

UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS  
FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES  
CARRERA DE MATEMÁTICA



TRANSFORMADA DISCRETA  
DE FOURIER EN EL  
TRATAMIENTO DE SEÑALES

Por : Veronica Callisaya Cantuta  
Tutora: M.Sc. Adriana Miriam Mallea Morales

PRESENTANDO EN CUMPLIMIENTO DE LOS REQUISITOS,  
PARA OPTAR EL GRADO DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICA  
EN LA UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS, FACULTAD  
CIENCIAS PURAS Y NATURALES

La Paz - Bolivia  
2011

*A Dios A mis Padres:  
Remigio Callisaya e Hilaria Cantuta  
A mi amado esposo: Robert Limachi  
A mi pequeña hija: R. Yoselin*

## Agradecimientos

Agradezco a mi Dios con todo mi corazón quien me dio la vida y por haber estado siempre conmigo, en el confío y él me ayudó. Mis agradecimientos a los tribunales al Lic. Oscar Bobarin, lic. Charlie Lozano y en especial al Dr. Javier Guachalla; mis agradecimiento se extienden a mi tutora M.Sc.Miriam Mallea M.

También deseo expresar mis mas sincero agradecimiento al Lic. Leo Gomez y al Lic. Jaime Casas, por su colaboración al trabajo realizado. Mi gratitud a todos mis amigos docentes de la Carrera de Matemática- U.M.S.A. por sus comentarios y el apoyo moral. Finalmente agradezco a Monica M. Flores Quispe por el constante apoyo académico y moral.

El principio de la sabiduría es el temor de Jehová; los insensatos desprecian la sabiduría y la enseñanza.

– *Proverbios 1;7*

Porque el mandamiento es lámpara, la enseñanza es luz, y camino de vida son las reprobaciones que te instruyen

– *Proverbios 6;23*

---

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>1</b>
<b>Introducción</b>	<b>2</b>
<b>1. Señales y Sistemas</b>	<b>3</b>
1.1. Tipos de señales . . . . .	4
1.2. Clasificación de señales . . . . .	4
1.3. Clasificación de señales basadas en simetrías . . . . .	5
1.4. Clasificación de señales basada en Energía y Potencia . . . . .	5
1.5. Señales elementales en tiempo discreto . . . . .	6
1.6. Operaciones con señales . . . . .	7
1.7. Clasificación de los sistemas . . . . .	7
1.7.1. Principio de superposición . . . . .	7
1.8. Convolución discreta . . . . .	8
1.8.1. Propiedades de la convolución discreta $x(n) * h(n) = y(n)$ . . . . .	11
1.8.2. Correlación discreta . . . . .	11

---

<b>2. La Transformada <math>z</math></b>	<b>12</b>
2.1. La Transformada $z$ Directa . . . . .	12
2.2. Transformada $z$ de algunas secuencias . . . . .	16
2.3. Propiedades de la Transformada $z$ . . . . .	16
2.4. La transformada $z$ Inversa . . . . .	23
<b>3. Series y transformada de Fourier</b>	<b>25</b>
3.1. Series de Fourier de señales periódicas en tiempo discreto . . . . .	25
3.2. Densidad espectral de Potencia de Señales periódicas . . . . .	27
3.3. Transformada de Fourier de Señales no periódicas en tiempo Discreto . . . . .	28
3.4. Convergencia de la Transformada de Fourier . . . . .	30
3.5. Densidad Espectral de Energía de Señales no Periódicas . . . . .	31
3.6. Relación de la Transformada de Fourier con las Transformadas $z$ . . . . .	34
3.7. Dualidades Físicas y Matemáticas . . . . .	35
3.8. Prop. de la Trans. de Fourier de Señales en Tiempo Discreto . . . . .	36
3.9. Propiedades de Simetría de la Transformada de Fourier . . . . .	37
3.10. Teorema y Propiedades de la Transformada de Fourier . . . . .	42
<b>4. Transformada Discreta de Fourier (DFT)</b>	<b>51</b>
4.1. Transformada de Fourier Discreta (DFT) . . . . .	51
4.2. La DFT como una Transformada Lineal . . . . .	51
4.3. Relación de la DFT con otras Transformadas . . . . .	54
4.3.1. Relación con los Coeficientes de las Series de Fourier de Secuencias Periódicas . . . . .	54
4.3.2. Relación con la Transformada $z$ . . . . .	55
4.4. Propiedades de la DFT . . . . .	56

---

4.4.1. Propiedades de Periodicidad, Linealidad y Simetría . . . . .	56
4.4.2. Propiedades Adicionales de DFT . . . . .	58
<b>5. Análisis frecuencial de señales de voz con la Transformada Discreta de Fourier</b>	<b>61</b>
5.1. Frecuencia en señales continuas y discretas en el tiempo . . . . .	61
5.1.1. Señales sinusoidales en tiempo continuo . . . . .	61
5.1.2. Señales sinusoidales en tiempo discreto. . . . .	62
5.1.3. Muestreo de señales analógicas . . . . .	66
5.1.4. Condición de frecuencia de muestreo . . . . .	71
5.2. Antecedentes de la transformada discreta de Fourier . . . . .	72
5.3. Series Discretas de Fourier . . . . .	73
5.3.1. Implementación en MATLAB. . . . .	74
5.4. La Transformada Discreta de Fourier: DFT . . . . .	75
5.4.1. Implementación en MATLAB . . . . .	76
5.5. Análisis espectral de señales discretas mediante DFT . . . . .	78
5.5.1. Análisis frecuencial de funciones sinusoidales . . . . .	79
5.5.2. Adquisición de señales de voz . . . . .	80
5.5.3. Análisis frecuencial de señales de voz y notas de guitarra . . . . .	84

## **Resumen**

El objetivo preliminar del presente trabajo es desarrollar una revisión bibliográfica de la Transformada Discreta de Fourier haciendo énfasis en sus propiedades y aplicaciones.

Se requiere también hacer un desarrollo de las propiedades de las Transformada de Fourier de señales. Una vez desarrollados estos temas a profundidad, se tiene como objetivo principal es el cálculo eficiente de la Transformada Discreta de Fourier (DFT) y su aplicación en análisis frecuencial de señales de voz.



## Introducción

El trabajo propuesto se enmarca principalmente en el área de Análisis aplicado, especialmente en la Transformada de Fourier Discreta en sus propiedades y aplicaciones.

En Matemática, la Transformada de Fourier Discreta, designada con frecuencia por la abreviatura DFT (del inglés Discrete Fourier Transform) y a la que en ocasiones se denomina transformada de Fourier finita, es una Transformada de Fourier ampliamente empleada en tratamiento de señales y en campos afines para analizar las frecuencias presentes en una señal muestreada y la Transformada de Fourier Discreta Inversa (por sus siglas en inglés IDFT, Inverse Discrete Fourier Transform) .

El análisis frecuencial de señales en tiempo discreto se realiza, normalmente, de forma más conveniente en procesadores de señales digitales, que pueden ser digitales de propósito general. Para realizar el análisis frecuencial de una señal en tiempo discreto  $x(n)$ , convertimos la secuencia en el dominio del tiempo en una forma equivalente, en el dominio de frecuencia. Sabemos que tal forma viene dada por la transformada de Fourier,  $X(w)$ , de la secuencia  $x(n)$ , sin embargo,  $X(w)$  es una función continua de la frecuencia y por lo tanto, no es una forma computacionalmente conveniente de la secuencia  $x(n)$ .

La DFT Y IDFT son herramientas computacionales que juegan un papel muy importante en numerosas aplicaciones del procesamiento de señales digitales, como el análisis frecuencial (análisis espectral) de señales, la estimación del espectro de potencia y el filtrado lineal.

La importancia de la DFT y IDFT en tales aplicaciones prácticas se debe, en gran medida, a la existencia de algoritmos computacionalmente eficientes para el cálculo de la DFT y la IDFT, conocidos como algoritmos para la transformada rápida de Fourier.

# Señales y Sistemas

---

El procesado Digital de Señales es un área de la ciencia, la técnica y la ingeniería que se ha desarrollado enormemente durante los últimos 30 años. Este rápido desarrollo es el resultado de los avances tecnológicos producidos tanto en los ordenadores digitales como en la fabricación de circuitos integrados de propósito específico. No obstante, estos espectaculares avances no habrían sido posibles sino hubiese detrás un conjunto de aplicaciones de gran impacto en la sociedad y con un considerable poder económico, capaces de tirar del carro de la técnica sostenidos en una teoría matemática efectiva.

Hay que tener en cuenta que el tratamiento de señal es uno de los pilares básicos para comunicaciones o intercambio de información en general. Esta, que sin duda es un tipo de aplicación que por si sola justificaría el desarrollo de esta disciplina, no es la única que hace uso de los conceptos básicos del tratamiento de señal.

Recientemente han cobrado importancia otro tipo de aplicaciones que también tienen sus bases teóricas en el tratamiento de señal como son las relacionadas con el almacenamiento de información. Esto es especialmente importante con determinados tipos de señal (imagen, audio y video especialmente) ya que consumen un espacio de almacenamiento considerable.

Las técnicas de comprensión sin pérdida de información pueden reducir ligeramente el espacio necesario, pero una mayor comprensión requiere el empleo de técnicas de comprensión con pérdidas por lo que se hace necesario un estudio detallado de las señales originales y de los sistemas que las transforman de forma que las pérdidas resulten recuperables.

El tratamiento de señal se encarga del estudio de las propiedades y características de las señales y de los sistemas y transformaciones que podemos aplicarles para convertirlas en otras señales, que manteniendo el mensaje original (visual, acústico o de cualquier otro tipo) tengan unas características mas apropiadas para su transmisión o almacenamiento, o

permitan reconstruir u obtener la información original que ha podido resultar distorsionada en la transmisión.

Estas características deseables pueden ser desde una mayor inmunidad al ruido que facilite su retransmisión hasta una representación mas compacta que disminuya sus necesidades de almacenamiento y de ancho de banda de emisión.

En primer lugar las señales no tienen gran interés en sí mismas si no nos es posible transmitir y recibirlas. Las señales, por tanto, están muy ligadas a la comunicación y su procesamiento es de vital importancia en la llamada era de la información. La información está asociada de alguna manera al conocimiento o al significado que proporciona esa información. Las señales obviamente llevan consigo la información. Supongamos que una fuente de información envía una serie de símbolos a un receptor.

## 1.1

### Tipos de señales

En este trabajo consideraremos dos tipos de señales:

- (i) **Analógicas**,  $x(t)$  : Amplitud y tiempo continuos, ver figura 1
- (ii) **Digital**,  $x_q[n]$  : Tiempo y Amplitud discretos, ver figura 2

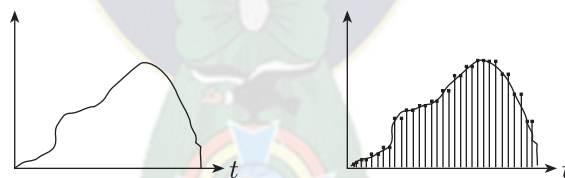


fig. 1

fig. 2

## 1.2

### Clasificación de señales

En esta sección consideremos la clasificación de señales basada en su duración, en simetría, en energía y potencia.

- (i) **Causales**: Son 0 para  $t < 0$ . Se definen sólo para el eje positivo de  $t$ .
- (ii) **Anticausales**: Son 0 para  $t > 0$ . Se definen sólo para el eje negativo de  $t$ .

- (iii) **No causales:** Se definen para ambos ejes de  $t$ .
- (iv) **Continuas:** Se definen para todo tiempo  $t$ .
- (v) **Periódicas:**  $x_p(t) = x_p(t \pm nT)$ , donde  $T$  es el periodo y  $n$  es un entero para todo valor de  $t$ .

### 1.3

---

## Clasificación de señales basadas en simetrías

(i) **Simetría Par:**  $x(t) = x(-t)$

(ii) **Simetría Impar:**  $x(t) = -x(-t)$

Una señal no simétrica puede siempre expresarse como la suma de una función par  $x_e(t)$  y una función impar  $x_o(t)$  :

$$x_e(t) = \frac{(x(t) + x(-t))}{2}$$

$$x_o(t) = \frac{(x(t) - x(-t))}{2}$$

### 1.4

---

## Clasificación de señales basada en Energía y Potencia

**Definición 1.** La Energía  $E$  de una señal:  $x(t)$  se define como

$$E = \sum_{t=-\infty}^{\infty} |x(t)|^2$$

**Definición 2.** Potencia de una señal:

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{t=-N}^N |x(t)|^2$$

Una señal se dice que es de energía si  $E$  es finito, lo que implica que  $P$  es 0. Ej. Pulsos limitados en el tiempo.

## 1.5

## Señales elementales en tiempo discreto

En nuestro estudio de sistemas y señales discretas en el tiempo existen varias señales básicas que aparecen con frecuencia y juegan un importante papel.

(i) **La Señal Escalón Unidad** se denota como  $u(t)$  y se define como :

$$u(t) = 0, \quad t < 0$$

$$u(t) = 1, \quad t \geq 0$$

(ii) **La Señal Rampa Unidad** se denota como  $r(t) = tu(t)$

(iii) **Pulso** :  $u(t + \frac{1}{2}) - u(t - \frac{1}{2})$

(iv) **Triangular** :  $tri(t) = r(t + 1) - 2r(t) + r(t - 1)$

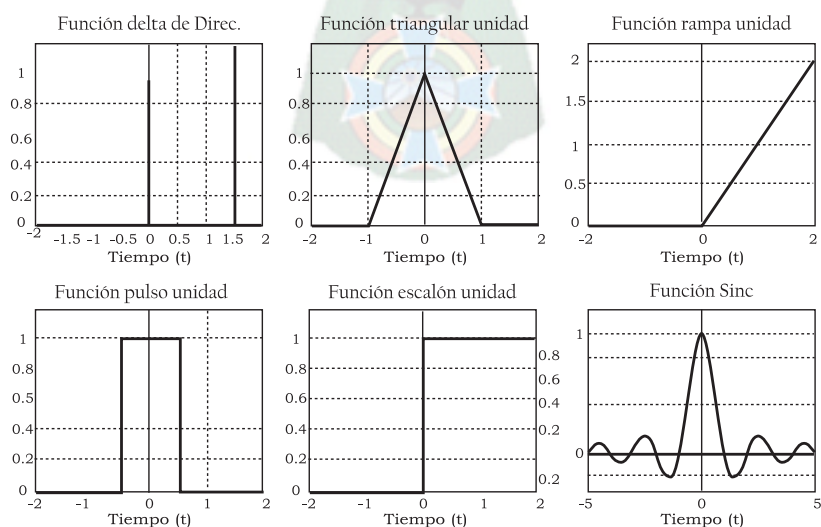
(v) **Sinc** :  $sinc(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

(vi) **Impulso**: También llamada función delta o función de Dirac:

$$\delta(t) = 0 \quad t \neq 0$$

$$\int \delta(t) dt = 1$$

## Señales



**1.6****Operaciones con señales**

- (i) **Desplazamiento en el tiempo:**  $x(t - 2)$ , desplazamiento a la derecha.
- (ii) **Compresión del tiempo:**  $x(2t)$
- (iii) **Dilatación del tiempo:**  $x(\frac{t}{2})$
- (iv) **Reflexión:**  $x(-t)$

Un sistema físico es un conjunto de dispositivos conectados entre sí, cuyo funcionamiento está sujeto a leyes físicas. Desde nuestro punto de vista, un sistema es un procesador de señales.

La señal o señales a ser procesadas forman la excitación o entrada del sistema. La señal procesada es la respuesta o salida del sistema.

El análisis de sistemas implica el estudio de la respuesta del sistema a entradas conocidas.

La síntesis de sistemas se realiza especificando las salidas que deseamos para una entrada dada y estudiando que sistema es el más adecuado (Identificación de sistemas).

**1.7****Clasificación de los sistemas**

- (i) **Lineales** Los coeficientes no dependen de  $x$  ó  $y$ . No hay términos constantes.
- (ii) **No lineales** Los coeficientes dependen de  $x$  ó  $y$ . Hay términos constantes.
- (iii) **Invariante en el tiempo** Los coeficientes no dependen de  $t$ .
- (iv) **Variante en el tiempo** Los coeficientes son funciones explícitas de  $t$ .

**1.7.1. Principio de superposición**

La respuesta de un sistema a una señal de entrada  $x(t)$  formada por la suma de dos o más señales es  $(x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \dots + x_n(t))$  igual a la suma de las respuestas del sistema a cada una de las señales

$$(y(t) = y_1(t) + y_2(t) \dots + y_n(t))$$

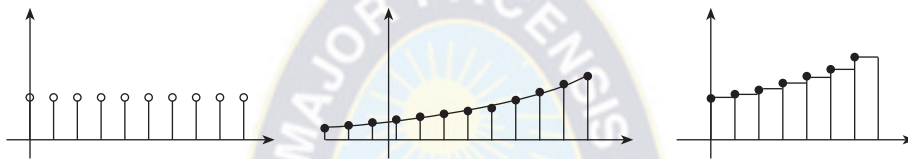
La respuesta de un sistema a una señal  $Kx(t)$  es igual a  $K$  veces la respuesta a  $x(t)$ .

Un sistema es invariante en el tiempo cuando la respuesta  $y(t)$  depende sólo de la forma de la entrada  $x(t)$  y no del tiempo en que se aplica. Matemáticamente.

Si  $L\{x(t)\} = y(t)$ , entonces  $L\{x(t - t_0)\} = y(t - t_0)$ , donde  $L$  es un operador matemático que representa el sistema físico en cuestión.

## 1.8

### Convolución discreta



Cuando se trata de hacer un procesamiento digital de señal no tiene sentido hablar de convoluciones aplicando estrictamente la definición ya que sólo disponemos de valores en instantes discretos de tiempo. Es necesario, pues, una aproximación numérica.

Para realizar la convolución entre dos señales, se evaluará el área de la función  $x(\lambda)h(t - \lambda)$ . Para ello, disponemos de muestreos de ambas señales en los instantes de tiempo  $nt_s$ , que llamaremos  $x_s[k]$  y  $h_s[n - k]$  (donde  $n$  y  $k$  son enteros).

El área es, por tanto,

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_s x_s(k) h_s(n - k) \\ &= t_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_s(k) h_s(n - k) \end{aligned}$$

La convolución discreta se define para un intervalo de muestreo  $t_s = 1$ :

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_s(k) h_s(n - k)$$

A veces es posible hacer una convolución discreta analítica. Veamos un ejemplo. Se trata

de hacer la convolución de una señal  $x(n) = nu(n+1)$  con  $h(n) = a^{-n}u(n)$ , siendo  $a < 1$ .

$$\begin{aligned}
 y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} ku[k+1]a^{-(n-k)}u[n-k] \\
 &= \sum_{k=-1}^{\infty} ka^{-(n-k)} \\
 &= a^{-(n+1)} + a^{-n} \sum_{k=0}^n ka^k \\
 &= a^{-(n+1)} + a^{-n}(a + 2a^2 + 3a^3 + \dots + na^n) \\
 &= a^{-(n+1)} + a^{-n}a(1 + 2a^1 + 3a^2 + \dots + na^{n-1}) \\
 &= a^{-(n+1)} + \frac{a^{-n+1}}{(1-a)^2} [1 - (n+1)a^n + na^{n+1}]
 \end{aligned}$$

En la práctica se trabaja con secuencias de longitud finita. Para hacer la convolución, una de las secuencias se refleja y se desplaza sucesivamente.

Métodos para calcular la convolución a partir de dos secuencias

Veremos algunos métodos para calcular la convolución a partir de dos secuencias:

## 1. Método de la tira deslizante (Sliding Strip Method)

Sea  $h(n) = \{2, 5, 0, 4\}$ ,  $x(n) = \{4, 1, 3\}$ ,  $t_s = \frac{1}{2}$ . Las dos secuencias comienzan en  $n = 0$ .

- Realicemos el reflejo de una de ellas,  $x(-n) = \{3, 1, 4\}$ .
- Alineamos las secuencias y las sumamos y desplazamos sucesivamente.

$i = 0$	$i = 1t_s$	$i = 2t_s$
$h$ 2   5   0   4 $x$ 3   1   4 <hr style="width: 100%;"/> 0   0   8   0   0   0 Suma = 8 $y_s(0) = 8 \frac{1}{2} = 4$	$h$ 2   5   0   4 $x$ 3   1   4 <hr style="width: 100%;"/> 0   2   20   0   0 Suma = 22 $y_s(1) = 22 \frac{1}{2} = 11$	$h$ 2   5   0   4 $x$ 3   1   4 <hr style="width: 100%;"/> 6   5   0   0 Suma = 11 $y_s(2) = 11 \frac{1}{2} = 5,5$



$i = 3t_s$	$i = 4t_s$	$i = 5t_s$
$\begin{array}{cccc} h & 2 & 5 & 0 & 4 \\ x & & 3 & 1 & 4 \\ \hline & 0 & 15 & 0 & 16 \\ \text{Suma} & = & 31 & & \\ y_s(3) & = & 31\frac{1}{2} & = & 15,5 \end{array}$	$\begin{array}{cccc} h & 2 & 5 & 0 & 4 \\ x & & & 3 & 1 & 4 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ \text{Suma} & = & 4 & & \\ y_s(4) & = & 4\frac{1}{2} & = & 2 \end{array}$	$\begin{array}{cccc} h & 2 & 5 & 0 & 4 \\ x & & & & 3 & 1 & 4 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ \text{Suma} & = & 12 & & \\ y_s(5) & = & 12\frac{1}{2} & = & 6 \end{array}$

## 2. Método de las Suma por Columnas

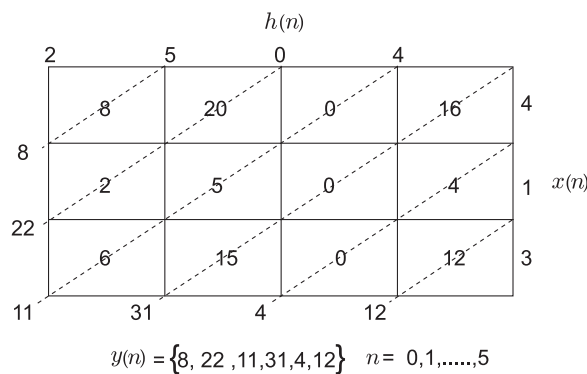
Realicemos el mismo ejemplo. No es necesario reflejar una de las secuencias

$n$	0	1	2	3	4	5
$h$	2	5	0	4		
$x$	4	1	3			
	8	20	0	16		
		2	5	0	4	
			6	15	0	12
$y$	8	22	11	31	4	12

$$y(n) = \{8, 22, 11, 31, 4, 12\}, n = 0, 1, 2, \dots, 5$$

## 3. Método de la malla

En este método se toma el mismo ejemplo anterior. Se alinean las dos secuencias en forma horizontal y vertical.



El índice del comienzo de la convolución es la suma de los índices de comienzo de las respectivas señales. Si las dos señales comienzan en  $n = n_0$  y  $n = n_1$ , la convolución comienza en  $n = n_0 + n_1$ . Para dos secuencias de duración  $M$  y  $N$ , su convolución se extiende durante  $M + N - 1$  muestreos.

### 1.8.1. Propiedades de la convolución discreta $x(n) * h(n) = y(n)$

$$(i) \quad y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k)$$

$$(ii) \quad (Ax_1 + Bx_2) * h = y_1 + y_2$$

$$(iii) \quad x(n) * h(n-\alpha) = x(n-\alpha) * h(n) = y(n-\alpha)$$

$$(iv) \quad x(n-\alpha) * h(n-\beta) = y(n-\alpha-\beta)$$

### 1.8.2. Correlación discreta

Se definen de igual manera que en el caso continuo, así como la autocorrelación.

$$R_{xy}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) y(k-n) \quad \text{para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$R_{yx}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k) x(k-n) \quad \text{para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

# La Transformada $z$

## 2.1

### La Transformada $z$ Directa

**Definición 3.1** La Transformada  $z$  de una señal discreta  $x(n)$  se define como la serie de potencias.

$$X(z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

donde  $z$  es una variable compleja.

La Transformada  $z$  de una señal  $x(n)$  se denota por:

$$X(z) \equiv Z\{x(n)\}$$

donde

$$x(n) \xleftrightarrow{z} X(z)$$

La region de convergencia (ROC, region of convergence) de  $X(z)$  es el conjunto de todos los valores de  $z$  para los que  $X(z)$  es finita.

En general, la serie convergerá o divergerá, según el valor de  $z$ . Mas concretamente, a toda serie de potencias hay asociado un circulo, llamado circulo de convergencia, tal que la definición de la transformada  $z$  converge si  $z$  esta en el interior del mismo y diverge si

esta en el exterior (para tener en cuenta todos los casos, debemos considerar el plano como el interior de un círculo de radio infinito, y un punto como un círculo de radio cero). El comportamiento en el círculo de convergencia es mucho más variado y no se puede y no se puede definir tan sencillamente.

Dada una sección  $x(n)$  se define como su transformada  $z$  a la serie de Laurent  $X(z)$ .

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C X(z_1) z_1^{n-1} dz_1$$

La serie de Laurent (SL) dentro de anillo de CV. (Anillo de convergencia) es simultáneamente CV (Convergencia) CA (Absolutamente convergente) y también CU (Uniformemente Convergente) para el anillo  $A(r_1 + \delta_1, r_2 + \delta_2)$  con  $\delta_1$  y  $\delta_2$  arbitrarios y positivos.

Sea  $C$  una circunferencia  $|z| = r_0$  en cuyo interior la serie potencial converge, y representemos con la función  $S$  la suma de aquella serie,

$$S(z) = \lim_N \sum_{n=0}^N x(n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^n$$

**Teorema 1.** Si una serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^n$$

Converge cuando  $z = z_1$ , es absolutamente convergente para todo valor de  $z$  que sea  $|z| < |z_1|$ .

*Demostración.* Como la serie cuyos términos son  $x(n) z_1^n$  converge, sus términos están todos acotados; esto es

$$|x(n) z_1^n| < M \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

para cierta constante positiva  $M$ . Escribamos

$$\frac{|z|}{|z_1|} = k, \text{ donde } |z| \leq |z_1|;$$

entonces,  $|x(n) z^n| = |x(n) z_1^n| \left| \frac{z}{z_1} \right|^n < M k^n$ .

La serie cuyos términos son los números reales positivos  $Mk^n$  es una serie geométrica; es convergente por ser  $k < 1$ . Concluimos a partir del criterio de convergencia, que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(n) z^n|$$

converge, y por tanto queda demostrado el teorema.  $\square$

**Teorema 2.** Si  $z_1$  es un punto interior al círculo de convergencia  $|z| = r$  de una serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^n,$$

entonces una serie es uniformemente convergente en el disco cerrado  $|z| \leq |z_1|$

*Demostración.* Para establecer esta convergencia uniforme, sean  $m$  y  $N$  cualesquiera dos enteros positivos, con  $m > N$ , y escribamos el resto

$$\rho_N(z) = S(z) - S_N(z) \quad (|z| < r)$$

donde  $S(z)$  y  $S_N(z)$  es la suma y la suma parcial

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^n, \quad S_N(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^n$$

$$\rho_N(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=N}^m x(n) z^n.$$

Puestos que hay puntos con módulo mayor que  $|z_1|$  para los que la serie de potencia converge, sabemos que el teorema anterior que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(n) z_1^n|$$

es convergente. El resto de esa serie, tras  $N$  término, es el número real no negativo

$$\sigma_N = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=N}^m |x(n) z_1^n|$$

y para  $|z| \leq |z_1|$ ,

$$\left| \sum_{n=N}^m x(n) z^n \right| \leq \sum_{n=N}^m |x(n)| |z|^n \leq \sum_{n=N}^m |x(n)| |z_1|^n = \sum_{n=N}^m |x(n) z_1^n|.$$

□

**Teorema 3.** Una serie potencial puede derivarse término a término en todo punto  $z$  interior al círculo de convergencia; esto es,

$$S^1(z_1) = \sum_{n=1}^{\infty} nx(n)z^{n-1}$$

( $|z| < r_0$ )

*Demostración.* Sea  $z_1$  cualquier punto interior del círculo y sea  $C$  cierto contorno cerrado alrededor de  $z_1$  e interior al círculo. Entonces, ya que  $S$  es analítica

$$S^1(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{S(z) dz}{(z - z_1)^2}$$

en la ecuación

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(n) \int_C z^n g(z) dz = \int_C S(z) g(z) dz$$

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i(z-z_1)^2};$$

$$\text{entonces } \int_C z^n g(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^n dz}{(z-z_1)^2} = \frac{d}{dz_1} (z_1^n)$$

$$\int_C S(z) g(z) dz = S^1(z_1)$$

.

$$\text{por tanto, } S^1(z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \frac{d}{dz_1} (z_1^n).$$

□

Para una secuencia  $x(n) = \{6, 4, 3, 2, -3\}$ , la transformada  $z$  es:

$$X(z) = 6z^2 + 4z^1 + 3z^0 + 2z^{-1} - 3z^{-2}$$

el valor  $z^{-1}$  es el operador de retraso.

Para una secuencia  $x(n)$  de longitud finita,  $X(z)$  converge para todo  $z$  excepto para  $z = 0$  y/o  $z = \infty$  (dependiendo de si  $X(z)$  tiene términos  $z^{-k}$  y/o  $z^k$ ).

## 2.2

### Transformada $z$ de algunas secuencias

i) **Impulso Unidad:**  $x(n) = \delta(n)$ ,  $X(z) = 1$  con ROC:  $-\infty \leq |z| \leq \infty$

ii) **Pulso Rectangular:**  $X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} z^{-k} = \frac{(1-z^{-N})}{(1-z^{-1})} z \neq 1$  con ROC:  $z \neq 0$

iii) **Escalón Unidad:**  $x(n) = u(n)$ ,  $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{(1-z^{-1})} = \frac{z}{(z-1)}$  con ROC:  $|z| > 1$

iv) **Exponencial:**

$$x(n) = \alpha^k u(n), X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{z}\right)^k = \frac{z}{(z-\alpha)} \text{ con ROC: } |z| > |\alpha|$$

## 2.3

### Propiedades de la Transformada $z$

La Transformada  $z$  es una herramienta muy importante para el estudio de señales y sistemas. La potencia de esta transformación es consecuencia de algunas propiedades muy importantes

Recordemos que la ROC resultante cuando combinamos varias transformadas  $z$  es, cuando menos, la intersección entre las ROC de las transformadas  $z$  individuales

**Linealidad** Si  $x_1(n) \xleftrightarrow{z} X_1(z)$  si  $x_2(n) \xleftrightarrow{z} X_2(z)$  entonces

$$x(n) = ax_1(n) + bx_2(n) \xleftrightarrow{z} X(z) = aX_1(z) + bX_2(z)$$

para cualquier constante  $a$  y  $b$ .

*Demostración.*

$$\begin{aligned} Z\{x(n)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} ax_1(n)z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} bx_2(n)z^{-n} \\ &= a \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)z^{-n} + b \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)z^{-n} \\ &= aX_1(z) + bX_2(z) \end{aligned}$$

La propiedad de linealidad se puede generalizar aun numero arbitrario finito de señales. Así la propiedad de linealidad nos permite obtener la Transformada  $z$  de una señal expresado, esta como la suma de varias señales elementales cuyas Transformadas  $z$  son conocidas.

### Ejemplo 2.1

Determine la Transformada  $z$  y la ROC de la señal

$$x(n) = [3(2^n) - 4(3^n)]u(n)$$

**Solución.-** Si definimos las señales

$$x_1(n) = 2^n u(n)$$

y

$$x_2(n) = 3^n u(n)$$

entonces  $x(n)$  se puede escribir como

$$x(n) = 3x_1(n) - 4x_2(n)$$

por linealidad, su transformada  $z$  es

$$x(z) = 3X_1(z) - 4X_2(z)$$

recordemos que

$$\alpha^n u(n) \xrightarrow{z} \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} \text{ con ROC: } |z| > |\alpha|$$

reemplazamos  $\alpha = 2$  y  $\alpha = 3$  tenemos

$$x_1(n) = 2^n u(n) \xrightarrow{z} X_1(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}} \text{ con ROC: } |z| > 2$$

$$x_2(n) = 3^n u(n) \xrightarrow{z} X_2(z) = \frac{1}{1 - 3z^{-1}} \text{ con ROC: } |z| > 3$$

la intersección de las ROC de  $X_1(z)$  y  $X_2(z)$  es  $|z| > 3$

por tanto, la transformada  $z$  global  $X(z)$  es

$$X(z) = 3 \left( \frac{1}{1 - 2z^{-1}} \right) - 4 \left( \frac{1}{1 - 3z^{-1}} \right)$$

$$X(z) = \frac{3}{1 - 2z^{-1}} - \frac{4}{1 - 3z^{-1}}$$



**(ii) Desplazamiento en el tiempo**

si  $x(n) \xleftrightarrow{z} X(z)$

entonces  $x(n-k) \xleftrightarrow{z} z^{-k} X(z)$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} Z\{x(n-k)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-k) z^{-n} = z^{-k} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l) z^{-l} \\ &= z^{-k} X(z) \end{aligned}$$

□

La ROC de  $z^{-k} X(z)$  es la misma que la de  $X(z)$ , excepto por  $z=0$ , si  $k > 0$ , y  $z=\infty$ , si  $k < 0$ .

**Ejemplo 2.2**

Aplicando la propiedad de desplazamiento en el tiempo, determine las transformadas  $z$  de las señales  $x_2(n)$  y  $x_3(n)$  a partir de la transformada  $z$  de  $x_1(n)$ .

**Solución**

$$x_1(n) = \{1, 2, 5, 7, 0, 1\}$$

$$x_2(n) = \{1, 2, 5, 7, 0, 1\}$$

$$x_3(n) = \{0, 0, 1, 2, 5, 7, 0, 1\}$$

Se puede ver que

$$x_2(n) = x_1(n+2)$$

$$x_3(n) = x_1(n-2)$$

Así, obtenemos

$$X_2(z) = z^2 X_1(z) = z^2 + 2z + 5 + 7z^{-1} + z^{-3}$$

$$X_3(z) = z^{-2} X_1(z) = z^{-2} + 2z^{-3} + 5z^{-4} + 7z^{-5} + z^{-7}$$

observemos que debido a la multiplicación por  $z^2$ , la ROC de  $X_2(z)$  no incluye el punto  $z = \infty$ , incluso aunque éste contenido en la ROC de  $X_1(z)$ .

El ejemplo ilustra el significado de la propiedad de desplazamiento. De hecho, si recordamos que el coeficiente de  $z^{-n}$  es el valor de la muestra en el instante  $n$ , vemos inmediatamente que retrasar una señal  $k$  ( $k > 0$ ) muestras es equivalente a multiplicar todos los términos de la Transformada  $z$  por  $z^{-k}$ .

El coeficiente de  $z^{-n}$  se convierte en el coeficiente de  $z^{-(n+k)}$ .

### (iii) Escalado en el dominio $z$

Si

$$x(n) \xrightarrow{z} X(z) \text{ con ROC: } r_1 < |z| < r_2$$

entonces

$$a^n x(n) \xrightarrow{z} X(a^{-1}z) \text{ con ROC: } |a| r_1 < |z| < |a| r_2$$

para cualquier constante  $a$ , real o compleja.

*Demostración.*

$$\begin{aligned} Z \{a^n x(n)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n) z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) (a^{-1}z)^{-n} \\ &= X(a^{-1}z) \end{aligned}$$

□

Dado que la ROC de  $X$  es  $r_1 < |z| < r_2$ , la ROC de  $X(a^{-1}z)$  es

$$r_1 < |a^{-1}z| < r_2;$$

$$|a| r_1 < |z| < |a| r_2$$

### Inversion temporal

Si  $x(n) \xrightarrow{z} X(z)$  ROC:  $r_1 < |z| < r_2$

entonces

$$x(-n) \xrightarrow{z} X(z^{-1}) \quad \text{ROC: } \frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} Z\{x(-n)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(l) (z^{-1})^{-l} \\ &= X(z^{-1}) \end{aligned}$$

□

la ROC: de  $X(z^{-1})$  es  $r_1 < |z^{-1}| < r_2$  o equivalente  $\frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}$

Observemos que la ROC de  $x(n)$  es la inversa de la correspondiente  $ax(-n)$ .

Esto significa que si  $z_0$  pertenece a la ROC de  $x(n)$ , entonces  $\frac{1}{z_0}$  pertenece a la ROC de  $x(-n)$

### Ejemplo 2.3

Determine la Transformada  $z$  de la señal

$$x(n) = u(-n)$$

### Solución

Se sabe que por la Transformada  $z$  del escalón unidad que

$$x(n) = u(n) \xrightarrow{z} X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad \text{con ROC: } |z| < 1$$

Usando  $x(n) \xrightarrow{z} X(z^{-1})$ , obtenemos

$$x(-n) = u(-n) \xrightarrow{z} X(z^{-1}) = \frac{1}{1-(z^{-1})^{-1}} = \frac{1}{1-z}$$

### (v) Diferenciación en el dominio $z$

Si  $x(n) \xrightarrow{z} X(z)$  entonces

$$nx(n) \xrightarrow{z} -z \frac{dX(z)}{dz}$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} -z \frac{dX(z)}{dz} &= -z \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) (-n) z^{-n-1} \\ &= z z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n x(n) z^{-n} \\ &= Z \{n x(n)\} \end{aligned}$$

☑

Observamos que ambas transformadas tienen la misma ROC.

### Ejemplo 2.4

Determine la Transformada  $z$  de la señal

$$x(n) = n a^n u(n)$$

### Solución

La señal  $x(n)$  se puede expresar como  $n x_1(n)$ , donde  $x_1(n) = a^n u(n)$ . De la Transformada  $z$  del escalón unidad tenemos:

$$x_1(n) = a^n u(n) \xrightarrow{z} X_1(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \text{ con ROC: } |z| > |a|$$

Por lo tanto, usando la propiedad de diferenciación en el dominio  $z$ , obtenemos.

$$n a^n u(n) \xrightarrow{z} X(z) = -z \frac{dX_1(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} \text{ con ROC: } |z| > |a|$$

Si tenemos  $a = 1$ , encontraremos la Transformada  $z$  de la señal rampa unidad.

$$n u(n) \xrightarrow{z} \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \text{ con ROC: } |z| > 1$$

### (vi) Convolución de dos secuencias

$$\text{Si } x_1(n) \xrightarrow{z} X_1(z)$$

$$x_2(n) \xrightarrow{z} X_2(z)$$

entonces

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) \xrightarrow{z} X(z) = X_1(z) X_2(z)$$

La ROC de  $X(z)$  es, cuando menos, la intersección de las  $X_1(z)$  y  $X_2(z)$ .

*Demostración.* La convolución de  $x_1(n)$  y  $x_2(n)$  se define como.

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) x_2(n-k)$$

La Transformada  $z$  de  $x(n)$  es

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n-k) z^{-n} \right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) z^{-k} X_2(z) \\ &= X_1(z) X_2(z) \end{aligned}$$

✓

### (vii) Correlación de dos secuencias

Si  $x_1(n) \xrightarrow{z} X_1(z)$

$x_2(n) \xrightarrow{z} X_2(z)$

entonces

$$r_{x_1 x_2}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(l) x_2(n-l) \xrightarrow{z} R_{x_1 x_2}(z) = X_1(z) X_2(z^{-1})$$

*Demostración.*

$$r_{x_1 x_2}(l) = x_1(l) * x_2(-l)$$

Usando las propiedades de la convolución y la inversion temporal, obtenemos

$$\begin{aligned} Z \{r_{x_1 x_2}(l)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_{x_1 x_2}(l) z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_1(l) * x_2(-l)] z^{-n} \\ &= R_{x_1 x_2}(z) \\ &= Z \{x_1(l)\} Z \{x_2(-l)\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) z^{-l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n) (z^{-1})^{-n} \\ &= X_1(z) X_2(z^{-1}) \end{aligned}$$

✓

## 2.4

### La transformada $z$ Inversa

Realizaremos la Transformada  $z$  Inversa utilizando fracciones parciales. La Transformada  $z$  Inversa de cada una de estas fracciones parciales pueden ser identificadas fácilmente en las tablas de Transformadas  $z$ .

TABLA DE LA TRANSFORMADA $z$			
	Señal , $x(n)$	Transformada $z$ $X(z)$	ROC
1	$\delta(n)$	1	<i>Todo <math>z</math></i>
2	$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z  \geq 1$
3	$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z  \geq  a $
4	$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z  \geq  a $
5	$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z  \leq  a $
6	$-na^n u(-n-1)$	$\frac{1}{(1-az^{-1})^2}$	$ z  \leq  a $

**Ejemplo 2.5** Determinar la Transformada  $z$  Inversa de

(a)  $X(z) = \frac{1}{(z - \frac{1}{4})(z - \frac{1}{2})}$

(b)  $X(z) = \frac{z^2}{(z^2 - \frac{1}{6}z - \frac{1}{6})}$

**Solución(a)**

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z(z - \frac{1}{4})(z - \frac{1}{2})}$$

$$X(z) = 8 - \frac{16z}{(z - \frac{1}{4})} + \frac{8z}{(z - \frac{1}{2})}$$

por lo tanto tenemos

$$x(n) = 8\delta(n) - 16\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) + 8\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

**Solución (b)**

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{(z^2 - \frac{1}{6}z - \frac{1}{6})}$$

$$X(z) = \frac{\frac{3}{5}z}{(z - \frac{1}{2})} + \frac{\frac{2}{5}z}{(z + \frac{1}{3})}$$

por lo tanto tenemos

$$x(n) = \frac{3}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \frac{2}{5} \left(-\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

El procedimiento para transformar desde el dominio  $z$  al dominio del tiempo se denomina Transformada  $z$  Inversa.



# Series y transformada de Fourier

## 3.1

### Series de Fourier de señales periódicas en tiempo discreto

La representación en series de Fourier de  $x(n)$  consta de  $N$  funciones exponenciales armónicamente relacionadas.

$$e^{j2\pi kn/N}$$

$$k = 0, 1, \dots, N - 1$$

y se expresa como

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N}$$

donde  $\{c_k\}$  son los coeficientes de la representación en serie. la expresión de los coeficientes de Fourier

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi kn/N} = \begin{cases} N, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

La demostración de esta expresión se obtiene aplicando directamente la definición de las series geométricas.

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \begin{cases} N, & a = 1 \\ \frac{1-a^N}{1-a}, & a \neq 1 \end{cases}$$

**Ejemplo 3.1** Hallar la expresión de los coeficientes de la serie de Fourier  $c_k$

*Demostración.*

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N}$$



$$\begin{aligned} x(n) e^{-j2\pi ln/N} &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N} e^{-j2\pi ln/N} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi(k-l)n/N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi ln/N} &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi(k-l)n/N} \\ &= N c_l \end{aligned}$$

$$\therefore c_l = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi ln/N} \quad ; \quad l = 0, 1, \dots, N-1$$

✓

En resumen tenemos

- Ecuación de Síntesis

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N}$$

- Ecuación de análisis

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} \quad ; \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

**Definición 4. 2** Dado que las exponenciales complejas discretas en el tiempo son periódicas si su frecuencia relativa es un número racional definimos las exponenciales complejas armónicas como:

$$s_k(n) = e^{j2\pi kn/N} = e^{jw_k n}$$

donde

$$w_k = 2\pi k/N$$

**Ejemplo 3.1** Demostrar que las funciones  $s_k(n)$  son periódicas de periodo  $N$ .

*Demostración.*

$$s_{k+N}(n) = e^{j2\pi n(k+N)/N} = e^{j2\pi n} s_k(n) = s_k(n)$$

✓

**Ejemplo 3.2**

Demostrar que los coeficientes de la serie de Fourier  $\{c_k\}$  es una secuencia periódica de periodo  $N$ .

*Demostración.*

$$\begin{aligned} c_{k+N} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi(K+N)n/N} \\ &= c_k e^{-j2\pi n} \\ &= c_k \end{aligned}$$

✓

**3.2****Densidad espectral de Potencia de Señales periódicas**

**Definición 2.3** La potencia media de una señal periódica en tiempo discreto con periodo  $N$  se define como:

$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$$

Derivaremos ahora una expresión para  $P_x$  en términos de los coeficientes de Fourier  $\{c_k\}$

**Teorema de Parseval 3.1**

Demostrar que la potencia media de una señal periódica es la suma de las potencias medias de las componentes individuales en frecuencia.

*Demostración.*

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x^*(n) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k^* c_k = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 \end{aligned}$$

✓

que la expresión deseada para la potencia media de una señal periódica en tiempo discreto.

La secuencia  $|c_k|^2$  para  $k = 0, 1, \dots, N - 1$  es la distribución de potencia en función de la frecuencia y se denomina densidad espectral de potencia de una señal periódica.

Si estamos interesados en la energía de la secuencia  $x(n)$  en un único periodo

$$\sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$$

$$N \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$$

Implica

$$E_N = \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = N \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2$$

Lo que es consistente con nuestros resultados previos para señales periódicas en tiempo continuo.

### 3.3

## Transformada de Fourier de Señales no periódicas en tiempo Discreto

**Definición 3.4** La transformación de Fourier de una señal de energía finita en tiempo discreto  $x(n)$  se define como:

$$X(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jwn}$$

### Ejemplo 3.3

Demostrar  $X(w)$  es periódica de Periodo  $2\pi$ .

*Demostración.*

$$X(w + 2\pi k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j(w+2\pi k)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jwn} = X(w)$$

✓

**Ejemplo 3.4**

Demostrar que los coeficientes de Fourier de esta serie son los valores de la secuencia  $x(n)$

*Demostración.* Para demostrar evaluemos la secuencia  $x(n)$  a partir de  $X(w)$ .

$$\begin{aligned} X(w) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jwn} \\ X(w) e^{jwm} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jwn} e^{jwm} \\ \int_{-\pi}^{\pi} X(w) e^{jwm} dw &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jwn} \right] e^{jwm} dw \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jwn} e^{jwm} dw \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \int_{-\pi}^{\pi} e^{jw(m-n)} dw \end{aligned}$$

Este intercambio puede realizarse si la serie

$$X_N(w) = \sum_{n=-N}^{\infty} x(n) e^{-jwn}$$

Converge uniformemente a  $X(w)$  según  $N \rightarrow \infty$

Observación la convergencia uniforme implica que para cada  $w$ ,  $X_N(w) \rightarrow X(w)$ , cuando  $N \rightarrow \infty$ .

Supongamos que la serie converge uniformemente entonces.

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{jw(m-n)} dw = \begin{cases} 2\pi, & m=n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

Consecuentemente

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \int_{-\pi}^{\pi} e^{jw(m-n)} dw = \begin{cases} 2\pi x(m), & m=n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

continuando la demostración si  $m = n$  entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \int_{-\pi}^{\pi} e^{jw(m-n)} dw = 2\pi x(m)$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad 2\pi x(n) &= \int_{-\pi}^{\pi} X(w) e^{jwn} dw \\ x(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(w) e^{jwn} dw \end{aligned}$$

✓

En resumen, el par de Transformadas de Fourier de señales en tiempo discreto, es como sigue:

Ecuación de Síntesis Transformada Inversa

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(w) e^{jwn} dw$$

Ecuación de análisis Transformada Directa

$$X(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jwn}$$

**Observación:** Dos diferencias básicas entre la transformada de Fourier de una señal de energía finita en tiempo discreto y la transformada de Fourier de una señal de energía finita analógica. Primero para el caso tiempo continuo, la transformada de Fourier el espectro de la señal, tiene un rango en frecuencia que va desde  $-\infty$  a  $\infty$ . Por lo contrario el rango de la frecuencia de una señal en tiempo discreto es  $(-\pi, \pi)$  o, equivalentemente,  $(0, 2\pi)$ .

### 3.4

## Convergencia de la Transformada de Fourier

En la obtención de la transformada inversa  $x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(w) e^{jwn} dw$  supusimos que las series

$$X_N(w) = \sum_{n=-N}^N x(n) e^{-jwn}$$

Convergió uniformemente a  $X(w)$ , dada por la integral de la Transformada Inversa, cuando  $N \rightarrow \infty$ .

**Definición 3.5** La convergencia uniforme implica que, para cada  $w$ ,  $X_N(w) \rightarrow X(w)$ , cuando  $N \rightarrow \infty$  es decir

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |X(w) - X_N(w)| = 0$$

La convergencia uniforme esta garantizada si  $x(n)$  es absolutamente sumable.

**Teorema 2.2** Si

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$$

entonces

$$|X(w)| < \infty$$

*Demostración.*

$$|X(w)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jwn} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$$

la cual es una condición suficiente para la existencia de la Transformada de Fourier Discreta. ☑

Algunas secuencias que no son absolutamente sumables pero si son cuadráticamente sumables es decir, tienen energía finita.

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty$$

lo que es una condición menos restrictiva. La convergencia cuadrática media se define que, para cada  $w$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |X(w) - X_N(w)|^2 dw = 0$$

### 3.5

## Densidad Espectral de Energía de Señales no Periódicas

**Definición 3.6** La energía de una señal  $x(n)$  en tiempo discreto se define como.

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

**Teorema 3.2 Teorema de Parseval**

Demostrar que la energía finita en tiempo discreto.  $E_x$  de una señal no periódica está expresada en términos de  $X(w)$ .

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) x^*(n) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^*(w) e^{-jwn} dw \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(w) \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jwn} dw \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(w) X(w) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(w)|^2 dw
\end{aligned}$$

**Definición 3.7** El espectro  $X(w)$  es en general una función compleja de la frecuencia la cual se expresa como

$$X(w) = |X(w)| e^{j\Theta(w)}$$

donde

$$\Theta(w) = \angle X(w)$$

es la fase del espectro y  $|X(w)|$  su magnitud.

**Definición 3.8** La cantidad

$$S_{xx}(w) = |X(w)|^2$$

representa la distribución de energía en función de la frecuencia y se denomina densidad espectral de energía de  $x(n)$ .

**Definición 3.9** La señal  $x(n)$  es real entonces

$$X^*(w) = X(-w)$$

o de modo equivalente

$$|X(-w)| = |X(w)| \text{ (simetría par)}$$

$$\angle X(-w) = -\angle X(w) \text{ (simetría impar)}$$

de  $S_{xx}(w) = |X(w)|^2$  se deduce que

$$S_{xx}(-w) = S_{xx}(w) \text{ (simetría par)}$$

**Ejemplo 3.6**

Determinar y representar la densidad espectral de energía  $S_{xx}(w)$  de la señal

$$x(n) = a^n u(n) \quad -1 < a < 1$$

*Demostración.* Puesto que  $|a| < 1$ , la secuencia  $x(n)$  es absolutamente sumable, lo que puede verificarse aplicando la fórmula de la suma geométrica.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = \frac{1}{1-|a|} < \infty$$

Por tanto, existe la Transformada de Fourier de  $x(n)$  y se calcula aplicando la transformada directa

$$X(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n e^{-jwn} = \sum_{n=0}^{\infty} (a e^{-jw})^n$$

como  $|a e^{-jw}| = |a| < 1$ , usando la fórmula de la suma geométrica de nuevo se obtiene

$$X(w) = \frac{1}{1 - a e^{-jw}}$$

la densidad espectral de energía viene dada por

$$\begin{aligned} S_{xx}(w) &= |X(w)|^2 = X(w) X^*(w) = \frac{1}{(1 - a e^{-jw})(1 - a e^{jw})} \\ &= \frac{1}{1 - 2a \cos w + a^2} \end{aligned}$$

$$\therefore S_{xx}(-w) = S_{xx}(w)$$

☑

La figura muestra la señal  $x(n)$  y su correspondiente espectro para

$$a = 0,5 \quad \text{y} \quad a = -0,5$$

Nótese que para  $a = -0,5$  la señal tiene variaciones mas rápidas y como resultado, su espectro tiene componentes mas fuertes en las altas frecuencias.



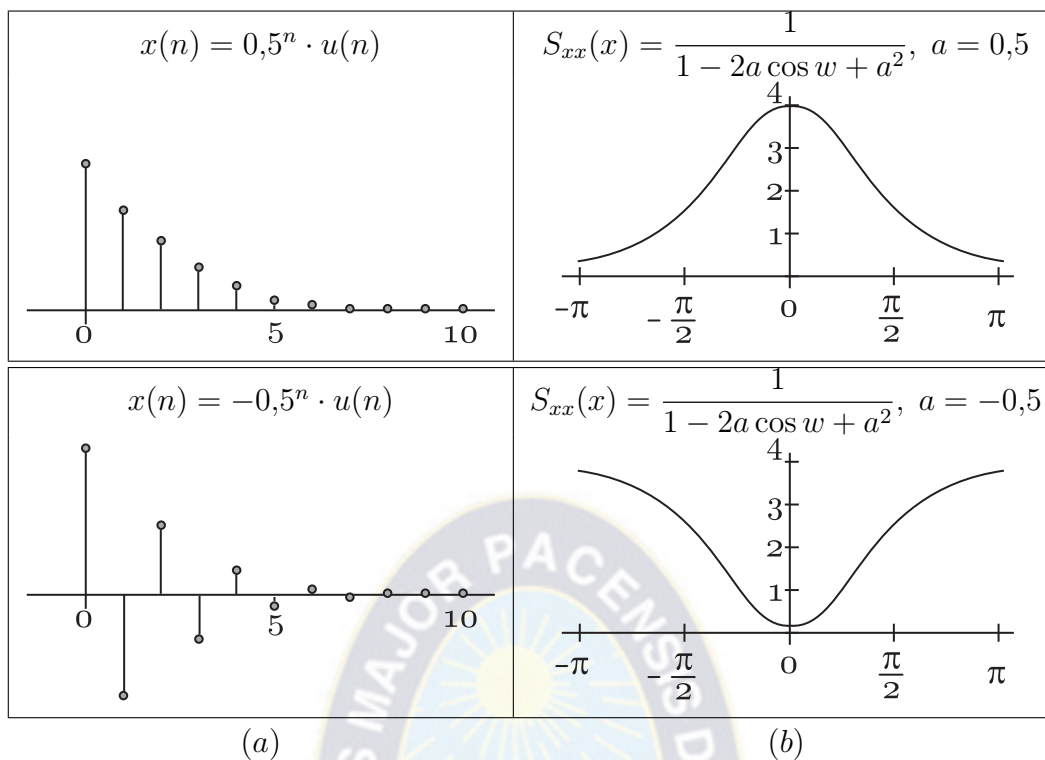


Figura (a) Secuencia  $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$  y

$$x(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

Figura (b) Sus densidades espectrales de energía

### 3.6

## Relación de la Transformada de Fourier con las Transformadas $z$

**Definición 3.10** La Transformada  $z$  de una secuencia  $x(n)$  se define como:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad \text{ROC} : r_2 < |z| < r_1$$

donde ROC es la region de convergencia para  $X(z)$ .

Podemos expresar la variable compleja  $z$  en forma polar como

$$z = r e^{jw}$$

donde

$$r = |z|$$

y

$$w = \angle z$$

Por lo tanto, dentro de la region de convergencia de  $X(z)$ , podemos sustituir  $z = r e^{jw}$  en

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(r e^{jw})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n)r^{-n}] e^{-jwn}$$

la cual podemos observar que  $X(z)$  se puede interpretar como la transformada de Fourier de la secuencia  $x(n)r^{-n}$ .

El factor de ponderación  $r^{-n}$  crece con “ $n$ ” si  $r < 1$  y decae si  $r > 1$ .

En cambio,  $X(z)$  converge para  $|z| = 1$

$$X(z) |_{z=e^{jw}} \equiv X(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{jwn}$$

por lo tanto la Transformada de Fourier puede verse como la Transformada  $z$  de la secuencia evaluada sobre la circunferencia unidad.

Si  $X(z)$  no converge en la region  $|z| = 1$  (si la circunferencia unidad no esta contenida en la region de convergencia de  $X(z)$ ) la Transformada de Fourier  $X(w)$  no existe. Debemos destacar que la existencia de la transformada  $z$  requiere que la secuencia  $x(n)r^{-n}$  sea absolutamente sumable para algún valor de  $r$ , esto es,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)r^{-n}| < \infty$$

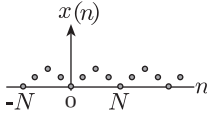
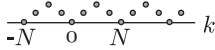
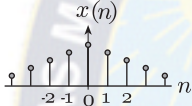
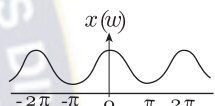
converge solo para valores de  $r > r_0 > 1$ , la Transformada  $z$  existe, no así la transformada de Fourier.

### 3.7

## Dualidades Físicas y Matemáticas

En anteriores secciones de este capitulo, hemos presentado varios métodos para análisis frecuencial de señales como.

1. Las Series de Fourier para señales periódicas en tiempo discreto.
2. la Transformada de Fourier de señales no periódicas en tiempo discreto.

		Señales en tiempo Discreto	
		Dominio del Tiempo	Dominio de la Frecuencia
Señales periódicas	Series de Fourier	 <p>A plot of a discrete-time periodic signal <math>x(n)</math> versus <math>n</math>. The signal is periodic with period <math>N</math>. The horizontal axis is labeled <math>n</math> and has tick marks at <math>-N</math>, <math>0</math>, and <math>N</math>. The vertical axis is labeled <math>x(n)</math>. The signal consists of a sequence of discrete samples.</p>	 <p>A plot of a discrete-frequency periodic signal versus <math>k</math>. The signal is periodic with period <math>N</math>. The horizontal axis is labeled <math>k</math> and has tick marks at <math>-N</math>, <math>0</math>, and <math>N</math>. The vertical axis is labeled <math>x(k)</math>. The signal consists of a sequence of discrete samples.</p>
		$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j(2\pi/N)kn} \iff x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j(2\pi/N)kn}$	
		Discreta y periódicas	Discretas y Periódicas
Señales no periódicas	Transformadas de Fourier	 <p>A plot of a discrete-time non-periodic signal <math>x(n)</math> versus <math>n</math>. The signal is a single pulse centered at <math>n=0</math>. The horizontal axis is labeled <math>n</math> and has tick marks at <math>-2</math>, <math>-1</math>, <math>0</math>, <math>1</math>, and <math>2</math>. The vertical axis is labeled <math>x(n)</math>.</p>	 <p>A plot of a continuous-frequency non-periodic signal <math>x(w)</math> versus <math>w</math>. The signal is a single pulse centered at <math>w=0</math>. The horizontal axis is labeled <math>w</math> and has tick marks at <math>-2\pi</math>, <math>-\pi</math>, <math>0</math>, <math>\pi</math>, and <math>2\pi</math>. The vertical axis is labeled <math>x(w)</math>.</p>
		$X(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jwn} \iff x_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(w)e^{jwn} dw$	
		Discretas y no periódicas	Continuas y periódicas

### Resumen de las formulas de análisis

Un análisis cuidadoso de la Figura revela la existencia también de algunas simetrías y dualidades matemáticas entre las distintas relaciones de análisis de frecuencia.

Centrando ahora nuestra atención en la densidad espectral de las señales, recordando que hemos utilizado el termino densidad espectral de energía para caracterizar señales no periódicas de energía finita y el termino densidad espectral de potencia para señales periódicas.

### 3.8

## Propiedades de la Transformada de Fourier de Señales en Tiempo Discreto

En esta sección desarrollaremos estas importantes propiedades de la Transformada de Fourier.

Adoptamos la notación

$$X(w) = F\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jwn}$$

para la Transformada directa (ecuación de análisis) y

$$x(n) = F^{-1}\{X(w)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(w)e^{jwn} dw$$

para la Transformada Inversa (ecuación de síntesis) .

**Definición 3.13** Sea  $x(n)$  y  $X(w)$  como el par de Transformadas de Fourier y denotaremos esta relación con la notación

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(w)$$

Recordemos que  $X(w)$  es periódica de periodo  $2\pi$ .

### 3.9

## Propiedades de Simetría de la Transformada de Fourier

Cuando una señal presenta determinadas propiedades de simetría en el dominio del tiempo, se imponen determinadas condiciones en su Transformada de Fourier. La utilización de estas propiedades de simetría lleva a la simplificación de las formulas, tanto de la Transformada de Fourier directa como de la inversa.

Supongamos que tanto la señal  $x(n)$  como su transformada  $X(w)$  son funciones complejas es decir

$$x(n) = x_R(n) + jx_I(n); \quad X(w) = X_R(w) + jX_I(w)$$

reemplazamos

$$\begin{aligned} X(w) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jwn} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_R(n) + jx_I(n)] e^{-jwn} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_R(n) \cos wn + x_I(n) \operatorname{sen} wn] - j \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_R(n) \operatorname{sen} wn - x_I(n) \cos wn] \\ &= X_R(w) + jX_I(w) \end{aligned}$$

separando la parte real e imaginaria obtenemos

$$X_R(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_R(n) \cos wn + x_I(n) \text{sen } wn]$$

$$X_I(w) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_R(n) \text{sen } wn - x_I(n) \cos wn]$$

De forma similar obtenemos

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(w) e^{jwn} dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [X_R(w) + jX_I(w)] e^{jwn} dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [X_R(w) \cos wn - X_I(w) \text{sen } wn] + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [X_R(w) \text{sen } wn + X_I(w) \cos wn] \\ &= x_R(n) + jx_I(n) \end{aligned}$$

donde

$$x_R(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [X_R(w) \cos wn - X_I(w) \text{sen } wn]$$

$$x_I(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [X_R(w) \text{sen } wn + X_I(w) \cos wn]$$

Demostremos ahora algunos casos especiales.

### i) Señales Reales

Si  $x(n)$  es real entonces  $x_R(n) = x(n)$  y  $x_I(n) = 0$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} X_R(w) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_R(n) \cos wn + x_I(n) \text{sen } wn] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n) \cos wn + 0 \text{ sen } wn] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cos wn \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_I(w) &= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_R(n)\text{sen } wn - x_I(n) \cos wn] \\
 &= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n)\text{sen } wn - 0 \cos wn] \\
 &= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\text{sen } wn
 \end{aligned}$$

☑

es decir

$$\begin{aligned}
 X_R(w) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cos wn \\
 X_I(w) &= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \text{sen } wn
 \end{aligned}$$

Dado que  $\cos(-wn) = \cos wn$  y  $\text{sen}(-wn) = -\text{sen } wn$  tenemos

$$X_R(-w) = X_R(w) \text{ (par)}$$

$$X_I(-w) = -X_I(w) \text{ (impar)}$$

Si cambiamos ambas ecuaciones en una sola ecuación tenemos

$$X^*(w) = X(-w)$$

El modulo y la fase del espectro también poseen propiedades de simetría

$$|X(w)| = |X(-w)| \text{ (par)}$$

$$\angle X(-w) = -\angle X(w) \text{ (impar)}$$

la transformada inversa de una señal real, es decir,

$$x(n) = x_R(n)$$

implica que,

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [X_R(w) \cos wn - X_I(w) \text{sen } wn] dw$$

Dado que tanto el producto  $X_R(w) \cos wn$  como el producto  $X_I(w) \text{sen } wn$  son funciones

pares de “ $w$ ”, tenemos que

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [X_R(w) \cos wn - X_I(w) \text{sen } wn] dw$$

## ii) Señales reales y Pares

Si  $x(n)$  es real y par, es decir,  $x(-n) = x(n)$ , entonces  $x(n) \cos wn$  es par y  $x(n) \text{sen } wn$  es impar

$$\begin{aligned} \text{Demostración. } X_R(w) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cos wn \\ &= x(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} x(n) \cos wn \text{ (par)} \end{aligned}$$

$$X_I(w) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \text{sen } wn = 0$$

$$x(n) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [X_R(w) \cos wn - X_I(w) \text{sen } wn] dw$$

$$x(n) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi X_R(w) \cos wn dw$$

Por lo tanto señales y pares poseen espectros reales

✓

## iii) Señales Reales e Impares

Si  $x(n)$  es real e impar, es decir,  $x(-n) = -x(n)$ , entonces  $x(n) \cos wn$  es impar y  $x(n) \text{sen } wn$  es par

$$\text{Demostración. } X_R(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cos wn = 0$$

$$\begin{aligned} X_I(w) &= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \text{sen } wn \\ &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} x(n) \text{sen } wn \text{ (impar)} \end{aligned}$$

$x(n) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi X_I(w) \text{sen } wn dw$  Por tanto, señales reales e impares poseen espectros pura-

mente imaginarios.

✓

**iv) Señales Puramente imaginarias**

$$x_R(n) = 0 \text{ y } x(n) = jx_I(n)$$

*Demostración.*

$$X_R(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_R(n) \cos wn + x_I(n) \operatorname{sen} wn]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_I(n) \operatorname{sen} wn \text{ (impar)}$$

$$X_I(w) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_R(n) \operatorname{sen} wn - x_I(n) \cos wn]$$

$$= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_I(n) \cos wn \text{ (par)}$$

$$x_I(n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [X_R(w) \operatorname{sen} wn + X_I(w) \cos wn] dw$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [X_R(w) \operatorname{sen} wn + X_I(w) \cos wn] dw$$

- Si  $x_I(n)$  es impar, es decir,  $x_I(-n) = -x_I(n)$ , entonces

$$X_R(w) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} x_I(n) \operatorname{sen} wn \text{ (impar)}$$

$$x_I(n) = 0$$

$$x_I(n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} X_R(w) \operatorname{sen} wn dw$$

- Si  $x_I(n)$  es par, es decir,  $x_I(-n) = x_I(n)$  tenemos

$$X_R(w) = 0$$

$$X_I(w) = x_I(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} x_I(n) \cos wn \text{ (par)}$$

$$x_I(n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} X_I(w) \cos wn dw$$

☑

**Ejemplo 3.6**

Determine  $X_R(w)$ ,  $X_I(w)$ ,  $|X(w)|$ ,  $\angle X(w)$  para la Transformada de Fourier.

$$X(w) = \frac{1}{1 - a e^{-jw}} \quad -1 < a < 1$$



*Demostración.*

$$\begin{aligned} X(w) &= \frac{1 - a e^{jw}}{(1 - a e^{-jw})(1 - a e^{jw})} \\ &= \frac{1 - a \cos w}{1 - 2a \cos w + a^2} - j \frac{a \operatorname{sen} w}{1 - 2a \cos w + a^2} \\ &= X_R(w) + j X_I(w) \end{aligned}$$

donde

$$X_R(w) = \frac{1 - a \cos w}{1 - 2a \cos w + a^2}$$

y

$$X_I(w) = -\frac{a \operatorname{sen} w}{1 - 2a \cos w + a^2}$$

Ahora obtenemos el modulo y la fase del espectro como

$$\begin{aligned} |X(w)| &= \sqrt{\left(\frac{1 - a \cos w}{1 - 2a \cos w + a^2}\right)^2 + \left(\frac{1 - a \operatorname{sen} w}{1 - 2a \cos w + a^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{(1 - 2a \cos w + a^2)}{(1 - 2a \cos w + a^2)^2}} \end{aligned}$$

$$\angle X(w) = \operatorname{tag}^{-1} \frac{X_I(w)}{X_R(w)} = -\operatorname{tag}^{-1} \frac{a \operatorname{sen} w}{1 - a \cos w}$$

✓

### 3.10

## Teorema y Propiedades de la Transformada de Fourier

En esta sección veremos varios teoremas sobre la Transformada de Fourier e ilustraremos su uso en la practica mediante ejemplos.

i) Linealidad

si

$$x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(w)$$

y

$$x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(w)$$

entonces

$$a_1x_1(n) + a_2x_2(n) \xleftrightarrow{F} a_1X_1(w) + a_2X_2(w)$$

*Demostración.* La Transformación de Fourier requerida es:

$$\begin{aligned} F[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] e^{-jwn} \\ &= a_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) e^{-jwn} + a_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n) e^{-jwn} \\ &= a_1F\{x_1(n)\} + a_2F\{x_2(n)\} \\ &= a_1X_1(w) + a_2X_2(w) \end{aligned}$$

□

### Ejemplo 3.7

Determinar la Transformada de Fourier de la señal

$$x(n) = a^{|n|} \quad -1 < a < 1$$

Demostración  $x(n)$  puede expresarse como:

$$x_1(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad x_2(n) = \begin{cases} a^{-n}, & n < 0 \\ 0, & n \geq 0 \end{cases}$$

Por definición tenemos

$$\begin{aligned} X_1(w) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) e^{-jwn} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-jwn} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a e^{-jw})^n \end{aligned}$$

La suma es una serie geométrica que converge a

$$X_1(w) = \frac{1}{1 - a e^{-jw}}$$

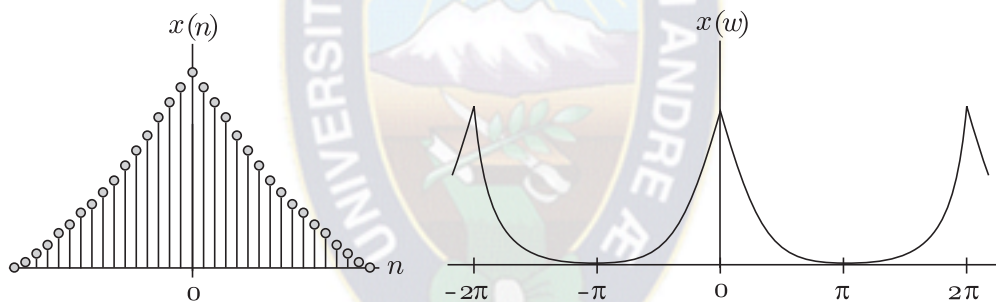
siempre que  $|a e^{-jw}| = |a| \cdot |e^{-jw}| = |a| < 1$

De forma similar, la Transformada de Fourier de  $x_2(n)$  es

$$\begin{aligned} X_2(w) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jwn} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-jwn} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (a e^{jw})^k \\ &= \frac{a e^{jw}}{1 - a e^{jw}} \end{aligned}$$

Combinando estas dos transformadas, obtenemos la Transformada de Fourier de  $x(n)$  como

$$X(w) = X_1(w) + X_2(w) = \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos w + a^2}$$



la secuencia  $x(n)$  y su Transformada de Fourier con  $a = 0,8$

## ii) Desplazamiento Temporal

Si

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(w)$$

entonces

$$x(n - k) \xleftrightarrow{F} e^{-jwk} X(w)$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} F \{x(n - k)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n - k)] e^{-jwn} \quad \text{si } n - k = m \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(m)] e^{-jw(m+k)} \end{aligned}$$

$$F \{x(n - k)\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [x(m)] e^{-jwm} e^{-jwk} = X(w) e^{-jwk}$$

✓

El espectro  $X(w)$  es, en general una función compleja de la frecuencia puede expresarse como

$$X(w) = |X(w)| e^{j\Theta(w)}$$

donde  $\Theta(w) = \angle X(w)$

$$X(w) = |X(w)| e^{j\angle X(w)}$$

$$\begin{aligned} F \{x(n - k)\} &= X(w) e^{-jwk} = |X(w)| e^{j\Theta(w)} e^{-jwk} \\ &= |X(w)| e^{j\angle X(w)} e^{-jwk} \\ &= |X(w)| e^{j[\angle X(w) - wk]} \end{aligned}$$

Esta relación implica que si se desplaza una señal en el dominio temporal  $K$  muestras

### iii) Reflexión Temporal

Si  $x(n) \xleftrightarrow{F} X(w)$  entonces  $x(-n) \xleftrightarrow{F} X(-w)$

*Demostración.*

$$F \{x(-n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(l) e^{jwl} = X(-w)$$

✓

Si  $x(n)$  es real entonces obtenemos

$$\begin{aligned} F \{x(-n)\} &= X(-w) = |X(-w)| e^{j\angle X(-w)} \\ &= |X(w)| e^{-j\angle X(w)} \end{aligned}$$

Si una señal se refleja con respecto al origen de tiempos, su espectro en magnitud permanece inalterado, y su espectro en fase experimenta un cambio de signo (inversión de la fase).

**iv) Teorema de Convolución**

Si

$$x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(w)$$

y

$$x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(w)$$

entonces

$$x(n) = x_1(n) \star x_2(n) \xleftrightarrow{F} X(w) = X_1(w)X_2(w)$$

*Demostración.*

$$x(n) = x_1(n) \star x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k)$$

$$\begin{aligned} X(w) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jwn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_1(n) \star x_2(n)] e^{-jwn} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k) \right] e^{-jwn} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) e^{-jwk} X_2(w) \\ &= X_1(w)X_2(w) \end{aligned}$$

□

**v) El Teorema de la Correlación**

Si

$$x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(w)$$

y

$$x_2(-n) \xleftrightarrow{F} X_2(w)$$

entonces

$$r_{x_1x_2}(n) \xleftrightarrow{F} S_{x_1x_2}(w) = X_1(w)X_2(-w)$$

*Demostración.* Tenemos que

$$\begin{aligned}
 r_{x_1 x_2}(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(k-n) \\
 F\{r_{x_1 x_2}(n)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_{x_1 x_2}(n) e^{-jwn} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(k-n) \right] e^{-jwn} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_2(m) e^{jw(m)} e^{-jw(k)} \\
 &= X_1(w)X_2(-w)
 \end{aligned}$$

☑

### vi) Desplazamiento Frecuencial

Si

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(w)$$

entonces

$$e^{jw_0 n} x(n) \xleftrightarrow{F} X(w - w_0)$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned}
 F\{e^{jw_0 n} x(n)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jw_0 n} x(n) e^{-jwn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j(w-w_0)n} \\
 &= X(w - w_0)
 \end{aligned}$$

☑

### vii) El Teorema de la Modulación

Si

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(w)$$

entonces

$$x(n) \cos w_0 n \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2} [X(w + w_0) + X(w - w_0)]$$

*Demostración.* Expresamos la señal  $\cos w_0 n$  como

$$\cos w_0 n = \frac{1}{2}(e^{jw_0 n} + e^{-jw_0 n})$$

entonces

$$\begin{aligned} F \{x(n) \cos w_0 n\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cos w_0 n e^{-jwn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{1}{2}(e^{jw_0 n} + e^{-jw_0 n}) e^{-jwn} \\ &= \frac{1}{2} [X(w + w_0) + X(w_0 - w)] \end{aligned}$$

□

### viii) Teorema de Parseval

Si

$$x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(w)$$

y

$$x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(w)$$

entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(w)X_2^*(w) dw$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(w)X_2^*(w)dw &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)e^{-jwn} \right] X_2^*(w)dw \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_2^* e^{-jwn} dw \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n) \end{aligned}$$

□

En el caso especial, cuando  $x_2(n) = x_1(n) = x(n)$ , la relación de Parseval se reduce a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(w)|^2 dw$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n) &= Ex = r_{xx}(0) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(w)X_2^*(w) dw
 \end{aligned}$$

Observemos que  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$  es simplemente la energía  $E_x$  de la señal  $x(n)$ . Es igual también a la correlación de  $x(n)$ ,  $r_{xx}(l)$ , calculada en  $l = 0$

### ix) Multiplicación de Dos Secuencias (Teorema de Enventanado)

Si

$$x_1(n) \xrightarrow{F} X_1(w)$$

y

$$x_2(n) \xrightarrow{F} X_2(w)$$

entonces

$$x_3(n) = x_1(n)x_2(n) \xrightarrow{F} X_3(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda)X_2(w - \lambda) d\lambda$$

*Demostración.* Consideremos la Transformada de Fourier de

$$x_3(n) = x_1(n)x_2(n)$$

y usemos la formula para la transformada inversa.

$$x_1(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda) e^{j\lambda n} d\lambda$$

así tenemos:

$$\begin{aligned}
 X_3(w) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_3(n) e^{-jwn} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2(n) e^{-jwn} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda)X_2(w - \lambda)d\lambda
 \end{aligned}$$



**x) Diferenciación en el Dominio de la Frecuencia Si**

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(w)$$

entonces

$$nx(n) \xleftrightarrow{F} j \frac{dX(w)}{dw}$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} j \frac{dX(w)}{dw} &= j \frac{d}{dw} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jwn} \right] = j \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{d}{dw} e^{-jwn} \\ &= j(-j) \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n) e^{-jwn} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n) e^{-jwn} \\ &= F \{n[x(n)]\} \end{aligned}$$

☑

# Transformada Discreta de Fourier (DFT)

## 4.1

### Transformada de Fourier Discreta (DFT)

**Definición 4.1** La Transformada de Fourier Discreta (DFT) (del inglés Discrete Fourier Transform) se calcula mediante la formula.

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

**Definición 4.2** La Transformada de Fourier Discreta Inversa (por sus siglas en inglés IDFT, Inverse Discrete Fourier Transform) se calcula, por otra parte, mediante:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{j2\pi kn/N} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

## 4.2

### La DFT como una Transformada Lineal

Las formulas para la DFT y la IDFT se pueden expresar como:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) W_N^{-kn} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

donde, por definición

$$W_N = e^{-j2\pi/N}$$

que es una raíz  $n$ -ésima de la unidad

**Observación 4.1** El calculo de cada punto de la DFT implica  $N$  multiplicaciones complejas y  $(N - 1)$  sumas complejas.

Por tanto, los  $N$  puntos de la DFT pueden obtenerse tras  $N^2$  multiplicaciones complejas y  $N(N - 1)$  sumas complejas.

Es interesante considerar la DFT y la IDFT como Transformaciones Lineales de las secuencias  $\{x(n)\}$  y  $\{X(k)\}$  respectivamente.

**Definición 4.3** El vector  $x_N$  de  $N$  puntos de la secuencia  $x(n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ , el vector  $X_N$  de  $N$  puntos de las muestras en frecuencias, y la matriz  $N \times N$ ,  $W_N$ , como

$$x_N = \begin{bmatrix} X_{(0)} \\ X_{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_{(N-1)} \end{bmatrix}, \quad X_N = \begin{bmatrix} X_{(0)} \\ X_{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_{(N-1)} \end{bmatrix}$$

$$W_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \cdot & \cdot & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdot & \cdot & W_N^{2(N-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdot & \cdot & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

Con estas definiciones, la DFT de  $N$  puntos se puede expresar en forma matricial como:

$$X_N = W_N x_N$$

Donde  $W_N$  es la matriz de la transformación lineal.

Observación 4.2  $W_N$  es una matriz simétrica.

*Demostración.* Supongamos que existe la inversa de  $W_N$ , entonces podemos invertir.

$$\begin{aligned} X_N &= W_N x_N \\ W_N^{-1} X_N &= W_N^{-1} W_N x_N \\ W_N^{-1} X_N &= I_N^{-1} x_N \\ x_N &= W_N^{-1} X_N \end{aligned}$$

lo que es simplemente una expresión para la IDFT.

La IDFT dada por

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

puede expresarse en forma matricial como

$$x_N = \frac{1}{N} W_N^* X_N$$

comparamos ambas ecuaciones se tiene

$$\begin{aligned} W_N^{-1} X_N &= \frac{1}{N} W_N^* X_N \\ W_N^{-1} &= \frac{1}{N} W_N^* \end{aligned}$$

que a su vez, implica que

$$\begin{aligned} W_N^* &= N W_N^{-1} \\ W_N W_N^* &= N W_N W_N^{-1} \\ &= N I_N \\ &= N \end{aligned}$$

donde  $W_N^*$  denota la matriz compleja de  $W_N$  por lo tanto, la matriz  $W_N$  de la transformación es una matriz ortogonal (unitaria). Además su inversa existe y viene dada por  $W_N^*/N$   $\square$

### Ejemplo 4.1

Calcular la DFT de la secuencia de 4 puntos

$$x(n) = (0, 1, 2, 3)$$

Demostración: El primer paso consiste en determinar la matriz  $W_4$  usando periodicidad de  $W_4$  y la propiedad de simetría.

$$W_N^{k+N/2} = -W_N^k$$

podemos expresar la matriz  $W_4$  como

$$W_N = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ 1 & W_4^2 & W_4^0 & W_4^2 \\ 1 & W_4^3 & W_4^2 & W_4^1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

Así pues

$$X_4 = W_4 x_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 & +2j \\ -2 \\ -2 & -2j \end{bmatrix}$$

### 4.3

## Relación de la DFT con otras Transformadas

### 4.3.1. Relación con los Coeficientes de las Series de Fourier de Secuencias Periódicas

Una secuencia periódica  $\{x_p(n)\}$  de periodo fundamental  $N$  puede representarse mediante una serie de Fourier de la forma

$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi k n / N} \quad -\infty < n < \infty$$

donde los coeficientes de la serie de Fourier vienen dados por la expresión.

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j2\pi nk/N} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Si definimos la secuencia  $x(n) = x_p(n), 0 \leq n \leq N-1$  la DFT de esta secuencia es simplemente

$$X(k) = Nc_k$$

Además  $x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi nk/N}$  tiene la forma de IDFT. Por lo tanto, la DFT de  $N$  puntos nos proporciona las líneas del espectro de la secuencia periódica de periodo fundamental  $N$ .

### 4.3.2. Relación con la Transformada $z$

Consideremos la secuencia  $x(n)$  con Transformada  $z$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

con una ROC que incluye la circunferencia unidad

Si muestreamos  $X(z)$  en  $N$  puntos equiespaciados sobre la circunferencia unidad  $z_k = e^{j2\pi k/N}, 0, 1, 2, \dots, N-1$  obtenemos

$$X(k) \equiv X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi nk/N}$$

En consecuencia,  $X(z)$  se puede expresar como una función de la DFT  $\{X(k)\}$  como sigue

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi kn/N} \right] z^{-n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sum_{n=0}^{N-1} (e^{j2\pi k/N} z^{-1})^n = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1 - e^{j2\pi k/N} z^{-1}} \end{aligned}$$

Cuando esta expresión se calcula sobre la circunferencia unidad, se obtiene la Transformada

de Fourier de la secuencia de duración finita, en términos de su DFT, en la forma.

$$X(w) = \frac{1 - e^{-jwN}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1 - e^{-j(w-2\pi k/N)}}$$

Esta expresión de la Transformada de Fourier es una fórmula de interpolación polinómica (de Lagrange) para  $X(w)$ , expresada en términos de los valores  $\{X(k)\}$  del polinomio, en un conjunto de frecuencias substanciadas,

$$w_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

#### 4.4

### Propiedades de la DFT

Recordemos que la DFT y la IDFT de una secuencia  $\{X(n)\}$  de  $N$  puntos vienen dadas por.

$$\text{DFT: } X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\text{IDFT: } x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

donde  $W_N$  se define como

$$W_N = e^{-j2\pi/N}$$

La notación que se usará para representar el par de transformadas DFT, dado por  $x(n)$  y  $X(k)$ , es

$$x(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} X(k)$$

#### 4.4.1. Propiedades de Periodicidad, Linealidad y Simetría

##### i) Periodicidad

Si  $x(n)$  y  $X(k)$  son un par de transformadas DFT de  $N$  puntos, entonces

$$x(n+N) = x(n) \quad \forall n$$

$$X(k + N) = X(k) \quad \forall k$$

## ii) Propiedad de Linealidad

Si

$$x_1(n) \xrightarrow[N]{DFT} X_1(k)$$

Si

$$x_2(n) \xrightarrow[N]{DFT} X_2(k)$$

entonces, para cualquiera constante reales o complejas  $a_1$  y  $a_2$

$$a_1x_1(n) + a_2x_2(n) \xrightarrow[N]{DFT} a_1X_1(k) + a_2X_2(k)$$

**Demostración:**

DFT:

$$\begin{aligned} \{a_1x_1(n) + a_2x_2(n)\} &= \sum_{n=0}^{N-1} \{a_1x_1(n) + a_2x_2(n)\} e^{-j2\pi kn/N} \\ &= a_1 X(k) + a_2 X_2(k) \end{aligned}$$

## iii) Propiedades de Simetría de la DFT

Las propiedades de simetría de la DFT pueden obtenerse aplicando la metodología previamente utilizada para la Transformada de Fourier. Supongamos que la secuencia de  $N$  puntos  $x(n)$  y su DFT, son complejas. Entonces las secuencias pueden expresarse como

$$x(n) = x_R(n) + jx_I(n) \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

$$X(k) = X_R(k) + jX_I(k) \quad 0 \leq k \leq N - 1$$

para la expresión de DFT, obtenemos



$$X_R(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[ x_R(n) \cos \frac{2\pi kn}{N} + x_I(n) \operatorname{sen} \frac{2\pi kn}{N} \right]$$

$$X_I(k) = - \sum_{n=0}^{N-1} \left[ x_R(n) \operatorname{sen} \frac{2\pi kn}{N} - x_I(n) \cos \frac{2\pi kn}{N} \right]$$

#### iv) Secuencias Reales

Si  $x(n)$  es real y par, esto es

$$x(n) = x(N-n) \quad 0 \leq n \leq N-1$$

#### 4.4.2. Propiedades Adicionales de DFT

##### Reflexión Temporal de una Secuencia

Si  $x_1(n) \xrightarrow[N]{DFT} X_1(k)$  entonces

$$x((-n))_N = x(N-n) \xrightarrow[N]{DFT} X((-k))_N = X(N-k)$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} DFT : \{x(N-n)\} &= \sum_{n=0}^{N-1} x(N-n) e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{-j2\pi(N-k)m/N} \\ &= X(N-k) \end{aligned}$$

☑

##### Desplazamiento Circular en el Tiempo de una Secuencia

Si

$$x(n) \xrightarrow{DFT} X(k)$$

Entonces

$$x((n-l))_N \xrightarrow{DFT} X(k) e^{-j2\pi kl/N}$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned}
 DFT : \{x((n-l))_N\} &= \sum_{n=0}^{N-1} x((n-l))_N e^{-j2\pi kn/N} \\
 &= \sum_{n=0}^{l-1} x((n-l))_N e^{-j2\pi kn/N} + \sum_{n=l}^{N-1} x(n-l) e^{-j2\pi kn/N} \\
 &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{-j2\pi k(m+l)/N} \\
 &= X(k) e^{-j2\pi kl/N}
 \end{aligned}$$

☑

### Propiedades de la conjugación

Si

$$x(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} X(k)$$

entonces

$$x^*(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} X^*((-k))_N = X^*(N-k)$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned}
 DFT : \{x^*(n)\} &= \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) e^{-j2\pi kn/N} = \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi k(N-n)/N} \right]^* \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) e^{-j2\pi n(N-k)/N} \\
 &= X^*(N-k)
 \end{aligned}$$

☑

### Teorema de Parseval

Para secuencias complejas  $x(n)$  e  $y(n)$ , en general, si

$$(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} X(k)$$

y

$$y(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} Y(k)$$

entonces

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) y^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) Y^*(k)$$

*Demostración.* Aplicando la propiedad de la correlación circular tenemos

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) y^*(n) = \tilde{r}_{xy}(0)$$

y

$$\tilde{r}_{xy}(l) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{R}_{xy}(k) e^{j2\pi kl/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) Y^*(k) e^{j2\pi kl/N}$$

$$\tilde{r}_{xy}(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{R}_{xy}(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) Y^*(k)$$

En el caso especial de que  $y(n) = x(n)$ , se reduce a

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

☑

## Ejemplos

$$x(n) = \{1, 2, 1, 0\}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$k = 0 \quad X(0) = \sum_{n=0}^3 x(n) = 1 + 2 + 1 + 0 = 4$$

$$k = 1 \quad X(1) = \sum_{n=0}^3 x(n) e^{-j2\pi n/4} = 1 + 2e^{-j\pi/2} + e^{-j\pi} = -2j$$

$$k = 2 \quad X(2) = \sum_{n=0}^3 x(n) e^{-j2\pi n/2} = 1 + 2e^{-j\pi} + e^{-2j\pi} = 0$$

$$k = 3 \quad X(3) = \sum_{n=0}^3 x(n) e^{-j2\pi n/4} = 1 + 2e^{-j3\pi/2} + e^{-j3\pi} = 2j$$

por tanto la DFT de  $x(n)$  es  $X(k) = \{4, -2j, 0, 2j\}$  para  $k = 0, 1, 2, 3$

# Análisis frecuencial de señales de voz con la Transformada Discreta de Fourier

---

## 5.1

---

### Frecuencia en señales continuas y discretas en el tiempo

El concepto de frecuencia es familiar a estudiantes de Ingeniería y Ciencias. Este concepto es básico por ejemplo, en el diseño de receptores de radio, sistemas de alta fidelidad o en filtros de color en fotografía. De la física conocemos que la frecuencia está estrechamente relacionado a un tipo específico de movimiento periódico llamado movimiento **armónico** cuya descripción matemática se la hace mediante funciones sinusoidales. El concepto de frecuencia está directamente relacionado con la inversa del tiempo.

#### 5.1.1. Señales sinusoidales en tiempo continuo

Una oscilación armónica se describe matemáticamente mediante la siguiente señal en tiempo continuo:

$$x_a(t) = A \cos(\Omega t + \theta) \quad , -\infty < t < \infty \quad (1)$$

como se en la figura 5.1. El subíndice  $a$  nos indica que se trata de una señal analógica.

Esta señal está caracterizada por tres parámetros:

- $A$  es la amplitud de la señal sinusoidal,
- $\Omega$  es la frecuencia en radianes por segundo (rad/s), y

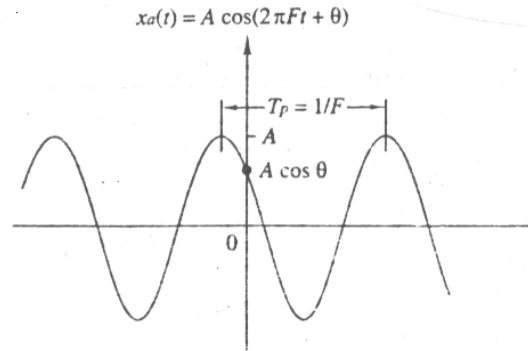


Figura 5.1: Señal en tiempo continuo

-  $\theta$  es la fase en radianes.

la frecuencia angular  $\Omega$  se expresa en función de la frecuencia lineal  $f$  dada en Hz, como

$$\Omega = 2\pi F \quad (2)$$

luego podemos escribir la señal como:

$$x_a(t) = A \cos(2\pi Ft + \theta), \quad -\infty < t < \infty \quad (3)$$

la señal analógica sinusoidal se caracteriza por:

1. Para un valor dado de la frecuencia  $F$ ,  $x_a(t)$  es periódica, por lo que se cumple:

$$x_a(t + T_o) = x_a(t)$$

donde  $T_o = \frac{1}{F}$  es el período fundamental de la señal sinusoidal.

2. Las señales en tiempo continuo con frecuencias diferentes, son diferentes.

3. El aumento en la frecuencia  $F$  resulta obviamente en la tasa de oscilación de la señal, esto es, aparecen más períodos en un intervalo de tiempo dado.

### 5.1.2. Señales sinusoidales en tiempo discreto.

Una señal sinusoidal en tiempo discreto puede expresarse como

$$x(n) = A \cos(\omega n + \theta), \quad -\infty < n < \infty$$

donde  $n$  es una variable entera, denominado número de muestra. Aquí  $A$  es la amplitud de la senoide,  $\omega$  es la frecuencia angular en rad por muestra, y  $\theta$  es la *fase* en radianes.

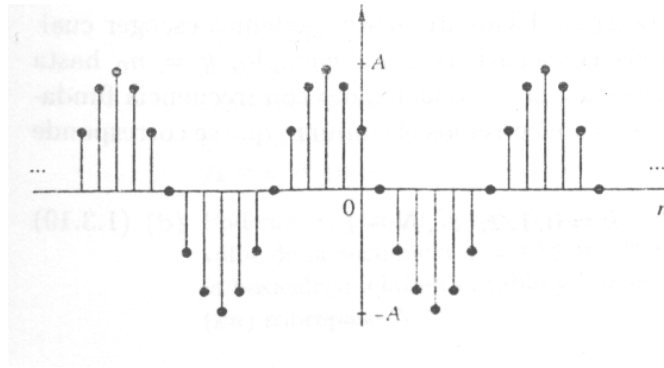


Figura 5.2: Señal sinusoidal en tiempo discreto.

La frecuencia angular  $\omega$  está relacionada con la frecuencia lineal  $f$

$$\omega = 2\pi f \quad (4)$$

luego podemos escribir la señal como:

$$x(n) = A \cos(2\pi f n + \theta) \quad , \quad -\infty < n < \infty \quad (5)$$

La frecuencia  $f$  tiene dimensiones de ciclos por muestra.

La figura 2 muestra una senoide de frecuencia  $\omega = \pi/6$  radianes por muestra ( $f = \frac{1}{12}$  ciclos por muestra) y fase  $\theta = \pi/3$ .

Las senoideas en tiempo discretas se caracterizan por:

**1.** Una senoide en tiempo discreto es periódica sólo si su frecuencia  $f$  es un número racional.

Definición: una señal en tiempo discreto  $x(n)$  es periódica con período  $N$  ( $N > 0$ ) si

$$x(n + N) = x(n) \quad , \quad \forall n \quad (6)$$

El valor más pequeño de  $N$  para el que se cumple esta propiedad, se denomina período fundamental.

Para que una senoide con frecuencia  $f_o$  sea periódica, se tiene que cumplir

$$\cos[2\pi f_o(n + N) + \theta] = \cos(2\pi f_o n + \theta)$$

esta relación es cierta si existe un entero  $k$  tal que

$$2\pi f_o N = 2\pi k$$

de donde se tiene

$$f_o = \frac{k}{N} \quad (7)$$

**2.** Las sinusoides en tiempo discreto cuyas frecuencias están separadas por un múltiplo entero de  $2\pi$ , son idénticas.

Consideremos la senoide  $\cos(\omega_o n + \theta)$ . Por lo observado en la propiedad se tiene

$$\cos[(\omega_o + 2\pi)n + \theta] = \cos(\omega_o n + 2\pi n + \theta) = \cos(\omega_o n + \theta) \quad (8)$$

por tanto, todas las secuencias sinusoidales

$$x_k(n) = A \cos(\omega_k n + \theta), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

donde

$$\omega_k = \omega_o + 2k\pi, \quad -\pi \leq \omega_o \leq \pi$$

son indistinguibles ( idénticas).

Se denomina a la senoide que tiene la frecuencia  $|\omega| > \pi$  un alias de la senoide correspondiente de la frecuencia  $|\omega| \leq \pi$

**3.** La mayor tasa de oscilación en una senoide en tiempo discreto se alcanza cuando  $\omega = \pi$  (o  $\omega = -\pi$ ), equivalentemente,  $f = \frac{1}{2}$  (o  $f = -\frac{1}{2}$ )

Veamos las propiedades de la señal sinusoidal discreta

$$x(n) = \cos \omega_o n$$

cuando la frecuencia  $\omega_o$  varía desde 0 hasta  $\pi$ .

Para ilustrar mejor la propiedad, tomemos valores de  $\omega_o = 0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi$  correspondientes a  $f = 0, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ , que dan lugar a secuencias periódicas con períodos  $N = \infty, 16, 8, 4, 2$  como se observa en la figura (5.3)

Para analizar el comportamiento de  $x(n)$  cuando

$$-\pi \leq \omega_o \leq \pi$$

consideremos las sinusoides de frecuencias  $\omega_1 = \omega_o$  y  $\omega_2 = 2\pi - \omega_o$ . Vemos que mientras  $\omega_1$  varía de  $\pi$  a  $2\pi$ ,  $\omega_2$  varía de  $\pi$  a 0.

Luego se tienen

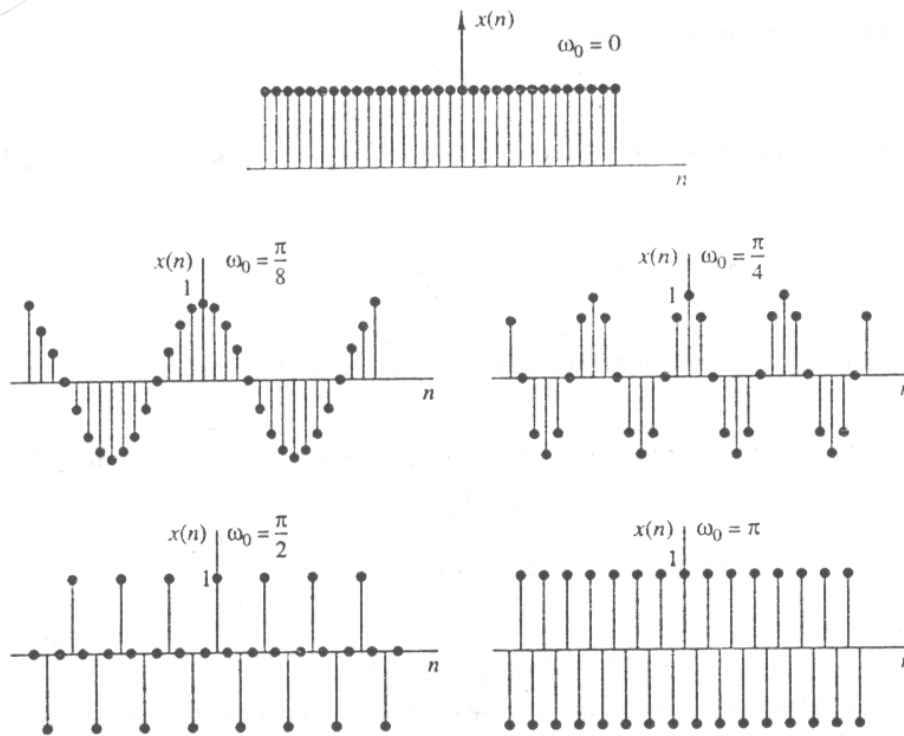


Figura 5.3: Ejemplos de señal discreta

$$\begin{aligned}
 x_1(n) &= A \cos \omega_1 n = A \cos \omega_o n \\
 x_2(n) &= A \cos \omega_2 n = A \cos(2\pi - \omega_o)n \\
 &= A \cos(-\omega_o n) = x_1(n)
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

por tanto,  $\omega_2$  es un alias de  $\omega_1$ .<sup>1</sup> Observemos que a medida que aumentamos la frecuencia  $\omega_o$  desde  $\pi$  hasta  $2\pi$ , su tasa de oscilación disminuye. Para  $\omega_o = 2\pi$  el resultado es una señal constante ( $N = \infty$ ). Obviamente, para  $\omega_o = \pi$  (o  $f = \frac{1}{2}$ ), se tiene la tasa de oscilación más elevada con  $N = 2$ .

Dado que las señales sinusoidales en tiempo discreto de frecuencias separadas por un múltiplo entero de  $2\pi$  son idénticas, se deduce que las frecuencias en cualquier intervalo  $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_1 + 2\pi$  constituyen todas las sinusoides en tiempo discreto existentes. Por tanto el rango de frecuencias para sinusoides en tiempo discreto es finito con duración  $2\pi$ . Por lo general, se elige el rango  $0 \leq \omega \leq 2\pi$  o  $-\pi \leq \omega \leq \pi$  que se conoce como el *rango fundamental*.

<sup>1</sup>Si se usara una función seno el resultado sería básicamente el mismo, salvo por la diferencia de fase de  $180^\circ$  entre la sinusoides de  $x_1(n)$  y  $x_2(n)$



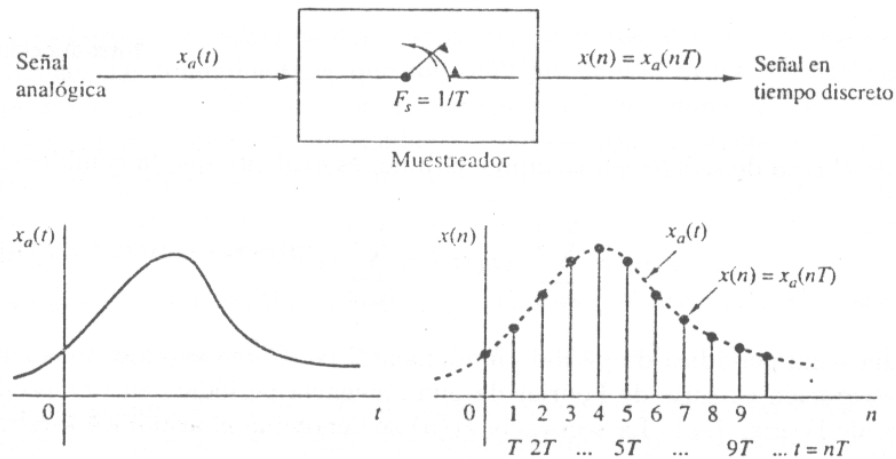


Figura 5.4: Procedimiento de muestreo de una señal analógica

### 5.1.3. Muestreo de señales analógicas

Existen muchas maneras de muestrear una señal. Estudiemos de ellas el *el muestreo periódico* o *uniforme*, que es el usado comúnmente. Se lo describe mediante:

$$x(n) = x_a(nT), \quad -\infty < n < \infty \quad (11)$$

donde  $x(n)$  es la señal en tiempo discreto obtenido tomando muestras de la señal analógica  $x_a(t)$  cada  $T$  segundos. Donde  $T$  se denomina *período de muestreo* o *intervalo de muestreo*, y su recíproco

$$F_s = \frac{1}{T}$$

se llama *velocidad de muestreo* (muestras/seg) o *frecuencia de muestreo* en Hz.

El muestreo periódico establece una relación entre las variables  $t$  y  $n$ , éstas están relacionadas así:

$$t = nT = \frac{n}{F_s} \quad (12)$$

por tanto, existe una relación entre la variable frecuencia  $F$  (o  $\Omega$ ) de las señales analógicas y la variable frecuencia  $f$  (o  $\omega$ ) de las señales discretas. Consideremos la señal analógica dada por

$$x_a(t) = A \cos(2\pi Ft + \theta) \quad (13)$$

que cuando se muestrea periódicamente a una velocidad de  $F_s = 1/T$  muestras por segundo

se obtiene una señal muestreada

$$\begin{aligned} x_a(nT) \equiv x(n) &= A \cos(2\pi nFT + \theta) \\ &= A \cos\left(\frac{2\pi nF}{F_s} + \theta\right) \end{aligned} \quad (14)$$

pero  $\omega = 2\pi f$ , por tanto

$$f = \frac{F}{F_s} \quad (15)$$

o equivalentemente

$$\omega = \Omega T \quad (16)$$

La relación que da  $f$  se llama *frecuencia normalizada* o *relativa* para señales sinusoidales los rangos de  $F$  y  $\Omega$  son

$$\begin{aligned} -\infty < F < \infty \\ -\infty < \Omega < \infty \end{aligned} \quad (17)$$

en cambio, para sinusoides discretas, se tiene

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} < f < \frac{1}{2} \\ -\pi < \omega < \pi \end{aligned} \quad (18)$$

sustituyendo  $f = \frac{F}{F_s}$  y  $\omega = 2\pi f$  en la anterior expresión, vemos que la frecuencia de la senoide en tiempo continuo cuando se muestrea a una velocidad  $F_s = 1/T$  debe estar en el rango

$$-\frac{1}{2T} = -\frac{F_s}{2} \leq F \leq \frac{F_s}{2} = \frac{1}{2T} \quad (19)$$

similarmente

$$-\frac{\pi}{T} = -\pi F_s \leq \Omega \leq \pi F_s = \frac{\pi}{T} \quad (20)$$

Por tanto, la diferencia fundamental entre las señales en tiempo continuo y en tiempo discreto es el rango de valores de las variables de las frecuencias  $F$  y  $f$  (o  $\Omega$  y  $\omega$ )

El muestreo periódico de una señal en tiempo continuo  $x(t)$  supone una correspondencia entre el rango de frecuencia infinito de  $F$  (o  $\Omega$ ) con un rango frecuencia finito de  $f$  (o  $\omega$ ). Como la frecuencia máxima de una señal en tiempo discreto es  $\omega = \pi$  o  $f = \frac{1}{2}$ , los valores máximos de  $F$  y  $\Omega$  para una velocidad de muestreo  $F_s$  son

$$\begin{aligned} F_{max} &= \frac{F_s}{2} = \frac{1}{2T} \\ \Omega_{max} &= \pi F_s = \frac{\pi}{T} \end{aligned} \quad (21)$$

Por tanto, el muestreo introduce ambigüedad: así, la máxima frecuencia de una señal en

tiempo continuo que puede determinarse unívocamente cuando dicha señal se muestra a una velocidad  $F_s = 1/T$  es  $F_{max} = F_s/2$ , o  $\Omega_{max} = \pi F_s$ . Para frecuencias superiores a  $F_s/2$  analicemos el siguiente

**Ejemplo: 1.** Consideremos las dos señales analógicas

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \cos 2\pi(10)t \\x_2(t) &= \cos 2\pi(50)t\end{aligned}\tag{22}$$

las cuales se muestrean a una velocidad de  $F_s = 40$  Hz. Como resultado las señales discretas correspondientes son

$$\begin{aligned}x_1(n) &= \cos 2\pi\left(\frac{10}{40}\right)n = \cos \frac{\pi}{2}n \\x_2(n) &= \cos 2\pi\left(\frac{50}{40}\right)n = \cos \frac{5\pi}{2}n\end{aligned}\tag{23}$$

pero

$$\cos\left(\frac{5\pi n}{2}\right) = \cos\left(2\pi n + \frac{\pi n}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

por tanto,

$$x_2(n) = x_1(n)$$

vemos que las señales son idénticas y, en consecuencia, indistinguibles.

Si damos valores a las muestras correspondientes a  $\cos(\frac{\pi}{2}n)$ , no se puede determinar si proceden de  $x_1(n)$  o  $x_2(n)$ . dado que  $x_2(n)$  produce los mismos valores de  $x_1(n)$  cuando ambas son muestreadas a  $F_s = 40$  Hz, se dice que la frecuencia  $F_2 = 50$  Hz es un *alias* de la frecuencia  $F_1 = 10$  Hz a la velocidad de muestreo de 40 muestras por segundo.

Es importante observar que  $F_2$  no es la única alias de  $F_1$ . De hecho, a una velocidad de muestreo de 40 muestras por segundo la frecuencia  $F_3 = 90$  Hz también es un alias de  $F_1$ , así como la frecuencia  $F_4 = 130$  Hz, etc. Por tanto, todas las sinusoides

$$\cos 2\pi(F_1 + 40k)t, \quad k = 1, 2, 3, 4, \dots$$

muestreadas a 40 muestras por segundo producen valores idénticos, y son alias de  $F_1$ .  $\square$

En general, el muestreo de una señal sinusoidal en tiempo continuo

$$x_a(t) = A \cos(2\pi F_o t + \theta),\tag{24}$$

con una velocidad de muestreo  $F_s = \frac{1}{T}$  produce una señal en tiempo discreto

$$x(n) = A \cos(2\pi f_o n + \theta),\tag{25}$$

donde  $f_o = F_o/F_s$  es la frecuencia relativa de la sinusoides.

Si suponemos que  $-F_s/2 \leq F_o \leq F_s/2$  la frecuencia  $f_o$  de  $x(n)$  se encuentra en el rango  $-\frac{1}{2} \leq f_o \leq \frac{1}{2}$ , que es el rango de frecuencia para señales en tiempo discreto. En este caso, la relación entre  $F_o$  y  $f_o$  es biunívoca, y por tanto, es posible identificar (o reconstruir) la señal analógica  $x_a(t)$  a partir de las muestras  $x(n)$ .

Por otra parte, si las sinusoides

$$x_a(t) = A \cos(2\pi F_k t + \theta) \quad (26)$$

donde

$$F_k = F_0 + kF_s, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (27)$$

se muestrean a una velocidad  $F_s$ , está claro que la frecuencia  $F_k$  se encuentra fuera del rango  $-F_s/2 \leq F \leq F_s/2$ . Luego, la señal muestreada es

$$\begin{aligned} x(n) \equiv x_a(nT) &= A \cos\left(2\pi \frac{F_0 + kF_s}{F_s} n + \theta\right) \\ &= A \cos\left(2\pi n F_0 / F_s + 2\pi k n + \theta\right) \\ &= A \cos(2\pi f_o n + \theta) \end{aligned}$$

que es idéntica a la señal en tiempo discreto dada en la ecuación (25) la cual se obtuvo por muestreo de (24). En consecuencia, a partir de las muestras  $x(n)$  no es posible determinar que señal en el tiempo continuo  $x_a(t)$  representan. De forma equivalente, podemos decir que las frecuencias  $F_k = F_0 + kF_s$ ,  $-\infty < k < \infty$ , ( $k$  entero).

son indistinguibles de la frecuencia  $F_0$  después del muestreo y, por tanto, son alias de  $F_0$

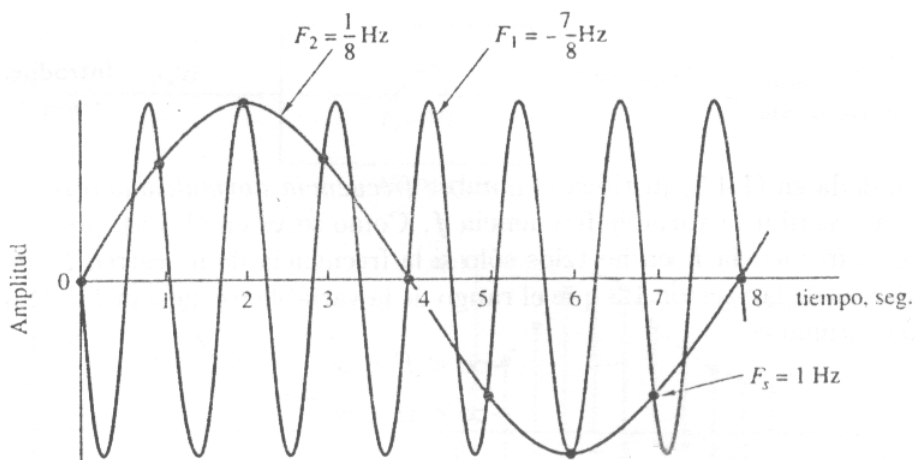


Figura 5.5: Ejemplo de aliasing

La figura (5.5) nos muestra un ejemplo de aliasing: dos sinusoides de frecuencias  $F_0 = \frac{1}{8}$

Hz y  $F_1 = -\frac{7}{8}$  Hz producen muestras idénticas cuando se usa una velocidad de muestreo  $F_s = 1$  Hz. De la relación (27) se tiene que, para  $k = 1$

$$F_0 = F_1 + F_s = \left(-\frac{7}{8} + 1\right) = \frac{1}{8} \text{ Hz}$$

**Ejemplo: 2.** Consideremos la señal analógica

$$x_a(t) = 3 \cos 100\pi t$$

- Determine la velocidad de muestreo mínima para evitar el aliasing
- Si la velocidad se muestrea a  $F_s = 200$  Hz, ¿Cuál es la señal discreta?
- Si la señal se muestrea a una velocidad  $F_s = 75$ , cuál es la señal discreta?
- ¿Cuál es la frecuencia  $0 < F < \frac{F_s}{2}$  de una senoide que produce muestras idénticas a las obtenidas en **c**?

**Solución:**

**a.** La frecuencia de la señal analógica es  $F = 50$  Hz. Por lo tanto, la velocidad de muestreo mínima requerida para evitar el aliasing es:  $F_s = 2F = 100$  Hz.

**b.** Si la señal se muestrea a  $F_s = 200$  Hz, la señal en tiempo discreto es

$$x(n) = 3 \cos \frac{100\pi}{200}n = 3 \cos \frac{\pi}{2}n$$

**c.** Si la señal se muestrea a  $F_s = 75$  Hz, la señal discreta es

$$\begin{aligned} x(n) &= 3 \cos \frac{100\pi}{75}n = 3 \cos \frac{4\pi}{3}n \\ &= 3 \cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{3}\right)n \\ &= 3 \cos \frac{2\pi}{3}n \end{aligned}$$

**d.** Para una velocidad de muestreo  $F_s = 75$  Hz, se tiene

$$F = fF_s = 75f$$

la frecuencia de la senoide del apartado **c** es  $f = \frac{1}{3}$ . Por tanto

$$F = 25 \text{ Hz}$$

luego, la señal sinusoidal

$$\begin{aligned} y_a(t) &= 3 \cos 2\pi Ft \\ &= 3 \cos 50\pi t \end{aligned}$$

muestreada a  $F_s = 75$  muestras/s, produce muestras idénticas. Se ve que  $F = 50$  Hz es un alias de  $F = 25$  Hz para una velocidad de muestreo  $F_s = 75$  Hz.

#### 5.1.4. Condición de frecuencia de muestreo

Si tenemos una señal analógica de cualquier tipo, ¿con qué criterio se debe elegir el período de muestreo  $T$  o lo que es lo mismo, la frecuencia de muestreo  $F_s$ ? Es necesario tener cierta información sobre las características físicas de la señal de interés; en este caso es necesario conocer el contenido frecuencial de la señal. Así, las señales de la voz humana están en el orden de los 3 kHz, las señales de televisión tienen frecuencias que alcanzan los 5 MHz. En general, un determinado tipo de señales tienen un intervalo de frecuencias, amplitudes y fases característicos, las cuales no conocemos antes de muestrearlas. En realidad éste es el propósito de del procesamiento de señales. Una referencia importante, en este caso, lo constituye la *máxima frecuencia* de la señal a analizarse, esto nos permite establecer la *frecuencia de muestreo* para convertir las señales analógicas en señales digitales.

Sea una señal analógica cualquiera representada por la suma de sinusoides de diferentes amplitudes, frecuencias y fases por

$$x_a(t) = \sum_{i=1}^N A_i \cos(2\pi F_i t + \theta_i) \quad (28)$$

donde  $N$  es el número de componentes de frecuencia.<sup>2</sup> Podemos esperar que las frecuencias de la señal a analizarse no exceden una frecuencia máxima conocida  $F_{max}$ , por ejemplo, para las señales de voz  $F_{max} = 3$  kHz. Esta máxima frecuencia puede variar de una persona a otra (voz masculina, voz femenina, niño), para evitar que se sobrepase la  $F_{max}$  se pasa la señal analógica por un filtro que atenúa las componentes de frecuencia de  $x_a(t)$  mayores a  $F_{max}$  la cual se realiza antes del muestreo.

<sup>2</sup>Todas las señales, como las de voz y video se prestan a dicha representación en intervalos de tiempo pequeños. Las amplitudes, fases y frecuencias varían poco de un intervalo de tiempo al siguiente

Sabemos que la frecuencia más alta de la señal analógica que puede reconstruirse sin ambigüedad cuando la señal se muestrea a una velocidad  $F_s = \frac{1}{T}$  es  $\frac{F_s}{2}$ . Cualquier frecuencia por encima de  $\frac{F_s}{2}$  o por debajo de  $-\frac{F_s}{2}$  producirá muestras que son idénticas a las correspondientes a frecuencias dentro del intervalo

$$-\frac{F_s}{2} \leq F \leq \frac{F_s}{2}$$

Para evitar el aliasing, se selecciona una velocidad de muestreo lo suficientemente alta, se debe tomar  $F_s/2$  mayor que  $F_{max}$ . Entonces se tiene

$$F_s > 2F_{max} \quad (29)$$

que constituye el criterio de elección de la frecuencia de muestreo  $F_s$ .

## 5.2

### Antecedentes de la transformada discreta de Fourier

Pongamos atención a la transformación computable numéricamente. Esta se obtiene por muestreo de la transformada discreta de Fourier en el dominio de la frecuencia.

Desarrollamos esta transformada mediante el análisis primario de las secuencias periódicas.

A partir del análisis de Fourier sabemos que una función periódica (o secuencia) siempre puede representarse por una combinación lineal de armónicos relacionados con exponenciales complejos (el cual es una forma de muestreo). Esto nos da la representación de la *Serie Discreta de Fourier* (o DFS en inglés). Ya que el muestreo se realiza en el dominio de la frecuencia, estudiaremos los efectos del muestreo en el dominio del tiempo.

Cuando extendemos la DFS a *secuencias de duración finita*, nos lleva a una nueva transformada, llamada la *Transformada discreta de Fourier* (o DFT en inglés). La DFT evita los problemas mencionados anteriormente y es una transformada numéricamente computable que es aplicable para una implementación en computadora.

Estudiaremos sus propiedades y su uso computacional en detalle. La computación numérica de la DFT para secuencias largas es prohibitivo por el consumo de tiempo. Por tanto han sido desarrollados muchos algoritmos para calcular eficientemente la DFT. Estos se conocen como los algoritmos de la Transformada Rápida de Fourier (o FFT en inglés).

**5.3****Series Discretas de Fourier**

Se define una secuencia periódica  $\bar{x}(n)$  a la secuencia que satisface

$$\bar{x}(n) = \bar{x}(n + kN), \forall n, k \quad (30)$$

donde  $N$  es el período fundamental de la secuencia. A partir del análisis de Fourier sabemos que las funciones periódicas pueden sintetizarse como una combinación lineal de exponenciales complejas cuyas frecuencias son múltiplos (o armónicos) de la frecuencia fundamental (el cual en nuestro caso es  $2\pi/N$ ).

A partir de la periodicidad en el dominio de la frecuencia de la transformada discreta de Fourier en el tiempo, concluimos que existen un número finito de armónicos; las frecuencias son  $\{\frac{2\pi}{N}k, k = 0, 1, \dots, N-1\}$ . Por tanto una secuencia periódica  $\bar{x}(n)$  se puede expresar como:

$$\bar{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \bar{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \quad (31)$$

donde  $\bar{X}(k), k = 0, \pm 1, \dots$ , son llamados los coeficientes de la serie de Fourier, los cuales están dados por

$$\bar{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \quad (32)$$

note que  $\bar{X}(k)$  es en sí misma una secuencia periódica (compleja) con período fundamental igual a  $N$ , esto es

$$\bar{X}(k + N) = \bar{X}(k) \quad (33)$$

El par de ecuaciones (31) y (32) tomados juntos se llama la representación en series discretas de Fourier de secuencias periódicas. Si hacemos  $W_N \triangleq e^{-j\frac{2\pi}{N}}$  para denotar el término de la exponencial compleja, expresamos (31) y (32) como

$$\bar{X}(k) \triangleq DFS[\bar{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{x}(n) W_N^{nk} : \text{análisis o una ecuación DFS} \quad (34)$$

$$\bar{x}(n) \triangleq IDFS[\bar{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \bar{X}(k) W_N^{-nk} : \text{Síntesis o inversa de DFS} \quad (35)$$

**Ejemplo: 3.** Hallar la representación DFS de la secuencia periódica dada por:

$$\bar{x}(n) = \{\dots, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Solución. El período fundamental de la anterior secuencia es  $N=4$ .



Por tanto  $W_4 = e^{-j\frac{2\pi}{4}} = -j$ . Ahora

$$\bar{X}(k) = \sum_{n=0}^3 \bar{x}(n)W_4^{nk}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

luego

$$\bar{X}(0) = \sum_{n=0}^3 \bar{x}(n)W_4^{0n} = \sum_{n=0}^3 \bar{x}(n) = \bar{x}(0) + \bar{x}(1) + \bar{x}(2) + \bar{x}(3) = 6$$

similarmente

$$\begin{aligned} \bar{X}(1) &= \sum_{n=0}^3 \bar{x}(n)W_4^n = \sum_{n=0}^3 \bar{x}(n)(-j)^n \\ &= \bar{x}(0)(-j)^0 + \bar{x}(1)(-j)^1 + \bar{x}(2)(-j)^2 + \bar{x}(3)(-j)^3 \\ &= 0 + (-j) - 2 + 3j = -2 + 2j \\ \bar{X}(2) &= \sum_{n=0}^3 \bar{x}(n)W_4^{2n} = \sum_{n=0}^3 \bar{x}(n)(-j)^{2n} = -2 \\ \bar{X}(3) &= \sum_{n=0}^3 \bar{x}(n)W_4^{3n} = \sum_{n=0}^3 \bar{x}(n)(-j)^{3n} = -2 - 2j \end{aligned}$$

### 5.3.1. Implementación en MATLAB.

Una cuidadosa mirada a la ecuación (34) revela que la DFS es una representación numéricamente computable.

Para calcular cada muestra  $\bar{X}(k)$ , podemos implementar la sumación como un bucle **for..end**. Para calcular todos los coeficientes DFS se requiere de otro bucle **for...end**. Esto resulta en dos bucles **for...end** anidados. Esto claramente es ineficiente en MATLAB.

Una eficiente implementación en MATLAB resulta ser el uso de una multiplicación matriz-vector para cada una de las relaciones en las ecuaciones (34) y (35).

Sean  $\bar{x}$  y  $\bar{X}$  los vectores columna correspondientes a los períodos primarios de las secuencias  $x(n)$  y  $X(k)$  respectivamente. Entonces (34) y (35) están dadas por

$$\begin{aligned} \bar{X} &= W_N \bar{x} \\ \bar{x} &= \frac{1}{N} W_N^* \bar{X} \end{aligned} \tag{36}$$

Donde la matriz  $W_N$  está dada por

$$W_N \triangleq [W_N^{kn}]_{0 \leq k, n \leq N-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N & \dots & W_N^{(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \quad (37)$$

la cual es una matriz  $k \times n$ .

La matriz  $W_N$  es una matriz cuadrada y se denomina matriz DFS.

## 5.4

### La Transformada Discreta de Fourier: DFT

Las series discretas de Fourier nos proveen un mecanismo para computar numéricamente la transformada discreta en el tiempo de Fourier. También debemos estar alertados de un potencial problema de aliasing en el dominio tiempo. Las matemáticas muestran que el muestreo de una transformada discreta en el tiempo de Fourier resulta en una secuencia periódica  $\bar{x}(n)$ . Pero en la práctica la mayoría de las señales no son periódicas. Son de carácter finito en duración. ¿Cómo podemos desarrollar una representación computable de Fourier para tales señales?. Teóricamente podemos encarar este problema definiendo una señal periódica cuya forma primaria es tal que de la señal de duración finita y entonces usando la DFS sobre una señal periódica. Prácticamente, definimos una nueva transformada llamada la Transformada Discreta de Fourier (DFT en inglés), el cual es el período primario de la DFS. Esta DFT es la última transformada de Fourier computable para una secuencia de duración finita arbitraria.

La transformada discreta de Fourier de una secuencia de N-puntos está dada por

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (38)$$

Note que la DFT  $X(k)$  es también una secuencia de N-puntos, esto es, no está definida fuera de  $0 \leq k \leq N-1$ .

La transformada inversa de Fourier de N-puntos está dada por

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (39)$$

Nuevamente,  $x(n)$  no está definida fuera de  $0 \leq k \leq N-1$ .

### 5.4.1. Implementación en MATLAB

Está claro a partir de las discusiones al principio de esta sección que la DFS es prácticamente equivalente a la DFT cuando  $0 \leq n \leq N - 1$ . De todos modos la implementación de la DFT puede realizarse de un modo similar. Si  $x(n)$  y  $X(k)$  son arreglos de vectores columna  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{X}$  respectivamente, entonces de [5.24] y [5.25] tenemos

$$X = W_N x \quad (40)$$

$$x = \frac{1}{N} W_N^* X \quad (41)$$

donde  $W_N$  es la matriz definida en (37) y llamada ahora una **matriz DFT**. Por tanto, las funciones `dfs` e `idfs` escritas en MATLAB pueden ser renombradas como las funciones `dft` e `idft` para implementar los cálculos de la transformada discreta de Fourier.

Se usan estos programas en el presente trabajo en la aplicación de la DFT al análisis de voz, para los cuales se han escrito programas apropiados con interfase de usuario (GUI) con MATLAB.

**Ejemplo: 4.** Sea  $x(n)$  una secuencia de 4-puntos

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Calcular la transformada de Fourier discreta en tiempo discreto  $X(e^{jw})$  y graficar su magnitud.
- Calcular la DFT de los 4-puntos de  $x(n)$ .

**Solución.**

- La transformada discreta de Fourier en tiempo discreto está dada por

$$\begin{aligned} X(e^{jw}) &= \sum_0^3 x(n)e^{-jwn} \\ &= 1 + e^{-jw} + e^{-j2w} + e^{-j3w} \\ &= \frac{1 - e^{-j4w}}{1 - e^{-jw}} = \frac{\text{sen}(2w)}{\text{sen}(w/2)} e^{-j\frac{3w}{2}} \end{aligned}$$

De aquí

$$\left| X(e^{jw}) \right| = \left| \frac{\text{sen}(2w)}{\text{sen}(w/2)} \right|$$

y

$$\angle X(e^{jw}) = \begin{cases} -\frac{3w}{2}, & \text{cuando } \frac{\text{sen}(2w)}{\text{sen}(w/2)} \geq 0 \\ -\frac{3w}{2} \pm \pi, & \text{cuando } \frac{\text{sen}(2w)}{\text{sen}(w/2)} < 0 \end{cases}$$

Las gráficas correspondientes se muestran en la figura (5.6)

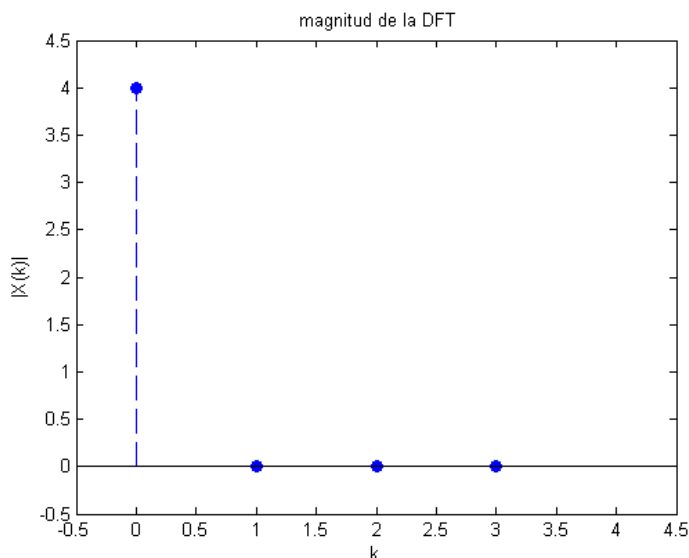


Figura 5.6:

b. Denotemos la DFT de 4-puntos por  $X_4(k)$ . Entonces

$$X_4(k) = \sum_{n=0}^3 x(n)W_4^{nk}; \quad k = 0, 1, 2, 3; \quad W_4 = e^{-j\frac{2\pi}{4}} = -j$$

Estos cálculos son similares a los del ejemplo 1, de la sección 3.

Usemos el programa llamado para\_dft1 escrito en MATLAB para calcular esta DFT.

CALCULO DE LA DFT de la secuencia xn= [1,1,1,1] DFT de xn

ans =

4.0000

-0.0000 + 0.0000i

0 + 0.0000i

0.0000 + 0.0000i

Magnitud de X

ans =

4.0000  
0.0000  
0.0000  
0.0000

Aquí

$$X_4(k) = \{4, 0, 0, 0\}$$

Es el vector correspondiente a la transformada discreta de Fourier.

A continuación se muestran la gráfica correspondiente a la DFT del ejemplo anterior

De ésta figura podemos observar que  $X_4$  da correctamente 4 muestras de  $X(e^{j\omega})$ , pero tiene solamente una muestra no cero. ¿Esto sorprende?. Observando los cuatro puntos de  $x(n)$  que son todos unos, uno puede concluir que su período es

$$\bar{x}(n) = 1, \forall n$$

el cual es una suma señal constante (o una DC). Esto está predicho por la DFT  $X_4(k)$ , el cual tiene una muestra no cero en  $k = 0$  (o  $\omega = 0$ ) y no tiene valores en otras frecuencias.

□

## 5.5

### Análisis espectral de señales discretas mediante DFT

El análisis espectral es el proceso de identificar las componentes de las frecuencias en los datos. Para datos discretos, la base computacional del análisis espectral es la *Transformada Discreta de Fourier (DFT en inglés)*. La DFT transforma los datos basados en el tiempo o el espacio en datos basados en frecuencia.

La DFT de un vector  $x$  de longitud  $n$  es otro vector  $y$  de longitud  $n$ :

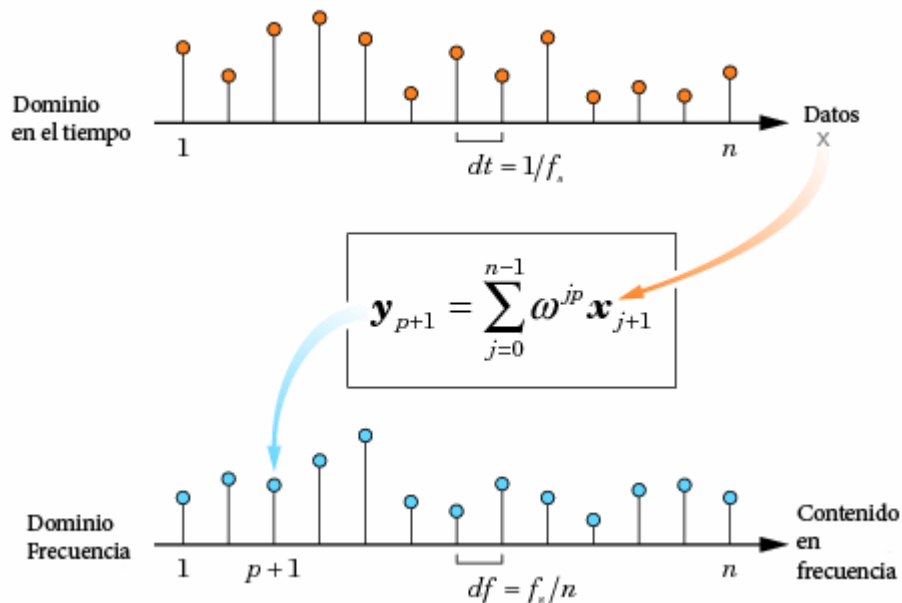
$$y_{p+1} = \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{jp} x_{j+1} \quad (42)$$

donde  $\omega$  es la  $n$ -ésima raíz compleja de la unidad:

$$\omega = e^{-\frac{2\pi i}{n}} \quad (43)$$

usamos la notación  $i$  para la unidad imaginaria, y los índices  $p$  y  $j$  que van desde 0 hasta  $n-1$ . Los índices  $p+1$  y  $j+1$  van desde 1 a  $n$ , y corresponden a los rangos asociados con los vectores en MATLAB.

Los datos en el vector  $x$  se asumen estar separados por un intervalo constante en el tiempo,  $dt = \frac{1}{f_s}$  o donde  $f_s$  es la *frecuencia de muestreo*. La DFT  $y$  es un valor complejo.



El primer elemento de  $y$  correspondiente a la frecuencia cero, es la suma de los datos en  $x$ . Esta componente DC es a veces removida de  $y$  para que no oscurezca el contenido de las frecuencias positivas de los datos.

### 5.5.1. Análisis frecuencial de funciones sinusoidales

El análisis frecuencial mediante DFT permite conocer las frecuencias de la señal analizada.

Se ha diseñado un programa en MATLAB, que mediante un GUI (Graphical User Interfaz) permite realizar dicho análisis. Las características de este programa son:

1. La señal a analizarse es  $x(n) = \text{sen}(2\pi f_1 n) + \text{sen}(2\pi f_2 n)$
2. Las frecuencias  $f_1$  y  $f_2$  se introducen en el programa y están dados en Hz.
3. El dominio de la señal discreta esta dada por un vector de n:  $[0:0.001:0.25]$
4. Una vez ejecutado el programa, éste nos muestra en la ventana superior la señal  $x(n)$

que se analiza.

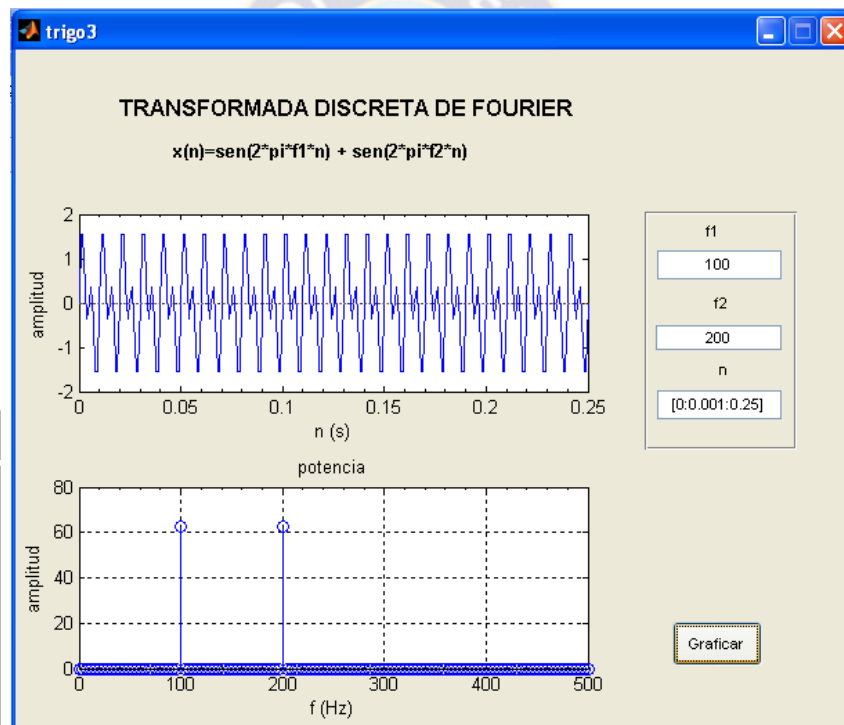
5. En la ventana inferior se muestra el resultado del análisis frecuencial.

Es evidente que de la gráfica de la señal  $x(n)$  en tiempo discreto no es posible determinar sus frecuencias. Como se observa, las frecuencias obtenidas mediante DFT son las que tiene la señal analizada, las cuales se introdujeron como datos.

Estos resultados afirman el hecho de que la aplicación de la DFT al análisis frecuencial de una señal  $x(n)$  proporciona las frecuencias de dicha señal.

Algunos valores para los cuales se obtienen interesantes valores son:

$f_1$	$f_2$
40	20
40	60
100	60
100	100
100	200
180	200



Como se observa, las frecuencias obtenidas mediante DFT son las que tiene la señal analizada. Las cuales se introdujeron como datos.

Estos resultados afirman el hecho de que la aplicación de la DFT al análisis frecuencial de una señal  $x(n)$  proporciona las frecuencias de dicha señal.

### 5.5.2. Adquisición de señales de voz

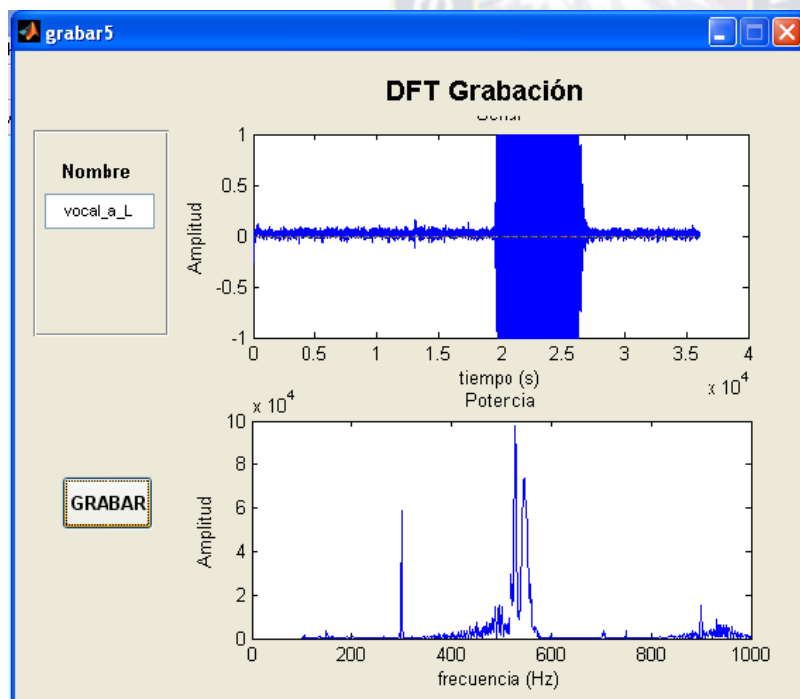
Para la adquisición de señales de voz, además de señales de una nota de guitarra y armónica, se ha diseñado un GUI que realiza las siguientes funciones:

1. Se introduce un nombre de archivo para la señal de voz.
2. Se inicia la grabación oprimiendo el botón:
3. El programa graba la señal durante un tiempo de 3 segundos.
4. El programa internamente guarda el archivo, muestreando la señal.
5. El programa reproduce en audio, la señal grabada.
6. La señal grabada se muestra en la primera ventana, en tiempo discreto  $n: x(n)$
7. El programa, internamente, procesa la señal  $x(n)$  y calcula la potencia de la DFT.
8. El análisis frecuencial de la señal  $x(n)$  se muestra en la segunda ventana.

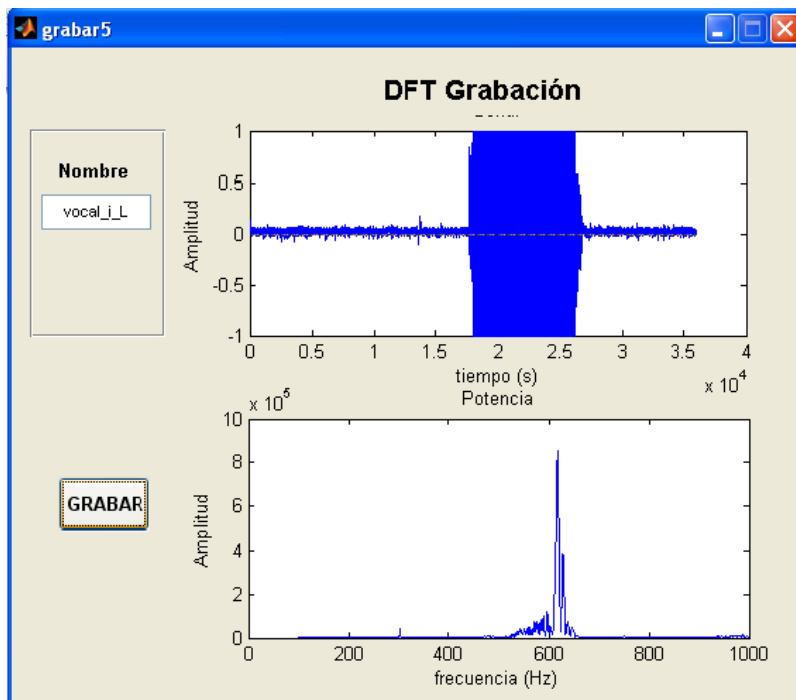
Durante la exposición del trabajo se hará una demostración de este programa.

A continuación se muestran, a modo de ejemplos, algunas señales grabadas.

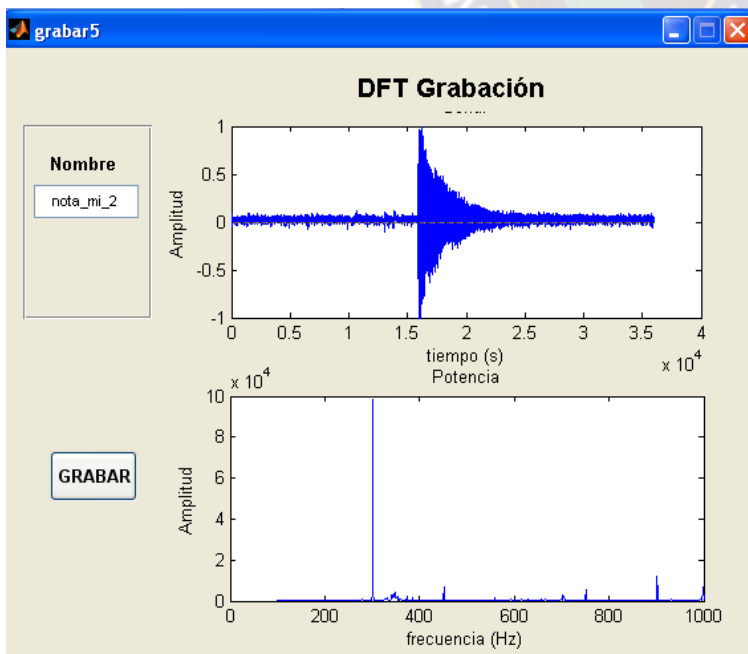
Los gráficos siguientes muestran el análisis frecuencial de las vocales a, i.

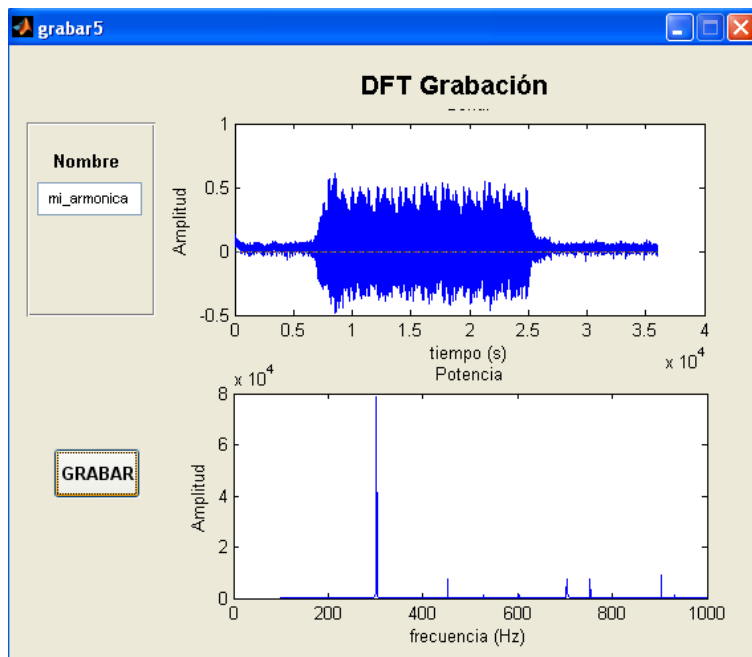




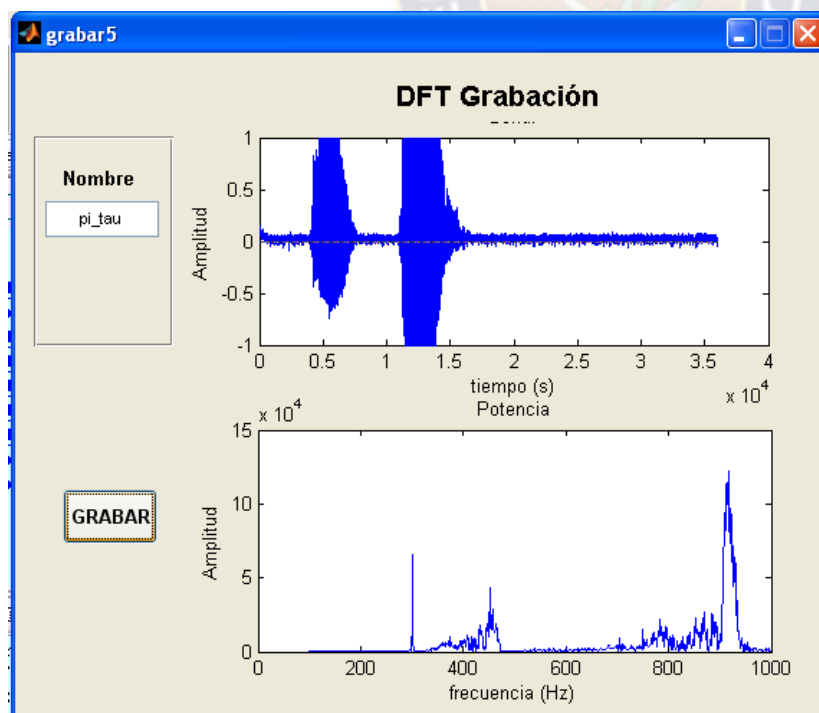


Los siguientes gráficos muestran el análisis aplicado a la nota mi2 de la guitarra y la nota mi2 de una armónica.





El siguiente gráfico muestra el análisis frecuencial de las palabras: pi tau.

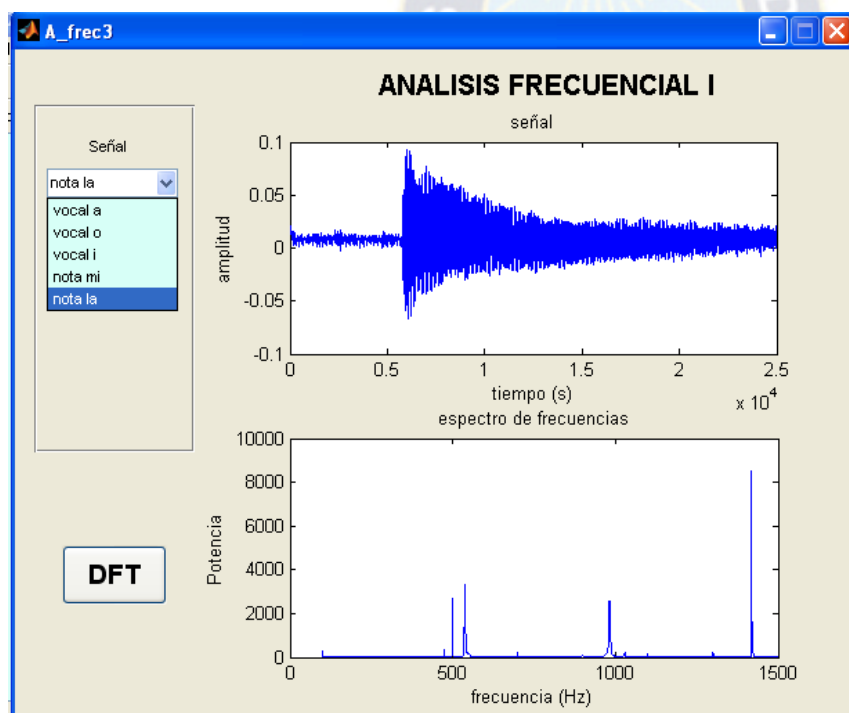


### 5.5.3. Análisis frecuencial de señales de voz y notas de guitarra

Para realizar este análisis se ha diseñado un GUI en MATLAB, como se ve en la figura siguiente.

Las características de este programa son las siguientes:

1. En la ventana: Señal, se tiene un menú desplegable, el cual permite elegir entre varias señales pregrabadas para su análisis.
2. El programa se ejecuta oprimiendo el botón **DFT**,
3. El programa recupera el archivo elegido, y muestra la señal en la primera ventana,
4. El programa calcula la DFT correspondiente.
5. El espectro de frecuencias de la señal se muestra en la segunda ventana.



El propósito de este programa, es el de mostrar señales pregrabadas, para realizar un análisis comparativo de los espectros de frecuencias.

Resultados:

1. Para una misma persona, las vocales tienen diferentes frecuencias naturales,
2. Para diferentes personas, las vocales tienen diferentes frecuencias naturales,

La explicación más sencilla a estos resultados se debe a que fisiológicamente, cada persona

tiene su aparato fonador (cuerdas vocales, forma de la cavidad bucal, etc.) propio; como si fueran diferentes, por ejemplo, guitarras,

3. En el caso de la guitarra, por lo que se sabe del estudio de ondas transversales, cada cuerda tiene una frecuencia fundamental  $F_0$  y varias frecuencias armónicas. Además como producto del fenómeno de la resonancia, aparecen otras frecuencias en la señal propiamente de una cuerda. Este hecho motivó a que el guitarrista español Narciso Yepes introdujera la guitarra de 10 cuerdas. Debido a esto se produce una mayor riqueza de armónicos en el sonido de la guitarra.

### Resumen del análisis frecuencial mediante DFT con MATLAB

De lo expuesto en esta sección, se puede concluir que la transformada discreta de Fourier se puede aplicar al análisis frecuencial de la voz, como también de otros tipos de señales de audio.

La voz humana es como una especie de huella dactilar, característico de cada persona, y aprovechando ésta propiedad se han diseñado sistemas de:

1. Reconocimiento de voz, aplicables en seguridad para el acceso a edificios,
2. Aprendizaje de idiomas como Rosetta Stone,
3. Transcripción de textos mediante dictado,
4. En investigación criminalística, para el examen de grabaciones de voz.