$

nuevamente por definición de la función ϕ_y

$$\phi_y(xy^{-1}) \notin \phi_y(U^{-1}) \implies xy^{-1}y \notin U^{-1}y \implies x \notin U^{-1}y$$

notemos que $U^{-1}y$ es un abierto por teorema (12), por tanto encontramos un entorno abierto de tal forma que $x \notin U^{-1}y$ entonces se tiene que G es T_1. ■

Teorema 16

Sea G un grupo topológico, entonces G es un espacio regular.

Demostración : Para demostrar este teorema lo que haremos es utilizar un resultado de la topología, citado en el apéndice A. Lo que se quiere demostrar es $\forall x \in G$ y dado un abierto W con $x \in W$ se debe concluir que existe un abierto Z talque $x \in Z \subset cl(Z) \subset U$ en efecto, por teorema (14) se tiene que G es un espacio homogéneo se acepta la existencia de un homeomorfismo, es decir

$$(\forall x, y \in G), \exists f : G \longrightarrow G \diagup f(x) = y$$

tomando $e, x \in G$ de modo que existe un homeomorfismo de la siguiente forma

$$f : G \longrightarrow G \diagup f(e) = x.$$

Sea $x \in G$ y $W \in \mathcal{V}(x)$ es un abierto cualquiera, como f es continua $f^{-1}(W)$ es un abierto, además $x \in W \Rightarrow f^{-1}(x) \in f^{-1}(W)$, entonces $e \in f^{-1}(W)$, esto quiere decir que es un entorno abierto de la identidad e, aplicando el teorema (11), $\exists V \in \mathcal{V}(e) \diagup cl(V) \subset f^{-1}(W)$, entonces

$$\begin{aligned} e &\in V \subset cl(V) \subset f^{-1}(W) \\ f(e) &\in f(V) \subset f\left[cl(V)\right] \subset f\left[f^{-1}(W)\right] \\ f(e) &\in f(V) \subset cl\left[f(V)\right] \subset (W) \\ x &\in Z \subset cl(Z) \subset W \end{aligned}$$

por tanto se afirma que G es un espacio regular. ■

Teorema 17

Si G es un grupo topológico, entonces son equivalentes

1. *G es T_3,*
2. *G es Hausdorff,*
3. *G es T_1,*
4. *G es T_0.*

Demostración : Como se esta en grupo topológico, implica que es un espacio topológico, por tanto se cumple 1) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3) $\Longrightarrow$ 4).
Lo que faltaría demostrar es 4) $\Longrightarrow$ 1), en efecto supongamos que G es T_0 por teorema (15) se tiene que G es T_1, nuevamente recurrimos al teorema (16) el cual afirma que G es regular entonces se tiene que G es regular y T_1 por tanto se tiene que G es T_3. ■

Ejemplo

1. Si G es un grupo topológico indiscreto, entonces G es un grupo que no es T_0 ni T_1, esto quiere decir que existen grupos topológicos que no cumplen el axioma de separación mas débil.

2. Si G es un grupo topológico discreto, entonces G es T_0 pues $\forall x, y \in G$, con $x \neq y$, se tiene $x \in \{x\}, y \neq \{x\}$, por tanto por definición es T_0, por teorema se puede afirmar que G es T_3.

3. El grupo topológico $(\mathbb{R}, +, \tau_u)$ es un espacio T_3 pues el conjunto de los reales es un espacio de Hausdorff, por teorema es un espacio T_3.

3

Subgrupos de Grupos Topológicos

3.1 Subgrupos

Ahora presentamos el concepto que relaciona los homomorfismos topológicos con los isomorfismos algebraicos. En esta parte estudiaremos los automorfismos internos, ya que esta función se menciona en la tercera parte de este trabajo, también se presentan resultados de la clausura de un subgrupo de un grupo topológico.

Definición 15

1. *Un homomorfismo $f : G \to H$ es un* ***isomorfismo topológico*** *si f es un isomorfismo de grupos y homeomorfismo de espacios topológicos.*

2. *Un homomorfismo $g : G \to G$ es un* ***automorfismo topológico*** *si g es un isomorfismo topológico.*

3. *Dos grupos topológicos G y H son* ***topológicamente isomorfos*** *si existe un isomorfismo topológico $f : G \to H$.*

Continuando con el teorema siguiente que es la función interesante pues es un homeomorfismo, el es necesario para llegar al objetivo de este trabajo.

Teorema 18

Sea G un grupo topológico, $g \in G$ es un elemento fijo, entonces la función

$$I_g : \underset{x}{G} \underset{\longmapsto}{\longrightarrow} \underset{I_g(x)=gxg^{-1}}{G}$$

es un automorfismo topológico; tales automorfismos se llaman ***automorfismos internos.***

Demostración : i) Veamos primeramente que es un isomorfismo de grupos, en efecto.

- Notemos que la para $g^{-1} \in G$, la función $I_{g-1} : G \to G$ es una inversa tanto a izquierda como ha derecha de I_g, pues cumple para todo $x \in G$ lo siguiente

$$\begin{aligned} (I_{g-1} \circ I_g)(x) &= I_{g^{-1}}(I_g(x)) = I_{g^{-1}}(gxg^{-1}) \\ &= g^{-1}(gxg^{-1})(g^{-1})^{-1} \\ &= (g^{-1}g)x(g^{-1}g) \\ &= exe \\ &= x \end{aligned}$$

de la misma forma

$$\begin{aligned} (I_g \circ I_{g^{-1}})(x) &= I_g(I_{g^{-1}}(x)) = I_g(g^{-1}xg) \\ &= g^{-1}(g^{-1}xg)g \\ &= g(g^{-1}xg)g^{-1} \\ &= (gg^{-1})x(gg^{-1}) \\ &= exe \\ &= x \end{aligned}$$

con estos afirmaciones se tiene que I_g es una función inyectiva.

- Veamos que es un homomorfismo, sea $x, y \in G$, se cumple que

$$\begin{aligned} I_g(xy) &= g(xy)g^{-1} = (gx)(yg^{-1}) \\ &= (gx)e(yg^{-1}) \\ &= (gx)g^{-1}g(yg^{-1}) \\ &= (gxg^{-1})(gyg^{-1}) \\ &= I_g(x)I_g(y) \end{aligned}$$

esto quiere decir que $I_g$es un homomorfismo, por tanto se concluye que I_g es un isomorfismo.

ii) Veamos que I_g es un homeomorfismo, en efecto tenemos por i) que I_g es biyectiva cuya inversa es $I_{g^{-1}}$, por otro lado por teorema (8) las funciones $\phi_{g^{-1}} : G \to G, \sigma_g : G \to G$ son homeomorfismos, entonces la composición $(\phi_{g^{-1}} \circ \sigma_g)$ es un homeomorfismo, además para todo $x \in G$ se cumple

$$\begin{aligned} (\phi_{g^{-1}} \circ \sigma_g)(x) &= \phi_{g^{-1}}(\sigma_g(x)) \\ &= \phi_{g^{-1}}(gx) \\ &= gxg^{-1} \\ &= I_g(x), \end{aligned}$$

por tanto $\phi_{g^{-1}} \circ \sigma_g = I_g$, entonces I_g es un homeomorfismo. ∎

Definición 16

Sea G un grupo topológico y H un subconjunto de G, H es un subgrupo topológico de G si

1. *H es un subgrupo de G.*

2. *H es un subespacio topológico con la topología inducida por la topología de G.*

En adelante usaremos subgrupo para referirnos a un subgrupo topológico en caso de ser necesario emplearemos subgrupo algebraico para hablar de subgrupos sin considerar su topología.

3.2

Subgrupos con Respecto a la Cerradura

Para estudiar los subgrupos y su comportamiento con respecto a la cerradura en el grupo topológico usaremos el siguiente resultado auxiliar.

Teorema 19

Si G es un grupo topológico A, B subconjuntos de G, entonces

1. $cl(A)cl(B) \subset cl(AB)$.
2. *Si $cl(A)$ y $cl(B)$ son compactos y G es Hausdorff, entonces $cl(A)cl(B) = cl(AB)$.*
3. $[cl(A)]^{-1} = cl(A^{-1})$.
4. *$\forall x, y \in G$ se cumple $xcl(A)y = cl(xAy)$.*
5. *Si además G es T_0 y para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$ se cumple que $ab = ba$, entonces para todo $a \in cl(A)$ y $b \in cl(B)$ se tiene que $ab = ba$.*

Demostración: 1. Sea $u \in cl(A)cl(B)$ lo que se quiere demostrar es $\forall U$ entorno abierto de u, se debe concluir $U \cap AB \neq \emptyset$ en efecto; sea U un entorno de u por otro lado como

$$u \in cl(A)cl(B) \Rightarrow \exists x \in cl(A)\,,\, y \in cl(B) / u = xy$$

esto implica que, para $u \in U \implies xy \in U$, entonces U es un entorno de xy quiere decir que $U \in \mathcal{V}(xy)$, como G es un grupo topológico se tiene la función m es continua por lema (1) se afirma que

$$U \in \mathcal{V}(xy) \Rightarrow \exists V \in \mathcal{V}(x) \wedge W \in \mathcal{V}(y) / VW \subset U$$

notemos además que V es un entorno abierto de x y W es un entorno abierto de y.

Por otro lado

$$\begin{aligned} x &\in cl(A) \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \in A \cap V \\ y &\in cl(B) \Rightarrow W \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \exists b \in B \cap W, \end{aligned}$$

entonces se puede notar que $ab \in AB \cap VW \subset VW$, entonces

$$\begin{aligned} ab &\in VW \subset U \\ ab &\in U \\ ab \in U &\wedge ab \in AB \\ ab &\in U \cap AB \\ U \cap AB &\neq \emptyset \end{aligned}$$

es la afirmación a la que queríamos llegar por tanto $u \in cl(AB)$, por tanto se concluye que $cl(A)cl(B) \subset cl(AB)$.

2. Entonces se tiene por hipótesis que $cl(A)$, $cl(B)$ son compactos por la continuidad de la función m, se tiene que $cl(A)cl(B)$ es compacto, pero se puede advertir que $cl(A)cl(B) \subset G$ y este es de Hausdorff, por topología se tiene que $cl(A)cl(B)$ es cerrado, es decir

$$cl(A)cl(B) = cl\left[cl(A)cl(B)\right]$$

pero se también se puede notar que $AB \subset cl(A)cl(B)$, entonces

$$\begin{aligned} AB &\subset cl(A)cl(B) = cl\left[cl(A)cl(B)\right] \\ AB &\subset cl\left[cl(A)cl(B)\right] \\ \Rightarrow cl(AB) &\subset cl\left\{cl\left[cl(A)cl(B)\right]\right\} \\ cl(AB) &\subset cl(A)cl(B). \end{aligned}$$

Así por 1) se tiene que $cl(A)cl(B) \subset cl(AB)$ y por lo concluido anteriormente $cl(AB) \subset cl(A)cl(B)$, por estas afirmaciones se puede concluir que $cl(AB) = cl(A)cl(B)$.

3. Veamos que es cierto la igualdad $[cl(A)]^{-1} = cl(A^{-1})$, para esto tenemos que la función In es un homeomorfismo por teorema (8), se cumple la igualdad siguiente,

$$\begin{aligned} In(cl(A)) &= cl(In(A)) \\ \text{por definición de } In \Rightarrow [cl(A)]^{-1} &= cl(A^{-1}). \end{aligned}$$

4. Sean $x, y \in G$ por teorema (8) afirmamos que σ_x, ϕ_y son homeomorfismos entonces la composición es un homeomorfismo, es decir $\sigma_x \circ \phi_y : G \to G$ es un homeomorfismo, además si $A \subset G$ se cumple la siguiente igualdad,

$$\begin{aligned} (\sigma_x, \circ\phi_y)(A) &= \sigma_x(\phi_y(A)) \\ &= \sigma_x(Ay) \\ &= xAy \quad (*) \end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned} xcl(A)y &= (\sigma_x, \circ\phi_y)\, cl(A) \\ &= (\sigma_x, \circ\phi_y)(cl(A)) \\ \text{por ser homeomorfismo y } (*) \quad \Rightarrow xcl(A)y &= cl((\sigma_x, \circ\phi_y)(A)) \\ &= cl(xAy). \end{aligned}$$

5. Para este último definamos la función

$$h : \underset{(a,b)}{G \times G} \underset{\longmapsto}{\longrightarrow} \underset{h(a,b)=ab(ba)^{-1}}{G}$$

Se puede notar que esta función es continua pues m, In son continuas, además esta bien definida. Como G es T_0 por teorema (15) es T_1, entonces por topología tenemos que $\forall x \in G$, $\{x\}$ es cerrado en particular para $e \in G$, $\{e\}$ es cerrado. Como h es continua, implica

$$h^{-1}(\{e\}) = \left\{(a, b) \in G \times G \diagup aba^{-1}b^{-1} = e\right\} \text{ es cerrado.}$$

También se afirma que $A \times B \subset h^{-1}(\{e\})$, pues $(a, b) \in A \times B \Rightarrow h(a, b) = aba^{-1}b^{-1} = e$; pero se tiene que $h^{-1}(\{e\})$ es cerrado, entonces

$$h^{-1}(\{e\}) = cl\left(h^{-1}(\{e\})\right)$$

como $A \times B \subset h^{-1}(\{e\}) \Rightarrow cl(A \times B) \subset cl\left(h^{-1}(\{e\})\right)$, por tanto se concluye.

$$\begin{aligned} cl(A) \times cl(B) &\subset cl\left(h^{-1}(\{e\})\right) = h^{-1}(\{e\}) \\ (a,b) \in cl(A) \times cl(B) &\Longrightarrow (a,b) \in h^{-1}(\{e\}) \\ \Rightarrow aba^{-1}b^{-1} &= e \\ ab &= ba. \end{aligned}$$

■

3.3

Teorema de Subgrupos con Respecto a la Cerradura

Teorema 20

Sea G un grupo topológico y H, N subgrupos de G, entonces

1. *$cl(H)$ es un subgrupo de G.*
2. *Si N es un subgrupo Normal de G, entonces $cl(N)$ es también un subgrupo normal de G.*
3. *H es abierto si y solo si $int(H) \neq \emptyset$.*
4. *Si H es abierto, entonces $cl(H) = H$ es cerrado.*

Demostración : 1. Tenemos que $cl(H) \subset G$, se tiene que demostrar dos condiciones para cada $a, b \in cl(H)$ se tiene que cumplir que $ab \in cl(H)$ y $a^{-1} \in cl(H)$.

i) Si $a \in H$, entonces se afirma que $H^2 \subset H$, pues $aa = a^2 \in H^2$, como H es un subgrupo implica que $a^2 \in H$ por tanto $H^2 \subset H$; por otro lado por teorema anterior (19) tenemos $cl(H)cl(H) \subset cl(HH)$ del cual

$$\begin{aligned} [cl(H)]^2 &\subset cl(H^2), \text{pero también se tiene } H^2 \subset H \Rightarrow cl\left(H^2\right) \subset cl(H) \\ \Rightarrow [cl(H)]^2 &\subset cl(H) \end{aligned}$$

esto equivale a decir que $\forall a, b \in cl(H) \Rightarrow ab \in cl(H)$.

ii) Para esta parte se afirma que $H^{-1} \subset H$, en efecto sea $a \in H^{-1} \Rightarrow \exists h \in H \diagup a = h^{-1}$ como $h \in H$ y este es un subgrupo entonces $h^{-1} \in H \Rightarrow a \in H$, por tanto $H^{-1} \subset H$, por el teorema (19) se tiene

$$[cl(H)]^{-1} \subset cl(H^{-1})$$

como $H^{-1} \subset H \Rightarrow cl(H^{-1}) \subset cl(H)$, por tanto se tiene

$$\begin{aligned} [cl(H)]^{-1} &\subset cl(H^{-1}) \subset cl(H) \\ [cl(H)]^{-1} &\subset cl(H), \end{aligned}$$

esto equivale ha afirmar que $\forall a \in cl(H) \Rightarrow a^{-1} \in cl(H)$ por tanto por i), ii) se puede concluir que $cl(H)$ es un subgrupo.

2. Tenemos por hipótesis que N es un subgrupo normal, entonces N es un subgrupo lo que implica por 1) que $cl(N)$ es un subgrupo.

   Veamos que es normal para esto, sea $a \in G$, lo que se quiere demostrar es $a^{-1}Na \subset N$, en efecto como N es normal se tiene que para $a \in G$,

$$\begin{aligned} a^{-1}Na &\subset N \\ \Rightarrow cl\left(a^{-1}Na\right) &\subset cl\left(N\right) \end{aligned}$$

   por el teorema (19)

$$\begin{aligned} a^{-1}cl(N)a &= cl(a^{-1}Na) \subset cl(N) \\ a^{-1}cl(N)a &\subset cl(N), \end{aligned}$$

   por tanto se concluye que $cl(N)$ en normal.

3. Supongamos que H es abierto por demostrar que $int(H) \neq \emptyset$.

   i) $\Longrightarrow]$ Como H es abierto, entonces $H = int(H)$ pero H es un subgrupo por hipótesis implica que $e \in H$, entonces $e \in int(H)$ con esto se afirma que $int(H) \neq \emptyset$.

   ii) $[\Longleftarrow$ Supongamos que $int(H) \neq \emptyset$, entonces x es un punto interior de H, se tiene que $\exists U \in \mathcal{V}(e) \diagup x \in xU \subset H$.

Por otro lado, sea $y \in H$, consecuentemente por teorema (12) yU es un abierto,

$$\begin{aligned} yU &= yeU = yx^{-1}xU \\ yU &= (yx^{-1})xU \end{aligned}$$

por la función traslación por izquierda σ, tenemos

$$\begin{aligned} xU &\subset H \Rightarrow \sigma_{yx^{-1}}(xU) \subset \sigma_{yx^{-1}}(H) \\ (yx^{-1})xU &\subset yx^{-1}H. \end{aligned}$$

Notemos la igualdad $yx^{-1}H = H$, pues $y \in H$ y $x \in H$ además H es un subgrupo, entonces $x^{-1} \in H$, con esto se tiene $yx^{-1} \in H$, por tanto por álgebra estamos trabajando con clases laterales, por esta razón se afirma que es cierto la igualdad

$$yx^{-1}H = H$$

con los datos anteriores podemos realizar el siguiente resultado

$$\begin{aligned} yU &= (yx^{-1})xU \subset yx^{-1}H = H \\ yU &\subset yx^{-1}H = H \\ yU &\subset H \text{ además } y \in yU \end{aligned}$$

es decir encontramos un abierto $y \in yU \subset H$, por tanto se puede afirmar que H es abierto.

4. Para este último definamos el conjunto y afirmamos la igualdad siguiente

$$G - H = \bigcup \{Hx / x \notin H\}$$

demostremos que es cierto la afirmación hecha.
i) $G - H \subset \bigcup \{Hx / x \notin H\}$ en efecto, sea $u \in G - H$ esto implica $u \in G$, $u \notin H$, pero por traslación derecha se tiene Hu por tanto $u \in \bigcup \{Hx / x \notin H\}$, se cumple la inclusión $G - H \subset \bigcup \{Hx / x \notin H\}$.
ii) $\bigcup \{Hx / x \notin H\} \subset G - H$ en efecto sea $u \in \bigcup \{Hx / x \notin H\}$, entonces existe $x \notin H$, talque $u \in Hx$ esto implica que $\exists h \in H / u = hx$, pero $x = h^{-1}u \notin H$ y con la hipótesis que H es un subgrupo se tiene

$$h^{-1}u \notin H \Rightarrow u \notin hH \Rightarrow u \notin H$$

así tenemos que como $u = hx \in G$ y $u \notin H$ se tiene que $\bigcup\{Hx/x \notin H\} \subset G - H$; como H es abierto, luego por teorema (12) Hx es abierto por tanto $\bigcup\{Hx/x \notin H\}$ es abierto por la igualdad $G - H$ es también abierto lo cual implica H es cerrado, lo cual implica

$$cl(H) = H.$$

■

Ejemplo

1. Por álgebra se sabe que $Z(G)$ centro de G es un subgrupo además normal, donde G es un grupo, en particular si consideramos $(\mathbb{Q}, +, \tau_u)$ es un grupo topológico, por álgebra $Z(\mathbb{Q})$ es un subgrupo normal de $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, notemos $Z(\mathbb{Q}) = \{a \in \mathbb{Q}/a + x = x + a,\ x \in \mathbb{Q}\} = \{a \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}$ pero
$$cl\,[Z(\mathbb{Q})] = cl(\mathbb{Q}) = \mathbb{R} = Z(\mathbb{R})$$
por tanto se tiene que la clausura también es un subgrupo normal.

2. Sea $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ es un grupo topológico con la topología discreta, es decir $(\mathbb{Z}_2, +, \tau_{dis})$ notemos que $\{0\} \subset \mathbb{Z}_2$ es un subgrupo abierto por teorema anterior se tiene que $cl(\{0\}) = \{0\}$ pues, como tiene la topología discreta, entonces por topología se deduce que $cl(\{0\}) = \{0\}$.

4

$\overline{FC}$ Grupos

En esta tercera parte de este trabajo se va enunciar el teorema que se tiene como objetivo, es decir al resultado de los autores, $D.H.lee - T.S.Wu$, el cual afirma y relaciona la parte acotada de G con la existencia de un subgrupo normal abierto y compacto, para llegar a este teorema se va ha utilizar los resultados obtenidos en la parte anterior a esta sección, comencemos introduciendo la definición de parte acotada de G.

4.1 $\overline{FC}$ Grupos

Empezamos con definiciones, los cuales nos ayudaran a seguir adelante introduciendo los conceptos de los $\overline{FC}-elementos$ y la clase de conjugación, a su vez se van ha mencionar conceptos de localmente compacto y relativamente compacto.

Definición 17

Sea G un grupo (Abstracto), $x \in G$ un elemento fijo de G la clase de conjugación de x es el conjunto

$$C_G(x) = \left\{g^{-1}xg \diagup g \in G\right\}.$$

Definición 18

Sea G un grupo topológico

1. *Un elemento $g \in G$ es un $\overline{FC}-elemento$ o elemento acotado si $cl(C(g))$ es compacto.*

2. *La parte acotada de G es el conjunto*

$$B(G) = \left\{g \in G \diagup g \text{ es un } \overline{FC}\text{-elemento}\right\}.$$

3. *G es un $\overline{FC} - grupo$ si $B(G) = G$.*

Ejemplo Si G es compacto, entonces G es un $\overline{FC} - grupo$ se puede notar que claramente que $B(G) \subset G$, por otra parte sea $x \in G$, notemos que $cl\,[C(x)] \subset G$, por topología se puede afirmar que $cl\,[C(x)]$ es compacto es decir que x es un $\overline{FC} - elemento$, así $x \in B(G)$, se tiene $B(G) = G$, por tanto G es un $\overline{FC} - grupo$. En particular podemos mencionar al grupo topológico $(\mathbb{Z}_n +, \tau_{dis})$ es un $\overline{FC} - grupo$, pues $\mathbb{Z}_n$ es finito por topología se puede afirmar que todo espacio finito es compacto.

Continuamos por el teorema siguiente que afirma la existencia de un subgrupo que además es abierto y compacto, tal teorema se utilizará para el objetivo de este trabajo.

Teorema 21

Si G es un grupo topológico T_0, entonces $B(G)$ es un subgrupo de G.

Demostración : Para esto se aplicara teorema de álgebra; $B(G)$ es un subgrupo si y solo si $\forall x, y \in B(G) \Rightarrow xy^{-1} \in B(G)$, en efecto

$$\begin{aligned}
C(xy^{-1}) &= \left\{z^{-1}(xy^{-1})z \diagup z \in G\right\} \\
&= \left\{z^{-1}xzz^{-1}y^{-1}z \diagup z \in G\right\} \\
&= \left\{(z^{-1}xz)(z^{-1}y^{-1}z) \diagup z \in G\right\} \\
&\subset \left\{z^{-1}xz \diagup z \in G\right\}\left\{z^{-1}y^{-1}z \diagup z \in G\right\} \\
&= \left\{z^{-1}xz \diagup z \in G\right\} In \left\{z^{-1}yz \diagup z \in G\right\} \\
&= C(x) In\,[C(y)]
\end{aligned}$$

se tiene la siguiente relación,

$$\begin{aligned}
C(xy^{-1}) &\subset C(x) In\,[C(y)] \\
cl\left[C(xy^{-1})\right] &\subset cl\,[C(x) In\,[C(y)]]
\end{aligned}$$

por hipótesis se afirma que para $x, y \in B(G)$, entonces x, y son $\overline{FC} - elementos$ lo cual implica que $cl(C(x))$, $cl(C(y))$ son compactos, además se tiene que G es T_0 por teorema (17) es Hausdorff, entonces por teorema (19), se obtiene la igualdad $cl\,[C(x)In\,[C(y)]] = cl\,[C(x)]\,cl\,[In(C(y))]$, pero se nota que la función inversión es un homeomorfismo, entonces se afirma que

$$cl\,[C(x)In\,[C(y)]] = cl\,[C(x)]\,In\,[cl(C(y))]$$

pero notemos que $cl(C(x))$ es compacto, también por la continuidad de la función inversión $In\,[cl(C(y))]$ es compacto, así por la continuidad de m, $cl\,[C(x)]\,In\,[cl(C(y))]$ es compacto además $cl\left[C(xy^{-1})\right]$ es cerrado, por topología $cl\left[C(xy^{-1})\right]$ es compacto, entonces $xy^{-1} \in B(G)$ por lo cual $B(G)$ es un subgrupo de G. ∎

A partir de ahora se va ha enunciar teoremas en los cuales están los conceptos de totalmente disconexos, localmente compactos que son propiedades de espacios topológicos así se van a mencionar hasta llegar al objetivo de este trabajo.

Teorema 22

Sea G un grupo topológico localmente compacto y totalmente disconexo. Si U es un entorno abierto de la identidad e, entonces existe un subgrupo H abierto y compacto de G talque $H \subset U$.

Demostración: Notemos antes que el grupo topológico G es totalmente disconexo, así los únicos componentes conexos son conjuntos unitarios es decir que $\{x\} = C_x$, pero por topología se tiene que los componentes conexas son cerrados, $G \setminus \{x\}$ es abierto, por otra parte sea $x, y \in G$ talque $x \neq y$, se cumple que $y \in G \setminus \{x\}$ es un entorno abierto de y, pero se puede notar que $x \notin G \setminus \{x\}$ por tanto G es un espacio T_0 por teorema (17) G es un espacio T_2, es decir es Hausdorff.

Para demostrar el teorema recurrimos a un resultado demostrado en topología, para ser mas preciso se encuentra en el apéndice el teorema (34); aplicando este resultado por hipótesis se tiene que G es locamente compacto y totalmente disconexo el cual es además Hausdorff, consecuentemente existe K que contiene al elemento e, el cual es abierto y compacto. Además tenemos por hipótesis que $U \in \mathcal{V}(e)$, luego por ser base se tiene que $e \in K \in U$. Por otro lado definamos el conjunto

$$Q = \{q \in G \diagup Kq \subset K\} \quad (*)$$

a su vez definamos el conjunto $H = Q \cap Q^{-1}$, lo que se quiere probar que H sea abierto, subgrupo y compacto.

i) Veamos que H es abierto, para esto es suficiente ver que Q es abierto; por consiguiente lo que se quiere demostrar que Q es abierto si y solo si $\forall x \in Q, \exists V \diagup x \in V \subset Q$.

En efecto sea $x = q \in Q$ fijo, luego $Kq \subset K$ implica $\forall k \in K$, $kq \in K$, pero K es abierto así se puede afirmar $K \in \mathcal{V}(kq)$ por teorema (11) $\exists U_k$entorno de k, V_k entorno de q, talque $U_k V_k \subset K$. Por otro lado sea la colección $\{U_k \diagup k \in K\}$ un cubrimiento de K, es decir $K \subset \bigcup_{k\in K} U_k$, como K es compacto, entonces existe un subcubrimiento finito $\{U_{k_1}, U_{k_2}, \ldots U_{k_n}\}$ de K, es decir $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{k_i}$, donde $k_i \in K$, por otra parte sea

$$V = \bigcap_{i=i}^{n} V_{k_i}.$$

Se afirma que $KV \subset K$, en efecto sea $x \in KV$, pues se tiene

$$\begin{aligned}
x &\;=\; uv, \quad u \in K, v \in V \\
u \in K &\implies u \in \bigcup_{i=1}^{n} U_{k_i} \Rightarrow \exists j \in \{1, 2 \ldots n\} \diagup u \in U_{k_j} \\
v \in V &\implies v \in \bigcap_{i=1}^{n} V_{k_i} \Rightarrow \forall l \in \{1, 2 \ldots n\} \diagup v \in V_{k_l} \\
uv \in U_{k_j} V_{k_l} \subset K &\implies uv \in K \\
x = uv \in K &\implies x \in K \\
KV \subset K &\implies V \subset Q \qquad \text{por}(*).
\end{aligned}$$

Como $q \in V_k$; $\forall k$, entonces $q \in \bigcap_{i=1}^{n} V_{k_i} = V \subset Q \Rightarrow q \in Q$, por tanto se concluye la siguiente afirmación $q \in V \subset Q \Longrightarrow Q$ es abierto pues V es abierto, por teorema (8) se tiene que Q^{-1} también es abierto, entonces la intersección de abiertos es abierto por tanto $Q \cap Q^{-1}$, es abierto por la igualdad H es abierto.

ii) Veamos que H es un subgrupo, para esto se aplicará la definición clásica de subgrupo.

- Sean $h_1, h_2 \in H$, entonces por definición de Q, implica

$$\begin{aligned}
h_1 &\in Q \;\wedge\; h_1 \in Q^{-1} \\
h_2 &\in Q \;\wedge\; h_2 \in Q^{-1} \\
Kh_1 \subset K,\, h_1 = u^{-1} &\;\diagup\; u \in Q, \text{con } Ku \subset K \Rightarrow Kh_1^{-1} \subset K \\
Kh_2 \subset K,\, h_2 = v^{-1} &\;\diagup\; v \in Q, \text{con } Kv \subset K \Rightarrow Kh_2^{-1} \subset K
\end{aligned}$$

de estas afirmaciones se tiene aplicando la función ϕ,

$$\begin{aligned} Kh_1 &\subset K \\ \phi_{h_2}(Kh_1) &\subset \phi_{h_2}(K) \\ Kh_1h_2 &\subset Kh_2 \subset K \\ \Longrightarrow Kh_1h_2 &\subset K. \end{aligned}$$

Por otro lado $h_1h_2 = u^{-1}v^{-1} = (vu)^{-1}$, además

$$\begin{aligned} Kv &\subset K \\ \phi_u(Kv) &\subset \phi_u(K) \\ Kvu &\subset Ku \subset K \\ \Longrightarrow Kvu &\subset K \end{aligned}$$

con estos resultados se tiene $h_1h_2 \in Q$ y $h_1h_2 \in Q^{-1}$, por tanto $h_1h_2 \in Q \cap Q^{-1} \Longrightarrow h_1h_2 \in H$.

- Sea $h \in H$, entonces $h \in Q$ y $h \in Q^{-1}$, por definición de Q se tiene

$$\begin{aligned} Kh &\subset K \ \wedge \ h = n^{-1} / n \in Q \\ Kn &\subset K \Longrightarrow Kh^{-1} \subset K \end{aligned}$$

por tanto $h^{-1} \in Q$.

Por otra parte lo que se quiere mostrar es $h^{-1} \in Q^{-1} \Leftrightarrow h^{-1} = m^{-1}, m \in Q$ con $Km \subset K$ en efecto

$$\begin{aligned} Kh &\subset K \ h = n^{-1} \Rightarrow n = h^{-1} \Rightarrow h^{-1} = (\underbrace{n^{-1}}_{=m})^{-1} \\ h^{-1} = m^{-1} &\Longrightarrow Km \subset K, \end{aligned}$$

entonces $h^{-1} \in Q^{-1}$, se concluye que $h^{-1} \in Q \cap Q^{-1} \Longrightarrow h^{-1} \in H$.

Por tanto por definición de subgrupo se afirma que H es un subgrupo de G.

iii) Veamos que H es compacto tenemos que H es un subgrupo abierto por teorema (20) se puede afirmar que $H = cl(H)$ es cerrado, además se afirma que $H \subset K$, en efecto

$$\begin{aligned} h &\in H \Longrightarrow h \in Q \cap Q^{-1} \Longrightarrow h \in Q \wedge h \in Q^{-1} \\ Kh \subset K &\Longrightarrow \forall k \in K \\ ek \in K &\Longrightarrow h \in K \Longrightarrow H \subset K. \end{aligned}$$

Además se tiene que K es compacto y H es cerrado, entonces por topología se concluye que H es compacto. ■

Definición 19

Sea X un espacio topológico. Un conjunto A de X es relativamente compacto si A esta contenido en un subconjunto compacto de X.

Definición 20

Sea G un grupo topológico

1. *Un conjunto A de G es invariante bajo automorfismos internos de G si $\forall g \in G$ se cumple $I_g(A) \subset A$.*

2. *i) Un elemento $g \in G$ es un elemento periódico de G si g pertenece a un subgrupo compacto de G.*
   ii) Un subconjunto A de G es periódico si todos sus elementos son periódicos.

3. *La parte acotada de G denotado por $P(G)$ es el conjunto de elementos periódicos de G. En particular G es puro, si $P(G) = \{e\}$.*

Notación Daremos una notación especial a un subgrupo generado por un conjunto que además es cerrado esta notación solo se usará en el teorema de usakov.
Se denotará $[B]$ el subgrupo cerrado generado por B, es decir $\langle B\rangle$ es un subgrupo generado por B y además es cerrado. Si $B = \{b\}$, entonces $[b]$ es el subgrupo cíclico generado por b.

Teorema 23

Sea G un Grupo topológico, T_2 y $A \subset G$. A es relativamente compacto si y solo si $cl(A)$ es compacto.

Demostración : $\Longrightarrow]$ Como A es relativamente compacto, entonces existe $B \subset G$ compacto talque

$A \subset B$, pero como G es T_2 entonces por topología B es cerrado, es decir $cl(B) = B$.

$$\begin{aligned} A &\subset B \subset cl(B) \\ A &\subset cl(B) \\ \Rightarrow cl(A) &\subset cl\left[cl(B)\right] \\ cl(A) &\subset B \end{aligned}$$

como $cl(A)$ es cerrado y B es compacto, entonces por topología $cl(A)$ es compacto.

$[\Longleftarrow$ Supongamos que $cl(A)$ es compacto, pero se tiene que $A \subset cl(A)$ entonces por definición A es relativamente compacto. ■

Teorema 24 (*Usakôv*)

Sea G un grupo topológico, totalmente disconexo, localmente compacto. Si $A \subset G$ relativamente compacto periódico e invariante bajo automorfismo internos de G, entonces el subgrupo cerrado generado por A es un subgrupo normal y compacto de G.

Demostración: i) Veamos que $[A]$ es un subgrupo normal, tenemos que A es invariante bajo automorfismos internos de G, entonces por definición $\forall g \in G$ se cumple $I_g(A) \subset A$ en consecuencia por definición $gAg^{-1} \subset A$.

Además sabemos por álgebra que $\langle A \rangle$ es un subgrupo de G, con $A \subset \langle A \rangle$, para ver que $[A]$ sea normal, mostraremos primero que $\langle A \rangle$ es un subgrupo normal de G, en efecto lo que se quiere demostrar es la siguiente inclusión,

$$\forall g \in G;\ \ g \langle A \rangle g^{-1} \subset \langle A \rangle\,,$$

entonces sea $u \in g \langle A \rangle g^{-1}$, así se tiene que existe $m \in \langle A \rangle$ talque $u = gmg^{-1}$, pero notemos que

$$m \ \in \ \langle A \rangle \Rightarrow m = a_1 a_2 \cdots a_n \ \ \text{donde } a_i \in A,\ i \in \{1, 2, \ldots n\}\,.$$

Por hipótesis tenemos que$A$ es invariante bajo automorfismos internos de G, es decir $(\forall g \in G); gAg^{-1} \subset$

A, aplicando esta afirmación se cumple para $(\forall a_i \in A)$

$$\begin{aligned} ga_1g^{-1} &\in A \Rightarrow ga_1g^{-1} = a_1' \\ ga_2g^{-1} &\in A \Rightarrow ga_2g^{-1} = a_2' \\ ga_3g^{-1} &\in A \Rightarrow ga_3g^{-1} = a_3' \\ &\vdots \\ ga_ng^{-1} &\in A \Rightarrow ga_ng^{-1} = a_n' \end{aligned}$$

donde los elementos $a_i' \in A$, por tanto tenemos la igualdad siguiente

$$\begin{aligned} u &= gmg^{-1} \\ &= ga_1a_2a_3a_4a_5 \cdots a_ng^{-1} \\ &= ga_1\left(g^{-1}g\right)a_2\left(g^{-1}g\right)a_3\left(g^{-1}g\right)a_4\left(g^{-1}g\right)a_5 \cdots \left(g^{-1}g\right)a_ng^{-1} \\ &= \left(ga_1g^{-1}\right)\left(ga_2g^{-1}\right)\left(ga_3g^{-1}\right)\left(ga_4g^{-1}\right)ga_5 \cdots g^{-1}\left(ga_ng^{-1}\right) \\ &= a_1'a_2'a_3'a_4'a_5' \cdots a_n' \end{aligned}$$

por tanto $u \in \langle A \rangle$, así $\forall g \in G$; $g\langle A \rangle g^{-1} \subset \langle A \rangle$ pero por hipótesis tenemos que $\langle A \rangle$ es cerrado, entonces $cl\left[\langle A \rangle\right] = \langle A \rangle = [A]$ por teorema (20) $[A]$ es normal.

ii) Veamos que $[A]$ es compacto, sin pérdida de generalidad $\exists U \in \mathcal{V}(e)$, por hipótesis se tiene que G es localmente compacto y totalmente disconexo, entonces por teorema (22) se afirma que existe un subgrupo K que es abierto y compacto talque $K \subset U$.

Por otro lado $A \subset G$, tomando un elemento cualquiera de A, es decir sea $a \in A$, pero también se cumple $a \in A \subset cl(A) \Rightarrow a \in cl(A)$, notemos que $\{aK\}_{a \in cl(A)}$es un cubrimiento de $cl(A)$, es decir

$$cl(A) \subset \bigcup_{a \in cl(A)} aK.$$

Pero como G es relativamente compacto y es T_2 por teorema (23) el conjunto $cl(A)$ es compacto, entonces se puede extraer un cubrimiento finito talque

$$cl(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} a_iK \diagup a_i \in A$$

por otro lado tenemos que por hipótesis que A es periódico, por definición $(\forall a \in A, \exists H \diagup a \in H)$, donde H es un subgrupo compacto; entonces $\forall a_i \in A$, se tiene

$$a_1 \in H_1, a_2 \in H_2, a_3 \in H_3, \ldots, a_n \in H_n$$

además por ser H_i subgrupo se cumple

$$\begin{aligned} a_i^n &\in H_i \\ \Rightarrow \{a_i^n \diagup n \in \mathbb{Z}\} &\subset H_i \\ \langle a_i \rangle &\subset H_i \\ cl\left[\langle a_i \rangle\right] &\subset cl\left[H_i\right] \end{aligned}$$

del cual se tiene que $cl\left[\langle a_i \rangle\right]$ es compacto pues $cl\left[H_i\right]$ es compacto es decir para cada $a \in A$ es un $\overline{FC} - elemento$, así se tiene que $[a_i]$ es compacto pues es el subgrupo cerrado generado por a_i es decir $cl\left[\langle a_i \rangle\right] = \langle a_i \rangle$, por tanto para ver la compacidad de $[A]$ es suficiente afirmar la siguiente inclusión

$$\langle A \rangle \subset [a_1]\,[a_2]\,[a_3] \cdots [a_n]\,K.$$

En efecto supongamos sin pérdida de generalidad que $A = A^{-1}$ es simétrico y $e \in A$, para esto tomemos un elemento de $x \in \langle A \rangle$, entonces $x = f_1 f_2 \cdots f_p$, donde $f_p \in A \subset cl(A)$; $f_p \in \bigcup a_i K$, es decir $\exists i \in \{1, 2, \ldots n\}$ y un elemento $k_i \in K \diagup f_p = a_i k_i$, se tiene que x es el producto de la forma escrita anteriormente; es decir $f_1 = a_{s_1} k_1, f_2 = a_{s_2} k_2, \ldots, f_p = a_{s_p} k_p$, por tanto realizamos la siguiente aseveración, x se puede escribir de la siguiente forma

$$x = a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_p} k \text{ donde } i_f \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

En efecto, aplicando la invarianza de A se obtiene la siguiente igualdad,

$$\begin{aligned} x &= f_1 f_2 \cdots f_p \\ &= a_{s_1} k_1 a_{s_2} k_2 a_{s_3} k_3 \cdots a_{s_p} k_p \\ &= a_{s_1} (k_1 a_{s_2} k_1^{-1}) k_1 k_2 a_{s_3} k_3 \cdots a_{s_p} k_p \\ &= a_{s_1} a_{g_1} k_1 k_2 a_{s_3} k_3 \cdots a_{s_p} k_p \\ &= a_{s_1} a_{g_1} \left[k_1 k_2 a_{s_3} (k_1 k_2)^{-1}\right] (k_1 k_2) k_3 \cdots a_{s_p} k_p \\ &= a_{s_1} a_{g_1} a_{g_2} k_1 k_2 k_3 \cdots a_{s_p} k_p, \end{aligned}$$

aplicando la invarianza de A una cantidad finita de veces podemos desplazar los elementos de K hacia la derecha tendiendo la forma de x,

$$x = a_{s_1} a_{s_2} a_{s_3} \cdots a_{s_p} k_1 k_2 k_3 \cdots k_p,$$

además notemos que $k_1 k_2 k_3 \cdots k_p \in K \Longrightarrow k_1 k_2 k_3 \cdots k_p = k$, por tanto el elemento x si se puede escribir de la forma $x = a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_p} k$ donde $i_f \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Notemos que $x = a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_p} k$, tiene la forma de un elemento de $[a_1][a_2]\cdots[a_n]K$, para esto se analizan los índices i_p.
Por otro lado sea p *la longitud de* x; si p *es fijo se define la altura de* p como

$$h(p) = n^{p-1} i_1 + n^{p-2} i_2 + n^{p-3} i_3 + \cdots + i_p.$$

Sea p fijo supongamos que para algún $r < p$, se cumple $i_{r+1} < i_r$, como A es invariante, $a_{i_{r+1}} a_{i_r} a_{i_{r+1}}^{-1} \in A \subset \bigcup_{i=1}^{n} a_i K \Rightarrow \exists j \in \{1, 2, \ldots, n\}, k' \in K \diagup a_{i_{r+1}} a_{i_r} a_{i_{r+1}}^{-1} = a_j k'$, del cual se obtiene

$$a_{i_{r+1}} a_{i_r} = a_j k' a_{i_{r+1}}$$

pero asumimos $x = a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_p} k = a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_{r-1}} a_{i_{r+1}} a_{i_r} a_{i_{r+2}} \cdots a_{i_p} k$, entonces

$$\begin{aligned} x &= a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_{r-1}} a_{i_{r+1}} a_{i_r} a_{i_{r+2}} \cdots a_{i_p} k \\ &= a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_{r-1}} \left(a_{i_{r+1}} a_{i_r} \right) a_{i_{r+2}} \cdots a_{i_p} k \\ &= a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_{r-1}} \left(a_j k' a_{i_{r+1}} \right) a_{i_{r+2}} \cdots a_{i_p} k \end{aligned}$$

nuevamente por la invarianza de A, k' se puede desplazar hacia la derecha teniendo la forma

$$x = a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_{r-1}} a_j a_{j+1} \cdots a_{jp} \tilde{k} \ , \tilde{k} \in K, j_t \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

esto quiere decir que la longitud de x queda fija, por otro lado tomando $min\{h(p)\}$, esto ocurre cuando $1 = i_1 \leq i_2 \leq i_3 \ldots \leq i_p = n$, es decir

$$x = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n k \ , k \in K$$

$$\begin{aligned} x &\in [a_1][a_2]\cdots[a_n]K \\ \Rightarrow \langle A \rangle &\subset [a_1][a_2]\cdots[a_n]K \end{aligned}$$

notemos por hipótesis que $\langle A \rangle$ es cerrado y tenemos que $[a_1][a_2]\cdots[a_n]K$ es compacto pues el producto de compacto es compacto, por topología $[A]$ es compacto. ■

Teorema 25

Sea G un grupo topológico localmente compacto. La parte acotada de G es abierto si y solo si G contiene un entorno compacto invariante de la identidad.

Demostración : $\Longrightarrow$] Lo realizaremos por contradicción. Para esto construyamos los siguientes conjuntos.

Como G es localmente compacto se tiene $\forall g \in G; \exists U \in \mathcal{V}(g)$ y $K \subset G$ compacto talque $g \in U \subset K$, particular para $g = e$, se afirma que existe $U \in \mathcal{V}(e), N \subset G$ compacto talque $e \in U \subset N$, además como $e \in \mathcal{V}(e)$ por teorema (11) existe $V \in \mathcal{V}(e)$ simétrico talque $cl\,[V] \subset U \subset N$, del cual se tiene que $[cl(V)]^2 \subset N$. Es decir se tiene las siguientes afirmaciones; $N \in \mathcal{V}(e)$ compacto talque $N \subset B(G)$, además $V \in \mathcal{V}(e)$ simétrico talque $[cl(V)]^2 \subset N$.

Se puede notar que $\{e\}$ es cerrado, en efecto para ver esto es suficiente ver que $G - \{e\}$ es abierto, sea $x \in G - \{e\}$, entonces $x \in G$ con $x \neq e$, como G es localmente compacto, entonces $\forall u \in G, \exists U$ entorno abierto de u y un $K \subset G$ compacto talque $U \subset K$, tomando $u = x$ se tiene que $x \in U \subset K \subset G \Rightarrow x \in U \subset G - \{e\}$, lo cual afirma que $G - \{e\}$ es abierto, por tanto $\{e\}$ es cerrado, por teorema (13) G es Hausdorff.

Por otra parte construyamos las secuencias $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ talque cumplan las condiciones siguientes.

1. $y_n = x_1x_2\cdots x_n \in V$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. $a_nx_{n+1}x_{n+2}\cdots x_ma_n^{-1} \in V$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $m > n$.
3. $N, a_1x_1a_1^{-1}N, a_2x_1x_2a_2^{-1}N, \ldots, a_kx_1x_2\cdots x_ka_k^{-1}N, \ldots$ son disjuntos.

Veamos la existencia de tales secuencias.

- Primeramente veamos para un punto, se afirma que $\exists a_1 \in G, x_1 \in G$ talque $N \cap a_1x_1a_1^{-1}N = \emptyset$, supongamos lo contrario que $\forall x \in V, \forall a \in G$, se cumple

$$N \cap axa^{-1}N \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \exists y, z \in N \,/\, y = axa^{-1}z$$
$$\Rightarrow yz^{-1} \in NN^{-1} \quad \Rightarrow \quad axa^{-1} \in NN^{-1},$$

  por otro lado definamos el conjunto $A_0 = \bigcup_{a\in G} aVa^{-1}$, del cual se afirma que

$$A_0 = \bigcup_{a\in G} aVa^{-1} \subset NN^{-1}.$$

  Notemos que N es compacto por construcción, N^{-1} es compacto pues la función In es continua, como la función m es continua entonces se tiene que NN^{-1} es compacto, entonces

$$\begin{aligned} A_0 &\subset NN^{-1} \\ cl\,(A_0) &\subset cl\left(NN^{-1}\right) \end{aligned}$$

por topología se tiene que $cl\left(NN^{-1}\right)$ sigue siendo compacto y $cl\,(A_0)$ es cerrado, nuevamente por topología se afirma que $cl\,(A_0)$ es compacto, también se afirma que este conjunto es invariante bajo automorfismos internos de G, para esto probaremos lo siguiente.

$$\forall g \in G \quad gA_0g^{-1} \subset A_0$$

en efecto, sea $v \in gA_0g^{-1}$ por demostrar $v \in A_0 \Leftrightarrow \exists q \in G, s \in V \diagup v = qsq^{-1}$

$$\begin{aligned}
v &\in gA_0g^{-1} \Rightarrow \exists m \in A_0 \diagup v = gmg^{-1}\\
m \in A_0 \Rightarrow \exists a \in G, v' \in V \diagup m = av'a^{-1} &\Rightarrow v = gav'a^{-1}g^{-1}\\
v &= gav'(ga)^{-1},\ a, g \in G \Rightarrow ga = q \in G\\
&= qsq^{-1},\ s = v' \in V\\
v &\in A_0\\
\Rightarrow gA_0g^{-1} &\subset A_0,
\end{aligned}$$

así se tiene que A_0 es invariante bajo automorfismos internos es decir $I_g(A_0) \subset A_0$, del cual se tiene

$$\begin{aligned}
cl\,[I_g(A_0)] &\subset cl\,[A_0]\\
I_g\,[cl(A_0)] &\subset cl\,[A_0]\\
gcl(A_0)g^{-1} &\subset cl(A_0),
\end{aligned}$$

por tanto se afirma que $cl(A_0)$ es invariante bajo automorfismos internos de G, notemos que a su vez es compacto, además claramente $e \in cl(A_0)$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$, pues asumimos que G no contiene conjuntos compactos que contienen la identidad e invariantes bajo automorfismos internos de G, por tanto $\exists a_1 \in G, x_1 \in G$ talque $N \cap a_1x_1a_1^{-1}N = \emptyset$.

- Por otro lado supongamos que se han construido los conjuntos $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}, \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ talque cumplen las siguientes condiciones,

  i) $y_i = x_1x_2x_3\cdots x_i \in V \quad ; i = 1, 2, \ldots, k.$

  ii) $a_ix_{i+1}x_{i+2}\cdots x_ja_i^{-1} \in V \quad ; i = 1, 2, \ldots k-1\,;\, j > i.$

  iii) $N, a_1x_1a_1^{-1}, a_2x_1x_2a_2^{-1}N, \ldots, a_kx_1x_2\cdots x_ka_k^{-1}N$, son disjuntos.

Por otro lado consideremos la función

$$f_i : \underset{x}{G} \underset{\longmapsto}{\longrightarrow} \underset{f_i(x)=a_i x_{i+1} x_{i+2} \cdots x_k x a_i^{-1}}{G} \quad i = 1, 2, \ldots k-1$$

claramente esta bien definido, pues supongamos que $f_i(x) = f_i(y)\ \forall x, y \in G$, entonces $a_i x_{i+1} x_{i+2} \cdots x_k x a_i^{-1} = a_i x_{i+1} x_{i+2} \cdots x_k y a_i^{-1}$, por álgebra cancelando una cantidad finita de veces tanto a izquierda como a derecha se tiene que $x = y$, por tanto la función esta bien definida. Ahora veamos que esta función es continua.

En efecto sea $x \in G$ y $f_i(x) \in V$, entonces $a_i x_{i+1} x_{i+2} \cdots x_k x a_i^{-1} \in V$, pero $I_{a_i}(x_{i+1} x_{i+2} \cdots x_k x) \in V$, esta función es un homeomorfismo en consecuencia, $\exists U$ entorno de $x_{i+1} x_{i+2} \cdots x_k x / I_{a_i}(U) \subset V$

$$\begin{aligned}
x_{i+1} x_{i+2} \cdots x_k x &\in U \\
\sigma_{x_{i+1}^{-1}}(x_{i+1} x_{i+2} \cdots x_k x) &\in \sigma_{x_{i+1}^{-1}}(U) \\
x_{i+1}^{-1} x_{i+1} x_{i+2} \cdots x_k x &\in x_{i+1}^{-1} U \\
x_{i+2} x_{i+3} \cdots x_k x &\in x_{i+1}^{-1} U \\
\sigma_{x_{i+2}^{-1}}(x_{i+2} x_{i+3} \cdots x_k x) &\in \sigma_{x_{i+2}^{-1}}(x_{i+1}^{-1} U) \\
x_{i+2}^{-1} x_{i+2} x_{i+3} \cdots x_k x &\in x_{i+2}^{-1} x_{i+1}^{-1} U \\
x_{i+3} \cdots x_k x &\in x_{i+2}^{-1} x_{i+1}^{-1} U
\end{aligned}$$

realizando este proceso una cantidad finita de veces se tiene

$$x \in x_k^{-1} \cdots x_{i+2}^{-1} x_{i+1}^{-1} U$$

se sabe que este es un abierto que además contiene al elemento x, si definimos $Z = x_k^{-1} \cdots x_{i+2}^{-1} x_{i+1}^{-1} U$, es un entorno abierto de x, además se cumple que

$$f_i(x_k^{-1} \cdots x_{i+2}^{-1} x_{i+1}^{-1} U) \quad \subset \quad V,$$

pues $f_i(x_k^{-1} \cdots x_{i+2}^{-1} x_{i+1}^{-1} U) = \left[a_i x_{i+1} x_{i+2} \cdots x_k \left(x_k^{-1} \cdots x_{i+2}^{-1} x_{i+1}^{-1} U\right) a_i^{-1}\right] = a_i U a_i^{-1} = I_{a_i}(U)$, pero $I_{a_i}(U) \subset V$, entonces $f_i(Z) \subset V$, por lo tanto por topología f_i es continua.

Por otro lado como f_i es continua, entonces $\forall x \in G$ y para todo V entorno de $f_i(x)$, $\exists W$ entorno de x talque $f_i(W) \subset V$, en particular si tomando $x = e \in G$, y además $f_i(e) = a_i x_{i+1} x_{i+2} \cdots x_k e a_i^{-1} \in V$ entonces $a_i x_{i+1} x_{i+2} \cdots x_k a_i^{-1} \in V$, se afirma que existe W_j entornos de e, con $j = 1, 2, \ldots k-1$ talque $f_i(W_j) \subset V$; lo que nos interesa son los entornos de la identidad W_j; tomando $W = \bigcap_{j=1}^{k-1} W_j$, notemos que este conjunto es abierto además contiene a la identidad. Por otra parte definamos el conjunto siguiente

$$R_k = N \cup a_1 x_1 a_1^{-1} N \cup a_2 x_1 x_2 a_2^{-1} N \cup \ldots \cup a_k x_1 x_2 \cdots x_k a_k^{-1} N$$

Notemos que $a_k x_1 x_2 \cdots x_k a_k^{-1} = a_k y_k a_k^{-1} \in G$, por i) entonces $\sigma_{a_k y_k a_k^{-1}}(N)$ es compacto pues N es compacto por hipótesis por tanto $a_k y_k a_k^{-1} N$ es compacto, por topología se puede afirmar que R_k, es compacto pues la unión de compactos es compacto.

Supongamos que $\forall x \in W$, $a \in G$, se tiene

$$R_k \cap a x_1 x_2 x_3 \cdots x_k x a^{-1} N \neq \emptyset$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \exists y \in R_k, z \in N \diagup y = a x_1 x_2 \cdots x_k x a^{-1} z \\ yz^{-1} &= a x_1 x_2 \cdots x_k x a^{-1} \in R_k R_k^{-1} \end{aligned}$$

Así $\forall x \in W$, $a \in G$ definimos y afirmamos que

$$\begin{aligned} A_k &= \bigcup_{a \in G} a x_1 x_2 \cdots x_k W a^{-1} \subset R_k R_k^{-1} \\ \Rightarrow A_k &\subset \underbrace{R_k R_k^{-1}}_{\text{compacto}} \text{ pues } R_k, R_k^{-1} \text{ son compactos} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow cl(A_k) \subset cl(R_k R_k^{-1}),$$

entonces por topología $cl(A_k)$ es compacto, por topología $cl(A_k)$ es compacto, por la función inversión también se tiene que $[cl(A_k)]^{-1}$ también es compacto, nuevamente por la continuidad de la función m se afirma que $cl(A_k)\,[cl(A_k)]^{-1}$ es compacto, además afirmamos que $cl(A_k)\,[cl(A_k)]^{-1}$ es invariante bajo automorfismos internos de G para esto veamos primeramente que $\forall g \in G$; $gA_kg^{-1} \subset A_k$, en efecto.

$$\begin{aligned} \text{Sea}\, m &\in gA_kg^{-1} \Rightarrow \exists m \in A_k \Leftrightarrow \text{por demostrar que } \exists s \in G, t \in W \diagup m = s x_1 x_2 \cdots x_k t s^{-1} \\ m \in gA_kg^{-1} &\Rightarrow \exists u \in A_k \diagup m = gug^{-1}, \end{aligned}$$

como $u \in A_k$, por consiguiente $\exists a \in G, w \in W \diagup u = a x_1 x_2 \cdots x_k w a^{-1}$, tenemos así

$$\begin{aligned} m &= g a x_1 x_2 \cdots x_k w a^{-1} g^{-1} \\ &= ga(x_1 x_2 \cdots x_k) w (ga)^{-1} \end{aligned}$$

como $a, g \in G$, entonces $ga \in G$, tomando $s = ga$ y $t = w$ se afirma que $m \in A_k$ luego $gA_kg^{-1} \subset A_k$, es invariante bajo automorfismos internos de G.

Del mismo modo $\forall g \in G$; $gA_k^{-1}g^{-1} \subset A_k^{-1}$; en efecto $m \in gA_k^{-1}g^{-1} \Rightarrow \exists u \in A_k^{-1} \diagup m = gug^{-1}$, como

$u \in A_k^{-1} \Rightarrow u = v^{-1} / v \in A_k$, así tenemos que

$$\begin{aligned} m &= gug^{-1} \\ &= gv^{-1}g^{-1} \\ &= g(gv)^{-1} \\ &= (g)^{-1}(gv)^{-1} \\ &= \left[(gv)g^{-1}\right]^{-1} \\ &= \left[gvg^{-1}\right]^{-1} \end{aligned}$$

con esto se tiene que $m \in A_k^{-1}$ pues $v \in A_k$, por tanto A_k^{-1}es invariante bajo automorfismos internos de G, es decir $gA_k^{-1}g^{-1} \subset A_k^{-1}$ con estos datos se tiene la siguiente inclusión

$$gA_kg^{-1} \subset A_k \ , \ gA_k^{-1}g^{-1} \subset A_k^{-1} \Rightarrow \left(gA_kg^{-1}\right)\left(gA_k^{-1}g^{-1}\right) \subset A_kA_k^{-1}$$

$$\begin{aligned} gA_kg^{-1}gA_k^{-1}g^{-1} &\subset A_kA_k^{-1} \\ gA_kA_k^{-1}g^{-1} &\subset A_kA_k^{-1} \\ cl\left[gA_kA_k^{-1}g^{-1}\right] &\subset cl\left[A_kA_k^{-1}\right] \\ g\mathrm{cl}\left(A_kA_k^{-1}\right)g^{-1} &\subset \mathrm{cl}\left(A_kA_k^{-1}\right) \\ gcl\left(A_k\right)cl\left(A_k\right)^{-1}g^{-1} &\subset cl\left(A_k\right)cl\left(A_k\right)^{-1}, \end{aligned}$$

por tanto se concluye que $cl\left(A_k\right)cl\left(A_k^{-1}\right)$ es invariante bajo automorfismos internos de G, $\Rightarrow \,]\,[\, \Leftarrow$, pues asumimos que G no contiene conjuntos con estas propiedades.

$$\Rightarrow \exists a_{k+1} \in G, x_{k+1} \in W / R_k \bigcap a_{k+1}x_1x_2\cdots x_{k+1}a_{k+1}^{-1}N = \emptyset.$$

Por lo tanto se afirma la existencia de tales secuencias que cumplen las condiciones 1),2) y 3).

Ahora continuamos con la demostración asumiendo la existencia de las secuencias mencionadas anteriormente.

Tenemos por 1) $y_n = x_1x_2\cdots x_n \in V$; $\forall n \in N$, además tenemos $V \subset cl(V) \subset cl(V)cl(V) \subset N$ entonces

$$y_n \in V \subset N \Rightarrow y_n \in N$$

como N es compacto, entonces por topología se afirma que la red $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subred convergente a un punto $y \in N$, es decir existe una subred de la forma $\{y_{n_\lambda}\}_{\lambda\in\mathbb{N}}$ que converge a $y \in N$. Si denotamos como $lim_n z_n$ al punto limite de $\{z_n\}$, entonces aplicando esta notación se tiene que

$$\begin{aligned} a_n y a_n^{-1} &= lim_\lambda a_n x_1 x_2 \cdots x_{n_\lambda} a_n^{-1} \\ &= lim_\lambda (a_n x_1 x_2 \cdots x_n a_n^{-1})(a_n x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{n_\lambda} a_n^{-1}), \end{aligned}$$

por otro lado notemos por 2) $a_n x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{n_\lambda} a_n^{-1} \in V \subset cl(V)$, se tiene para un λ suficientemente grande se tiene lo siguiente

$$a_n y a_n^{-1} \in a_n x_1 x_2 \cdots x_n a_n^{-1} cl(V).$$

Por otra parte supongamos que la red $\left\{a_{n_\lambda} y a_{n_\lambda}^{-1}\right\}$ converge a un punto $x \in G$, se conoce que V es un abierto por teorema (12) sabemos que xV es también abierto, además $x \in xV$, pero notemos que $a_{n_\lambda} y a_{n_\lambda}^{-1} \in xV$, (eventualmente se encuentra en xV) en otras palabras

$$\begin{aligned} \exists v_\lambda &\in V \diagup a_{n_\lambda} y a_{n_\lambda}^{-1} = x v_\lambda \\ x &= a_{n_\lambda} y a_{n_\lambda}^{-1} v^{-1} \ (\alpha), \end{aligned}$$

pero como $v_\lambda^{-1} \in V \subset cl(V)$, entonces $v_\lambda^{-1} \in cl(V) \quad (\omega)$, notemos que $v^{-1} \in V$, pues V es simétrico, se tiene además que

$$a_n y a_n^{-1} \in a_n x_1 x_2 \cdots x_n a_n^{-1} cl(V) \quad ; \forall n \in \mathbb{N},$$

entonces tomando $n_\lambda \in \mathbb{N}$ obtenemos

$$a_{n_\lambda} y a_{n_\lambda}^{-1} \in a_{n\lambda} x_1 x_2 \cdots x_{n_\lambda} a_{n_\lambda}^{-1} cl(V) \quad (\beta),$$

por definición de producto de conjuntos de α) ω) y β)

$$\begin{aligned} (a_{n_\lambda} y a_{n_\lambda}^{-1}) v^{-1} &\in a_{n\lambda} x_1 x_2 \cdots x_{n_\lambda} a_{n_\lambda}^{-1} cl(V) cl(V) \\ (a_{n_\lambda} y a_{n_\lambda}^{-1}) v^{-1} &\in a_{n\lambda} x_1 x_2 \cdots x_{n_\lambda} a_{n_\lambda}^{-1} \left[cl(V)\right]^2. \end{aligned}$$

Pero se tiene que $\left[cl(V)\right]^2 \subset N \Rightarrow a_{n\lambda} x_1 x_2 \cdots x_{n_\lambda} a_{n_\lambda}^{-1} \left[cl(V)\right]^2 \subset a_{n\lambda} x_1 x_2 \cdots x_{n_\lambda} a_{n_\lambda}^{-1} N$

$$\begin{aligned} x &= a_{n_\lambda} y a_{n_\lambda}^{-1} v^{-1} \in a_{n_\lambda} x_1 x_2 \cdots x_{n_\lambda} a_{n_\lambda}^{-1} N \\ x &\in a_{n_\lambda} x_1 x_2 \cdots x_{n_\lambda} a_{n_\lambda}^{-1} N \end{aligned}$$

notemos que $V \subset N \Rightarrow a_{n_\lambda} y a_{n_\lambda}^{-1} V \subset a_{n_\lambda} y a_{n_\lambda}^{-1} N \Rightarrow x = a_{n_\lambda} y a_{n_\lambda}^{-1} v^{-1} \in a_{n_\lambda} y a_{n_\lambda}^{-1} N$, entonces $x \in a_{n_\lambda} y a_{n_\lambda}^{-1} N \bigcap a_{n\lambda} x_1 x_2 \cdots x_{n_\lambda} a_{n_\lambda}^{-1} a_{n_\lambda} y a_{n_\lambda}^{-1} N \bigcap a_{n\lambda} x_1 x_2 \cdots x_{n_\lambda} a_{n_\lambda}^{-1} \neq \emptyset \quad \Rightarrow \,]\![\Leftarrow$ al inciso 3) de las secuencias, luego la red $\left\{a_{n_\lambda} y a_{n_\lambda}^{-1}\right\}$ no converge, por tanto también se tiene que no tiene subredes convergentes.

Es decir $C(y)$ no es relativamente compacto $C(y) \nsubseteq K$, donde K es compacto, pero se puede advertir que $y \in N \subset B(G)$, del cual $y \in B(G)$, por definición se tiene que y es un $\overline{FC}-elemento$, entonces por definición $cl\,[C(y)]$ es compacto, además $C(y) \subset cl\,[C(y)]$, entonces se afirma que $C(y)$ es relativamente compacto lo cual es una contradicción. Así se afirma que G tiene un entorno compacto invariante de la identidad.

[$\Longleftarrow$ Supongamos que existe un $N \in \mathcal{V}(e)$ talque es compacto e invariante bajo automorfismos internos de G, por la invariante de N se tiene

$$\forall u \in G; I_u(N \subset N$$
$$uNu^{-1} \subset N$$

tomando $u = x^{-1}$ se tiene

$$\begin{aligned} x^{-1}Nx &\subset N \\ \text{Si } g \in N \Rightarrow C(g) &\subset N \\ \Rightarrow cl(C(g)) &\subset cl(N) \end{aligned}$$

como N es compacto $cl(N)$ es compacto, luego $cl(C(g))$ es compacto, entonces g es un $\overline{FC}-elemento$, así $g \in B(G)$ pero

$$g \in N \subset B(G)$$

por hipótesis se tiene que $N \in \mathcal{V}(e)$ entonces se tiene $intB(G) \neq \emptyset$, además por el teorema (21) $B(G)$ es un subgrupo, como el interior de $B(G)$ no es vacío entonces aplicando el teorema (20) se concluye que $B(G)$ es abierto. ■

4.2

Teorema de D.H. Lee - T.S. Wu

En esta parte está el objetivo central del trabajo, para esto se presentó las condiciones que debe cumplir un conjunto para que este sea un grupo topológico, seguidamente se mostraron resultados en estos espacios que se enunciaron, los cuales son precisos para llegar hasta esta parte y para demostrar el teorema que toca demostrar, a continuación se enuncia el teorema de *D.H. Lee-T.S Wu* el cual afirma la existencia de un subgrupo normal abierto y compacto con la condición de que la parte acotada de G sea abierto y viceversa.

Teorema 26 (*D.H. Lee-T.S. Wu*)

Sea G un grupo topológico localmente compacto, si G es totalmente disconexo, entonces $B(G)$ es abierto si y solo si G tiene un subgrupo normal abierto y compacto.

Demostración: $\Longrightarrow$] Supongamos que $B(G)$ es abierto por teorema anterior (25) existe $N \in \mathcal{V}(e)$ talque es compacto e invariante bajo automorfismos internos de G, por otro lado como $N \in \mathcal{V}(e)$ y por hipótesis tenemos G es localmente compacto y totalmente disconexo, entonces por teorema (22) existe un *subgrupo* K de G que es abierto y compacto talque $K \subset N$.

Definamos $A = \bigcup_{x\in G} xKx^{-1}$, se afirma que A es invariante bajo automorfismos internos de G, periódico y relativamente compacto.

i) Veamos primeramente la invarianza de A, se tiene que probar la siguiente inclusión $\forall g \in G \;\; I_g(A) \subset A$, en efecto.

Sea $u \in gAg^{-1}$ luego $\exists v \in A \diagup u = gvg^{-1}$, por lo cual se tiene

$$\begin{aligned}
v &\in A \Rightarrow \exists x \in G, k \in K \diagup v = xkx^{-1} \\
u &= gxkx^{-1}g^{-1} \\
&= gxk(gx)^{-1}, \;\; gx \in G \\
\Rightarrow u &\in A \\
\Rightarrow gAg^{-1} &\subset A,
\end{aligned}$$

entonces se tiene que $\forall g \in G \;\; I_g(A) \subset A$ es invariante bajo automorfismos internos de G.

ii) Veamos que A es periódico por demostrar $\forall g \in A$, g pertenece a un subgrupo que además sea compacto, en efecto.

Sea $g \in A$, entonces $\exists x \in G \diagup g \in xKx^{-1}$, se tiene que xKx^{-1} es compacto pues tenemos que I_g, es un automorfismo topológico, por tanto un homeomorfismo luego es continua.

Lo que falta es que sea un subgrupo, además con la hipótesis que K es un subgrupo.

- Sea $a, b \in xKx^{-1} \Rightarrow \exists k, k' \diagup a = xkx^{-1}, b = xkx^{-1}$, entonces

$$\begin{aligned}
ab &= xkx^{-1}xkx^{-1} \\
&= xkekx^{-1} \\
&= x(kk)x^{-1} \;\; kk' \in K \\
\Rightarrow ab &\in xKx^{-1}.
\end{aligned}$$

- Sea $a \in xKx^{-1} \Rightarrow \exists k \in K / a = xkx^{-1}$, por tanto

$$\begin{aligned} a^{-1} &= (xkx^{-1})^{-1} \\ &= (x^{-1})^{-1}(xk)^{-1} \\ &= xk^{-1}x^{-1} \ ; x^{-1} \in K \\ \Rightarrow a^{-1} &\in K. \end{aligned}$$

Por tanto evidentemente xKx^{-1} es un subgrupo además es compacto, como $g \in xKx^{-1}$, por definición A es periódico.

iii) Notemos que $K \subset N$, entonces $I_g(K) \subset I_g(N)$, por definición $gKg^{-1} \subset gNg^{-1}$, como N es invariante bajo automorfismos internos de G, $gNg^{-1} \subset N$, así

$$gKg^{-1} \subset N$$

con estos datos $A = \bigcup_{x \in G} xKx^{-1} \subset N$, recordemos que N es compacto, luego por definición A es relativamente compacto. Por otro lado se tiene que G es localmente compacto, totalmente disconexo y $A \subset G$ que es relativamente compacto, invariante bajo automorfismos internos de G y periódico, entonces por teorema de *Usakov* (24), el subgrupo cerrado H generado por A es un subgrupo normal y compacto.

Veamos que H es abierto, para esto se puede advertir que H es un grupo topológico pues H es un subgrupo y H es un subespacio topológico con la topología inducida, por definición H es un grupo topológico, por teorema (14), H es un espacio homogéneo, entonces

$$\forall x, y \in H \, , \exists f : H \longrightarrow H \ f(x) = y / f \text{ es un homeomorfismo}$$

como $A = \bigcup_{x \in G} xKx^{-1}$ la unión de abiertos es abierto, como f es un homeomorfismo se tiene que f es una aplicación abierta es decir $f(A)$ es abierto en H y además se tiene la siguiente inclusion,

$$f(A) \subset H$$

pero $y = f(x) \in f(A) \subset H$, para algún $x \in A$; por otra parte sea un elemento cualquiera $u \in H$, entonces tomando $y = u$, se tiene

$$\begin{aligned} u &= f(x) \in f(A) \subset H \\ u \in f(A) &\subset H, \end{aligned}$$

por tanto para cualquier $u \in H$ existe $u \in f(A)$ talque $u \in f(A) \subset H$, del cual se afirma que H es abierto, con esto termina la prueba de la primera implicación.

[$\Longleftarrow$ Supongamos que G tiene un subgrupo normal abierto y compacto, así se afirma que $e \in N$ además es normal, entonces

$$\begin{aligned} \forall a &\in G \quad aNa^{-1} \subset N \\ I_a(N) &\subset N, \end{aligned}$$

así N es invariante bajo automorfismos internos de G por tanto por teorema (25) $B(G)$ es abierto, con esto termina la prueba. ■

$\boxed{\text{Ejemplo}}$ Para un ejemplo del teorema de (D.H. Lee-T.S. Wu), tomemos el grupo topológico $(\mathbb{Z}_{10}, +, \tau_{dis})$, notemos $\mathbb{Z}_{10} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, además $\mathbb{Z}_{10}$ es abeliano, notemos que si $j \in \mathbb{Z}_{10}$ el inverso de este elemento es $n - j$, por tanto se puede afirmar por topología que cumple:

- $(\mathbb{Z}_{10}, +, \tau_{dis})$, el localmente compacto pues $((\mathbb{Z}_{10}, \tau_{dis})$ es compacto ya que es finito).
- $(\mathbb{Z}_{10}, +, \tau_{dis})$, es totalmente disconexo pues (todo espacio discreto es totalmente disconexo).
- $B(\mathbb{Z}_{10}) = \mathbb{Z}_{10}$ es abierto, pues $(\mathbb{Z}_{10} \subset \tau_{dis})$.

Notemos que $\mathbb{Z}_{10}$ cumple con las condiciones del teorema, entonces por teorema este grupo topológico afirma que existe un subgrupo normal abierto y compacto. Construyamos tal subgrupo.

- Primero construyamos tal subgrupo, por álgebra se tiene que los divisores del orden del grupo $|G| = 10$, son $\{1, 2, 5\}$, es decir existen tres subgrupos a saber los siguientes,
  $H_1 = \{0\}$.
  $H_2 = \{0, 5\}$.
  $H_3 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.
- Estos son además subgrupos normales es decir
  $\forall g \in \mathbb{Z}_{10}$ se cumple $gH_ig^{-1} \subset H_i$.
- Los subgrupos son además abiertos pues $H_i \in \tau_{dis}$.
- Por último son compactos pues son finitos.

4.3 Aplicación del teorema D.H. Lee- T.S.Wu

En esta parte lo que se realizará es aplicar el teorema mencionado a otro teorema el cual ya menciona los $\overline{FC}-grupos$, tales grupos siguen una trayectoria en su estudio, es por eso que el teorema **D.H. Lee- T.S.Wu**, introduce con un resultado de estos grupos. Enunciemos pues el teorema.

Teorema 27

Sea G un grupo topológico localmente compacto, si G es un $\overline{FC}-grupo$ y es totalmente disconexo y K es un subgrupo compacto de G, entonces K esta contenido en un subgrupo abierto normal y compacto.

Demostración: Supongamos que K es un subgrupo compacto, además $K \subset G$, si tomamos un elemento de $k \in K \subset G$, hagamos la siguiente afirmación, que $C(k)$ es relativamente compacto,invariante bajo automorfismos internos de G y periódico, en efecto.

i) Veamos que es relativamente compacto se sabe que $C(k) \subset cl\,[C(k)]$, por hipótesis se tiene que G es un $\overline{FC}-grupo$, por definición se tiene que $G = B(G)$, como $k \in K \subset G = B(G)$, se afirma que k es un $\overline{FC}-elemento$, por definición $cl\,[C(k)]$ es compacto, por tanto por definición $C(k)$ es relativamente compacto.

ii) Veamos que es invariante bajo automorfismos internos de G, en efecto. Sea $g \in G$, $u \in gC(k)g^{-1} \subset C(k)$, entonces $\exists v \in C(k) / u = gvg^{-1}$, como

$$\begin{aligned} v &\in C(k) \Rightarrow v = x^{-1}vx \ , x \in G \\ u &= gx^{-1}vxg^{-1} \\ &= (xg^{-1})^{-1}v(xg^{-1}) \ ; xg^{-1} \in G \\ \Rightarrow u &\in C(k). \end{aligned}$$

Por tanto $u \in gC(k)g^{-1} \subset C(k)$, $I_g(C(k)) \subset C(k)$, es invariante bajo automorfismos internos de G.

iii) Veamos que es periódico, para esto sea $u \in C(k)$, entonces $u = x^{-1}kx$, como $k \in K$ es cierto que $u \in x^{-1}Kx$, además se sabe que $x^{-1}Kx$ es compacto y se ha visto que es un subgrupo, pues K es un subgrupo, por tanto $C(k)$ es periódico. por i),ii) y iii).

Por otro lado se tiene por hipótesis que G es localmente compacto y totalmente disconexo, por teorema de **Usakov** $C(k)$ genera un subgrupo lo denotaremos N_k que es normal y compacto de G. Por otro lado se tiene por hipótesis que G es un $\overline{FC}-grupo$ entonces $G = B(G)$, como G es un grupo topológico por tanto un espacio topológico se sabe que el espacio G es abierto y cerrado, lo que necesitamos es que es abierto, por la igualdad se tiene que $B(G)$ es abierto, aplicando el teorema (**D.H. Lee-T.S. Wu**) existe un subgrupo N de G que es abierto, normal y compacto.

Por otra parte se puede notar que $k \in N_k$, además por teorema (12) NN_k es abierto con $k \in NN_k$, también notemos que $\{NN_k\}_{k\in G}$ es un cubrimiento de K, pero por hipótesis se tiene que K es compacto entonces existe un subcubrimiento finito $\{NN_{k_i}\}_{i=1}^{n}$ de K, es decir $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} NN_{k_i}$; definamos el conjunto $A = \bigcup_{i=1}^{n} NN_{k_i}$ se afirma que este conjunto es relativamente compacto, invariante bajo automorfismos internos de G y periódico, en efecto.

i) Claramente N, N_{k_i} son compactos, entonces el producto de conjuntos compactos es compactos, además la unión finita de compactos es compacto, por tanto A definido anteriormente es compacto, luego la clausura de un compacto sigue siendo compacto, por otro también se sabe que $A \subset cl(A)$, así A es relativamente compacto.

ii) Veamos la invarianza de A, para esto sea $u \in gAg^{-1}$ entonces $\exists a \in A \diagup u = gag^{-1}$, como $a \in A$ luego $\exists j \in \{1, 2, \ldots, n\} \diagup a \in NN_{k_j}$, así se tiene que

$$\begin{aligned} \exists n &\in N, m \in N_{k_j} \diagup a = nm \\ u &= gnmg^{-1} \\ &= gng^{-1}gmg^{-1} \\ &= \left(gng^{-1}\right)\left(gmg^{-1}\right). \end{aligned}$$

Notemos que N, N_{k_j} son subgrupos normales entonces se tiene

$$\begin{aligned} u &= \left(gng^{-1}\right)\left(gmg^{-1}\right) \\ &= n'm' \ \ ; n' \in N \wedge m' \in N_{k_j} \\ \Rightarrow u &\in NN_{k_j}, \end{aligned}$$

por tanto se tiene que $gAg^{-1} \subset A$, lo cual implica que $I_g(A) \subset A$ consecuentemente es invariante bajo automorfismos internos de G.

iii) Veamos que A es periódico sea $u \in A$, entonces $\exists i \in \{1, 2, \ldots, n\} \diagup u \in NN_{k_i}$, se puede ver que NN_{k_i}es compacto, además es un subgrupo pues N es normal y N_{k_i} es un subgrupo, por álgebra se afirma que NN_{k_i}es un subgrupo, por tanto A es periódico.

Nuevamente por teorema de $Usak\hat{o}v$ el subgrupo cerrado H generado por A, es normal y compacto, lo que falta es que sea abierto; como H es un espacio homogéneo y $A \subset H$; A es abierto, entonces H es abierto pero como H es generado por A por álgebra $A \subset H$, además se tiene $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} NN_{k_i} = A$,

$$\begin{aligned} A &\subset H \;\; K \subset A \\ \Rightarrow \;\; K &\subset H \end{aligned}$$

donde H es un subgrupo abierto normal y compacto esto concluye la prueba. ■

5 Conclusión

Para terminar el trabajo concluimos que llegamos al objetivo; como se habrá notado en las afirmaciones hechas en el teorema **D.H. lee - T.S. Wu**, el cual afirma que, la parte acotada $B(G)$ de un grupo topológico G es abierto si y solo si G contiene un subgrupo normal abierto y compacto, se puede advertir que estos conjuntos con estas propiedades son muy importantes en topología, es decir se puede aprovechar la existencia de estos conjuntos compactos y abiertos ya que se pueden exhibirlos como ejemplos, claro esta haciendo cumplir las hipótesis respectivas.

También no solo en la topología, esta inmersa en el álgebra pues se puede tomar la existencia de subgrupos los cuales son normales, recalcando que debe cumplir condiciones que se debe cumplir el conjunto; desde un punto de vista desde las dos ramas de la matemática.

Viendo desde otra perspectiva el teorema de **D.H. lee - T.S. Wu** también nos conduce a la introducción de los $\overline{FC}-$ grupos que tienen una relación con el estudio de la compacidad categórica (**c- compacidad**) es decir que si le aumentamos a los $\overline{FC}-$ grupos que sean localmente compactos la **c- compacidad** equivale a la compacidad.

Aunque el estudio de los grupos topológicos, en específico de los $\overline{FC}-$ grupos, es relativamente reciente se han obtenido avances considerables en cuanto al conocimiento de sus propiedades, en particular los resultados presentados son una introducción a la aportación al basto universo de los $\overline{FC}-$grupos, y buscan a futuras investigaciones acerca de propiedades categóricas interpretadas dentro de la categoría los grupos topológicos, además al estudio de las **propiedades de grupos topológicos compactos**, pues el teorema de **D.H. lee - T.S. Wu** una introducción para seguir estudiando los $\overline{FC}-$ grupos.

$\mathcal{A}$

Espacios Topológicos

Definición 21

Sea X un conjunto. Una topología en X es un sistema de subconjuntos $\tau \subset P(X)$ que verifica las siguientes tres propiedades básicas.

1. $\emptyset, X \in \tau$.
2. *La unión de elementos de cualquier subcolección de τ esta en τ.*
3. *La intersección de elementos de cualquier subcolección finita de τ esta en τ.*

Un conjunto X para el que se ha definido una topología τ se llama espacio topológico.

Definición 22

Sea (X, τ) un Espacio Topológico (ET) y fijemos $x \in X$

1. *Diremos que un conjunto*

   $A \subset X$ es un entorno de x si existe $U \in \tau$ talque $x \in U \subset A$.

   A se llamara [1]entorno abierto de x si se tiene que $x \in A$ y el mismo $A \in \tau$.

2. *Denotaremos por $\mathcal{O}(x) = \{A \subset X \diagup A \text{ es un entorno de } x\}$*

   Llamaremos $\mathcal{O}^a = \{A \subset \mathcal{O}(x) \diagup A \text{ es un entorno abierto de } x\} = \mathcal{O}(x) \cap \tau$.

3. *Dado un conjunto $Y \subset X$, denotaremos por*

$$int(Y) = \{x \in Y \diagup Y \in \mathcal{O}(x)\} = \{x \in Y \diagup Y \text{ es un entorno de } x\}$$

al interior de Y. Los elementos $x \in int(Y)$ se llamaran puntos interiores de Y.

Teorema 28

Sea (X,τ) un ET y sean $A, B \subset X$. Entonces

1. *$int(A)$ es abierto.*
2. *Si $A \subset B$ entonces $int(A) \subset int(B)$.*
3. *A es abierto si y solo si $int(A) = A$.*

A.1

Cerrados y Clausuras

Sea (X,τ) un ET. Los subconjuntos *cerrados* de X serán los complementos de los conjuntos abiertos, Es decir $F \subset X$ es cerrado si y solo si $X \setminus F$ es abierto, se tiene las siguientes propiedades:

- Intersecciones arbitrarias de cerrados son cerradas.
- Uniones finitas de cerrados son cerradas.
- $\emptyset, X$ son cerrados.

Usando estos hechos, podemos definir la noción de clausura de un subconjunto, que es el dual de la noción de interior.

Definición 23

Sea (X,τ) un ET y sean $A \subset X$. El conjunto

$$cl(A) = \bigcap \{F \subset X \diagup F \text{ es cerrado y } A \subset F\}$$

se denomina la clausura de A.

Teorema 29

Sea (X,τ) un ET y sean $A, B \subset X$, entonces

1. *$cl(A)$ es cerrado.*

2. *Si $A \subset B$, entonces $cl(A) \subset cl(B)$.*

3. *A es cerrado si y solo si $cl(A) = A$.*

Teorema 30

Sea X un espacio topológico $A \subset X$, $f : X \longrightarrow X$ es continua, entonces $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Demostración : Sea $u \in f(\overline{A})$, por demostrar $u \in \overline{f(A)}$ es decir $\forall V \in \mathcal{V}(u); V \cap f(A) \neq \emptyset$; tomando $V \in \mathcal{V}(u)$, implica $u \in V$ por otro lado, $u \in f(\overline{A})$ implica $\exists x \in \overline{A} \diagup u = f(x)$, así $f(x) \in V$, entonces $f^{-1}(V)$ es un entorno abierto de x, así se tiene que $A \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$, así existe $a \in A$ y $a \in f^{-1}(V)$ por consiguiente $f(A) \cap V \neq \emptyset$, así concluimos que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. ■

Teorema 31

Sea X un ET con $A \subset X$, $f : X \longrightarrow X$ un homeomorfismo, entonces $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

Demostración : Como $A \subset X$ entonces por teorema anterior $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, de la misma forma como $f^{-1} : X \longrightarrow X$ es una función continua pues f es un homeomorfismo, además $f(A) \subset X$, por teorema anterior se tiente

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\overline{f(A)}) &\subset \overline{f^{-1}f(A)} \\
f^{-1}(\overline{f(A)}) &\subset \overline{A} \\
f\left[f^{-1}(\overline{f(A)})\right] &\subset f(\overline{A}) \\
\overline{f(A)} &\subset f(\overline{A})
\end{aligned}$$

por tanto se concluye $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$. ■

Teorema 32

Sea (X, τ) un ET. Dados $A \subset X$ y $x \in X$, las siguientes condiciones son equivalentes

1. *$x \in cl(A)$,*

2. *$A \cap V \neq \emptyset$ para todo $V \in \mathcal{O}(x)$,*

3. *$A \cap U \neq \emptyset$ para todo $u \in \mathcal{O}^a(x)$.*

Bases

Teorema 33

Sea (X, τ) un ET. Dada $\beta \subset \tau$, son equivalentes

1. *β es una base de τ,*

2. *Para todo $x \in X$ y todo $U \in \mathcal{O}(x)$ existe $V \in \beta$ talque $x \in V \subset U$.*

A.2

Axiomas de Separación

Sea $(X; \tau)$ un ET. Si no se le pide algo especifico a τ, puede haber puntos distintos de X que resulten indistinguibles desde el punto de vista topológico; por ejemplo puede pasar que existan $x, y \in X$ tales que $x \neq y$, pero $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(y)$. O que $\mathcal{O}(x) \subset \mathcal{O}(y)$. Observar que en tal caso, $x \in cl(\{y\})$ por lo que $\{y\}$ no es cerrado. Pedir condiciones para que estas cosas no pasen se llama dar propiedades de *separación* al espacio topológico. Estas condiciones están estratificadas en cinco clases estandarizadas, denominadas T_k, con $0 \leq k \leq 3$

Definición 24

Sea $(X; \tau)$ un ET. Diremos que$X$ es de la clase:

1. *X es un espacio T_0 si para cualesquiera $x, y \in X$, con $x \neq y$ se cumple que existe $U \in \tau$ talque contiene a uno de los puntos x o y pero no al otro.*

2. *X es un espacio T_1 si para cualesquiera $x, y \in X$, con $x \neq y$ se cumple que existen $U, V \in \tau$ talque $x \in U \setminus V$; $y \in V \setminus U$.*

3. *X es un espacio T_2 o espacio de* **Hausdorff** *si para cualesquiera $x, y \in X$, con $x \neq y$ se cumple que existen $U, V \in \tau$ tal que $x \in U$, $y \in V$, además $U \cap V = \emptyset$.*

4. *X es un espacio* ***regular*** *si para cualesquiera $F \subset X$ cerrado y $x \in X \setminus F$, existen $U, V \in \tau$ disjuntos tales que $x \in U$ y $F \subset V$.*

5. *X es un espacio T_3 si X es regular y T_1.*

Teorema 34

Sea (X,τ) un ET si X es de clase $T_3 \Longrightarrow T_2 \Longrightarrow T_1 \Longrightarrow T_0$

Otro resultado que se va ha necesitar para la demostración de la parte tercera de este trabajo es el siguiente teorema.

Teorema 35

Sea (X,τ) un ET de clase T_1, son equivalentes

- *X es regular,*
- *Dado $x \in X$ y un abierto $W \in \mathcal{O}(x)$, existe $U \in \tau$ talque $x \in U \subset cl(U) \subset W$.*

Teorema 36

Sea (X,τ) un ET, T_2 y $A \subset X$ compacto entonces $cl(A)$ es compacto.

A.3

Componente Conexa de un Espacio Topológico

Intuitivamente, mencionábamos que un espacio topológico es conexo si esta diseñado de una pieza. En el caso de que no sea conexo, parece natural pensar que su estructura Topológica responde a la idea de un objeto compuesto de varios pedazos de varios componentes conexas. Vamos a dar las siguientes afirmaciones de esta idea.

Definición 25

Sea X un ET. Un subconjunto $C \subset X$ se dice una componente conexa de X si

- *C es un subconjunto conexo de X.*
- *Si $C' \subset X$ es un subconjunto conexo de X y $C \subset C'$ entonces $C' = C$.*

En otras palabras, las componentes conexas de X son los subconjuntos conexos maximales de X.

Definición 26

Dado X un ET y un subconjunto $A \subset X$ conexo en X, diremos que C_A es la componente conexa de A, si $A = \{x\}$, $x \in X$, escribiremos simplemente C_x para representar la componente conexa del punto x, así lo llamaremos,

$$\mathcal{C} = \{C \subset X \diagup C \text{ es componente conexa de } X\}$$

a la familia de componentes conexas de X.

Teorema 37

Si X es ET y $A \subset X$ un subconjunto conexo no vació de X, entonces existe una única componente conexa C_A de X talque $A \subset C_A$.

Teorema 38

Sea X un ET, y $\mathcal{C}$ la familia de componentes conexas de X, entonces

1. *La familia $\mathcal{C}$ de componentes conexa de X determina una partición de, esto es $X = \bigcup_{C\in\mathcal{C}} C$.*

2. *Toda componente conexa $C \in \mathcal{C}$es un subconjunto cerrado de X.*

Uno de los conceptos importantes inmersos en los resultados finales de este trabajo es el de espacios topológicos totalmente disconexo, a continuación definimos tal aseveración.

Definición 27

*Un espacio topológico (X, τ) (ET), se dice **totalmente disconexo** si sus componentes conexos son conjuntos unitarios. Esto es los únicos subconjuntos conexos de (X, τ) son los puntos, quiere decir $C_x = \{x\}$ $\forall x \in X$.*

También se afirma que si X es ***totalmente disconexo***, entonces X es un espacio T_0, para esto es suficiente ver que toda componente conexa es cerrado.

A.4

Redes

Son generalizaciones de sucesiones, se va ha aplicar un resultado que necesitamos para llegar al objetivo central, el cual relaciona la convergencia con conjuntos compactos, la noción de convergencia en espacios topológicos se la realiza con los conceptos de redes, a continuación se dará las necesarias afirmaciones.

Definición 28

Sea X un conjunto

1. *Un conjunto ordenado por el orden parcial $\leq$ esta dirigido, si para todo $i, j \in \mathbb{I}$ existe $k \in \mathbb{I}$ talque $i \leq k$ y $j \leq k$.*

2. *Una Red en X es una función $x : \mathbb{I} \longrightarrow X$, donde el conjunto $\mathbb{I}$ esta dirigido por un orden $\leq$. Una red se escribirá como $x = (x_i)_{i\in\mathbb{I}}$, donde identificamos $x_i = x(i)$, $i \in \mathbb{I}$.*

3. *Fijada una red $x = (x_i)_{i\in\mathbb{I}}$ en X, una subred de x sera otra red $y = (y_i)_{j\in\mathbb{J}}$ dotada de la función $h : \mathbb{J} \longrightarrow \mathbb{I}$, talque*

   a) h es creciente, en el sentido de que $j_1 \leq_{\mathbb{J}} j_2 \Longrightarrow h(j_1) \leq_{\mathbb{I}} h(j_2)$,

   b) la imagen de h es un subconjunto cofinal de X (o sea $\forall i \in \mathbb{I}$, $\exists j \in \mathbb{J} \diagup i \leq h(j)$),

   c) Se tiene que $y = x \circ h$, es decir que $y_j = x_{h(j)}$ $\forall j \in \mathbb{J}$.

A.4.1 Convergencia

Sea X un conjunto, $A \subset X$ y $x = (x_i)_{i\in\mathbb{I}}$una red en X.

1. Dado $i_0 \in \mathbb{I}$ denotaremos por $C_{i_0}(x) = \{x_i \diagup i \geq i_0\}$a la cola de la red x, pero pensada como conjunto.

2. Diremos que x esta ***eventualmente*** en A, y escribimos $x \overset{E}{\hookrightarrow} A$ o bien $(x_i)_{i\in\mathbb{I}} \overset{E}{\hookrightarrow} A$.

Ahora si definimos las nociones de convergencia.

Definición 29

Sean (X, τ) un ET, $x \in X$ y $x = (x_i)_{i\in\mathbb{I}}$ una red en X. Diremos que

$x = (x_i)_{i\in\mathbb{I}}$ converge a x, y escribiremos $x_i \longrightarrow x$, si para todo entorno $U \in \mathcal{O}(x)$ se tiene que $(x_i)_{i\in\mathbb{I}} \overset{E}{\hookrightarrow} U$, (quiere decir que $\forall i \in \mathbb{I}$, $\exists j \in \mathbb{I} \diagup j \geq i$ y $x_j \in U$).

Teorema 39

Sea (X, τ) un ET y sean $x = (x_i)_{i\in\mathbb{I}}$ una red en X y $x \in X$. las siguientes afirmaciones son equivalentes

- *Se tiene la convergencia $x_i \longrightarrow x$,*
- *Toda subred de x tiene una subred que converge a x.*

Teorema 40

Sean X, Y dos espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Si f es continua si y solo si para toda red $x = (x_i)_{i\in\mathbb{I}}$ en X que converge a algún $x \in X$, se cumple $f(x_i) \longrightarrow f(x)$.

Teorema 41

Sea (X, τ) un ET y tomemos un subconjunto $K \subset X$. Luego las siguientes afirmaciones son equivalentes

- *K es compacto,*
- *Toda red en K tiene una subred que converge a un punto de K.*

A.5

Compacidad Local y Compacidad

Definición 30

Sea (X, τ) un ET diremos que X es localmente compacto si $\forall x \in X$, $\exists U \in \mathcal{O}(x)$ y $K \subset X$ compacto talque $U \subset K$.

Otra afirmación que necesitamos es el teorema que reúne el concepto de totalmente disconexo y localmente compacto, este teorema la utilizaremos en la tercera parte de este trabajo.

Teorema 42

Sea (X,τ) un ET además de Hausdorff Si X es localmente compacto y totalmente disconexo, entonces la familia de subconjuntos compactos y abiertos es una base para X.

Teorema 43

Sea (X,τ) un ET compacto y sea $F \subset X$ un subconjunto cerrado, entonces F es compacto.

Teorema 44

Sea (X,τ) un ET Hausdorff, entonces todo subconjunto compacto es cerrado en X.

Teorema 45

Sea (X,τ) un ET Hausdorff, $A \subset X$ compacto, entonces $cl(A)$ es compacto.

$\mathcal{B}$

Grupos Abstractos

Definición 31

(Grupo): Una estructura $(G; \bullet)$, que consta de un conjunto G, una operación binaria, y un elemento distintivo e, es un grupo, si satisface los siguientes axiomas:

G1: es asociativa $\forall x; y; z \in G \ x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$.

G2: e es neutro en $\forall x \in G \ \ x \bullet e = e \bullet x = x$.

G3: existencia de inversa $\forall x \in G, \exists y \in G \diagup xy = yx = e$.

Teorema 46

Sea $(G, \bullet)$ un grupo, $H \subset G$ las siguientes afirmaciones son equivalentes

- *H es un subgrupo,*
- *$H \neq \emptyset$,$\forall x, y \in G \Longrightarrow xy^{-1} \in H$.*

Teorema 47

Sea G un grupo y $\emptyset \neq S \subset G$ denotemos $\langle S \rangle$el conjunto de todos los posibles productos, en cualquier orden de elementos de S y sus inversos, entonces

1. *$\langle S \rangle$ es un subgrupo de G que contiene al conjunto S.*
2. *Si H es un subgrupo y $S \subset H$, entonces $\langle S \rangle \subset H$.*

El teorema anterior dice que $\langle S \rangle$ es el menor subgrupo de G que contiene a S.

En el caso especial en que $S = \{a\}$ es grupo $\langle S \rangle$ es el subgrupo cíclico $\langle a \rangle$ que es el menor subgrupo de G que contiene a $\{a\}$.

$\langle S\rangle$ es llamado el subgrupo generado por S.

B.1

Subgrupo Normal

Definición 32

Un subgrupo N de G es normal si

$$\forall x \in G \Rightarrow N \subset aNa^{-1}.$$

Teorema 48

Sea N, K subgrupos de G. Si N es normal en G entonces $NK = \{nk/n \in N, k \in K\}$ es un subgrupo de G.

Todo lo anterior son los conceptos de topología y álgebra que se necesitarán para desarrollar el trabajo.

Bibliografía

[1] Wu,T.S y Y.K. Yu *Compactness propierties of topological groups,* Michigan Math. 19 299-313,1972.

[2] Edwin Hewitt and Kenneth A. Ross *Structure of topological Groups Integration Theory Group Representarions,* Springer Verlag,Berlin Gottingen-Heidelberg 1963.

[3] V.I.usakov, *Classes of conjugate elements in topological groups,* (Russian) Ukrain Mat. Z. 14 (1962) 366-371.

[4] Alexander Arhangel-skii - tkachenko, Mikahil *et al, Groups Topological and related Structures,* Amtermdam, Paris.

[5] Stropel, *Marcus locally Compact Groups*, European Matematical Society, Germany, Series Textbooks in Mathematics, 2006.

[6] Iwasawa, Kenkichi, *On some types of topological groups*, Anns, of Math, 1949.

[7] Robinson Derek, *A course in the theory of groups*, Springer Verlag.

[8] Arangel skii, Alexander y Mikhail tkachencko, *Topolgical Groups ans Related Structures*, Atlantis-Press World Scienrific, Series, 2008.

[9] Dean Montgomery, Leo Zippin *Topological transformation Groups,* Institute for Advanced Study, Pricenton, New Yersey.

[10] Lukacs, Gabor, *Compact- Like Topological Groups*, Helderman-Velarg.

[11] Grosser, Siegfried and Martin Moskowitz *Compactness conditions in topological groups,* Reine Angew, Math 236,1-40,1971.